Treball de Recerca

MÚSICA I MATEMÀTIQUES

2n de Batxillerat, A
IES La Vall del Tenes

Santa Eulàlia de Ronçana, 13 de desembre de 2010

Montse Cruz , Dani Arias, Dick Them
Anna Gonzalez, Sergio Garcia, Mateo Alzobre
Esperanza Velasco, Juan José Moya.

Gracias por haber puesto ilusión en este trabajo.
Como espejo, utilizaré vuestros ojos, que son mi mejor maestro.

ÍNDEX

ÍNDEX DE IL·LUSTRACIONS

0. Introducció

"La curiositat: gran virtud
(pero la curiosidad mató al gato)"
guió de NCIS

Curiositat:

(Del llat. *curiosĭtas, -ātis*).

1. f. Desig de saber o esbrinar algú el que no li concerneix.
2. f. Vici que porta a algú a inquirir el que no hauria d'importar-li.

Matemàtiques:

1. f. Ciència deductiva que estudia les propietats dels ens abstractes, com a nombres, figures geomètriques o símbols, i les seves relacions.

Música:

(Del llat. *Musĭca,* i aquest del gr. μουσική).

1. f. Art de combinar els sons de la veu humana o dels instruments, o d'uns i altres al mateix temps, de manera que produeixin delit, commovent la sensibilitat, ja sigui alegre, ja tristament.

La curiositat impulsa aquest treball amb l'objectiu de connectar l'estima que tinc vers la música amb el respecte que em fan les matemàtiques, el plaer amb la foscor. La curiositat m'ha portat de la mà quan m'endinsava en aquests mons màgics i abstractes i la culpable de que ara mateix un parell d'ulls estiguin seguint aquestes línies.

La meva avia deia que quan et pica la curiositat un follet que viu a la panxa es desperta i no pot tornar a dormir fins que esbrines el que et va picar. El meu follet es va despertar quan les meves oïdes van sentir l'afirmació ''la música és plena de matemàtiques''. A la meva medul·la tinc tatuada aquesta frase i dubto molt que cap làser la pugui esborrar.

Durant unes setmanes el meu cervell anava en cinquena i sense frens plantejant-se diverses qüestions que necessitaven una resposta; si de veritat havia un lligam estret entre la música i les matemàtiques, qui va ser el primer que havia fet recerca sobre el tema? On trobem les matemàtiques? De veritat la música és plena de matemàtiques, o només estan una mica relacionades? I en el cas que estiguessin relacionades, és una unió que sorgeix de la casualitat o són inseparables?

Semblava que eren inseparables, però el meu follet no tenia prou amb això i va anar més enllà: si les matemàtiques i la música són germanes bessones, ungla i carn, a la història de la música trobarem sempre aquesta connexió o només trobarem la seva presència en algunes etapes? Si els compositors fan música, vol dir que també fan matemàtiques, però aquesta segona part la fan de manera conscient?

A la última part d'aquest treball m'agradaria posar-me a la pell d'un compositor, comprovar si a la meva peça hi ha matemàtiques, si allò que he vist a les composicions d'altres estan al meu tema.

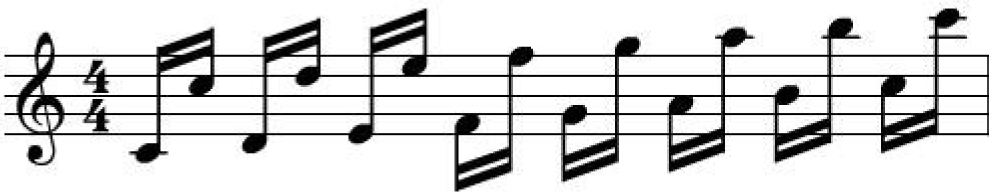
Tinc tot l'estiu per rumiar sobre el tema aconseguint un treball diferent i personal amb l'objectiu de veure les matemàtiques i la música amb una perspectiva diferent i poder encomanar-la a matemàtics, a músics i tot aquell que diu ''per fer aquest treball has d'estar boig'', per poder fer la meva primera composició i recordar sempre quin va ser el motiu pel qual va ser composada. Només així el follet que viu a la panxa podrà dormir una llarga temporada.

1. Definicions

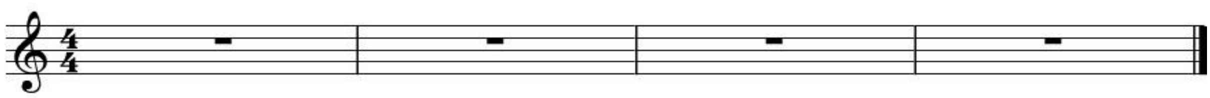
Amb l'objectiu de que tothom pugui gaudir d'aquest treball sense ser un expert en música, a continuació es presenten un seguit de definicions per ajudar al lector a entendre bé el contingut.

- TO: propietat dels sons que els caracteritza per ser aguts o greus en funció de la seva freqüència.
- NOTA: so determinat per una vibració de freqüència constant.
- CLAU DE SOL, FA o Do: Símbol que se situa al principi d'una partitura amb funció d'associar les notes musicals amb les línies del pentagrama.

- ACORD: grup de tres o més notes que sonen simultàniament.
- PENTAGRAMA: Lloc on s'escriuen les notes i els diferents signes musicals. Està composat de 5 línies horitzontals i equidistants que s'enumeren de baix a dalt i de quatre espais.
- OCTAVA: Progressió de 12 notes que es repeteixen.



- ALTERACIONS: Signe que acompanya a una nota augmentant o disminuint el seu so: #, ♭
- COMPAS: Entitat mètrica musical composada per varies unitats de temps. Aquesta divisió es representa gràficament amb línies verticals perpendiculars a les del pentagrama que reben el nom de línies divisories o barres de compas.



- ESCALA: Succesió de sons ordenats de greu a agut, segons la seva freqüència.
- TONALITAT: grup de sons que formen un sistema i estan regits per una nota

principal que rep el nom de tònica.

2. Teories sobre l'Origen de la Música

"Des que l'home existeix hi ha hagut música; però també els animals, els àtoms i les estrelles fan música"

K. Stockhausen

Coneixem l'evolució de la humanitat gràcies als testimonis, documents o escrits que s'han conservats i que arqueòlegs i historiadors han estudiat. Tot i que sabem que l'escriptura va néixer, aproximadament, l'any 4000 a.C. l'ésser humà habita a la Terra fa més d'un milió d'anys; aquest període del qual no tenim cap document escrit rep el nom de prehistòria i només coneixem coses gràcies a les restes humanes, als estris o a algunes manifestacions artístiques. Amb tot aquest conjunt de coneixements, ara sabem com van viure o què feien els nostres avantpassats.

Desgraciadament, en música, serà pràcticament impossible que algun dia arribem a saber la data exacta, l'any o l'època quan es va posar de manifest. L'home primitiu no ens ha deixat cap mostra, amb l'excepció d'algun instrument musical molt rudimentari i algun estri que potser es va utilitzar com a tal. L'única cosa que sabem segura és que les primeres mostres de música van ser mitjançant l'instrument de la veu i la percussió corporal.

L'ésser humà paleolític era nòmada, i per aconseguir aliment havia de seguir a ramats d'animals. Per acostar-se a aquests i caçar-los amb una mica de facilitat feia servir l'enginy i utilitzava les seves pròpies estratègies; es disfressava, es pintava i imitava amb la seva veu i amb instruments els seus sons. Aquesta necessària imitació de sons que havia de fer l'home al paleolític per caçar, podria ser la primera manifestació musical de l'ésser humà.

Aquesta primera música era molt rica en ritmes i timbres i possiblement, pobra en melodia. Posteriorment, amb l'home neolític, la funció de la música va canviar amb l'evolució dels homes. Ara ens trobem davant d'un home sedentari, que no persegueix els ramats si no un home agricultor, ramader, que s'instal·la en un lloc fixe i viu allà durant un període llarg de temps. Els éssers primitius van pensar que les inclemències meteorològiques, les bones collites o la fertilitat depenien de forces superiors que no podien controlar (avantpassats, déus...) i per aconseguir els seus desitjos oferien cants i danses a aquestes forces superiors. En aquest moment neix la religió i el culte als déus.

Si després d'aquests rituals, hi havia una bona collita, es celebrava un acte amb música i dansa, senyal del seu agraïment. Aquest és el moment on la música es divideix en dos grans corrents que encara avui es conserven: la música religiosa, i la música profana.

Segons l'ús que feien de la música, aquesta adquiria unes característiques o unes altres: si vivien un moment alegre, com ara, la caça d'un animal, el ritme era ràpid i si es tractava d'un moment trist, com la mort d'un membre de la tribu, el ritme seria lent i pausat. Si ens fixem, és l'ús que nosaltres donem a la música actualment.

Es creu que el seu repertori no era molt extens i que per un mateix esdeveniment utilitzaven un patró al que li canviaven el ritme, la intensitat o el timbre, de manera que feien diferents versions d'una mateixa peça. Aquest patró, comú a totes les obres musicals del mateix caràcter, rep el nom de mode.

Tot això és totalment cert i tots els historiadors coincideixen, però trobem algunes teories científiques que s'ajusten millor a les nostres inquietuds:
Jean Jacques Rousseau (1712 - 1778), Johann Gottfried Herder (1744-1803) o Herbert Spencer (1820 - 1903), entre d'altres, van defensar que la música va surgir paral·lelament al llenguatge, quan es van prolongar i elevar els sons del llenguatge, i que això sorgeix de la necessitat d'expressar un sentiment. També, qui va donar explicació a l'evolució de les espècies, Charles Darwin (1809 - 1882), es va interessar sobre aquest tema i va arribar a la conclusió de que l'origen de la música estava relacionat amb l'amor, la passió, la sexualitat i la reproducció. L'economista i sociòleg Karl Bücher també va aportar la seva opinió al tema dient que en totes les activitats quotidianes i en tots el elements de la natura trobem música.

Actualment si preguntem a compositors, cantants, músics, publicistes o productors tots estaran d'acord amb que la música sorgeix d'una inspiració, de les ganes de transmetre alguna cosa; igual que estaran d'acord amb que sorgeix dels ordinadors: avui dia la major part de la música que escoltem està feta amb ordinadors i màquines electròniques, el que fa que, per exemple, la veu d'una cantant sigui perfecte i perquè una cançó tingui sons peculiars que no han estat fets amb instruments.

3. Pitàgores: Música i Matemàtiques

"Hay mucha más vida en la música de las matemáticas"

Gabriel Marcel

Del matemàtic i filòsof grec del segle V – VI a.C, Pitàgores de Samos, coneixem ben poc de la seva vida, ja que no es conserven documents que en parlin. Tot i això, són moltes les aportacions científiques que va fer en el seu moment i molts coneixements que avui dia utilitzem: el teorema matemàtic de triangles rectangles, l'afirmació de que tot l'Univers estava basat en funcions matemàtiques, va introduir les mesures, va estudiar al llarg de la seva vida la geometria i va creure en la idea de que la Terra era una esfera perfecta.

En totes aquestes teories, experiments, coneixements... també va fer aportacions l'escola pitagòrica, una mena de secta secreta formada per filòsofs, matemàtics, astrònoms i músics que el símbol que els representava era una estrella de 5 puntes anomenada *pentagrama*, que significava *salut*.

Aquest conjunt de filòsofs entenen la música i la qualifiquen d'un art superior, capaç de transmetre tot tipus de sentiments a la persona que l'escolta; per aquest motiu, van intentar aplicar totes les funcions matemàtiques que van estudiar a la música.

3.1. El Monocordi

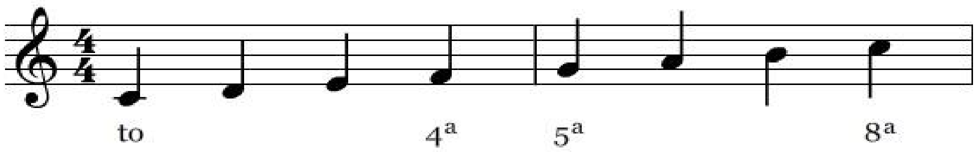
Pitàgores va construir un monocordi, instrument d'una sola corda que acompanyava la melodia al unísón. L'objectiu de Pitàgores era investigar les relacions matemàtiques de la longitud d'una corda quan feia sonar diferents intervals d'aquesta mateixa nota. La corda es tensava i el pont lliscava per sobre de la corda, de manera que el podia fixar allà on ell volgués, fent-la més llarga o més curta.

Resultats que va obtenir:

1. Al dividir la corda per la meitat, s'obté un interval d'una octava respecte a la nota original quan aquesta es deixava a l'aire i es feia sonar, ja que la

freqüència de la nota es duplicava **2/1**.

2. Al dividir aquesta meitat de corda un altre cop per la seva meitat, s'obté una nota de dues octaves més aguda que la nota original. La seva freqüència és multiplica per quatre, és a dir: **4/1**.
3. Al moure el pont a la posició 9/12; 3/4 i fa sonar la corda, el so que es produeix és el de la **quarta**.
4. Al moure el pont a la posició 8/12; 2/3 fa sonar la corda, el so que es produeix és el de la **quinta**.
5. Al moure el pont a la posició 6/12; ½ fa sonar la corda, el so que es produeix és el d'una **octava**.



Il·lustració 1: To - Quarta - Quinta - Octava

Per veure-ho de manera gràfica, si anem dient les notes de la escala que tenim a dalt dibuixada, la quarta nota pertany al Fa, la quinta al Sol i l'octava al Do. Quan a música diem ''pujar una octava'' vol dir que s'ha de tocar un to per sobre del to que està escrit a la partitura, o el que és el mateix, pujar una octava tota la peça. Prenem com a exemple el tema principal de la pel·lícula italiana *La Vida és Bella* que va rebre l'Òscar a millor música original.

Il·lustració 2: La vida és bella - una octava

D'aquesta manera sorgeixen els **intervals**, la diferència d'altura entre dues notes musicals.

El monocordi va donar encara per descobrir més coses:

1. El nombre de vibracions d'una corda és inversament proporcional a la seva llargada. És a dir, que una corda llarga produeix menys vibració que una

corda curta. En conclusió, com més llarga sigui la corda més greu serà la nota, i com més curta, més aguda. Un exemple clar el tenim amb el violí i el contrabaix; les notes del violí son agudes (també té de greus, però), en canvi, el contrabaix no té notes agudes, totes son greus, ja que les cordes són molt més llargues que les del violí.

Continuant amb els descobriments de Pitàgores en música, hem de destacar la relació que estableix entre la música i l'Univers.

3.2. La Música de les Esferes

La filosofia dels pitagòrics era que tot, absolutament tot, tenia una relació matemàtica, i que els números eren l'eina amb la qual es podia donar sentit a allò desconegut.
Desprès d'haver presentat els intervals al seus companys, aquests van pensar que les distancies entre planeta i planeta tenien les mateixes proporcions que hi havia en els sons de l'escala musical: cada planeta corresponia a una esfera que al fer el seu moviment produïa un so similar al que fa un projectil en l'aire. Van establir la relació de que el so de les esferes més llunyanes era agut, mentre que les més properes, greu. Tot aquest conjunt de sons formen la **música de les esferes**.

Pensadors com Ptolomeu, Ciceró i Quintilianus van recolzar la teoria de la música de les esferes. Altres, com Aristòtil o Plató van qualificar la teoria d'atractiva i original, però totalment falsa, entre d'altres raons, perquè es va basar en les experiències de Pitàgores i el monocordi.
L'astrònom i matemàtic alemany Johanes Klepler, al segle VI d.C. va estudiar durant bona part de la seva vida les òrbites dels planetes fins que va establir una relació entre el moviment del cossos i la teoria de les esferes. Al seu llibre *Harmonices Mundi* va concloure que les velocitats angulars de cada planeta feien uns sons. Va escriure una melodia per cada esfera i va afirmar que al combinar-se produïen 4 acords; un d'ells pertany al so que es va produir quan la l'Univers es va crear, i un altre serà el que posi punt i final a tot.

3.2.1. Comprovació matemàtica de la teoria de les esferes

Com ja s'ha explicat en l'apartat anterior, Pitàgores i els seus companys van creure que hi havia una estreta relació matemàtica entre els radis circulars de les diferents òrbites planetàries del Sistema Solar i els intervals que aquest va observar en el monocordi, és més, van pensar que les proporcions del monocordi eren exactament les mateixes que els radis dels planetes, de manera que l'Univers es convertia en un espai harmoniós, màgic i totalment musical.

Podem creure'ns al peu de la lletra el que deien els pitagòrics o bé experimentar per saber fins a que punt era cert el que deien. Per això, vaig fer dues taules de càlculs. A la primera, vaig dividir els radis circulars de les òrbites de cada planeta del Sistema Solar entre el radi de la Terra; si els resultats coincideixen amb les relacions harmòniques de l'escala musical, la teoria serà certa.

Després de fer aquests càlculs trec la següent conclusió:

Conclusió: la teoria pitagòrica la música de les esferes és falsa, ja que la única relació que trobem és la de la quinta, i és casualitat.

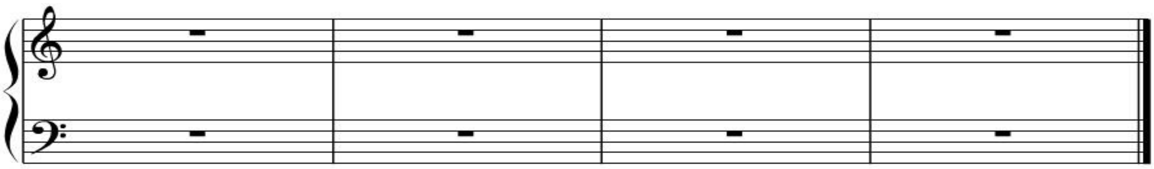
4. Introducció a la Notació i al Llenguatge Musical

"Aprendre música llegint teoria musical és com fer l'amor per correu."

Luciano Pavarotti

Abans de continuar presentant els diversos temes que formen part d'aquest treball, m'agradaria fer una breu introducció al llenguatge i la lectura musical, que són la base de tota la música.

4.1. El Pentagrama



Il·lustració 3: Pentagrama en Clau de Sol i de Fa

El pentagrama és el conjunt de cinc linies paral·leles i quatre espais que els músics utilitzen per escriure els signes musicals. Actualment, fem servir el model de pentagrama que trobem al dibuix de dalt; potser trobem peces sense la part de baix, el pentagrama en clau de Fa. El pentagrama ens dóna la següent informació:

1. Les línies que formen part del pentagrama es numeren de baix a dalt, tenint a la línia inferior de tot la nota Re en la clau de Sol i el Sol en el pentagrama de clau de Fa.
2. Les notes que s'escriuen poden estar localitzades entre dues línies, és a dir, en un espai o bé, just sobre de la línia. Aquesta posició farà que la nota tingui un nom o un altre i que ens indiqui l'altura de la nota, que és la percepció de la freqüència d'una ona sonora.
3. Quan hem d'escriure notes que no es localitzen en aquestes 5, posarem línies addicionals.

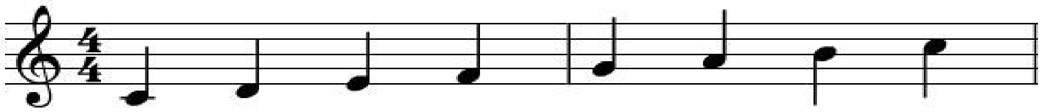
Abans d'utilitzar el pentagrama, es va fer servir el tetragrama, pauta molt utilitzada en el Cant Gregorià, que consistia en un sistema d'escriptura i notació musical de quatre línies horitzontals i paral·leles de color vermell i de tres espais, on s'escrivien les notes. Aquestes eren molt diferents a les que nosaltres actualment estem acostumats a veure, ja que eren quadrats negres que indicaven l'altura del so però no el ritme.

Les partitures no pretenien presentar la peça tal qual com s'havia escrit, si no que només eren una eina perquè la veu o l'instrument se'n recordés de com era. D'aquesta manera s'han perdut moltes de les melodies i cançons del Cant Gregorià, ja que no s'enregistraven les notes, si no només l'altura del so i si aquest pujava o baixava.

Il·lustració 4: Partitura en Tetragrama d'una Composició de Cant Gregorià

4.2. L'escala de Do Major

Un cop sabem què és un pentagrama, perquè serveix i quines són les claus que més es fan servir, toca situar les notes. Per estudiar-les farem servir l'escala de Do Major, ja que és l'escala ''base'' i d'aquesta surten totes les demés.



Il·lustració 5: Escala de Do Major (Do – Re – Mi – Fa – Sol – La – Si - Do)

L'origen de les notes musicals el trobem al poema *Ut queant laxis* del monjo Pau el Diacon:

Ut queant laxis
Resonare fibris
Mira gestorum
Famuli tuorum
Solve polluti
Labii reatum
Sancte **I**oannes[1]

El poema es tradueix com: per a que els teus servents puguin exaltar a ple pulmó les meravelles dels teus miracles, dissol els pecats de llavis impurs, Sant Joan[2]. Actualment es manté aquest origen i també es fa servir el xifrat americà. Aquest sistema de nomenclatura té com a finalitat escriure el nom de la nota de forma breu, de manera que les notes són representades a sobre del pentagrama amb les lletres de l'alfabet:

1. Poema Ut queant laxis de Pau el Diacon
**. Fotografia feta per l'Anna Velasco a França
2. http://es.wikipedia.org/wiki/Nota_(sonido)

A = La; B = Si; C = Do; D = Re; E = Mi; F = Fa; G = Sol

Aquestes set notes formen l'escala diatònica, tot i que a l'hora d'escriure es poden utilitzar un màxim de 12 notes, que formen l'escala cromàtica. Aquestes notes s'aconsegueixen utilitzant els sostinguts # i els bemolls ♭ que pugen i baixen respectivament mig to la nota a la qual acompanyen.

4.3. Durada de les Notes

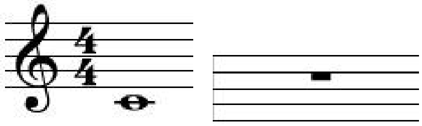
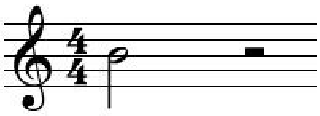
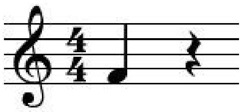
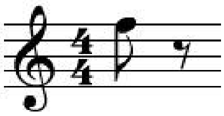
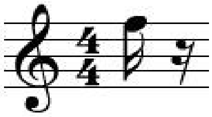
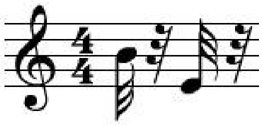
Com he dit abans, el pentagrama ens indicava quant durava la nota i per això va sorgir la necessitat de buscar signes que ens indiquessin el temps que havia de sonar aquella nota.

Aquestes figures es van desenvolupar a partir dels modes rítmics, patrons de duració de la música medieval. Els estudis més actuals diuen que hi havia sis modes rítmics recollits en el tractat anònim *De Mensurabili Musica* de l'any 1240. Cada mode consisteix en un breu patró de valors *longe* o *brevis.* A la taula que trobem a continuació podem veure els 6 modes i el que són actualment:

Modes	**Mesura**	**Nomenglatura Actual**
1	*Troqueo*: longa – brevi	Negra – Corxera
2	*Yambo*: brevi – longa	Corxera – Negra
3	*Dactilo*: longa – brevi – brevi	Negra amb puntet – Corxera – Negra
4	*Anapesto*: brevi – longa – longa	Negra – Corxera – Negra amb puntet
5	*Espondeo*: longa – longa	Negra amb puntet – Negra amb puntet
6	*Pírrico*: brevi – brevi – brevi	Corxera – Corxera - Corxera

El *De Mensurabili Musica* diu que una longa equival a dues brevis i mitjançant aquest patró es formulen els modes 1, 2 i 6. Però què passa amb els altres tres modes rítmics? En aquests trobem un valor més llarg que no coincideix amb les unitat longa i brevis, i és que a l'època es va suposar que els altres tres modes venien descrits pel *més enllà.*

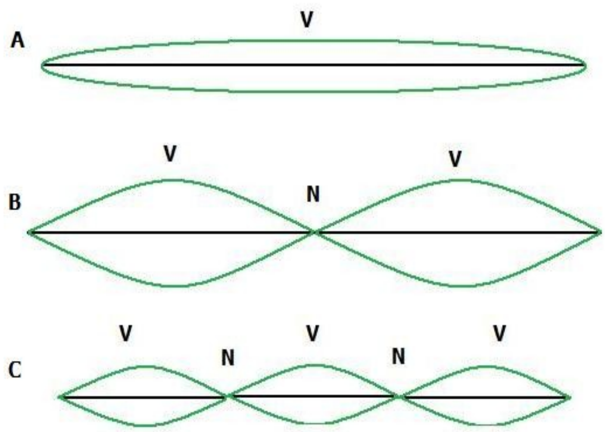
A la següent taula es presenta la notació actual que es fa servir per escriure música i que va derivar dels 6 modes rítmics:

Nom	**Signe**	**Durada**	**Fracció**
Rodona		4	1
Blanca		2	1/2
Negra		1	1/4
Corxera		1/2	1/8
Semicorxera		1/4	1/16
Fusa		1/16	1/32
Semifusa		1/32	1/64

5. Música, Física i Matemàtiques

Encara que ens soni estrany la música, la física i les matemàtiques tenen una relació molt directa que intentaré explicar en els següents punts.

5.1. Harmònics



Il·lustració 6: Vibració d'una corda

Quan una corda sona emet el que s'anomena una **nota fonamental** que la veiem representada al gràfic A. Però si aquesta mateixa corda la dividim per la meitat, vibrarà de la forma representada en el detall B. Aquest so té menys intensitat que la nota fonamental i té el doble nombre de vibracions que aquesta. Si ara subdividim la corda en tres parts iguals, trobem que l'ona que descriu el so que s'emet és igual al gràfic C. Podríem dividir la corda en moltes més parts, però totes emetran fraccions de sons cada cop més dèbils i les seves freqüències seran inversament proporcional a les seves longituds.

D'aquesta manera, afirmem que a la nota fonamental li sumen altres notes anomenades **harmòniques** que la complementen. Però no són notes qualssevol, ja que les freqüències d'aquestes notes corresponen als múltiples del nombre de la nota fonamental. D'una altra manera direm que, juntament a la nota fonamental, per exemple, les cordes emeten altres notes, que reben el nom d'harmònic. Les concominants tenen una relació de vibracions que segueix la serie natural de nombres: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... on l'1 és la nota fonamental.

Desprès d'aquesta afirmació "l'1 és la nota fonamental" em vaig qüestionar el perquè és l'harmònic 1 i no l'harmònic 0, ja que a cap lloc es deixava constància de que la nota fonamental fos un harmònic. L'única explicació que he trobat que respongui a la meva pregunta són les propietats de les potències, on a^0 és igual a 1.

El primer harmònic, el número 1, correspon a l'octava de la nota fonamental ja que emet el doble de vibracions que aquesta.

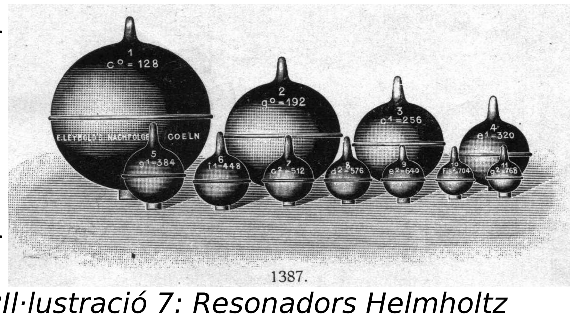
Observem que tots els harmònics que coincideixen amb les potències de 2 (el 2, el 4, el 8...), doblen les seves vibracions amb relació a l'harmònic que correspon a la potència anterior, i per tant, coincideixen amb la primera, amb la segona, amb la tercera... octaves de la nota fonamental.

La freqüència del tercer harmònic és exactament 3 cops més gran que la de la fonamental, la del quart és 4 cops més gran... i així successivament. Com que les relacions de les freqüències dels primers harmònics coincideixen amb nombres senzills, segons Helmholtz metge i físic alemany autor del llibre *Sobre les sensacions del to com a base fisiològica per la teoria de la música*, les notes corresponents han de ser (i s'ha demostrat que ho són), concordants entre si. En canvi, a mesura que s'ascendeix a la sèrie, els harmònics són cada cop menys concordants. Quan un harmònic és poc concordant, rep el nom de **concominant**.

Si tornem a mirar la il·lustració 6, on trobem representada la nota fonamental o harmònic 1 i els harmònics 2 i 3, veiem que els punts de major amplitud de moviment corresponen als anomenats **ventres** (V), mentre que els punts fixes (com ara les dues boletes de color gris en el cas de la nota fonamental o els punts de menor amplitud en el cas del altres dos harmònics) reben el nom de **nodes** (N).

La nostra oïda no és capaç de percebre harmònics per separat de la nota fonamental, només oïdes molt fines i educades poden distingir la seva presència i la seva intensitat. De fet, sí que hi ha una manera de comprovar si existeixen o no, però és difícil i es necessita concentració: consisteix en fer sonar una nota del piano sense tocar-la. Si aixequem l'apagador d'una nota (apretant la tecla molt lentament, per aixecar l'apagador sense percudir la corda) i fem sonar una altra amb un cop sec, escoltem que els seus harmònics ressonen en tant que aquesta tingui molt presència en la sèrie d'harmònics de la corda que s'ha percutit.

Segons els que diuen alguns llibres, el senyor Helmholtz no era capaç de desgranar el so d'una nota emesa per un piano i distingir els seus harmònics, per aquesta raó va emprar uns ressonadors que aïllaven i intensificaven els harmònics i així poder analitzar el so. Els ressonadors són unes



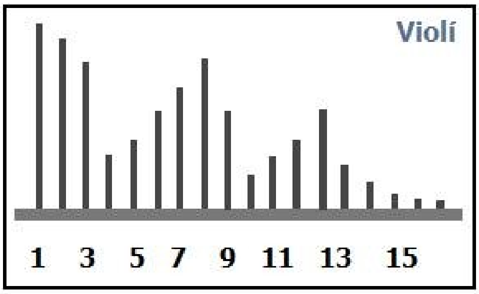
Il·lustració 7: Resonadors Helmholtz

esferes perfectes amb una petita obertura i un petit tub en l'extrem oposat que s'acoblava a l'oïda. Avui dia és tot més fàcil, no es necessiten ressonadors barrocs com els de Helmohltz ni un experiment casolà com el del piano, gràcies a les noves tecnologies tenim l'oscil·lògraf que ens facilita notablement l'anàlisi del so.

5.2. El Timbre dels Sons

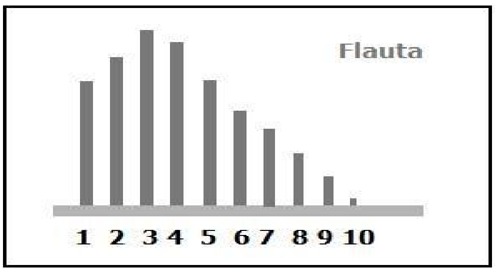
Quan escoltem un so musical podem distingir el seu to, la seva intensitat o l'instrument que ha emès aquella nota o aquella melodia gràcies al timbre o color del so com es coneix a Alemanya, característic i únic de cada instrument.

Que un instrument tingui un timbre o un altre depèn de la quantitat i de la distància relativa de cada un dels harmònics que acompanyen a la nota fonamental.



Il·lustració 8: Els Harmònics del Violí

Els detalls següents recullen els nombre d'harmònics i l'altura de dos instruments de famílies diferents, el violí de corda i la flauta de vent. Si mirem la il·lustració 8, trobem que el violí té un gran nombre d'harmònics que tenen intensitats diferents i destaca les intensitats dels primer dos harmònics.



Il·lustració 9: Els Harmònics de la Flauta

La flauta només té 10 harmònics amb la particularitat que els tres primers són superiors a la nota fonamental, fet que en pocs instruments passa.

El color del so nasal del clarinet és degut a la importància dels harmònics imparells, les trompetes tenen els harmònics aguts intensos a partir del número 7, per això ens resulta tan estrident.

Alguns investigadors han afirmat que el timbre dels instruments depèn d'alguna cosa més que dels harmònics; tema que ha donat lloc a grans controvèrsies i contradiccions. Tot i que és un tema interessant, no entrarem aquí i només faig aquesta pinzellada per dir que el timbre dels instrument és una qüestió que encara s'està estudiant relacionada amb els harmònics.

5.3. Vibració de les Cordes i la seva Llei

Les cordes d'un contrabaix, per exemple, poden vibrar **longitudinalment** quan es troben fixes pels dos extrems (en aquest exemple pel clavijer i per la cordal) i es freguen en el mateix sentit de la seva longitud amb un drap que contingui colofònia, resina natural de color groguenc que s'obté de les coníferes constituïda per un conjunts d'àcids resínics. El so que escoltem mitjançant aquest procediment és molt agut i estrident. En música aquestes vibracions no tenen aplicació ja que no veurem a cap contra baixista tocar una peça mitjançant el procediment abans explicat.

A música les vibracions **transversals** de les cordes tenen molt interès; un instrument de corda emetrà vibracions transversals quan la corda es **pulsi**, com una guitarra o un arpa; es **percuti**, com un piano; o bé **fregant-les**, com el cas del violí.

Segons el punt on la nota es pulsi, es percuti o es froti s'obtindran uns o altres harmònics amb una intensitat diferent. Per això és important tenir present que el punt on s'exciti la corda o es provoqui el ventre és exactament aquell, ja que si no hi haurà un marge d'error pel que fa al so de la nota. L'exemple més clar que explica aquest cas és quan escoltem a un nen que fa poc que toca el violí en una audició. De ben segur que el nen toca totes les notes bé, però com no és curós la posició dels dits la nota no acaba de sonar bé i el so no és gaire agradable.

Per saber quin és el nombre de vibracions de la nota fonamental que dóna una corda tenim la següent fórmula, on N són les vibracions dobles per segon; T la tensió de la corda en Kg; L la longitud de la corda en metres i p el pes en grams per metre de la corda.

$$N=\frac{\sqrt{9{,}81\cdot T}}{2\cdot L\cdot\sqrt{p}}$$

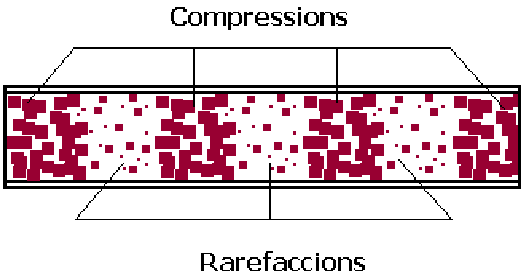
Aquesta és la llei de vibració de les cordes dels instruments.

5.4. Acústica

El filòsof grec Aristòtil (348 – 322 a.C.) va ser un dels primers pensadors en teoritzar la natura del so, però els qui es consideren els pares de l'acústica a Marin Mersenne (1588 – 1648) i a Galileu Galilei (1564 – 1642) amb *Discursos Matemàtics sobre dues noves Ciències*. També hem de destacar la figura important en aquest camp de la física d'Isaac Newton (1642 – 1727) amb el llibre *Principia* on desenvolupa tot una teoria matemàtica sobre com es propaga el so i a Lord Rayleigh amb el seu tractar sobre l'acústica anomenat *Teoria del So*.

Tots aquests i altres pensadors, matemàtics i físics van estudiar durant anys l'acústica, la branca física que estudia la producció, la transmissió i la recepcions dels sons. Amb aquesta ciència podem quantificar l'energia, la variació en el temps, la freqüència del so i la seva localització.

Afirmem que *tot el que vibra, sona* ja que tot allò que vibra provoca una oscil·lació de pressió en l'aire. Quan aquestes vibracions es troben viatjant per l'espai afecten a les molècules de l'aire i generen petites regions d'aire on la pressió és menor; aquestes zones s'anomenen rarefaccions. Les zones on és major la pressió reben el nom de compressions. Quan el so troba un obstacle, com ara un timpà, aquest vibra garantint les mateixes característiques del patró d'ona emès en un principi per la font que va emetre el so. Un cop el so és percebut per l'oïda el sistema auditiu s'encarrega de processar-lo. Aquest s'estén des de l'orella al còrtex cerebral i la seva funció principal és la de convertir l'energia de les vibracions en impulsos neuronals.



Il·lustració 10: Compressions i Rarefaccions

Si ara ens centrem a la música, direm que una melodia (so) està formada per tot un conjunt de notes que compleixen 3 propietats: Tenen un **to**, que és la freqüència de l'ona i pot ser do, re, mi, fa, sol, la i si. Ha de tenir un **timbre**, que es defineix com la qualitat de l'ona que proporciona la superposició particular dels amònics. I per últim, **intensitat** o amplitud d'ona com és el *piano*, el *mezzopiano*, el *forte*... Aquestes 3 característiques corresponen a les propietats físiques de freqüència, amplitud i forma de l'ona.

- **To** i **Freqüència**: Quan un ordinador representa gràficament el so ho fa mitjançant ones, que són cadascuna de les crestes que la persona veu en el gràfic; la quantitat de crestes per unitat de temps és la freqüència. És inversa a la longitud d'ona; si entre una cresta i una altra hi ha una distància molt llarga, la freqüència serà més petita.
  Quan un músic afina el seu instrument a una freqüència de La_4 o La_{440}, vol dir que l'ona que vibra ho fa amb una freqüència de 440 cicles per segon i que correspon a la nota La. Cal dir que un instrument pot ser afinat a 440 o 442, però si es toca en conjunt sempre serà millor fer-ho a 442; els afinadors

electrònics tenen aquesta mesura en Hz com a predeterminada.

El to és la propietat dels sons que els caracteritza com a més aguts o més greus, en funció de la freqüència. El rang de freqüència auditiva per l'èsser humà se situa entre els 20 – 20000 Hz, és a dir que pot arribar a escoltar ones amb longituds compreses entre els 1'7 – 17 cm.

En un instrument de corda com ara una viola, com més curta sigui la corda i més alta la pressió, la freqüència serà més alta i per tant el so és més agut.

- **Intensitat** ens ajuda a diferenciar un so dèbil d'un so fort, parametres que depenen de la força en la que la font sonora emet el so i la distància que hi ha enter aquesta i el timpà que la recull. A l'acústica musical la intensitat depèn de l'amplitud de les vibracions. La nostra oïda pot percebre sons amb intensitat de 10^{-12} W/m^2 a d'1 W/m^2 o de 0 dB, el so més feble que pot enregistrar l'oïda a 120 dB, que provoca lesions a l'aparell auditiu.

  La intensitat es representa mitjançant una escala logarítmica, on l'augment de 10 dB.

  En una partitura la intensitat es representa amb els anomenats signes dinàmics o indicacions dinàmiques. La seva funció és indicar la variació d'intensitat en els diferents passatges de al peça amb lletres italianes en cursiva sota del pentagrama. Per indicar el pas gradual d'un *piano* a un *mezzo* s'utilitzen els *crescendo* o <, i per indicar la diferència gradual d'un *forte* a un *pianissimo* es fa servir el *decrescendo* o >. Els accents indiquen quina nota s'ha de fer amb una intensitat major que les altres i per tant també entra en el grup dels signes dinàmics.

Il·lustració 11: Crescendo i Decrescendo. Romance de Karl Czerny

- **El timbre:** amb aquesta última propietat del so s'aconsegueix la varietat musical des del punt de vista acústic, ja que ens permeti distingir els sons que emeten els diferents instruments; al interpretar una peça amb 3 instruments diferents, aconseguim donar un color diferent, aquest punt s'ampliarà posteriorment.

El timbre ens permet distingir un so que, interpretat per altres instruments, de diferents famílies i diferents cultures, tenen en comú una mateixa intensitat i una mateixa freqüència. La forma que descriu l'ona està determinada pels harmònics tal i com he explicat a l'apartat anterior.

6. Matemàtiques a les Composicions

A mida que anem fent aquest treball ens adonem que hi ha una estreta relació entre les matemàtiques i la música, ja que tot el llenguatge i les escales tenen una base matemàtica; també em vist que gràcies a la física el so es pot desenvolupar i arribar a totes les oïdes.

En aquest apartat veurem les matemàtiques que hi ha a les peces musicals; millor dit, les matemàtiques que trobem en la melodia de les cançons, allò que escoltem. Faré un estudi acurat on es veurà fins a quin punt influeixen les matemàtiques a les composicions musicals

6.1. Influència de les Matemàtiques a la Melodia

A totes les peces musicals trobem una estructura que està influenciada per les matemàtiques. En algunes la veiem molt clarament i en altres no, però sempre hi és.

El procediment bàsic per obtenir una peça amb una cohesió interna perfecta és la reafirmació de la seqüència de sons de forma variada, ja sigui mitjançant diferents variables, la variació o la imitació així evitarem la monotonia i la simplicitat, donem un caràcter propi a la composició i el que és més important, provoquem que la nostra oïda accepti fàcilment el tema. Les variacions han de ser orgàniques i agradables per l'oïda i han de ser molt interessants per la ment. Quan el compositor és capaç de fer unes variacions ben fetes la peça es recordarà més fàcilment; per tant, aquestes han de ser atractives i originals ja que poder reconèixer frases repetitives és important pel plaer musical.

Moltes d'aquestes variacions estan basades en tècniques matemàtiques on el paper més important el té la geometria.

6.2. La Geometria a la Melodia

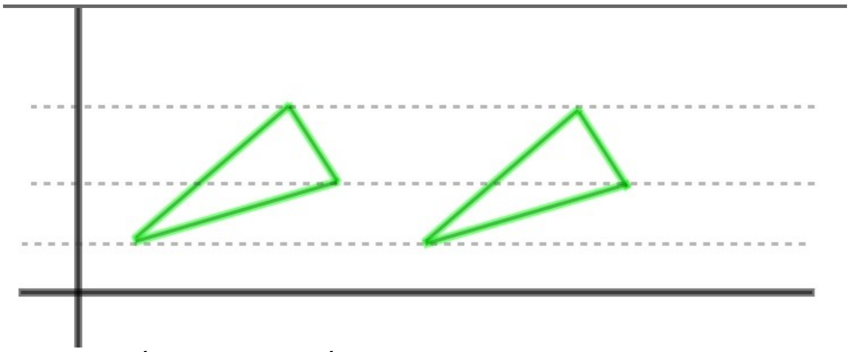
Les variacions musicals o transformacions musicals es troben íntimament relacionades amb les 3 transformacions geomètriques bàsiques. Les transformacions geomètriques musicals que presentaré a continuació col·loquen una figura geomètrica en el pla,conservant la seva forma i la seva mida, i la seva forma original no es distorsiona quan la plasmem al pentagrama. Així, una frase musical tindrà motius que es repetiran de forma idèntica, més aguda o més greu, pujant o baixant.

6.2.1. Tipus de transformacions musical geomètriques

Els tipus de transformacions que es presentaran a continuació són la translació, la reflexió i la inversió.

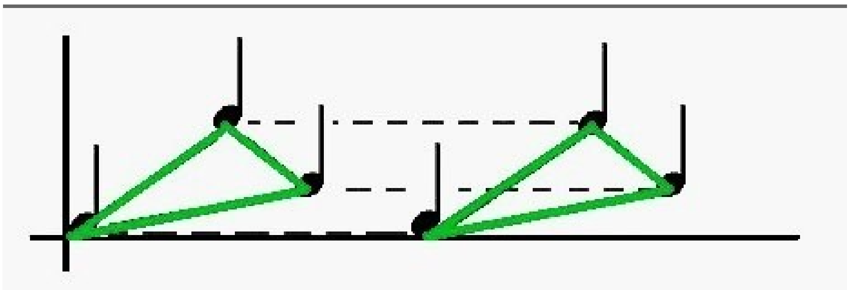
Aquestes transformacions geomètriques les trobem a la majoria de melodies de més del 80 % de cançons, ja siguin en obres dels grans compositor de la història de la música com ara Bach, Mozart, Beethoven, Delibes, Wagner... o en temes més actuals com ara en cançons del Beatles, Queen, Franz Ferdinand...

- **Translació:** Les notes dibuixen triangles idèntics.



Il·lustració 12: Traslació

Si ara canviem els vèrtexs per notes:

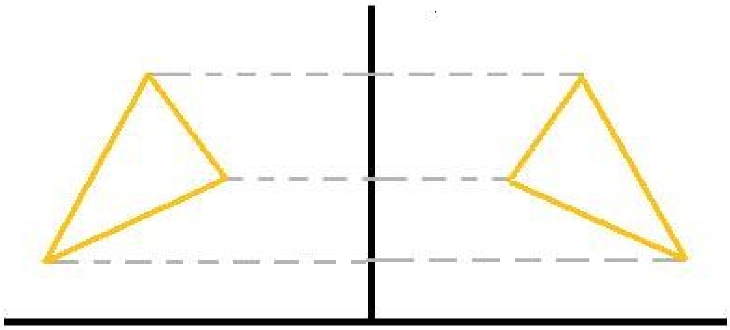


Il·lustració 13: Traslació amb notes

La cançó Song for my Father d'Horace Silver és un exemple. Els quadres de color verd fort indiquen la translació, ja que són repliques exactes de la mateixa estructura musical. A més, amb els cercles indico la variació tonal que fa que la peça tingui un color diferent.

Il·lustració 14: Song for my Father - traslació amb variació

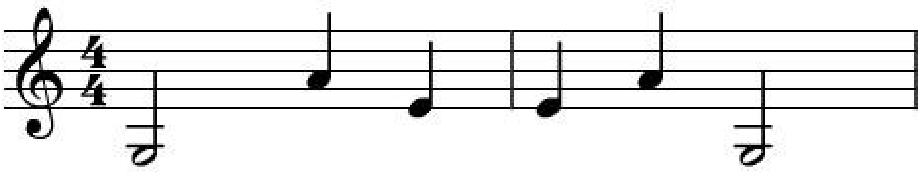
- **Reflexió:**



Il·lustració 15: Reflexió

En el dibuix trobem representat la reflexió; el triangle de la esquerra és l'anomenada figura original i la de la dreta és la figura reflexada. La línia que divideix les dues figures és la línia de reflexió o eix de simetria i té una funció mirall, ja que un triangle és el reflex de l'altre.

L'equivalent musical és el que s'anomena retrògrad:



Il·lustració 16: Retògrad

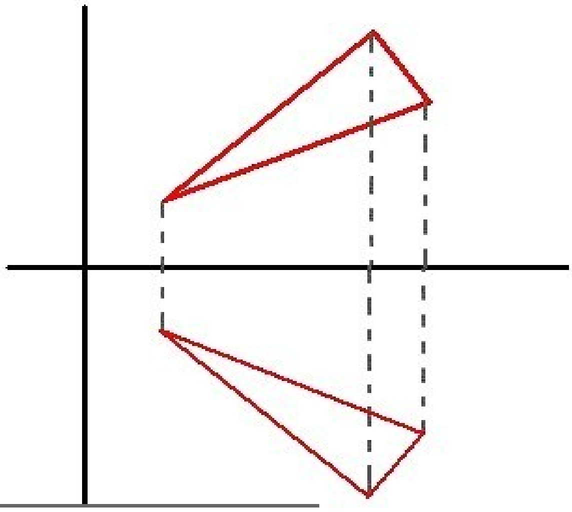
La pel·lícula *dos homes i un destí* va guanyar l'Óscar a millor cançó original i a la millor banda sonora amb el tema *Raindrops Keep Fallin' on My Head* composada l'any 1969 per Harl David i Burt Bacharach.

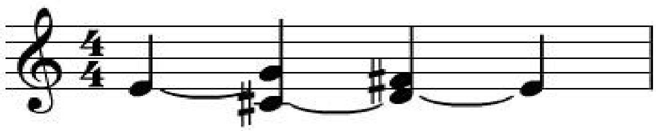
La cançó, que també la podem trobar a la BSO de Spiderman, conté una reflexió, marcada en el pentagrama amb cercles taronges.

Il·lustració 17: Raindrops Keep Fallin' on My Head

- **Inversió:**

En música la inversió és la situació on un una mateixa frase musical, en el seu punt mig, es divideix prenen dos valors diferents que guarden la mateixa relació de tons i semitons. Desprès d'aquestes dues notes diferents, la frase continua amb una sola veu. En una partitura veure millor què és la inversió:





Il·lustració 19: Inversió (relació matemàtica 3 - 1)

A la il·lustració 19 veiem com una frase musical es ramifica prenent dos camins diferents fins que es tornen a unir. Com totes aquestes tècniques, l'objectiu és donar un nou color a la peça i en aquest cas particular, donar més informació, omplir més el tema amb notes. Com ja hem dit en el treball, perquè un acord soni bé i ens sigui agradable i plaent, les notes han de tenir una combinació perfecta de nombres enters. Per tant, perquè aquest compàs sigui agradable les notes que divideixen la frase musical han de tenir aquesta relació: si comptem els tons, de mi a sol hi ha 3, i de mi a do#, també; de sol a fa#, hi ha 1, i de do# a re, també. Aquest recurs és molt utilitzat en els duos d'un mateix instrument o a la música barroca on tenien per costum omplir molt les partitures de notes per donar més complexitat a l'obra.

També trobem una altra tipus d'inversió, aquella que en una mateixa frase musical, en un compàs es presenta una estructura i al cap X compassos, es torna a repetir la mateixa però amb unes altres notes diferents. El cas és el mateix: ha d'haver una relació de nombres enters perquè aquesta sigui plaent.

Il·lustració 20: Black Orpheus

Black Orpheus també va ser la música d'una pel·lícula francesa, però els músics no la tenen com una simple banda sonora, si no com una de les grans cançons de la bossa nova. Com podem veure, a la peça hi ha 3 inversions que tenen com objectiu un dels que he esmentat a la introducció de l'apartat: evitar la monotonia i que hi hagi una repetició variada de sons perquè el cervell de la persona identifiqui la cançó en qualsevol moment.

7. Músics i Matemàtics

"Com que la música canvia constantment, el seu estudi no acaba mai. L'art d'ahir és el comercial d'avui, i l'avantguarda d'avui és el lloc comú de demà"

Gordon Delamont

En aquest nou apartat que obrim intento donar resposta a una de les preguntes que em vaig fer a l'hora de començar aquesta investigació musico-matemàtica. Si en totes les composicions musicals trobem matemàtiques, siguin del tipus que siguin, el compositor que dóna forma a la peça és conscient de que està fent servint matemàtiques? Les matemàtiques que hi ha a la seva peça, les ha fet servir conscient o inconscientment? Realment el compositor sap que a part de treballar amb música també treballa amb acústica i matemàtiques?

A continuació intentaré donar una resposta analitzant quatre figures importants de la música com són Johann Sebastian Bach, Ludwig van Beethoven, Wolfang Amadeus Mozart i Béla Bartók i alguna de les seves peces on el nombre d'influències matemàtiques és molt notable. Així comprovarem si és cert que a totes les etapes de l'història de la música hi ha matemàtiques o només les trobem en composicions concretes o en compositors concrets.

7.1. Johann Sebastian Bach i Das Musikalesche Opfer

Bach és el compositor, organista i clavecinista alemany més representatiu del moviment barroc que es va donar a terme a principis del segle XVII i va arribar a la seva fi a la primera meitat del segle XVIII. Aquest moviment destacava per una melodia molt ornamentada, plena de trinos i mordents i irregular amb continues baixades i pujades; una harmonia menor que té com objectiu crear tensió i un contrast; la dinàmica també busca un contrast gràcies al *piano* i al *forte* en pocs segons i el ritme és, en la majoria dels casos, un allego mecànic i pel que fa al timbre el clavicèmbal és l'instrument estrella del barroc. En les obres d'aquest alemany trobem totes aquestes característiques musicals i també matemàtiques com les que hem explicat a l'apartat anterior.

Entorn al compositor hi ha un rumor que va arribar a les meves oïdes gràcies a en Dick Them. Explica que Johann Sebastian Bach, com havia de mantenir a més d'una dotzena de fills havia de compondre cada setmana varies obres. Com hi havia etapes on la inspiració no era molt bona es va inventar un codi matemàtic per fer les obres. Amb ell podia escriure el ritme, les notes i les repeticions d'una manera original. La veritat és que no sabem fins a quin punt és veritat que Bach feia servir un codi matemàtic com a base d'algunes de les seves composicions però si que s'ha trobat que alguna peça coincideix amb això. També s'ha de destacar que Bach, que era un home molt religiós, havia de composar cada setmana una missa pels diumenges i a falta de temps, buscava una missa que feia temps que no tocava, i la tornava a tocar o bé, de les diferents misses que havia tocat, agafa diferents frases d'aquestes i feia un *remix* utilitzant-les.

La *Musikalisches Opfer*, també coneguda com l'*Ofrenda Musical*, és la col·lecció de canons, fugues i altres peces del compositor que va dedicar al rei Federic II de Prusia. Podríem explicar moltes coses sobre aquesta obra però ens centrarem en un dels canons que la formen, ja que es diu que va ser composada mitjançant el mètode matemàtic que he explicat anteriorment. Estem parlant del *Canon a 2 Cancrizans*, el primer dels deu canons que trobem a l'Ofrenda. Per tocar-lo necessitem dos músics un que faci anar en davant la melodia i l'altre que la retrassi; un comença a tocar des del seu principi fins al final i l'altra, simultàniament, comença a tocar la peça pel final cap en darrere. Quan arriben a l'altra pol, els músics canvien els seus papers i la música s'inverteix.

Veu 1	m. 1 →	m. 18 →	m. 18 ←	m. 1 ←
Veu 2	m. 18 ←	m. 1 ←	m. 1 →	m. 18 →

La partitura que tenim a continuació, que l'anomenarem Royal Theme ja que va ser la mare de tot el canon, va estar sotmesa al joc matemàtic del compositor. A partir d'aquesta, sorgeixen les altres 4 parts que hem representat a la taula i jo he escrit la primera part que continuaria després del Royal Theme on la segona veu comença la seva lectura des del compàs número 18. Només he escrit la primera part, ja que, les que continuarien serien exactament les mateixes però interpretades per l'altre músic.

Il·lustració 21: Canon a 2 Cancrizans - J.S.Bach

Desprès de sotmetre el tema mare o Royal Theme al seu mètode, la veu 1 es llegeix d'amunt a baix i la veu dos de baix a munt:

Il·lustració 22: Canon a 2 Cancrizans - J.S. Bach

Hem trobat una altra forma de fer original una peça, una manera nova de innovar i jugar
amb la música. Bach segurament no volia fer un canon tradicional i la seva imaginació el va portar a fer aquest mètode. Si escoltem la peça veurem que la primera part ens resulta molt familiar i que s'ha sembla a Royal Theme, així que

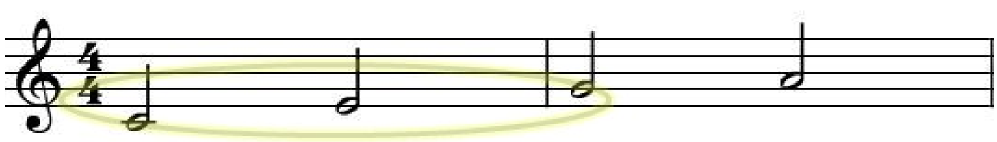
hem de felicitar a Bach per haver fet que l'obra sigui gens monòtona i haver buscat la manera de repetir una melodia sense repetir-la. Tot i que sembla un lloc molt fàcil, perquè simplement la veu 2 ha de llegir a l'inrevés el que té escrit al pentagrama, és un procediment més complicat, ja que ha d'haver una cohesió interna perquè les dues melodies puguin conviure bé i la música sigui orgànica. Si per exemple, agaféssim dos compassos al atzar i els toquéssim simultàniament no serien agradables a l'oïda.

Ara m'agradaria presentar l'anàlisi de l'obra:

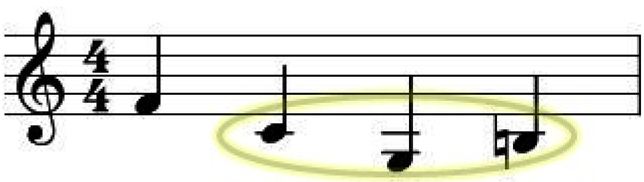
Il·lustració 23: Das Musikaliche Opfer

Si inicialment només fem un cop d'ull a la partitura veurem que està plena de colors i que només algunes notes no en tenen. Els colors ens indiquen alguna repetició, simetria, lloc geomètric, acord... tot el que hem tractat fins ara per tal de que la melodia no sigui pobre. Abans d'analitzar color per color, afirmem que la música de Bach és plena de llocs matemàtics i ens preguntem quins són i si era conscient de que els feia.

Començo a parlar de les el·lipses grogues: tot i que no he parlat en el treball d'ells, ens trobem davant d'un acord, un conjunt de notes que sonen simultàniament i tenen cohesió interna. Bach fa servir en aquesta composició l'acord de Do Major, que està compost de les notes Do, Mi i Sol.

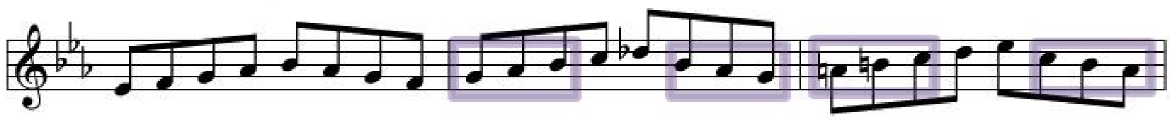


Veiem que al principi de la partitura les dues veus comencen amb aquest acord, una ho fa amb blanques i l'altra amb negres, com si les negres fossin les que prenen la iniciativa per començar l'obra (recordem el so mecànic del clavicèmbal) i les blanques siguin l'eco d'aquestes. Després, al compàs 12 trobem que l'acord també es presenta amb una octava més greu i en el final el tornem a escoltar.



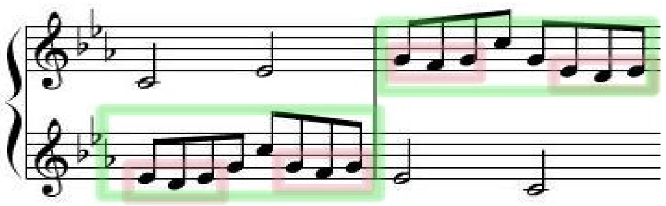
Si ara parem atenció a les caixes verdes, veurem que hi ha una simetria: un conjunt de notes que pugen (o baixen) fin a una nota en concret, i en aquesta nota baixa (o puja) seguint el mateix camí que han fet les altres. Com estem en el barroc, hem de recordar-nos de les característiques de la seva obra, on la quantitat de notes és un fet important i per això trobem tantes capses verdes. Si ara ho mirem amb altres ulls,potser la intenció és crear inestabilitat o, encara més important, reflexar el títol de l'obra: els crancs caminen de costat a costat, i potser aquesta simetria vol reflexar la forma que té l'animal de moure's.

Les notes que estan enquadrades de color violeta les trobem en el mateix compàs, i entre capsa i capsa hi ha dues notes. Això no és simètric però juga un paper semblant. El primer cop que trobem el color violeta és tot just desprès de trobar dues simetries. Ara no es tracta de ordenar les notes, que pugin i que baixin iguales, si no que algunes pugin i aquestes dues que queden en l'aire siguin les que ressaltin entre les que es repeteixen igual. El segon i tercer cop les notes que deixen a l'aire respectivament és el do – re b; re – mi, que tot i que no estan juntes, tenen una harmonia i si les toquéssim sense les violetes que fan una funció d'ornamentació, veuríem que sonen bé i que són una petita mostra del que després comentarem, que és l'escala cromàtica.



Les caixes de color rosa tenen la mateixa funció només que ara varia el tipus d'ornamentació i la figura es repeteix idènticament.

Si retallessim (quadrat verd) el copàs 9 i 10 i els enganxéssim quedarien totalment simètrics. Podríem dir que aquesta és la primera repetició que fa Bach, ja que utilitza en els dos compassos les mateixes notes i les mateixes figures.



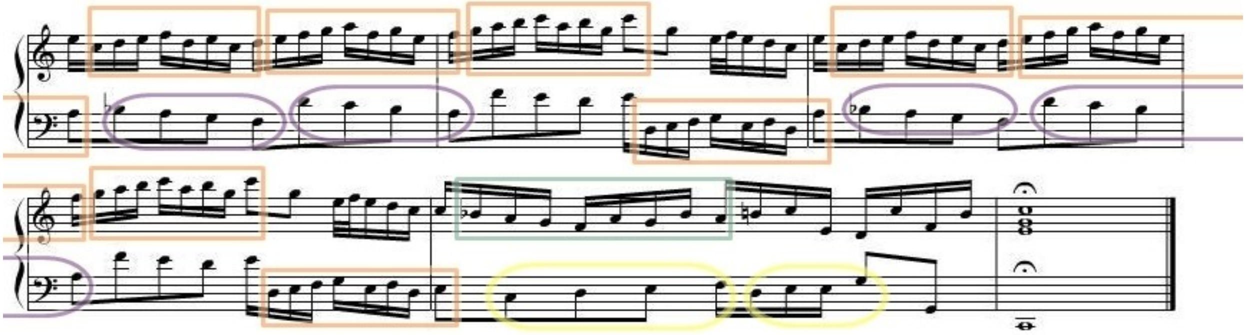
També, tot i que no és tot el compàs el que es repeteix, al compàs 3 i 16 trobem que també es repetix una figura.

Trobem dues úniques correlacions de notes, que estan subratllades en verd.

Per acabar cal destacar l'escala cromàtica que està present durant bona part de la peça indicada en color gris, que fa la funció de baix continu.

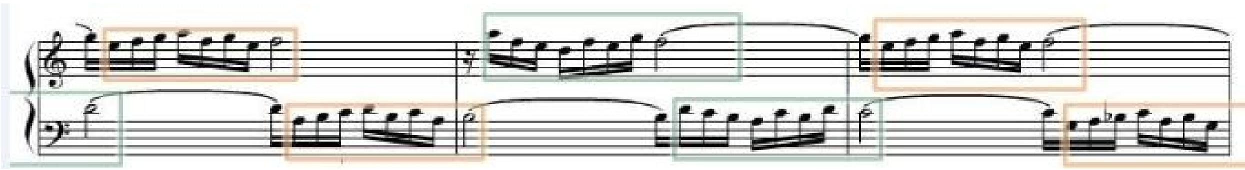
7.2. Johann Sebastian Bach i la Inversió nº 1

Fent recerca per les obres de Bach vaig trobar una obra amb un alt contingut de matemàtiques; estic parlant de la Inversió nº 1, una altra de les obres que està al voltant de rumor del mètode matemàtic. La veritat es que si mirem l'anàlisi musico-matemàtic ens adonem que pot ser sí feia servir algun mecanisme ja que tota la peça és plena de relacions matemàtiques.



Il·lustració 24: Inversió nº1 - J.S. Bach

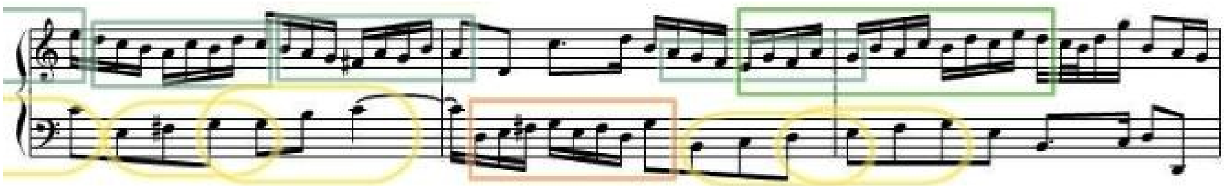
La figura principal de tota l'obra és la que trobem enquadrada de color taronja i que si ens fixem és la mateixa que la blava, amb l'única diferència que les primeres tres notes d'aquesta en comptes de pujar, baixen. Trobem passatges on les capses taronjes s'encadenen entre les dues melodies, que si ens fixem, cadascuna té una clau diferent. És interessant veure que la figura taronja, puja tres notes que són consecutives, en baixa una, en baixa una altra des de la posició de l'anterior i desprès puja. Durant tota la melodia es repeteix aquest motiu, amb la variació de la blava; així aconseguim que els harmònics siguin diferents però es repeteixin al llarg de la peça uns cops i que la frase principal pugui ser escoltada amb diferents notes.



Veiem que la capsa de color lila amb puntes rodones és la inversa de la capsa groga amb puntes rodones; mentre les grogues pugen amb notes consecutives, les liles baixen.

Observem que quan apareix aquest motiu, excepte en el compàs 20, apareixen corxeres, el que dona més tranquil·litat a la frase y donen la sensació d'ones que venen i se'n van.

Si parem atenció a les capses de color verd, veurem que es tracten d'escales encadenades enter si mateixes, per donar una sensació de desordre i per guarnir encara més la peça de notes; posteriorment veurem que es tracta del punt més important de l'obra i aquestes escales són les encarregades de presentar-lo.



Per últim comentar que trobem una translació en el compàs 9, i que aquesta en conjunt a la del compàs 10, formen una reflexió.

Desprès d'estudiar a Bach, malauradament no sabrem si aquestes combinacions musicals les feia sabent que hi havien unes matemàtiques, unes proporcions i uns harmònics al darrere o per ell només era un lloc que es va inventar una dia que el va facilitar el procediment de la composició.

7.3. Wolfang Amadeus Mozart i el Joc dels Daus

Mozart representa el classicisme musical tot i la seva curta vida i malaurada carrera musical; no malaurada per la qualitat o quantitat de les seves obres si no pel pocs diners que va guanyar per elles. Des de petit va estar molt arrelat a aquest art ja que el seu pare i mestre el va ensenyar llenguatge, composició i instrument. En la seva carrera trobem una gran diversitat d'obres com ara simfonies, sonates, òperes, concerts vocals, cantates, música religiosa, rèquiem, música de cambra... totes amb les característiques que van donar forma al classicisme, moviment musical que es dóna a l'any 1750 aproximadament. Les peces musicals que trobem en aquest període són simètriques, ordenades, quadrades i equilibrades.

Les obres de Mozart, que han estat estudiades durant anys per matemàtics i musicòlegs, sempre han tingut un contacte directe amb les matemàtiques. El nen prodigi un anys abans de morir va inventar una manera de composar valsos de 16 compassos mitjançant un senzill lloc de daus. El va titular *Joc de daus musicals per escriure valsos amb l'ajuda de dos daus sense ser músic ni saber res de composició K294* i sens dubte és una singular i original creació artística amb la que, gràcies a la ment del músic, pot compondre no només una peça per piano si no una màquina de fer valsos. Amb això no només es té una partitura de 16 compassos si no un gran nombre de valsos diferents de 16 compassos cadascun jugant amb l'atzar.

Amadeus va escriure 176 compassos i els va enumerar del 1 al 176. Va fer 16 grups de 11 compassos cadascun i els va apuntar en les següents taules:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Cadascuna de les taules indica la primera i la segona part del vals. Els nombres romans corresponen als 8 compassos que formen cadascuna de les dues parts i els números del 2 al 12 corresponen a la suma de les cares del daus (tira dos daus, per tant, mai obtindrem la suma d'1). Aquests es llancen per definir en cada compàs quina figura s'haurà d'incloure. Posem com exemple que volem escriure el compàs 7 de la primera part i els daus donen una suma de 10. Ens anem a la primera taula, mirem el la columna VII i la fila 10, i el resultat és el compas número 62. Aquest compàs 62 ha estat prèviament escrit, igual que tots els altres, ja que la primera part del joc ha estat la composició d'un vals de 176 compassos que han estat ''retallats de la partitura'' i s'han desordenat. Quan tirem els daus aquests compassos retallats s'enganxaran a l'atzar obtenint un nou vals.

En el cas del músic i ''matemàtic'' Mozart afirmen que coneixia una relació entre les matemàtiques i la música, i com Bach la funció principal del mètode era fer música de qualitat en el menor temps possible.

Com a curiositat comentaré que, buscant informació sobre aquest tema he vist que molts autors donen molt èmfasi en que trigaríem tota una vida en escoltar els valsos que es poden crear mitjançant aquest mètode. Els valsos que es podrien compondre serien 11^{16}, que és igual a $4'5949 \cdot 10^{16}$, i si cada vals té una durada de 30 segons, per escoltar-los tots necessitaríem més de 700 anys.

7.4. Ludwig van Beethoven i la Primera Escossaien

"La música ha de fer saltar foc en el cor de l'home, i llàgrimes dels ulls de la dones"
L.V. Beethoven

Beethoven és un altre alemany que ha destacat en la història de la música per l'originalitat i el caràcter problemàtic ple d'emocions de les seves obres romàntiques. El moviment romàntic va sorgir al segle XVII gràcies a la societat burgesa que va viure desprès de la revolució francesa i acaba aproximadament al XIX i és caracteritzat per l'exaltació d'emocions; aquest moviment donava molta importància al sentiment i feia tot el possible per plasmar aquest sentiment, aquesta il·lusió al pentagrama. Les composicions eren íntimes i humanes, frases melòdiques irregulars i poc simètriques, amb un ritme complex i lliure i dinàmiques molt variades en una mateixa peça.

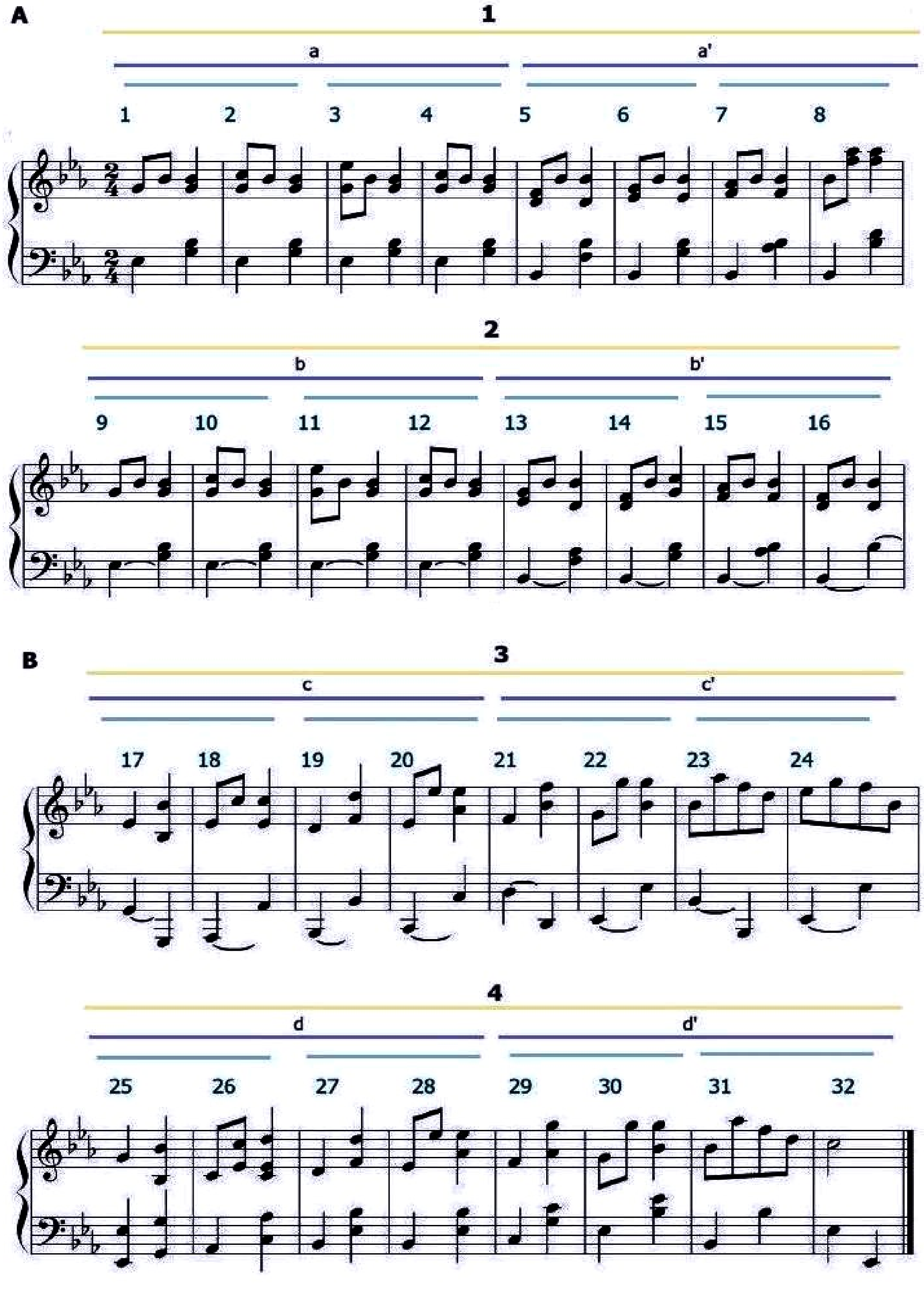
Les obres de Ludwig van Beethoven són caracteritzades per aquestes premisses, però cal destacar que és la personalitat del compositor el que les fa úniques: la seva força, les seves ganes de lluitar per la música (recordo que Beethoven era sord), la seva capacitat d'interioritzar els sons i la capacitat de transmetre emocions.

Va arribar a les meves oïdes que Ludwig van Beethoven, el meu compositor preferit, també tenia obres on les relacions matemàtiques eren evidents. Amb l'alemany trobem una relació nova que abans no havíem tractat i gràcies a la seva *Primera Escossaien* la nostra recerca s'amplia amb els **fractals**.

El matemàtic Benoït Mandelbrot va anomenar fractal a l'objecte geomètric format també per objectes geomètrics, d'estructura variada i aspecte similar amb una estructura bàsica, fragmentada o bé irregular que es repetia en diferents escales. Els petits detalls que el formen tenen una relació estadística amb les seves propietats generals, repetint-se de manera infinita, és a dir, conté una imatge de si mateixa en tots els punts que la formen. Trobem fractals a la natura com ara en el romanescu, vegetal semblant a la col, en l'arquitectura i en la música entre d'altres.

En música, qualsevol so que es genera i es reprodueix segons els patrons d'un comportament espontani és un fractal. Per exemple: una imatge fractal és formada per infinits punts; com que la base d'aquest fractal és la repetició infinita d'una expressió algebraica concreta, si a cada punt o imatge del fractal li adjudiquem una nota, afirmen que existeix un patró comú que regeix la formació de la música fractal.

Fa uns anys, als Estats Units es va demostrar que la música de Bach, Mozart i Beethoven, grans compositor que han destacat a la història de la música per la genialitat de les seves obres i que apareixen en aquest treball, contenen motius fractals. L'alemany Ludwig van Beethoven va composar *Primera Escossaien*, obra que tenim aquí sota analitzada.



Il·lustració 25: Primera Escossaien - L. V. Beethoven

Podem veure que la partitura està formada per 32 compassos que he anat dividint; començaré l'anàlisi de més gran a més petit. Trobem 4 sistemes, que es trobem dividits en dues seccions que reben el nom A i B, formades cadascuna de 16 compassos; d'aquests fem dos grups, de manera que de la secció A sorgeixen el grup 1 i 2 i de la B el grup 3 i 4, indicats amb la línia groga. D'aquí surten dues parts més que reben el nom a, a' pel grup A1, b i b' pel A2, c i c' pel B3 i d, d' pel B4, indicats amb línies blaves. Cadascuna d'aquestes parts està formada de quatre compassos, que es trobem agrupats de dos en dos com veiem indicats amb línies blaves clares.

Si parem atenció ens adonem que totes les subdivisions són unitats binèties i detalls idèntics de la unitat més gran. Llavors, afirmem que l'obra de L.V. Beethoven és una successió binària (32 – 16 – 8 – 4 – 2) amb la similitud que caracteritza l'estructura fractal.

8. La Proporció Auria

> "A ti, maravillosa disciplina,
> media, extrema razón de la hermosura
> que claramente acata la clausura
> viva en la malla de tu ley divina.
> Luces por alas un compás ardiente.
> Tu canto es una esfera transparente.
> A ti, divina proporción de oro."
> A la divina proporción, Rafael Alberti

En aquest nou apartat i despès d'haver tingut a la mà obres d'importants compositors faré una recerca acurada del que és la proporció àuria, el nombre auri, la divina proporció o el nombre d'or, explicant conceptes complementaris com son les proporcions, la figura del matemàtic Fibbonaci i la del compositor Bartók.

8.1. Proporcions

Si anem al teatre o mirem una pel·lícula ens adonarem que l'acció més important de l'obra mai es troba just a la meitat d'aquesta. Vàrem veure com la simetria pot ser insuficient per proporcionar a la música l'impuls dinàmic que es mereix i per aquesta raó la màxima tensió no es troba en el punt simètric.

Podem dir que la proporció és la relació entre les parts que formen una obra i l'equilibri és la proporció harmoniosa entre les seves parts. Quan escoltem una simfonia, per exemple, esperem que el punt de màxima tensió tingui la importància que es mereix, ja que l'hem estat esperant durant un llarg temps i per aquesta raó ha de destacar. Si el compositor dedica a aquesta acció 4 compassos, aquesta serà insatisfactòria per l'auditori, ja que el punt que hauria de ser el més impactant s'ha convertit en una frase més. En aquest exemple es presenta un problema de proporció entre l'espai dedicat al punt més esperat, que amb prou feines arriba ser rellevant i l'atenció que es dedica a la resta de l'obra. Si ara imaginem el cas d'una cantata on el moment culminant es troba als últims 10 compassos de l'obra, l'auditori, tot i que s'ha donat importància a l'acció, trobarà a faltar un final; una pel·lícula mai acaba quan troben el tresor, posen a la presó al dolent o la parella es casa. La conclusió de tot això és que no és apropiat que el moment més esperat, el culminant, el de màxima tensió i atenció es trobi al principi, al final o en el punt simètric de l'obra, si no que s'hauria de repartir. Però, com podem saber perfectament en aquest punt?

El punt culminant de l'obra depèn directament de la durada que tingui aquesta, de manera que una peça breu, com la K331 de Mozart, té el punt d'articulació al punt simètric.

Il·lustració 26: K331 de W.A. Mozart

La baixada de notes del Do al Sol del compàs 4 és qui dóna peu al moment culminant, ja que trenca amb el ritme que havia fins el moment i si continues exactament igual, seria totalment monòton, el que faria que 'obra no hagués tingut èxit. Cal dir que sense veure la partitura i escoltant l'obra la oïda ja preveu que aquell serà el moment més emocionant de la peça.

Si ara ens centrem en les grans simfonies, en els rèquiems o en cantates, peces molt més llargues i amb més contingut musical, observem que aproximadament el punt més rellevant de la peça es troba cap al 60% o 65% de la durada totoal de l'obra. Si mirem enrere, no és al principi, ja que tindríem una sensació de buit, perquè la part interessant ja ha passat i ara toca escoltar una part que no destaca, no és en el punt mig de l'obra ni al final. Té sentit que a les peces llargues se situï al 65% i que ja passat el moment més esperat l'obra no s'estengui excessivament, ja que es convertiria en monòton i l'auditori no escoltaria amb la mateixa atenció. Si mirem l'exemple, que també hem estudiat de Bach, la inversió nº 1, és en la caiguda del compàs 15 quan acaba aquest moment d'èxtasi. En la partitura analitzada anteriorment, veiem que en el compàs 7 i 15 vàrem marcar unes escales; doncs la funció que tenen és donar pas al moment culminant de l'obra. Torno a dir que escoltant la peça és com més clar es veu, ja que sentim una sensació com si toquéssim el cel i que aquella obra no pot donar més de si, perquè ja ho ha donat tot.

8.2. Leonardo de Pisa i la Succesió de Fibonacci

Leonardo de Pisa, més conegut com Fibonacci va ser el matemàtic italià que va introduir i difondre per tot Europa el sistema de numeració aràbica que actualment utilitzem, la notació posicional i el número 0; però sens dubte és conegut per ser l'autor i pensador de la **succeció de Fibonacci**. Va sorgir de la pregunta ''Quantes parelles de conills haurà desprès d'un temps X?'', la resposta es basà en l'observació en veure que el nombre de conills en una generació era igual a la suma de les parelles de conills que hi havia en les dos generacions anteriors. D'aquesta peculiar manera neix la seqüència de Fibonacci, que s'inicia amb el número 0 i 1 i a partir d'aquí els demés s'obtenen per la suma del dos anteriors:

0, 1, **1**, **2**, **3**, **5**, **8**, **13**, **21**, 34, 55, 89...

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

0+1 = **1**; 1+1 = **2**; 2+1 = **3**; 3+2 = **5**; 5+3 = **8**; 5+8 = **13**; 13+8 = **21**

La seqüència presenta algunes propietats:

- Cada tres números hi ha un nombre parell: 1, 1, **2**, 3, 5, **8**, 13, 21, **34**...
- Cada cinc números hi ha un múltiple de 5: 1, 1, 2, 3, **5**, 13, 21, 34, **55**...
- La divisió de dos nombres consecutius de la successió donen com a límit el nombre d'or:

1/1 = 1; 2/1 = 2; 3/2 = 1'5; 5/3 = 1'666666; 8/5 = 1'6; 13/8 = 1'625

Amb el temps es va veure que la successió de Fibonacci està present en molts aspectes de la nostra vida, com ara les margarides que tenen 34, 55, 89 pètals; que si dibuixem espirals d'igual mida des del centre de la coliflor surten 5; 5 són els braços que té l'estrella de mar i en el gira-sol el nombre d'espirals que podem dibuixar son 21, 34 o 55. Tots son nombres que trobem a la successió i podríem dir que és pura casualitat, que hi ha moltíssimes coses que no compleixen aquesta regla, com ara les ungles que té una persona o el total de dents.

De moment deixaré aparcat aquest apartat i explicaré més endavant pequè ha estat important aquesta successió en música.

8.3. El Nombre d'Or

El nombre d'or, el nombre daurat, la secció àurea, la raó àurea, la mitja àurea, la proporció àurea o la divina proporció és un nombre representat per la lletra grega phi ϕ que posseïx moltes propietats interessants en el camp de la natura, la arquitectura, la biologia, la geometria, l'art i la música. Va ser descobert per Fidias que el va donar un valor de relació o proporció i no d'unitat. La trobem quan la proporció entre una part i el conjunt és igual a la relació entre la resta i el conjunt.

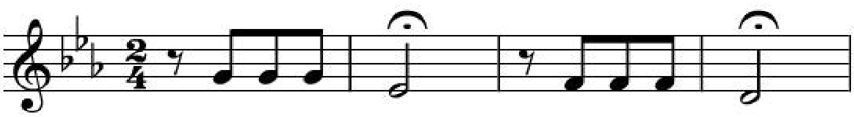
$$\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1'618033988$$

Quan a l'apartat anterior dividíem els nombres de la successió de Fibonacci ens donaven uns resultats que s'acostàvem molt al nombre phi.

La proporció àurea la trobem amb molta freqüència en música, sobretot on es troben localitzats els punts d'articulació de l'obra, com decadències o cúspides de tensió; però serà difícil trobar la proporció exacta en una peça ja que condicionants com el compàs ho fan impossible. A la Inversió nº1 de Bach hem vist una aproximació però les obres que tenen una proporció més precisa són peces llargues, com ara la 5ª simfonia de Beethoven. Tot i que en diverses peces trobem aquesta proporció no vol dir que el compositor tingui coneixement de la seva existència, si no que arribar a ella o acostar-se significa transmetre a l'auditori un so agradable mitjançant procediments intuïtius, pràctics o místics.

8.3.1. Beethoven i la divina proporció

La 5ª Sinfonia de Beethoven comença amb les seves famoses corxeres que representen el destí trucant a la nostra porta. Aquest motiu, que es repeteix al llarg de l'obra, dóna a aquesta un caràcter propi de manera que podem reconèixer la peça només escoltant aquests 4 compassos. Aquest motiu, que el tenim representat abaix, es repeteix quan passen X compassos i aquesta X sempre coincideix amb nombres de la succesió de Fibonacci.



Il·lustració 27: Motiu de la 5ª sinfonia de Beethoven

Fent un anàlisi breu i musical de la que és una de les obres més importants en la carrera del músic, cal destacar que Beethoven la va compondre fen servir l'*Allegro de Sonata* pel primer moviment. Va continuar l'obra fent primer una exposició del tema A en la tonalitat principal de tota l'obra, per presentar el tema a l'auditori; en aquesta mateixa exposició es forma un camí nou per presentar el tema B en la tonalitat de la dominant aconseguint un tema més melòdic. La exposició es torna a repetir i el compositor desenvolupa els dos temes i aquí és on deixa de banda el color i les escales utilitzades per fer servir unes altres. Desenvolupa els temes, els enfronta, els fusiona i provoca en l'auditori la sensació de deixar de banda el tema principal però sense arribar a oblidar-se del que s'ha exposat. Per acabar l'obra, el compositor ha de reconduir-nos a la reexposició dels temes principals en la mateixa escala que va utilitzar en un principi, per donar una sensació de tranquil·litat. Finalment la coda, que sempre he pensat que es una mena de propina perquè l'autor no volia deixar d'escriure; tot això forma part només del primer moviment. Musicòlegs asseguren que entre l'exposició del tema A i el final del desenvolupament, si dividim el nombre de compassos el resultat s'acosta a la proporció àurea, sinònim de bellesa i estètica perfecta. Cal dir que no ho he pogut comprovar per mi mateixa ja que no he pogut aconseguir les partitures, però llibres i nombroses pàgines webs asseguren que sí és veritat.

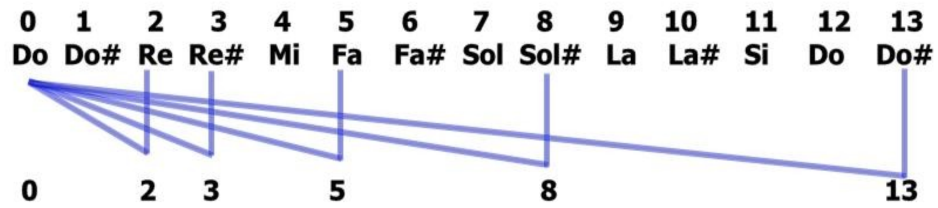
8.4. Béla Bartók i Obres d'Or

"Deixeu que la meva música parli per mi"
Béla Bartók

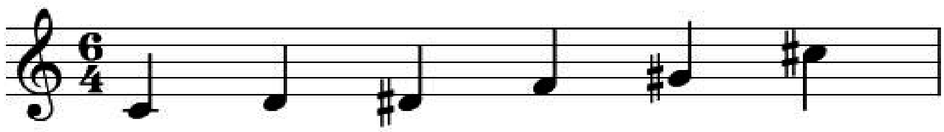
Béla Bartók és considerat un dels compositor més brillants de la música del segle XX. Destaca com a compositor d'obres on el piano i la percussió són els protagonistes, sense deixar de banda el folklore de la seva terra i s'ha guanyat un lloc en aquest treball per la seva relació amb les matemàtiques. Moltes obres de l'hongarès tenen amagades relacions amb la divina proporció i amb Fibonacci, per aquesta raó m'ha semblat oportú dedicar-li un apartat. A continuació veurem alguns fragments de les seves obres, ja que es tracten de grans composicions, i els coneixements que podem extreure d'elles.

8.4.1. L'escala de Fibonacci

Béla Bartók coneixia bé el descobriment de Fibonacci i existeixen documents on queda constància que el compositor, amant de les plantes i de la natura en general, comptava el nombre de pètals de les flors per veure si existia en aquell exemplar la successió de Fibonacci; per aquesta raó Bartók va desenvolupar una escala musical que tenia com a base la successió de Fibonacci, i la va anomenar: Escala de Fibonacci. Va descobrir-la partint de l'escala cromàtica; va escriure d'amunt de cada nota que la formen un número i va seguir la lògica de: 2 semitons corresponen a una 2ª major, 3 a una 3ª menor, 5 a una 4ª, 8 a una 6ª i 13 a una octava augmentada. Si partim de Do com a tònica, ens queda la següent escala:



Il·lustració 28: Escala de Fibonacci

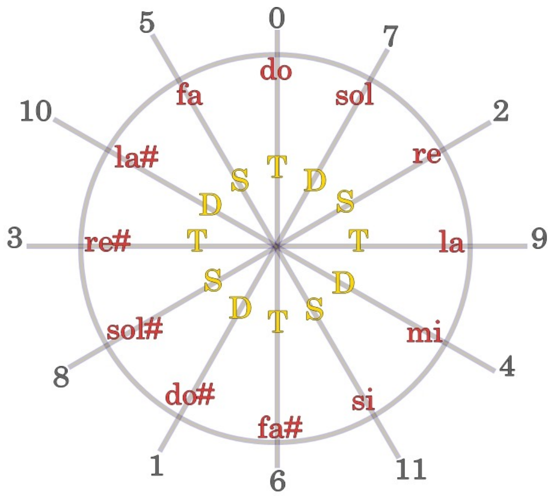


Il·lustració 29: Escala de Fibonacci Notes

Curiosament, aquesta escala, tot i que sona tensa, misteriosa i ens dóna la sensació d'estar en mig d'una escena de por d'una pel·lícula, ens es agradable.

8.4.2. Cercle tonal de Bartók

Béla Bartók va idear un cicle amb el que fos més fàcil escriure els acords de les seves peces. El cicle tonal de Bartók és el següent: imaginem que aquest cercle és el cicle de quintes, la successió ascendent i descendent de notes separades per intervals de quinta, però numerant la escala cromàtica del 0 al 11; tot seguit s'han d'ordenar els nombres en la circumferència saltant 7 vegades prenen com a 0 el que seria en un rellotge el 12. Prenem el Do com la tònica (T) (l'altura més important de tota la tonalitat) i successivament assignem a les altres notes la dominant (D) la subdominant (S) i la tònica (T). Bartók va veure que si feia servir aquest mètode cada tònica estava envoltada de la seva dominant i subdominant; per exemple: si prenen el Re# com a tònica, la seva subdominant és el



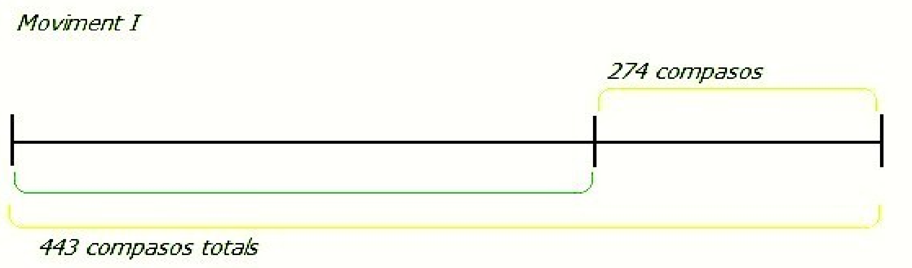
Il·lustració 30: Cicle tonal del Bartók

Sol# i la dominant el La# i així amb totes.

8.4.3. Anàl·lisi de les obres de Béla Bartók

A les obres de Bartók veiem, doncs, que la successió de Fibonacci té molta influència i no només perquè utilitza aquesta escala i les notes d'aquesta en gran part de les seves peces de música clàssica, si no que també trobem que Béla Bartók fa els canvis de armadura, dinàmiques, ritmes i moviment en el compassos que tenen com a número algun que contingui la sèrie.

La *Sonata per 2 pianos i percussió* va ser composada al 1937 i s'interpreta amb dos pianos, dos percussionistes que es reparteixen instruments temperats com són els timbals i el xilòfon i altres d'altura indefinida, com el bombo, els tambors, plats, platells, gong, triangles i una infinita varietat de baquetes. Està formada per tres moviments; tot i que no he pogut veure totes les partitures, he fet un anàlisi acurat del primer moviment de l'obra, l'*Assai lento – Allegro molto* en el que el piano I entra en el compàs 2 i el piano II en el 3. Tot i que això no ens sembli molt rellevant, és una peculiaritat més de l'obra ja que he trobat interessant el canvi de compàs que fa: veiem que la peça comença en el compàs 1 amb un 9/8, es produeix un canvi i en el compàs 5 torna a ser un compàs 9/8. El compàs 6/8 apareix en el compàs 4 per primer cop, en el compàs 6 per segon cop i per últim al 8 que tot i no coincidir totalment amb la sèrie existeis una semblança. Pel que fa a les notes, a gran majoria coincideixen amb l'escala de Fibonacci, que dóna un caràcter molt misteriós, de caos, de desordre; tot i així no la he trobat sencera. En aquesta peça veiem el nombre d'or, la proporció àurea; el primer moviment té un total de 443 compassos, si els multipliquem pel nombre phi tenim com a resultat 274. En el compàs 274 és on s'inicia la reexposició del tema principal de la sonata, composició basada en dos temes diferents que s'exposen, es desenvolupen i es tornen a exposar. La proporció àurea, en aquesta peça, coincideix totalment i si escoltem l'obra veiem clarament que aquell és el punt culminant de liobra, que a més, coincideix amb la proporció aurea i es troba en aquest 60 – 65 % total de la peça, tal i com veiem a la següent il·lustració:



Il·lustració 31: Sonata per 2 pianos i percussió

La *Música per cordes, percussió i celesta* va ser ser composada el setembre de 1936 en carregada per Paul Sacher que va dirigir-la l'any següent per l'aniversari de l'Orquestra de Cambra de Basilea. L'orquestra és formada per instruments de corda com violins, violes, violoncels i contrabaixos que destaquen per la manera que es col·loquen en l'escenari ja que una de les característiques de la música del segle XX és el trencament amb els períodes anteriors per donar a la història de la música un color nou. La celesta està formada per un arpa, timbals, xilòfon, caixa, bombo, plats i un piano utilitzat amb objectiu percutiu. La peça consta de 4 moviments, els parells són ràpids i els imparells lents amb una duració d'uns 30 minuts. Bartók es va basar en la Proporció Àuria per fer-la;el seu treball va ser exhaustiu i va utilitzar la fuga, tipus de composició que utilitza la polifonia i el contrapunt entre diverses veus instrumentals,que totes tenen la mateixa importància, i es dediquen a fer imitacions o reiteracions en diferents tonalitat d'una mateixa frase; aquesta surt i entra en la peça tocada pels diferents instruments. La fuga comença amb la exposició del tema que apareix varies vegades interpretades per 4 veus diferents; a continuació trobem la resposta, on cada veu es desenvolupa amb motius extrets de la frase principal fins arribar al punt on s'acumulen totes les veus i l'obra es torna molt densa i embolicada. Trobem que durant tota l'obra utilitza la escala de Fibonacci, el que fa que tingui aquest so tan característic de l'obra Bartókiana, però he trobat molt interessant el següent: la fuga té un total de 89 compassos on es general la tensió des de l'exposició del tema fins al punt culminant, que es troba al compàs 55, i per acabar, fa 34 compassos fins el final de l'obra, on el paper principal el té la celesta, instrument de tecla que té un so semblant al d'un carilló. En aquesta obra també he trobat que el compàs canvia segons la sèrie de nombres de Fibonacci, trobem que el 8/8 amb una distància de compassos d'1, 3, 5 (prenen com compàs 1 el primer cop que apareix, que en aquest cas és el 5) i uns compassos més avall tornem a trobar la mateixa proporció 1, 3, 5. I el compàs 12/8 amb una distància de 1, 5 (prenen com a 1 el primer compàs que apareix, que és el 6). Com a curiositat, m'agradaria destacar que aquesta peça per la seva foscor, desordre, fff i ppp va ser la BSO de la pel·lícula de terror *el Resplandor.*

Allego Barbaro va ser composada l'any 1911 i és una de les peces més conegudes de Béla Bartók ja que recull l'essència folk d'Hongria, la seva terra natal, i té una durada de 3 minuts. He trobat que la composició és molt interessant ja que utilitza els números de Fibonacci en diferents ocasions, com ara, en el començament que consta de 5 compassos en *fff*. Els acords de l'obra estan basats en el cercle tonal de Bartók i trobem l'escala de Fibonacci en varis compassos de l'obra com ara el 8, el 13 o el 21.

La proporció àurea també té un paper important en les obres de Bartók; si multipliquem el nombre de compassos de la peça completa per 0'168, ens dóna el compàs culminant de l'obra. Jo he fet la prova amb un duo de violins de 17 compassos que destaca pels seu caràcter folk de la terra del compositor. És una obra molt completa, ja que els canvis més importants de l'obra es troben al compàs 3, 5 i 13 i el nombre auri al compàs 10, compàs on el violí II canvia el ritme de corxeres per un de negra – corxera en una tessitura greu.

Com hem pogut veure en aquestes obres, tot i que són detalls petits, gaire bé inaudibles per un auditori ja que és necessari tenir les partitures al davant per extreure conclusions, veiem que tenen una base matemàtica i que Fibonacci està present. L'única cosa que tenim segura d'aquest compositor és que sí coneixia els conceptes explicats anteriorment, el que no sabem és si era conscient de que els feia servir.

9. Composició

*"Sólo hay dos maneras de resumir la música: o es buena o es mala.
Si es buena no le das más vueltas, simplemente la disfrutas"*
Louis Armstrong

Al llarg d'aquest treball han estat moltes les preguntes de caràcter matemàtic que m'he fet i que he intentat contestar, però també m'he fet algunes de caire musical. Si la història de la música és capaç de recordar un nom, és perquè ha aportat alguna cosa nova a la música, perquè ha destacat per algun motiu; aconseguir un lloc és difícil i no només depèn de les ganes que té el compositor de que el seu treball sigui reconegut ja que existeixen factors condicionants com ara l'època, el públic, la cultura... tot això ja ho hem vist en altres punts.

En aquest apartat em poso a la pell d'un compositor de jazz i tinc com a objectiu compondre una peça de conjunt posant en pràctica el coneixement musical; desprès faré un anàlisi que estudiarà els conceptes matemàtics que hem vist. D'aquesta manera podré comprovar per mi mateixa si només centrant-me en composar les matemàtiques surten soles o cal pensar en elles quan s'escriu música. Aquest últim punt del treball Música i Matemàtiques pretenc fer una síntesi de tot el que hem vist amb un exemple propi.

9.1 The Black Face of the Strawberry Blues

Un tema pot ser de moltes maneres i pot transmetre infinitat de sentiments i emocions ja que el compositor escriu el que vol; pot ser la música és l'art més abstracte. La melodia, la veu que vola per sobre de les demés notes, la més lliure i esclava a l'hora pot ser trista, alegre, misteriosa, relaxant... És capaç d'expressar una gran varietat de matisos i característiques i pot ser estem parlant de la part que més lligada va a l'estat d'ànim o del que es vol dir. La melodia és esclava del ritme i produeix un efecte emocional que no calen les paraules per descriure'l. El ritme és el nombre de la música, la part comptable; sembla que les persones amb la melodia i el ritme tenim suficient però el compositor dóna més i utilitza colors, que són les tonalitats. El compositor segueix el pla per seduir la nostra oïda i un element important és l'harmonia, que va lligada a la melodia, el seu coixí, tot un conjunt de notes que donen suport a la veu melòdica. L'harmonia, que es considera una ciència, és un conjunt d'acords o de sons que sonen a la vegada; ella és capaç de fer que els nostres músculs es contreguin per la tensió. La dinàmica és el volum de la música; el *fff* per destacar unes notes i el *p* per relaxar-se.

M'agrada el jazz per la seva atmosfera tranquil·la i acollidora i he pensat que com a primera composició podria estar bé fer-ne un. Va ser difícil començar amb un llapis i uns pentagrames i cap frase que sonés bé al cap, per això vaig parlar amb el contra baixista, baixista, professor de música i amant del jazz Dick Them. Amb el programa on-line noteflight vaig començar a fer la base acústica, l'harmonia del tema; vaig fer una línia de baix amb acords no massa complicats i gràcies a l'Anna Gonzàlez, bona baixista i millor persona, vaig poder fer diverses proves modificant la frase que vaig pensar inicialment. El piano va ser el més complicat de tot; tot i que utilitzaba els mateixos acords que el baix, la combinació de mà esquerra i mà dreta va ser tot un repte. Quan vaig veure quines notes podien sonar ve vaig treballar només amb el baix i el piano, intentant que en les parts on el piano feia notes llargues o silencis el baix pogués fer algun tipus de motiu per donar dinamisme, com el que podem veure al compàs 2. Fa uns 3 anys em vaig adonar del paper que té el baix a la música moderna, les seves notes omplen la música des d'un segon pla per aquest motiu he trobat oportú fer del baix un protagonista de la peça, amb un *fff* durant tota l'obra, amb notes *staccato*, amb notes de pas entre un compàs i un altre... Amb el bateria i violinista Sergio Garcia vàrem posar en pràctica el paper de la bateria, que fa un ritme variat al llarg del tema repetint alguns passatges. Com la estructura del tema es: Intro – A – A' – B – Final, vaig pensar que al bateria podria utilitzar els plats chals o chalston i el crash en la A i A' i en la B el ride. Així hi ha una marca per part de la bateria de canvi i fa que l'oïda distingeixi que es una part nova del tema. Per últim vaig fer la melodia; un cop trobades les notes que quedaven bé amb el piano i el baix mirant els acords que ells feien vaig fer varies frases que no donaven gaire lloc en la composició. Sempre he pensat que la melodia havia de estar a l'altura de la base acústica perquè és amb el que la gent es queda i per tant havia de ser una novetat. Vaig imaginar- me que el tema el componia per acompanyar un curtmetratge de dibuixos animats muts i la combinació de tot això va ser aquesta composició.


♩= 130
Clarinet
Bass
Piano
Drums
f
ff
mf
mf
Cl
Bs
Pno
Dr
3

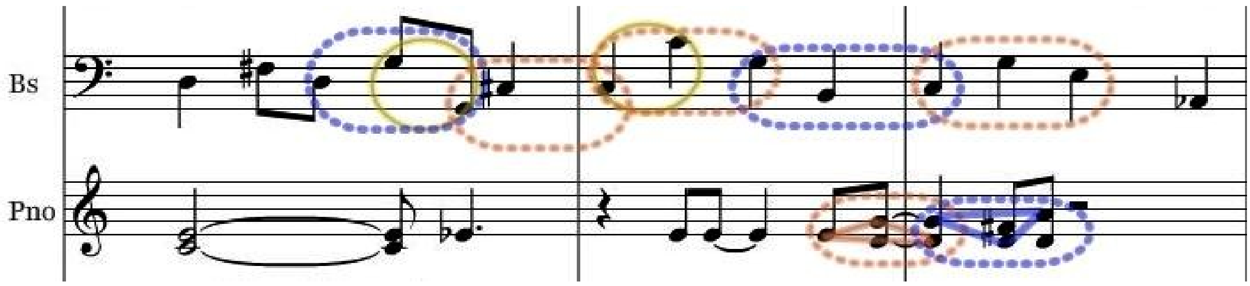

Cl
Bs
Pno
Dr
3
Cl
Bs
Pno
Dr
Cl
Bs
Pno
Dr


Cl
Bs
Pno
Dr
Cl
Bs
Pno
Dr
Cl
Bs
Pno
Dr

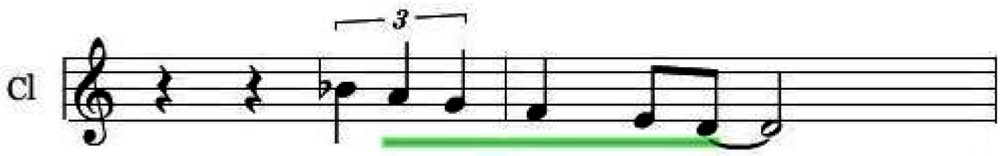
La meva composició està basada en un model matemàtic que he triar jo mateixa. A l'hora de compondre em vaig posar com objectiu que havien de sortir reflectits, com a mínim, la meitat dels apartats de pes que s'han tractat en el treball. Ha estat difícil ja que no tot el que hem tractat quedava bé en el conjunt de la peça i vaig haver de escollir bé els recursos i les propietats matemàtiques amb la fi de que la peça sigués agradable a l'oïda.

Els blocs més importants han estat l'escala de Fibonacci, la Proporció Àuria i les transformacions geomètriques. D'aquestes, com veurem ara, es manifesten dos.

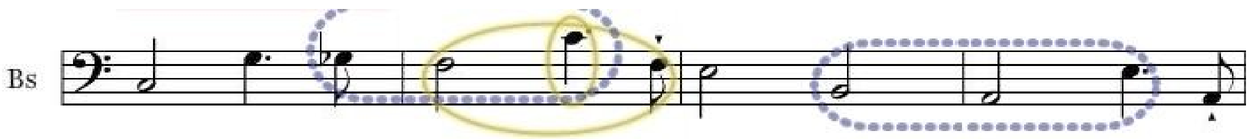
Si fem un cop d'ull a la peça trobem una gran quantitat de transformacions geomètriques com les que feia Bach en les seves peces; de color vermell i encerclades amb línia discontinua trobem les descendents i en blau discontinu les ascendents.



Tot i que m'hagués agradat que en algun copàs sortís la escala que va fer Bartók amb la successió de Fibonacci m'ha estat impossible perquè trencava amb la melodia totalment i li donaria un aire misteriós que estèticament no hagués quedat bé; tot i així, a les línies de color verd trobem motius de notes correlatives en cascada.

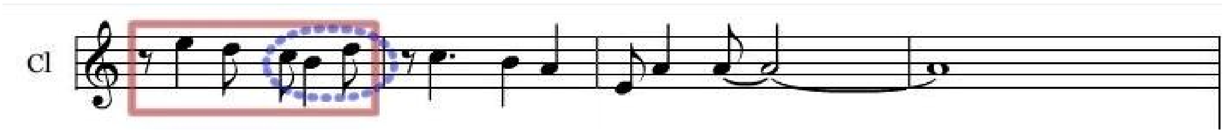


Els cercles de color groc que trobem en el baix són octaves, recordant els harmònics que parlàvem a l'apartat d'acústica i recordant a l'instrument, ja que personalment sempre m'ha fet gràcia que un instrument com el baix, que pot fer tantes octaves, mai aconsegueixi fer alguna aguda.

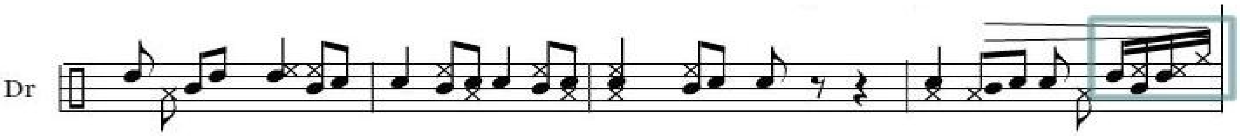


Si ara ens centrem amb Fibonacci i la seva escala, m'ha sobtat molt que tractant-se d'una composició curta i senzilla estigui present en totes les veus.

Primer començarem mirant la melodia del clarinet on trobem Fibonacci en el compàs 5 i 13, compassos totalment idèntics que es trobem enquadrats de color vermell.



La bateria té un motiu que repeteix en diversos compassos i que coincideix en el compas 8 – 13 i 21, enquadrat de color blau.



El baix és l'instrument on més trobem la successió: en el compàs 1 i 5 trobem un mateix motiu enquadrat en groc; si ens centrem en el compàs 3 i comencem a contar compassos, prenen com el compàs 3 el número 1 fins el 7, que seria el número 5, trobem que la figura enquadrada de color verd és idèntica i si parem atenció al compàs 17, el prenen com a 1 i contem fins al compàs 29, seria el número 13, tots dos nombres a la successió de Fibonacci. Hi ha un motiu que l'he assenyalat amb un cercle groc que no compleix aquesta successió, ja que el nombre de compassos és el 14 – 30 però és la mateixa figura repetida només canviant el la d'octava.

Per últim ens queda analitzar el nombre auri: la peça té un total de 45 compassos, contant la repetició. El procediment que vàrem utilitzar per saber on es trobava el moment culminant de l'obra és multiplicar el nombre total de compassos que té la composició pel nombre phi: 45 · 0'1618033988 = 7'3. Com podem veure, no és cap compàs important, ni molt menys el punt culminant de l'obra; si recordem l'apartat de del nombre d'or, dèiem que a les peces curtes aquesta regla no era acceptada i el punt culminant el trobàvem a la part simètrica de l'obra. Personalment, crec que el punt més important de la peça el trobem quan acaba la repetició de la B.

10. Conclusions

Han estat 4 mesos de treball que m'han deixat un molt bon sabor a la boca. Les preguntes que em vaig escriure en el full mare d'aquest treball de recerca, ara totes tenen una resposta. Encara que costi de creure, la música no podria viure sense unes matemàtiques. Tota la música en té: passant per l'acústica de l'instrument, per la notació musical, per les simfonies de Beethoven i per la cançó preferida dels ulls que ara estan llegint aquestes últimes línies.

Des del moment que ha existit la música, de la mà portava les matemàtiques, és a dir, que durant tota la història de la música, en el nostre cas, des del barroc de Bach acabant en el S. XIX amb Béla Bartók, han estat presents i nosaltres, escollint les partitures adients, les hem trobat. No ha estat un treball fàcil, moltes vegades podia mirar hores una partitura i no en treia cap suc, en canvi, en altres hi havien un munt de coses per comentar. Potser aquest és el motiu pel qual estic contenta, perquè com la informació sobre el tema és molt reduïda vaig haver de buscar-me la vida mirant partitures i descobrint peces noves (així que també he augmentat la meva discoteca de música clàssica).

Ara bé, no podem contestar un sí rotund a la pregunta *són conscients el músics que les seves composicions tenen números darrere de cada nota*? Perquè com hem pogut veure alguns en tenien consciencia i d'altres no.

Però el que de veritat és gratificant és el fet de que he compost la meva primera composició amb cara i ulls; el fet de que amb tot el que he après amb aquest treball a través de la informació i de les partitures d'altres compositors, sintetitzar-ho i poder fer la meva pròpia peça. La felicitat de compondre dos compassos un dia, i tres sistemes un altre que va arribar a la seva màxima expressió quan a l'hora d'analitzar-la trobava moltes més matemàtiques de les que em podia imaginar.

El que ha estat increïble és que dia a dia vaig poder conciliar el meu món més fosc i horrorós amb el meu món de plaer i felicitat.

Amb aquestes respostes, el follet que viu a la meva panxa ja pot dormir.

11. Bibliografia

- Llibres:

COLOMÉ, Josep; MAESTRO, Miquel Àngel. *Música.* Barcelona: Casals, 1997.

HALFFTER, Cristóbal; MARCO, Tomás. *Música y Cultura.* Zaragoza: Edelvivies, 1980.

WOLFF, Christoph. *Johann Sebastian Bach – El Músico Sabio (I) La Juventud Creadora.* Barcelona: Manontropo, 2000

WOLFF, Christoph. *Johann Sebastian Bach – El Músico Sabio (II) La Madurez del Genio.* Barcelona: Manontropo, 2000

ASHRON, Anthony. El armonógrafo, las Matemáticas de la música. Barcelona: Oniro. 2003

- URL'S:

http://www.sectormatematica.cl/musica/esferas.pdf
http://www.musicadabuten.com/critica/johann-sebastian-bach-la-ofrenda-musical [10-6-10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Ofrenda_musical [10 – 6- 10]
http://www.interletras.com/canticum/notacion.html [10 – 6 – 10]
http://www.abadiadesilos.es/canto.htm [10 – 6 – 10]
http://www.8planetas.com/ [12 – 6 – 10]
http://www.cancionero.net/articulos/articulo.aspt=frecuencias_de_las_notas_musicales&n=310 [12 – 6 – 10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Jean-Jacques_Rousseau [12-6-10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Johann_Gottfried_Herder [12 – 6 – 10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Herbert_Spencer [12 – 6 -10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Charles_Darwin [12 – 6 – 10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Nota_(sonido) [13 – 6 – 10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Cifrado_americano [13 6 - 10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Notaci%C3%B3n_musical#Representaci.C3.B3n_de_las_duraciones [13 – 6 – 10]
http://emmudytt.org/index2.php?option=com_content&do_pdf=1&id=40 [13 – 6 – 10]
http://xtec.cat/iesbellvitge/caixa/musica_es.htm [13 – 6 – 10]
http://www.slideshare.net/elorenzot/teoria-musica-n-1 [14 – 6 – 10]
ttp://apuntesanatomia.iespana.es/ppt/auditivo.pdf [19-7-10]
ttp://es.wikipedia.org/wiki/Intensidad_(m%C3%BAsica) [20 – 7 – 10]
ttp://jglezdukemdi.wordpress.com/2007/03/20/la-proporcion-aurea-y-la-musica/ [31 – 7 – 10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Fractal [6 – 8 – 10]
http://usuarios.multimania.es/sisar/fractales/ambitos.php [6 – 8- 10]
http://laberintos.itam.mx/files/137.pdf [7 – 8 – 10]
http://www.ite.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/bachillerato/arte/arte/pintura/fibonaci.htm [7 – 8 – 10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Leonardo_de_Pisa [7 - 8 - 10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Sucesión_de_Fibonacci [7 – 8 – 1 0]
http://www.telefonica.net/web2/imix/Oro_Matematico/sucesiones.pdf [8 – 8 - 10]
http://www.revista.unam.mx/vol.6/num7/art68/art68-1.htm [8 – 8 - 10]
http://www.logopediacentro.es/pdf/Sonidos.pdf [8 - 8 - 10]
http://www.mash-arkt.com/Inherent%20Dualities.pdf
http://es.wikipedia.org/wiki/Béla_Bartók [10-8-10]
http://www.epdlp.com/compclasico.php?id=953 [10-8-10]
http://es.wikipedia.org/wiki/Música_para_cuerda,_percusión_y_celesta [10-8-10]

- Dvd's i Cd's:

Genios de la Música – las grandes creaciones del hombre [DVD]. Digital Classics 2005.

Johann Sebastian Bach. Passió segons Mateu, BWV 244 [CD-ROM]. Enciclopèdia Catalana.

- Fotografies:
  http://cmc.cnba.uab.ar/limbo/images/mdf/resonadores.jpg [18-7-10]