



# ***EL BUMERANG***

## ***HISTÒRIA, TEORIA***

### ***/***

## ***EXPERIMENTACIÓ***

**TREBALL**  
**de**  
**RECERCA**

David Perea Pérez

2n BTX A

Tutor TdR: Carles Prieto

## ÍNDEX

1	INTRODUCCIÓ .....	5
2	OBJECTIUS.....	5
3	METODOLOGIA .....	6
4	HISTÒRIA DEL BUMERANG .....	8
4.1	CRONOLOGIA DEL DESNVOLUPAMENT DEL BUMERANG.....	8
4.1.1	ELS “KILLING STICK” .....	8
4.1.2	ELS BUMERANGS “FALCÓ” .....	9
4.1.3	ELS BUMERANGS DELS RITUALS .....	10
4.1.4	DESCOBRIMENT EUROPEU DELS BUMERANGS AUSTRALIANS.....	10
4.1.5	DESENVOLUPAMENT A NIVELL ESPORTIU DEL BUMERANG .....	11
4.1.6	ESQUEMA SOBRE LA HISTÒRIA DEL BUMERANG .....	11
4.2	ORIGEN ETIMOLÒGIC DE LA PARAULA BUMERANG.....	12
5	LA FÍSICA IMPLICADA EN EL VOL DEL BUMERANG ESPORTIU .....	13
5.1	DESCRIPCIÓ DE LA TRAJÈCTORIA DE VOL .....	13
5.2	LA FÍSICA QUE EXPLICA EL VOL I RETORN DEL BUMERANG .....	13
5.2.1	AERODINÀMICA.....	13
5.2.1.1	FORÇA DE SUSTENTACIÓ .....	13
5.2.1.2	CENTRE DE GRAVETAT.....	15
5.2.2	DINÀMICA ROTACIONAL .....	16
5.2.2.1	MOMENT D'INÈRCIA .....	16
5.2.2.1.1	TEOREMA DE STEINER .....	16
5.2.2.2	MOMENT DE FORÇA / ESFORÇ DE TORSIÓ.....	17
5.2.2.2.1	DIRECCIÓ I SENTIT DE L'ESFORÇ DE TORSIÓ (REGLA DE LA MÀ DRETA) ...	18
5.3	EXPLICACIÓ DEL VOL I RETORN DEL BUMERANG .....	18
5.3.1	ESQUEMA SUSTENTACIONS DEL BUMERANG .....	20
6	MODALITATS DE LLANÇAMENT .....	21
6.1	“ACCURACY” - PRECISIÓ 100 .....	21
6.2	“FAST CATCH” – VELOCITAT .....	21
6.3	“ENDURANCE” – RESISTÈNCIA .....	21
6.4	“MTA 100” - MÀXIM TEMPS A L'AIRE .....	22
6.5	“AUSTRALIAN ROUND” - ASSALT AUSTRALIÀ.....	22
6.6	“TRICK CATCH / DOUBLING 100” – ACROBÀTIC / DOBLES.....	22
7	CÀLCULS FÍSICS SOBRE EL BUMERANG .....	24
7.1	CENTRE DE GRAVETAT TEÒRIC DEL BUMERANG .....	24

7.1.1	CÀLCUL DEL C.G. DE FIGURES GEOMÈTRIQUES DESCOMPOSTES DEL BUMERANG	25
7.1.1.1	ÀREA SEMICIRCULAR.....	26
7.1.1.2	QUART D'ÀREA CIRCULAR .....	27
7.1.1.3	RECTANGLE.....	28
7.1.1.4	RECTANGLE DESCOMPOST .....	29
7.1.1.4.1	TRIANGLE.....	30
7.1.1.4.2	TRIANGLE.....	30
7.1.1.4.3	TRIANGLE.....	31
7.1.1.4.4	RECTANGLE.....	31
7.1.1.5	EXTRADÓS DE FORMA GENERAL.....	32
7.1.1.6	RECTANGLE DESCOMPOST .....	34
7.1.1.6.1	TRIANGLE.....	35
7.1.1.6.2	TRIANGLE.....	35
7.2	CENTRE DE GRAVETAT EXPERIMENTAL DEL BUMERANG .....	37
7.3	MOMENTS D'INÈRCIA .....	38
7.3.1	MOMENT D'INÈRCIA TEÒRIC DEL BUMERANG.....	38
7.3.1.1	ÀREA SEMICIRCULAR.....	42
7.3.1.2	QUART D'ÀREA CIRCULAR .....	42
7.3.1.3	RECTANGLE.....	43
7.3.1.4	RECTANGLE DESCOMPOST .....	44
7.3.1.4.1	TRIANGLE.....	45
7.3.1.4.2	TRIANGLE.....	45
7.3.1.4.3	TRIANGLE.....	46
7.3.1.4.4	RECTANGLE.....	46
7.3.1.5	EXTRADÓS DE FORMA GENERAL.....	47
7.3.1.6	RECTANGLE DESCOMPOST .....	47
7.3.1.6.1	TRIANGLE.....	48
7.3.1.6.2	TRIANGLE.....	48
7.3.2	MOMENT D'INÈRCIA EXPERIMENTAL DEL BUMERANG .....	49
7.3.3	MOMENT D'INÈRCIA D'UN CERCLE DE PAPER.....	55
7.3.3.1	MOMENT D'INÈRCIA TEÒRIC D'UN CERCLE DE PAPER.....	56
7.3.3.2	MOMENT D'INÈRCIA EXPERIMENTAL D'UN CERCLE DE PAPER.....	56
8	EXPERIMENTS SOBRE EL VOL DEL BUMERANG .....	60
8.1	METODOLOGIA D'EXPERIMENTACIÓ I D'OBTENCIÓ DE DADES .....	60
8.1.1	PROCÉS DE CONSTRUCCIÓ DEL BUMERANG PER ALS EXPERIMENTS .....	61

8.1.2	EXEMPLE D'ANÀLISI DEL VOL D'UN BUMERANG AMB TRACKER .....	62
8.1.2.1	MOSTRA D'ANÀLISI D'UN VOL AMB TRACKER.....	62
8.1.2.2	$\Delta r$ .....	69
8.1.2.3	$R_{vol}$ .....	69
8.1.2.4	$\Delta s_{vol}$ .....	70
8.1.2.5	$v_0$ .....	70
8.1.2.6	$v$ .....	70
8.1.2.7	$v_m$ .....	70
8.1.2.8	$a_m$ .....	71
8.1.2.9	$F_0$ .....	71
8.1.2.10	$F$ .....	71
8.1.2.11	$r_{bumerang}$ .....	72
8.1.2.12	$\omega_0$ .....	73
8.1.2.12.1	EXPLICACIÓ TEÒRICA DEL DESPLAÇAMENT VISUALMENT ONDULATORI DEL LED DEL BUMERANG .....	77
8.2	ESTUDI DE LES VARIABLES DELS EXPERIMENTS .....	79
8.2.1	ANGLE VERTICAL DE LLANÇAMENT .....	79
8.2.1.1	DADES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DE LES INCLINACIONS VERTICALS INCIALS DEL BUMERANG .....	79
8.2.1.2	GRÀFIQUES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DE L'ANGLE VERTICAL DE LLANÇAMENT .....	80
8.2.2	DIEDRES AMBDUES PALES .....	89
8.2.2.1	DADES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DELS DIEDRES D'AMBDUES PALES DEL BUMERANG .....	89
8.2.2.2	GRÀFIQUES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DELS DIEDRES DE LES DUES PALES 90	
8.2.3	INCIDÈNCIA PALA ESQUERRA .....	104
8.2.3.1	DADES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DE LA INCIDÈNCIA DE LA PALA ESQUERRA.....	104
8.2.3.2	GRÀFIQUES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DE LA INCIDÈNCIA DE LA PALA ESQUERRA.....	105
8.2.4	C.G. EXTREM ALA DRETA .....	119
8.2.4.1	DADES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DEL C.G. EXTREM PALA DRETA.....	119
8.2.4.2	GRÀFIQUES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DE LA INCIDÈNCIA DE LA PALA ESQUERRA.....	120
8.2.5	$\alpha$ DE LLANÇAMENT RESPECTE LA DIRECCIÓ DEL VENT .....	135
8.2.5.1	DADES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DE L' $\alpha_{vent}$ .....	135



8.2.5.2	GRÀFIQUES OBTINGUDES DE LA VARIACIÓ DE L' $\alpha$ vent .....	136
8.3	CONCLUSIONS FINALS.....	146
8.3.1	METODOLOGIA IDÒNIA PER A L'OBTENCIÓ DE LES DADES.....	147
9	REFERÈNCIES.....	148
10	AGRAÏMENTS.....	150

## 1 INTRODUCCIÓ

Amb aquest treball es vol informar al públic en general sobre el món desconegut però fascinant del bumerang, tan l'històric com el físic experimental.

Vaig realitzar aquest TdR primer de tot perquè el bumerang des de fa algun temps es va convertir en una de les meves aficions. També perquè estava motivat per estudiar una Física més entretinguda que l'estudiada al col·legi.

A més, vaig decidir escollir aquest Treball de Recerca perquè ja presentava alguns coneixements previs del tema, a més de saber llançar-los i confeccionar-los, ja que ja disposava d'eines i materials per construir-los.

I per últim, també l'he triat perquè sempre que estic intrigat per algun tema mostro molta ambició per conèixer el màxim possible sobre aquest.

## 2 OBJECTIUS

- Comprovació de la teoria física sobre el bumerang experimentalment.
- Classificació dels bumerangs de diverses formes, tant per propietats físiques com per característiques de vol.
- Intentar establir una relació entre totes les variables que influeixen en el vol d'un bumerang per tal de confeccionar una regla d'or bàsica a seguir que sigui capaç d'indicar quines han de ser les dades de cada variable en qualsevol cas per tal que el bumerang torni a les mans. O sigui, establir un càlcul perquè quan es vulgui modificar una dada el càlcul ens digui quines són les altres diferents possibilitats per tal de compensar la modificació i aconseguir que el bumerang també torni.
- Estudiar experimentalment el vol del bumerang mitjançant eines diverses com són un túnel de vent i programes informàtics, i extreure conclusions importants.
- A partir de les conclusions obtingudes de l'experimentació, dissenyar diversos bumerangs fent diverses proves virtuals i reals, i quan s'hagi confeccionat els dissenys definitius, comprovar la seva efectivitat en una competició esportiva real.

### 3 METODOLOGIA

- Per la recerca d'informació: consultar Internet, llibres que parlin sobre la temàtica, consultar la biblioteca de la UdG, professors de Física, enginyers, entrevistar especialistes en la matèria...
  - Per estudiar les variables de vol del bumerang experimentalment, el procediment serà el següent:
    - S'estudiarà teòricament les variables físiques implicades en el vol.
    - Un cop conegudes les variables que suposadament estan involucrades en el vol del bumerang, es procedirà a comprovar-les experimentalment.
    - Els experiments han consistit en modificar les variables de llançament del bumerang, i gravar el vol per posteriorment analitzar en què ha influenciat la modificació de la variable en general. Això s'ha realitzat amb el programa Tracker, que és capaç de seguir objectes i calcular velocitats i recorreguts a més d'altres magnituds. El que s'ha fet ha sigut enregistrar el llançament amb dues càmeres, una darrere el llançador i l'altra col·locada enfocant de forma perpendicular a el camp de visió de l'altra càmera, de tal forma que així es pugui obtenir les dades de les tres components del pla tridimensional analitzant els dos vídeos per separat i adjuntant les tres components per obtenir el mòdul, de per exemple, la velocitat del bumerang. Per fer que el bumerang resultés molt més destacable en el vídeo i el programa pogués analitzar el seu vol, es col·locaren diversos LED's d'alta intensitat connectats a petites piles de botó, i es va llançar el bumerang a la nit, per tal que el bumerang destaqués i fos molt visible.
- Si s'haguessin aconseguit els resultats desitjats s'hagués fet el següent:
- Un cop obtingudes totes les conclusions, es procediria a confeccionar els bumerangs de competició de les diferents modalitats, en diversos passos:
    - Es dissenyarien amb un programa de disseny gràfic.
    - S'analitzarien els seus comportaments virtualment amb el simulador Boomsim.

- Si virtualment s'hagués conclòs que el seu comportament és acceptable, es procediria a provar-lo a la realitat, fent els ajustaments finals per tal que el seu vol fos el correcte.
- Un cop fet el disseny del model definitiu, es confeccionaria i provaria en una competició.

## 4 HISTÒRIA DEL BUMERANG

Els bumerangs van sorgir de la intel·ligència de l'espècie humana fa més de 20000 anys per tal d'utilitzar-se com a eina de caça. Curiosament es trobaven repartits en molts indrets del planeta.

### 4.1 CRONOLOGIA DEL DESNVOLUPAMENT DEL BUMERANG

S'expliquen els orígens del bumerang i les modificacions que va patir aquest fins arribar a ser el bumerang que coneixem avui dia.

#### 4.1.1 ELS "KILLING STICK"

El primer objecte llancívol utilitzat pels aborígens va ser una arma pesada, anomenada "kylie" originàriament, i que ara ha adoptat el nom de "killing stick", ja que es tractava d'una arma de pes considerable, 6 a 7 kg., de fins a un metre d'allargada i corbada. La característica principal d'aquesta mena de bumerangs era que no tornaven al llançador ja que no tenien fets els perfils aerodinàmics. A més, es llançaven horitzontalment i podien arribar fins als 200 m.



*Imatge 4.1.1.1. Killing stick més antic, trobat a Oblazoma*

El "killing stick" datat més antigament és un procedent de

Polònia, Oblazoma, fa uns 23000 anys. Sembla ser que estava fet d'un ullal de mamut tallat. Tot i que es té acceptat que és un "killing stick", els experts han identificat uns perfils aerodinàmics, però opinen que tot i així no tornava. A més jo penso que tampoc tornava, ja que si tornés es podria considerar gairebé un suïcidi, perquè al pesar tant per matar, si tornés al llançador probablement li provocaria molt mal alhora d'escapçar-lo, si és que fossin capaços.

Els killing stick es trobaven en tot el món, però Austràlia sempre ha agafat com a símbol el bumerang ja que encara els aborígens els utilitzen i això fa pensar que ells són els creadors, tot i no ser així. En canvi sí que es creu que a Austràlia es van crear els bumerangs que retornaven.



*Imatge 4.1.1.2. Killing stick fet amb un ullal de mamut*

#### 4.1.2 ELS BUMERANGS “FALCÓ”

Posteriorment, a través d'anar variant experimentalment els perfils dels bumerangs i sent creatius, els aborígens van desenvolupar uns bumerangs que retornaven al llançador.

S'han anomenat així perquè aquesta era la funció d'aquesta mena de bumerangs, assemblar-se a un falcó. S'utilitzaven per caçar de forma “indirecta”. El procediment de caça era el següent:



*Imatge 4.1.2.1. Exemplars de bumerang falcó*

- Un aborígen australià imitava el so d'un falcó.
- Així doncs un altre aborígen llançava un bumerang poc pesat (màxim 300 gr.) per sobre d'una bandada d'ocells per simular el vol d'un falcó. Llavors els ocells, davant del suposat perill, es precipitaven cap avall per fugir de la presència del falcó.
- Tot seguit els aborígens col·locaven una mena de xarxa per tal que quan baixessin poder-los capturar.

A més també els utilitzaven per caçar directament, per exemple rat-penats, com es mostra en el següent vídeo: <http://www.youtube.com/watch?v=9DDHxOqFkAs>

#### 4.1.3 ELS BUMERANGS DELS RITUALS

També van sorgir els bumerangs que simplement retornaven al llançador i s'utilitzaven en rituals i cerimònies. A més els aborígens els utilitzaven com a joguina per divertir-se.

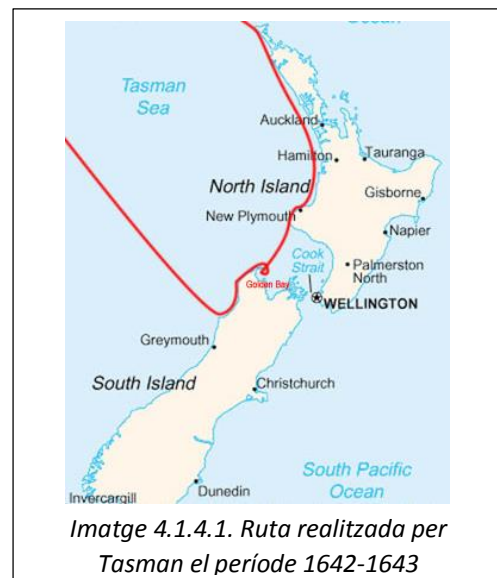


*Imatge 4.1.3.1. Exemplar d'un bumerang pels rituals*

#### 4.1.4 DESCOBRIMENT EUROPEU DELS BUMERANGS AUSTRALIANS

Inicialment van ser els espanyols qui van aproximar-se a Austràlia, quan Luis Váez de Torres, el 1606, va passar per l'estret que separa Nova Guinea d'Austràlia i avui dia porta el seu nom.

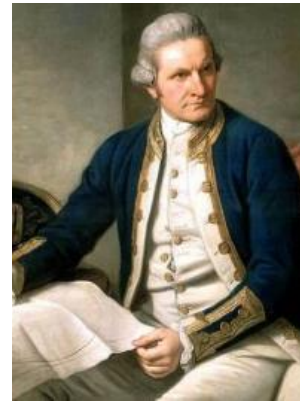
Els primers navegants realment importants van ser holandesos, els quals al segle XVII van realitzar diverses expedicions que passaven per la vora d'Austràlia. Entre molts navegants holandesos, el més destacat fou Abel Janszoon Tasman, el qual cap al 1642 va descobrir la Terra de Van Diemen (actual Tasmània), Nova Zelanda i el cap de Carpentaria. Més tard, William Dampier fou el primer europeu que ens va deixar per escrit una descripció dels bumerangs australians. En el seu gran viatge de



*Imatge 4.1.4.1. Ruta realitzada per Tasman el període 1642-1643*

1688 va explorar parts de la costa oest d'Austràlia, llavors conegut com "New Holland". Dampier en el seu document informà sobre l'aspecte dels aborígens i d'alguns dels seus utensilis, entre ells el bumerang. Va dir que el bumerang era fet de fusta i presentava una forma com un matxet molt gran.

Llavors al segle XVIII, en concret el 1770, els més importants van ser els anglesos. James Cook, que venia de Nova Zelanda, desembarcà en l'extrem sud de la costa australiana i inicià una important exploració durant la qual va recórrer centenars de quilòmetres de platges mai vistes, fins arribar al Cap York i comprovar finalment, al creuar l'estret de Torres, que Nova Guinea i Austràlia eren dos illes separades. Cook va anomenar la costa oriental que havia descobert amb el nom de Nova Gales del Sud (NSW), en nom de la corona britànica. Cook va donar nom a una zona paradisiàca també, Botanic Bay, on posteriorment es deportà molts presoners anglesos. Més tard es van deportar a Sydney Cove, una colònia penal establerta per Arthur Phillip.

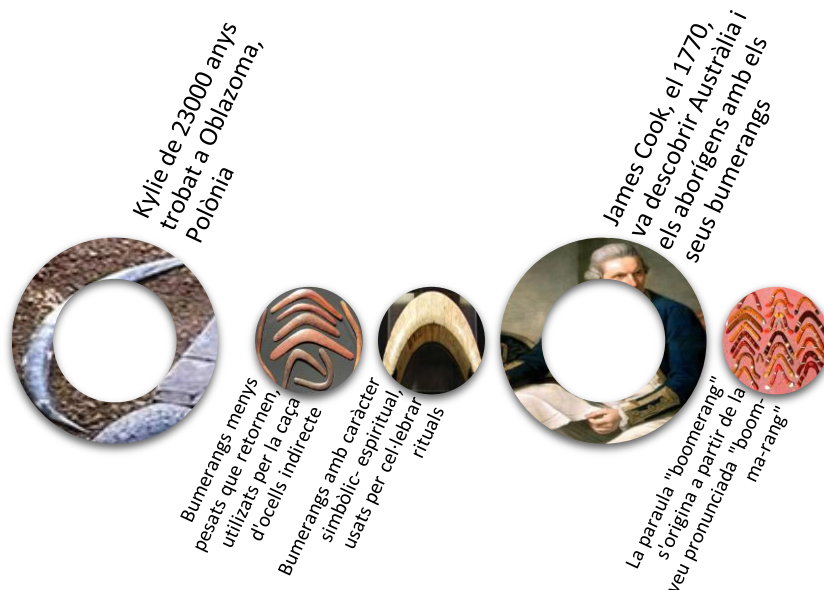


Imatge 4.1.4.2. Capità James Cook

Cook a més va detallar amb molta cura el mar, estudià el clima, la configuració del sòl, la flora i la fauna. També va establir contacte amb els indígenes i redactà unes memòries interessants.

#### 4.1.5 DESENVOLUPAMENT A NIVELL ESPORTIU DEL BUMERANG

#### 4.1.6 ESQUEMA SOBRE LA HISTÒRIA DEL BUMERANG





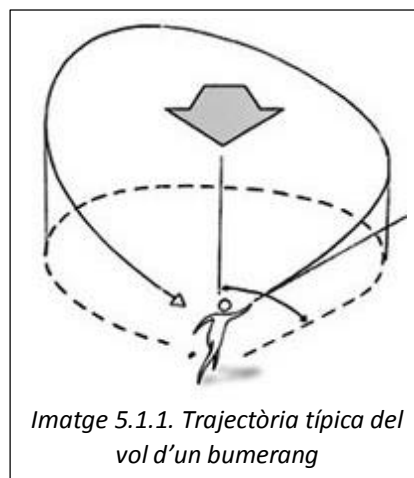
## 4.2 ORIGEN ETIMOLÒGIC DE LA PARAULA BUMERANG

La paraula “bumerang” prové de la paraula anglesa “boomerang”, la qual prové directament de la veu pronunciada australiana “boom-ma-rang”, que significa “retorna bastó”. Els aborígens de Dharuk, la regió de Sydney, cridaven aquesta paraula a l’hora de llançar el bumerang. Altres autors creuen que l’origen de la paraula prové del terme “boomari”, que significa “vent”.

## 5 LA FÍSICA IMPLICADA EN EL VOL DEL BUMERANG ESPORTIU

### 5.1 DESCRIPCIÓ DE LA TRAJÈCTORIA DE VOL

El bumerang esportiu a l'hora de ser llançat segueix una trajectòria aproximadament circular, en més o menys mesura depenent de diversos factors i modalitats de llançament. En la modalitat de Larga Distància el bumerang segueix una trajectòria en forma de llàgrima per tal d'aconseguir la màxima distància. Actualment els bumerangs esportius estan dissenyats amb molta cura i descriuen un vol amb poques irregularitats, és a dir, pugen fins a una altura



*Imatge 5.1.1. Trajectòria típica del vol d'un bumerang*

màxima progressivament mentre a l'hora realitzen la trajectòria circular fins a tornar al lloc del llançament amb una desacceleració bastant constant.

En canvi, el Kylie Stick segueix una trajectòria rectilínia, ja que la funció que tenia en el seu temps era la de colpejar a una presa a distància.

### 5.2 LA FÍSICA QUE EXPLICA EL VOL I RETORN DEL BUMERANG

#### 5.2.1 AERODINÀMICA

##### 5.2.1.1 FORÇA DE SUSTENTACIÓ

La sustentació és una força aerodinàmica que es genera sobre un cos que es desplaça per l'aire, de direcció perpendicular a la de la velocitat del corrent incident, és a dir, aproximadament és de direcció perpendicular a l'ala del bumerang. Les ales dels avions, ocells i bumerangs generen aquesta força per volar, mantenir-se a l'aire, és a dir sustentat-se.

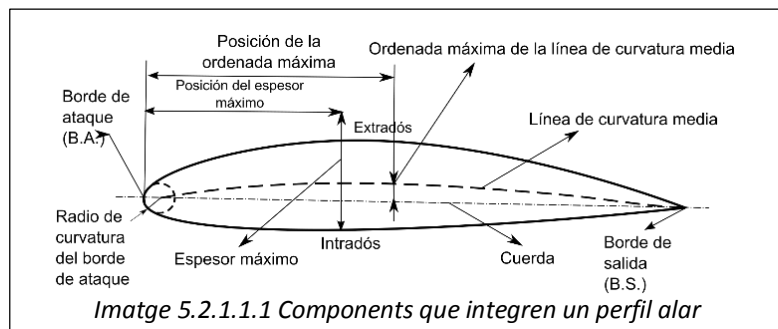
La sustentació es crea gràcies a una diferència de pressions, de tal forma que la part inferior de l'ala (intradós) genera major pressió cap a dalt que la part superior de l'ala (extradós) genera cap a baix. Que hi hagi pressions diferents a l'extradós i a l'intradós de l'ala és degut a una diferència de velocitats relatives de l'aire. Per comprendre això, s'ha de saber que a quanta major velocitat es desplaça l'aire per l'ala, menor pressió genera.

Primer de tot s'ha de conèixer la forma del perfil alar d'un bumerang, que és la que es mostra a la Imatge 5.2.1.1.1.

Llavors la explicació de la sustentació del bumerang és la següent:

- A l'extradós i l'intradós de l'ala es generen unes pressions degut a les velocitats relatives de les partícules de l'aire a l'hora de recórrer la superfície alar.
- A l'extradós es produeix una menor pressió ja que hi ha una major superfície a recórrer per l'aire en el mateix temps, el que vol dir que es desplaça a major velocitat que a l'intradós. Llavors es produirà una força perpendicular a la superfície de sentit extradós a intradós.
- A l'intradós es produeix també una pressió, però superior degut a la menor velocitat relativa de les partícules de l'aire a causa de la menor superfície a recórrer en el mateix temps. Llavors es produirà una força perpendicular a la superfície de sentit intradós a extradós.
- Llavors aquestes dues forces produïdes acaben sumant-se en una de resultant que va en sentit intradós a extradós, es a dir, cap al centre de la circumferència descrita per la trajectòria del bumerang.

Com a resultat de tot això l'ala del bumerang genera una força perpendicular des de l'extradós fins a l'exterior.



Per tant, la força de sustentació és generada a causa d'una velocitat relativa de l'aire més baixa a l'intradós de l'aire que en l'extradós.

La força de sustentació es pot calcular amb la següent fórmula:

$$L = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_L$$

On:

- $L$ = és la força de sustentació, expressada en newtons ( $N$ ).
- $\rho$ = és la densitat de l'aire, expressada en  $kg/m^3$ .
- $v$ = és la velocitat de desplaçament, expressada en  $m/s$ .
- $A$ = és la superfície alar, expressada en  $m^2$ .
- $C_L$ = és el coeficient de sustentació i és adimensional.

#### 5.2.1.2 CENTRE DE GRAVETAT

El centre de gravetat (c.g.) és el punt d'aplicació de la resultant de totes les forces de gravetat que actuen sobre les distintes masses materials d'un cos. A més, es pot trobar fora del cos, sent exemple una esfera buida, on el seu c.g. es situa al centre. Per calcular el centre de gravetat d'un bumerang es pot fer teòricament o pràcticament. Es calcula de les dues formes a l'apartat CÀLCULS del BUMERANG. A més, les coordenades del c.g. del bumerang coincideixen amb el seu centre de rotació. Les fórmules necessàries són les següents:

$$C_x = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m}$$

$$C_y = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m}$$

$$m = d \cdot S$$

On:

- $C_x$ = és la coordenada x del c.g. del bumerang. S'expressa en  $cm$  per comoditat.
- $C_y$ = és la coordenada y del c.g. del bumerang. S'expressa en  $cm$  per comoditat.
- $m_i$ = és la massa de la part descomposta del bumerang, expressada en  $kg$ .
- $m$ = és la massa del bumerang, expressada en  $kg$ .
- $x_i$ = és la distància x del c.g. de la part descomposta a l'eix de referència principal del bumerang, expressada en  $cm$ .
- $y_i$ = és la distància y del c.g. de la part descomposta a l'eix de referència principal del bumerang, expressada en  $cm$  per comoditat.

## 5.2.2 DINÀMICA ROTACIONAL

### 5.2.2.1 MOMENT D'INÈRCIA

El moment d'inèrcia ens diu com de difícil és rotar un cos des d'algun eix de rotació. Un bumerang que rodi des del centre de gravetat com a eix de rotació li serà més fàcil presentar la rotació si té un BAIX moment d'inèrcia.

Quan es parla de partícules (Fig. 3), la fórmula que descriu el moment d'inèrcia és la següent:

$$I = mr^2$$

On:

- $I$  = és el moment d'inèrcia, expressat en  $kg \cdot m^2$ .
- $m$  = és la massa de la partícula, expressada en  $kg$ .
- $r$  = és la distància de la partícula de massa a l'eix de rotació, expressada en  $m$ .

Però per trobar el moment d'inèrcia del bumerang seria convenient resoldre la integral sobre la massa següent:

$$I = \int dI = \int_0^M r^2 dm$$

A l'apartat de CÀLCULS DEL BUMERANG es troba el moment d'inèrcia del bumerang mitjançant un experiment i contrastant el valor obtingut amb el valor teòric que es calcula.

#### 5.2.2.1.1 TEOREMA DE STEINER

Quan observem el vol del bumerang, podem veure que a més de rodar sobre ell mateix, també fa un moviment circular, el qual és el que recorre per tal de tornar al llançador. Per tant el bumerang, a l'hora de volar, es mou vers l'eix exterior i també vers l'eix que té origen en el seu centre de masses. Llavors, si calculem el moment d'inèrcia del bumerang, haurem trobat el que realitza quan gira, però ens faltarà afegir el que sorgeix al retornar cap al llançador. Però gràcies al Teorema de Steiner es pot trobar el moment d'inèrcia resultant. El Teorema és el següent:

$$I_T = I_b + m \cdot D^2$$

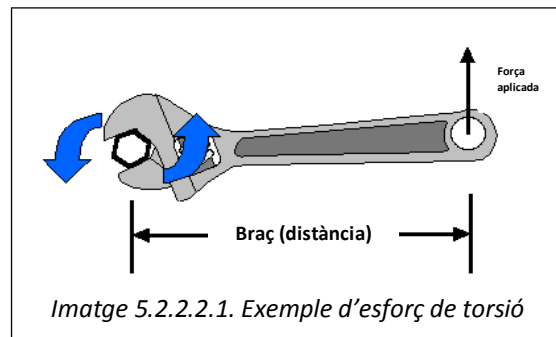
On:

- $I_T$  = és el moment d'inèrcia total, expressat en  $kg \cdot m^2$ .
- $I_b$  = és el moment d'inèrcia del bumerang, expressat en  $kg \cdot m^2$ .
- $m$  = és la massa del bumerang, expressada en kg.
- $D$  = és la distància del centre de massa del bumerang a l'origen de coordenades de l'eix exterior, vers el qual segueix per retornar. S'expressa en m.

A més s'utilitza el Teorema de Steiner a l'apartat CÀLCULS DEL BUMERANG per tal de trobar els moments d'inèrcia de les parts descompostes del bumerang respecte el c.g. del bumerang.

#### 5.2.2.2 MOMENT DE FORÇA / ESFORÇ DE TORSIÓ

L'esforç de torsió és la capacitat d'una força aplicada a un punt per fer rotar a un sòlid rígid en un eix de rotació. En el cas del bumerang, un moment de força provoca el canvi de direcció en el seu avanç, el que genera la precessió giroscòpica, que és la causant del retorn del bumerang en forma circular.



L'esforç de torsió s'expressa de la següent manera:

$$\tau = F \times r$$

On:

- $\tau$  = és el moment de força, expressat en  $N \cdot m$ .
- $F$  = és la força aplicada en un punt, expressada en  $N$ .
- $r$  = és la distància perpendicular des del centre de rotació fins la línia d'acció de la força aplicada, expressada en  $m$ .

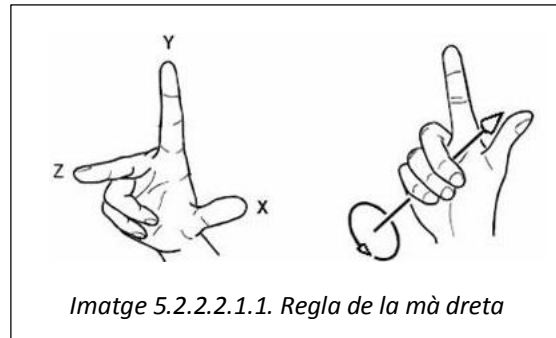
La magnitud de l'esforç de torsió és definida de la següent forma:  $|\tau| = |F| \cdot |r| \cdot \sin \theta$

On:

- $|\tau|$  = és el mòdul del moment de força, expressat en  $N \cdot m$ .
- $|F|$  = és el mòdul de la força aplicada en un punt, expressada en  $N$ .
- $|r|$  = és el mòdul de la distància des del centre de rotació al punt d'aplicació de la força, expressada en  $m$ .
- $\sin \theta$  = és l'angle comprès entre el vector força i el vector distància.

#### 5.2.2.2.1 DIRECCIÓ I SENTIT DE L'ESFORÇ DE TORSIÓ (REGLA DE LA MÀ DRETA)

La direcció de l'esforç de torsió és perpendicular al vector força i al vector distància. Per conèixer la direcció i el sentit de l'esforç de torsió s'aplica la regla de la mà dreta. Un exemple ben clar és a l'hora de descargolar o descargolar un cargol, on si girem cap a la dreta el descargolarem i a l'inrevés.



### 5.3 EXPLICACIÓ DEL VOL I RETORN DEL BUMERANG

El bumerang, quan es troba a l'aire, gira amb una certa velocitat angular. Quan parlem d'un bipala, les dues pales generen força de sustentació, però no del tot cap a dalt com els avions, sinó que amb una inclinació determinada. Això fa que es generi força suficient per mantenir el bumerang volant. A més, una part de la sustentació genera un esforç de torsió, que fa que el bumerang canvi la direcció de l'eix de rotació constantment, produint la precessió giroscòpica, que fa que el bumerang retorni amb un vol circular. Això es degut a que les dues pales no generen la mateixa sustentació perquè estan en rotació. El que succeeix és que una pala gira cap al sentit del desplaçament i l'altre cap al sentit contrari. Per tant fa que la velocitat de la pala que gira en el sentit del desplaçament presenti la següent velocitat:

$$v_{total} = v_{bumerang} + \omega R$$

I la velocitat que presenta la pala que gira en sentit contrari és la següent:

$$v_{total} = v_{bumerang} - \omega R$$

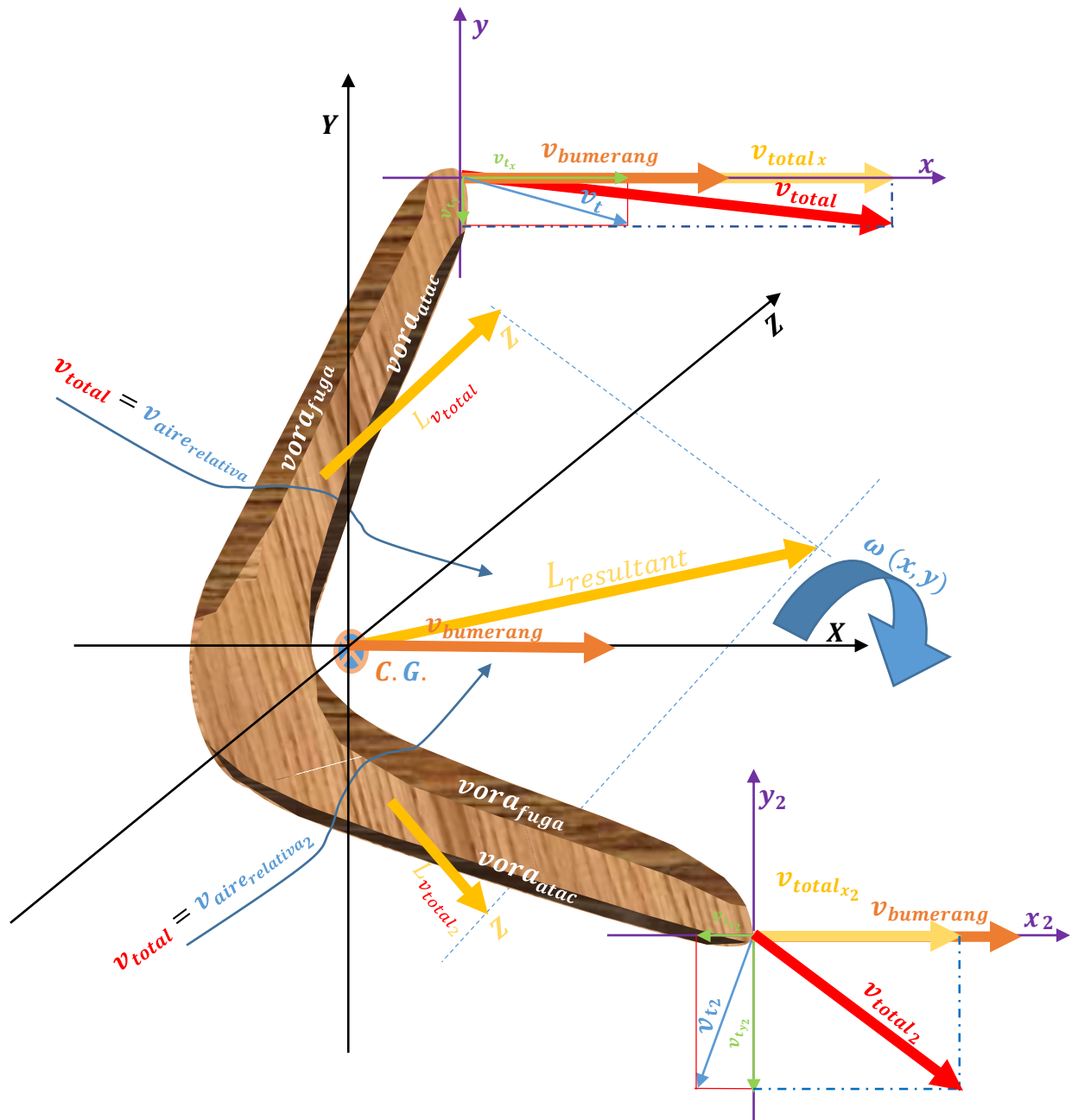
On:

- $v_{total}$  = és la velocitat relativa que duu la pala, expressada en  $m/s$ .
- $v_{bumerang}$  = és la velocitat a la que es mou el bumerang, expressada en  $m/s$ .
- $\omega$  = és la velocitat de rotació, expressada en  $rad/s$ .
- $R$  = és el radi del bumerang, expressat en  $m$ .
- $\omega R$  = és la velocitat tangencial de l'ala, expressada en  $m/s$ .

Llavors, sabent que la sustentació és directament proporcional a la velocitat al quadrat, com que la velocitat a les pales és diferent, la força de sustentació també ho serà i es produirà un esforç de torsió, el que farà que el bumerang agafi una trajectòria de retorn circular.



## 5.3.1 ESQUEMA SUSTENTACIONS DEL BUMERANG



## 6 MODALITATS DE LLANÇAMENT

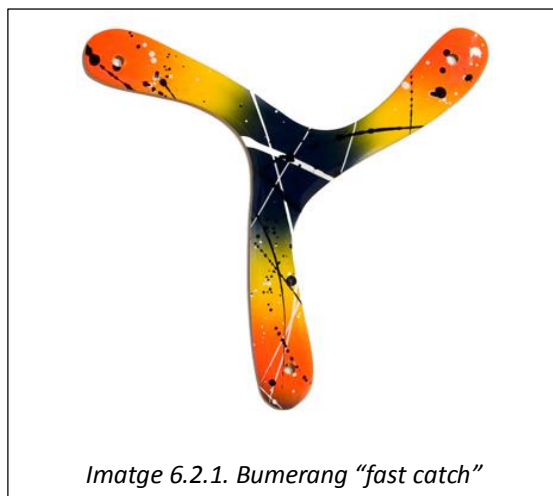
Hi ha diversos bumerangs, els quals s'empren per finalitats diverses en les competicions. A continuació explicaré totes les modalitats que existeixen breument. Una regla bàsica que s'ha de complir a totes les modalitats és que s'ha de llançar el bumerang com a mínim a 20 m de distància.

### 6.1 “ACCURACY” - PRECISIÓ 100

La prova es realitza en un cercle de 20 m de diàmetre, amb cercles circumdants de 2, 4, 6, 8 i 10 m. Consisteix en llançar el bumerang i aconseguir que caigui en el cercle interior més a prop de l'inici possible. Les puntuacions van de 10 punts si cau a 2m, fins a 2 punts si cau a 10 m. Cada llançador té opció a 5 rondes de 2 llançaments, sent la puntuació màxima 100 punts.

### 6.2 “FAST CATCH” – VELOCITAT

La prova també es realitza en un cercle de 20 m de diàmetre, i consisteix a llançar i atrapar el bumerang cinc vegades en el temps màxim d'un minut. Es llença des del centre del cercle, però es pot escapar on es desitgi.



### 6.3 “ENDURANCE” – RESISTÈNCIA

Les normes són les mateixes que a la prova anterior, però consisteix en realitzar el màxim nombre de llançaments vàlids en cinc minuts.

#### 6.4 “MTA 100” - MÀXIM TEMPS A L'AIRE

L'objectiu és aconseguir que el bumerang es mantingui a l'aire el màxim temps possible abans de ser recollit. La prova es realitza en un cercle de 100 m de diàmetre, on el bumerang pot ser recollit en qualsevol punt a dins d'aquest cercle. Es realitzen cinc llançaments per competidor, i puntua el que major temps presenta.



Imatge 6.4.1. Atleta llançant un “MTA”



Imatge 6.4.2. Bumerangs “MTA”

#### 6.5 “AUSTRALIAN ROUND” - ASSALT AUSTRALIÀ

A aquesta prova es comptabilitza tant la distància, la precisió, com l'escapçada del bumerang. Es duu a terme en un cercle de 50 m de diàmetre, on per aconseguir puntuació tant en precisió com en distància cal realitzar un vol mínim de 30 m. Per l'atrapada, només cal un vol mínim de 20 m.

#### 6.6 “TRICK CATCH / DOUBLING 100” – ACROBÀTIC / DOBLES

La prova acrobàtica es realitza a dins d'un cercle de 20 m de diàmetre. El jugador realitza 10 llançaments amb un sol bumerang, i uns altres cinc amb dos bumerangs. A cada llançament, el jugador ha de realitzar l'atrapada d'una forma distinta i seguint un ordre. Cada forma té una puntuació diferent. Les formes d'escapçada són les següents:



Imatge 6.6.1. Atleta participant en una prova de “Double Trick Catch”

1-Mà dreta - 2 punts

2-Mà esquerra - 2 punts

3-Darrere de l'esquena - 3 punts

4-Per sota d'una cama - 3 punts

5-"Eagle Catch" (como les garres d'una àliga) - 4 punts

6-"Hackey Catch" (donar una puntada al bumerang y agafar-lo) - 6 punts

7-"Tunnel" (entre les cames) - 6 punts

8-Una mà darrere l'esquena - 7 punts

9-Una mà per sota una cama - 7 punts

10-Amb els peus o les cames - 10 punts

Màxima puntuació per a tirs simples: 50 punts

En aquest enllaç es mostra una gravació d'un campionat de "Trick Catch" on apareixen dos atletes de l'equip de USA: <http://www.youtube.com/watch?v=YAZ62BQvyHQ>

## 7 CÀLCULS FÍSICS SOBRE EL BUMERANG

### 7.1 CENTRE DE GRAVETAT TEÒRIC DEL BUMERANG

El c.g. d'un bumerang es pot conèixer a partir de càlculs teòrics o d'un experiment pràctic. Es realitzaran les dues formes per tal de comparar-les entre elles i concloure quina és més efectiva.

Per calcular el c.g. amb les fórmules, és necessari col·locar un eix de referència per calcular la posició del c.g. en coordenades bidimensionals (x, y). Llavors el següent pas és descompondre el bumerang en parts geomètricament estudiades i que presenten una fórmula per calcular el SEU c.g. Després el que cal fer és traslladar les coordenades del c.g. de la figura que forma part del bumerang a l'eix de referència principal del bumerang, ja que la figura que s'estudia es coneix el c.g. respecte un eix de coordenades individual. Coneixent les coordenades del c.g. de la part descomposta, es necessari calcular la superfície, utilitzant les fórmules conegudes per a cada figura. S'ha de remarcar que per fer el càlcul es considera el bumerang en dues dimensions, o sigui només estudiant la seva geometria, com si fos una làmina. El resultat final no sortirà massa alterat ja que el bumerang presenta poc volum perquè té un gruix de pocs mil·límetres.

Tot seguit, al conèixer la superfície, podem aplicar la fórmula:

$$m = d \cdot S$$

Tot i que ens faltaria conèixer la densitat, a l'hora de trobar les coordenades del centre de gravetat del bumerang amb les fórmules:

$$C_x = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m}$$

$$C_y = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m}$$

Estem de sort ja que al trobar-se al numerador la massa multiplicant i al denominador la massa sola, es podrà procedir a eliminar les densitats de la fórmula.

Llavors amb els centres de gravetat de les parts descompostes trobats a l'apartat 4.1.1. es realitza el següent procediment per trobar el c.g. del bumerang:

$$C_x = \frac{\varnothing \cdot (0,77 \cdot 0 + 6,66 \cdot 0 + 0,61 \cdot 0,21 + 7,42 \cdot 3,44 + 0,45 \cdot 0,84 + 0,7 \cdot 6,98)}{\varnothing \cdot (0,77 + 6,66 + 0,61 + 7,42 + 0,45 + 0,7)}$$

$$C_x = 1,86 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{\varnothing \cdot (0,77 \cdot 7,6 + 6,66 \cdot 4,4 + 0,61 \cdot 0,97 + 7,42 \cdot 0,55 + 0,45 \cdot 1,77 + 0,7 \cdot 0,04)}{\varnothing \cdot (0,77 + 6,66 + 0,61 + 7,42 + 0,45 + 0,7)}$$

$$C_y = 2,45 \text{ cm}$$

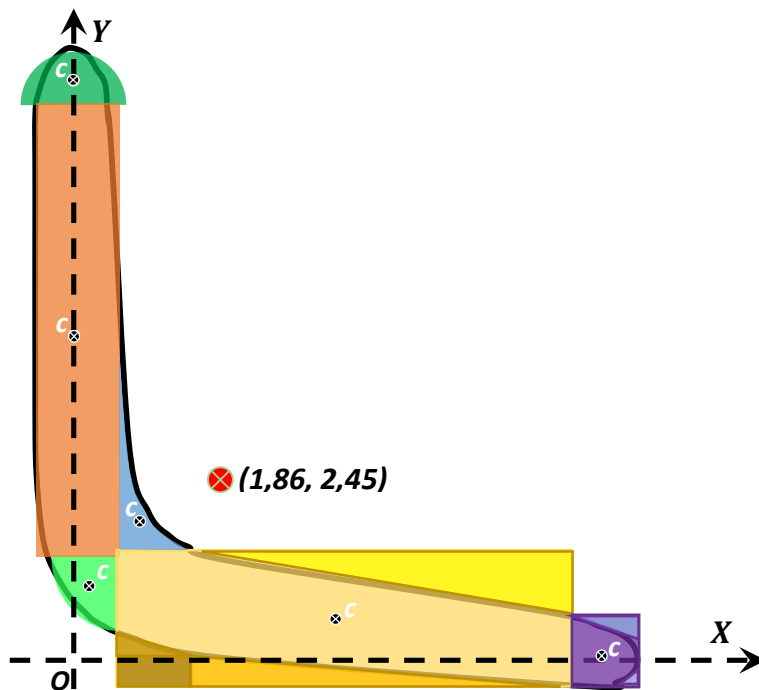
Per tant, el c.g. de la part que pertany al bumerang correspon a les coordenades **(1,86, 2,45)**, respecte l'eix principal del bumerang. El c.g. del bumerang de mida real es troba a les coordenades següents:

$$(1,86, 2,45) \cdot 2,89$$

$$C_{bumerang} = (5,38, 7,08)$$

#### 7.1.1 CÀLCUL DEL C.G. DE FIGURES GEOMÈTRIQUES DESCOMPOSTES DEL BUMERANG

En el dibuix següent, **el bumerang es representat a una mida més petita que la real**, ja que una línia que travessa tota l'ala mesura 7,37 cm, i al bumerang real 21,3 cm. Això fa que el següent dibuix del bumerang estigui a escala **1: 2,89 cm**.



Havent descompost la geometria del bumerang en figures de geometria coneguda, es procedeix a calcular els c.g. de gravetat de les parts descompostes.

## 7.1.1.1 ÀREA SEMICIRCULAR

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'una semicircumferència són les següents:

On:

- $C_x$  = és la coordenada x del c.g. de l'àrea descomposta. S'expressa en *cm* per comoditat.
- $C_y$  = és la coordenada y del c.g. de l'àrea descomposta. S'expressa en *cm* per comoditat.
- $S$  = és la superfície, expressada en  $cm^2$  per comoditat.
- $r$  = és el radi de la semicircumferència, expressada en *cm* per comoditat.

$$C_x = 0$$

$$C_y = \frac{4r}{3\pi}$$

$$S = \frac{\pi r^2}{2}$$

Tot i que la part que representa del bumerang no encaixa molt bé, he considerat que l'error que produirà és negligible ja que és lleu.

Llavors:

$$C_x = 0 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{4 \cdot 0,7}{3\pi} \quad C_y = 0,3 \text{ cm}$$

$$S = \frac{\pi \cdot 0,7^2}{2} \quad S = 0,77 \text{ cm}^2$$

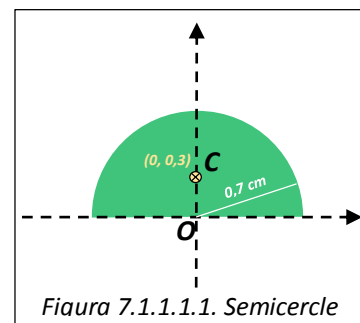


Figura 7.1.1.1.1. Semicercle

Per tant, el c.g. de l'àrea semicircular és present en les coordenades **(0, 0,3)** respecte l'eix de la part descomposta, en aquest cas l'àrea semicircular.

En canvi, el c.g. de l'àrea semicircular es manifesta en les coordenades **(0, 7,3 + 0,3)**, per tant **(0, 7,6)** respecte l'eix principal del bumerang.

## 7.1.1.2 QUART D'ÀREA CIRCULAR

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un quart d'àrea circular són les següents:

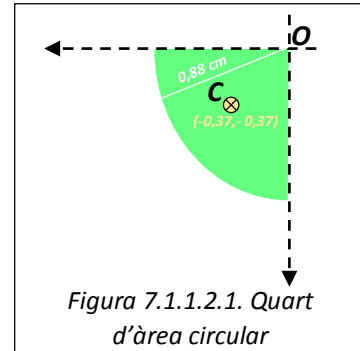
On:

- $r$  = és el radi del quart de l'àrea circular, expressada en cm per comoditat.

$$C_x = \frac{4r}{3\pi}$$

$$C_y = \frac{4r}{3\pi}$$

$$S = \frac{\pi r^2}{4}$$



Llavors:

$$C_x = \frac{4 \cdot (-0,88)}{3\pi} \quad C_x = -0,37 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{4 \cdot (-0,88)}{3\pi} \quad C_y = -0,37 \text{ cm}$$

$$S = \frac{\pi \cdot 0,88^2}{4} \quad S = 0,61 \text{ cm}^2$$

Per tant, el c.g. del quart d'àrea circular és present en les coordenades **(-0,37, -0,37)** respecte l'eix de la part descomposta, en aquest cas el quart d'àrea circular.

En canvi, el c.g. del quart d'àrea semicircular es manifesta en les coordenades **(-0,37 + 0,58, -0,37 + 1,34)**, per tant **(0,21, 0,97)** respecte l'eix principal del bumerang.



## 7.1.1.3 RECTANGLE

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un rectangle són les següents:

$$C_x = 0$$

$$C_y = \frac{h}{2}$$

$$S = b \cdot h$$

On:

- $h$  = és l'altura del rectangle.  
S'expressarà en *cm*.
- $b$  = és la base del rectangle.  
S'expressarà en *cm*.

Encara que sobresurti una mica alguna vora del rectangle, els errors els considero poc influenciadors del resultat final.

Llavors:

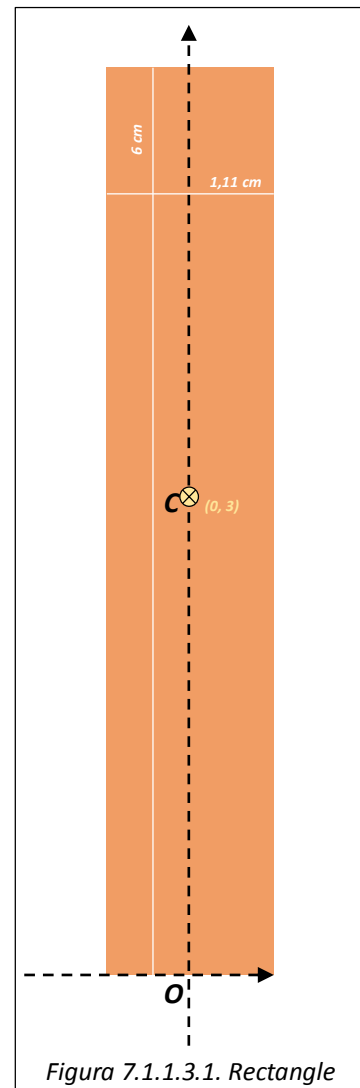
$$C_x = 0 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{6}{2} \quad C_y = 3 \text{ cm}$$

$$S = 1,11 \cdot 6 \quad S = 6,66 \text{ cm}^2$$

Per tant, el c.g. del rectangle és present en les coordenades **(0, 3)** respecte l'eix de la part descomposta, en aquest cas el rectangle.

En canvi, el c.g. del rectangle es manifesta en les coordenades **(0, 1,4 + 3)**, per tant **(0, 4,4)** respecte l'eix principal del bumerang.



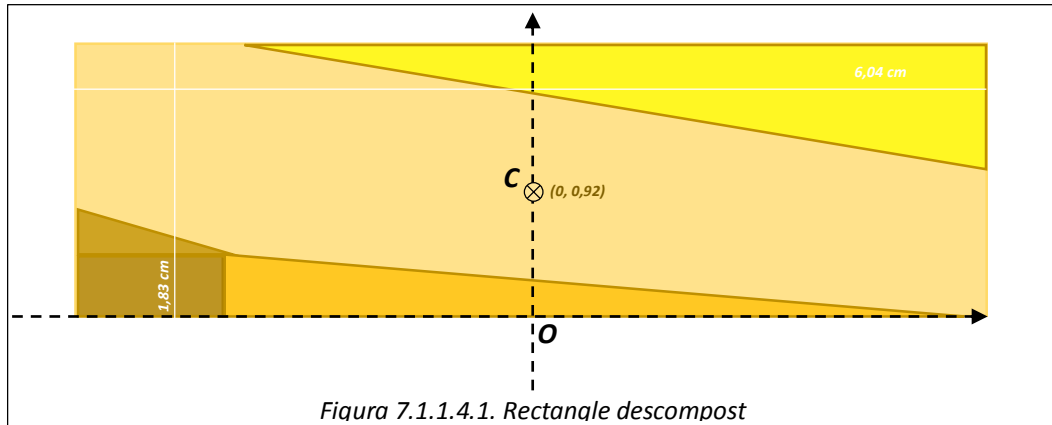
## 7.1.1.4 RECTANGLE DESCOMPOST

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un rectangle són les següents:

$$C_x = 0$$

$$C_y = \frac{h}{2}$$

$$S = b \cdot h$$



Llavors:

$$C_x = 0 \text{ cm}$$

$$S = 6,04 \cdot 1,83 \quad S = 11,05 \text{ cm}^2$$

$$C_y = \frac{1,83}{2} \quad C_y = 0,92 \text{ cm}$$

Per tant, el c.g. del rectangle és present en les coordenades **(0, 0,92)** respecte l'eix de la part descomposta, en aquest cas el rectangle.

En canvi, el c.g. del rectangle es manifesta en les coordenades **(3,57, 0,92-0,36)**, per tant **(3,57, 0,56)** respecte l'eix principal del bumerang.

## 7.1.1.4.1 TRIANGLE

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un triangle són les següents:

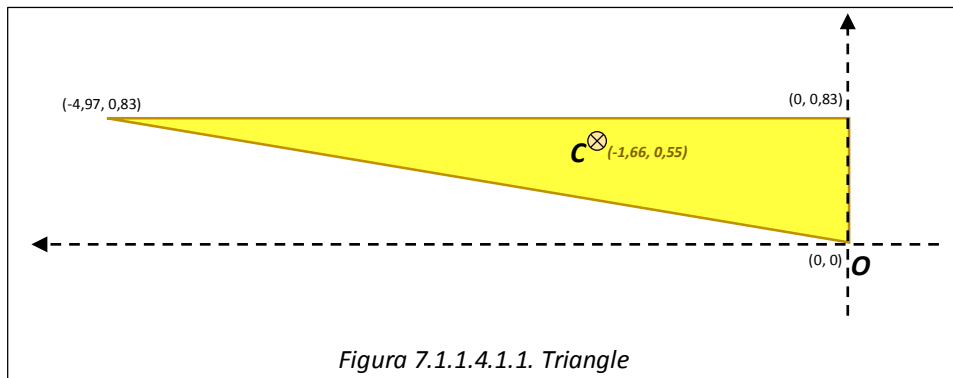
$$C_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

On:

- $(x_1, y_1)$  = Són les coordenades d'un dels vèrtexs del triangle. S'expressa en *cm* per comoditat.

$$C_y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$



Llavors:

$$C_x = \frac{-4,97 + 0 + 0}{3}$$

$$C_x = -1,66 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{0,83 + 0,83 + 0}{3}$$

$$C_y = 0,55 \text{ cm}$$

$$S = \frac{4,97 \cdot 0,83}{2}$$

$$S = 2,06 \text{ cm}^2$$

Per tant, el c.g. del triangle és present en les coordenades **(-1,66, 0,55)** respecte l'eix de la part descomposta, en aquest cas el triangle.

En canvi, el c.g. del triangle es manifesta en les coordenades **(-1,66+6,58, 0,55+0,58)**, per tant **(4,92, 1,13)** respecte l'eix principal del bumerang.

## 7.1.1.4.2 TRIANGLE

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un triangle són les següents:

$$C_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

Llavors:

$$C_y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$C_x = \frac{0 + 0 + 1,08}{3}$$

$$C_x = 0,36 \text{ cm}$$

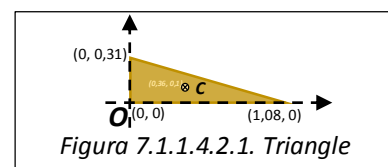
$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$C_y = \frac{0,31 + 0 + 0}{3}$$

$$C_y = 0,1 \text{ cm}$$

$$S = \frac{1,08 \cdot 0,31}{2}$$

$$S = 0,17 \text{ cm}^2$$



Per tant, el c.g. del triangle és present en les coordenades **(0,36, 0,1)** respecte l'eix de la part descomposta, en aquest cas el triangle.

En canvi, el c.g. del triangle es manifesta en les coordenades **(0,36+0,57, 0,1+0,1)**, per tant **(0,93, 0,2)** respecte l'eix principal del bumerang.

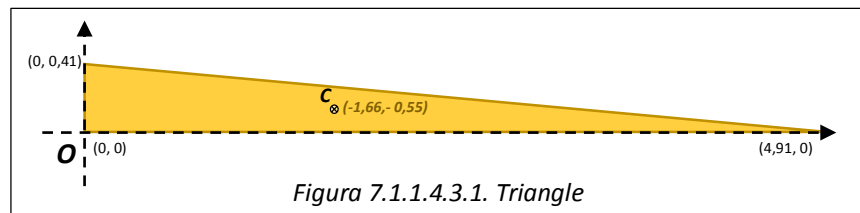
#### 7.1.1.4.3 TRIANGLE

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un triangle són les següents:

$$C_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$C_y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$



Llavors:

$$C_x = \frac{0 + 0 + 4,91}{3} \quad C_x = 1,64 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{0,41 + 0 + 0}{3} \quad C_y = 0,14 \text{ cm} \quad S = \frac{4,91 \cdot 0,41}{2} \quad S = 1,01 \text{ cm}^2$$

Per tant, el c.g. del triangle és present en les coordenades **(1,64, 0,14)** respecte l'eix de la part descomposta, en aquest cas el triangle.

En canvi, el c.g. del triangle es manifesta en les coordenades **(1,64+1,53, 0,14+0,34)**, per tant **(3,17, -0,2)** respecte l'eix principal del bumerang.

#### 7.1.1.4.4 RECTANGLE

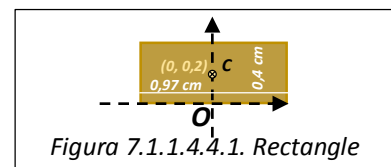
Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un rectangle són les següents:

$$C_x = 0 \quad \text{Llavors:}$$

$$C_y = \frac{h}{2} \quad C_x = 0 \text{ cm}$$

$$S = b \cdot h \quad C_y = \frac{0,4}{2} \quad C_y = 0,2 \text{ cm}$$

$$S = 0,97 \cdot 0,4 \quad S = 0,39 \text{ cm}^2$$



Per tant, el c.g. del rectangle és present en les coordenades **(0, 0,2)** respecte l'eix de la part descomposta, en aquest cas el rectangle.

En canvi, el c.g. del rectangle es manifesta en les coordenades **(0+1,05, 0,2-0,36)**, per tant **(1,05, -0,16)** respecte l'eix principal del bumerang.

Després d'haver trobat els centres de gravetat de les parts descompostes del rectangle, es procedeix a trobar el centre de gravetat de la figura irregular que correspon al bumerang suprimint els c.g. de les parts irregulars del rectangle:

$$m = d \cdot S$$

$$C_x = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m}$$

$$C_y = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m}$$

Llavors:

$$C_x = \frac{d \cdot ((11,05 \cdot 3,57) - (2,06 \cdot 4,92 + 0,17 \cdot 0,93 + 1,01 \cdot 3,17 + 0,39 \cdot 1,05))}{d \cdot (11,05 - (2,06 + 0,17 + 1,01 + 0,39))}$$

$$C_x = 3,44 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{d \cdot ((11,05 \cdot 0,56) - (2,06 \cdot 1,13 + 0,17 \cdot 0,2 + 1,01 \cdot (-0,2) + 0,39 \cdot (-0,16)))}{d \cdot (11,05 - (2,06 + 0,17 + 1,01 + 0,39))}$$

$$C_y = 0,55 \text{ cm}$$

Per tant, el c.g. de la part que pertany al bumerang correspon a les coordenades **(3,44, 0,55)**, respecte l'eix principal del bumerang.

$$S = 11,05 - (2,06 + 0,17 + 1,01 + 0,39)$$

$$S = 7,42 \text{ cm}^2$$

#### 7.1.1.5 EXTRADÓS DE FORMA GENERAL

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un extradós de forma general són les següents:

$$C_x = \frac{n+1}{4n+2} \cdot a$$

On:

- $n$  = és el grau de la funció corba de la figura.

$$C_y = \frac{n+1}{n+2} \cdot h$$

$$S = \frac{a \cdot h}{n+1}$$

Per conèixer  $n$  hem de seguir el següent procediment d'aproximació:

Sabent dues coordenades de la línia corba de l'extradós de forma general es pot realitzar el següent:

Si  $x = 0,33$  cm i  $y = 2,04$ , llavors:

$$x = ky^2$$

$$k = \frac{x}{y^2}$$

$$k = \frac{0,33}{(-2,04)^2}$$

$$k = 0,08$$

Per tant, si de veritat  $n = 2$ , llavors fent el mateix procediment anterior amb unes altres coordenades la constant  $k$  hauria de presentar el mateix valor:

$$k = \frac{x}{y^2}$$

$$k = \frac{0,91}{(-2,58)^2}$$

$$k = 0,14$$

Per tant, podem veure que no es tracta d'una corba parabòlica.

Després de fer el mateix procediment amb diferents valors per a  $n$ , he conclòs que el més encertat és **4,2**, ja que:

Si  $(0,33, -2,04)$ :

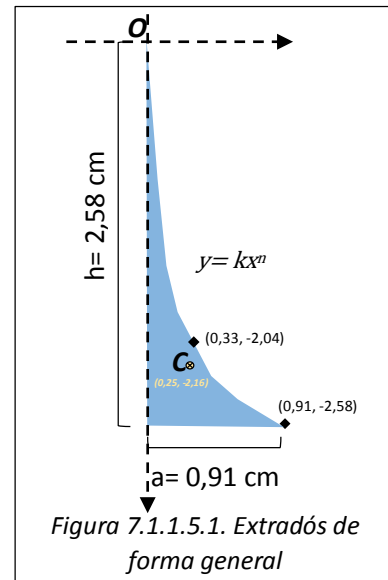
$$k = \frac{x}{y^n}$$

$$k = \frac{0,33}{(-2,04)^{4,2}}$$

$$k = -0,017$$

Si  $(0,91, -2,58)$ :

$$k = \frac{x}{y^n}$$



$$k = \frac{0,91}{(-2,58)^{4,2}}$$

$$k = -0,017$$

Llavors es calculen les coordenades del c.g.:

$$C_x = \frac{4,2 + 1}{4,2 \cdot 4 + 2} \cdot 0,91 \quad C_x = 0,25 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{4,2 + 1}{4,2 + 2} \cdot (-2,58) \quad C_y = -2,16 \text{ cm}$$

$$S = \frac{0,91 \cdot 2,58}{4,2 + 1} \quad S = 0,45 \text{ cm}^2$$

Per tant, el c.g. de l'extradós de forma general és present en les coordenades **(0,25, -2,16)** respecte l'eix de la part descomposta.

En canvi, el c.g. de l'extradós de forma general es manifesta en les coordenades **(0,25+0,59, -2,16+3,93)**, per tant **(0,84, 1,77)** respecte l'eix principal del bumerang.

#### 7.1.1.6 RECTANGLE DESCOMPOST

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un rectangle són les següents:

$$C_x = 0$$

Llavors:

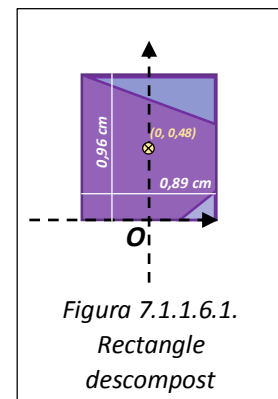
$$C_y = \frac{h}{2}$$

$$C_x = 0 \text{ cm}$$

$$S = b \cdot h$$

$$C_y = \frac{0,96}{2} \quad C_y = 0,48 \text{ cm}$$

$$S = 0,96 \cdot 0,89 \quad S = 0,85 \text{ cm}^2$$



Per tant, el c.g. del rectangle descompost és present en les coordenades **(0, 0,48)** respecte l'eix de la part descomposta, en aquest cas el rectangle.

En canvi, el c.g. del rectangle descompost es manifesta a les coordenades **(0+7,02, 0,48-0,38)**, per tant **(7,02, 0,1)** respecte l'eix principal del bumerang.

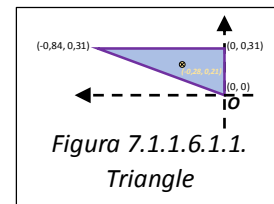
## 7.1.1.6.1 TRIANGLE

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un triangle són les següents:

$$C_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$C_y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$



Llavors:

$$C_x = \frac{-0,84 + 0 + 0}{3} \quad C_x = -0,28 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{0,31 + 0 + 0,31}{3} \quad C_y = 0,21 \text{ cm}$$

$$S = \frac{0,84 \cdot 0,31}{2} \quad S = 0,13 \text{ cm}^2$$

Per tant, el c.g. del triangle és present en les coordenades **(-0,28, 0,21)** respecte l'eix de la part descomposta, en aquest cas el triangle.

En canvi, el c.g. del triangle es manifesta en les coordenades **(-0,28+7,47, 0,21+0,28)**, per tant **(7,19, 0,49)** respecte l'eix principal del bumerang.

## 7.1.1.6.2 TRIANGLE

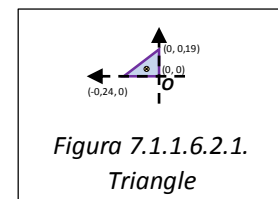
Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un triangle són les següents:

$$C_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{Llavors:}$$

$$C_y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad C_x = \frac{-0,24 + 0 + 0}{3} \quad C_x = -0,08 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{0 + 0 + 0,19}{3} \quad C_y = 0,06 \text{ cm}$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2} \quad S = \frac{0,24 \cdot 0,19}{2} \quad S = 0,023 \text{ cm}^2$$



Per tant, el c.g. del triangle és present en les coordenades **(-0,08, 0,06)** respecte l'eix de la part descomposta, en aquest cas el triangle.

En canvi, el c.g. del triangle es manifesta en les coordenades **(-0,08+7,47, 0,06-0,34)**, per tant **(7,39, -0,28)** respecte l'eix principal del bumerang.



Després d'haver trobat els centres de gravetat de les parts descompostes del rectangle, es procedeix a trobar el centre de gravetat de la figura irregular que correspon al bumerang, restant les parts sobrants del rectangle:

$$m = d \cdot S$$

$$C_x = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m}$$

$$C_y = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m}$$

Llavors:

$$C_x = \frac{d \cdot ((0,85 \cdot 7,02) - (0,13 \cdot 7,19 + 0,023 \cdot 7,39))}{d \cdot (0,85 - (0,13 + 0,023))}$$

$$C_x = 6,98 \text{ cm}$$

$$C_y = \frac{d \cdot ((0,85 \cdot 0,1) - (0,13 \cdot 0,49 + 0,023 \cdot (-0,28)))}{d \cdot (0,85 - (0,13 + 0,023))}$$

$$C_y = 0,04 \text{ cm}$$

Per tant, el c.g. de la part que pertany al bumerang correspon a les coordenades

**(6,98, 0,04)**, respecte l'eix principal del bumerang.

$$S = 0,85 - (0,13 + 0,023)$$

$$S = 0,7 \text{ cm}^2$$

## 7.2 CENTRE DE GRAVETAT EXPERIMENTAL DEL BUMERANG

L'experiment consisteix en lligar un fil a una xinxeta, lligar el fil a la paret, clavar la xinxeta a un extrem de l'ala del bumerang, col·locar un paper darrere del bumerang, deixar penjant el bumerang a l'aire, i traçar al paper la línia que segueix el fil. Llavors, es fa el mateix però amb l'altre ala, i el punt on tallen les dues rectes serà el c.g. del bumerang.



*Imatge 7.2.1. Xinxeta clavada en el bumerang i lligada a un fil*



*Imatge 7.2.2. Bumerang penjant. Fil traçant la línia que indica el c.g.*



*Imatge 7.2.1. Centre de gravetat experimental del bumerang*

### 7.3 MOMENTS D'INÈRCIA

El moment d'inèrcia del bumerang s'ha calculat fent la mitjana aritmètica dels tres tipus de moments d'inèrcia trobats als apartats 4.3.1, 4.3.2 i 4.3.3.2:

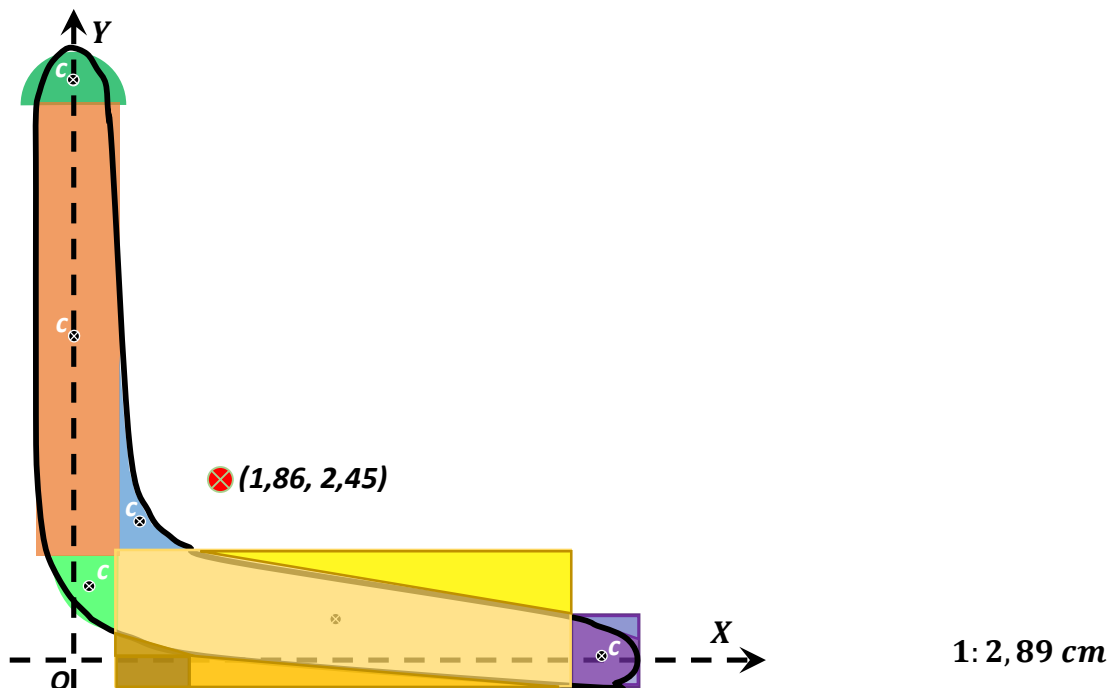
$$I = \frac{\sum I}{N}$$

$$I = \frac{4,05 \times 10^{-4} + 7,28 \times 10^{-4} + 3,21 \times 10^{-4}}{3}$$

$$I = 4,85 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

#### 7.3.1 MOMENT D'INÈRCIA TEÒRIC DEL BUMERANG

Per obtenir el moment d'inèrcia teòric del bumerang s'ha calculat primer els moments d'inèrcia de les figures amb fórmula coneguda per trobar-lo, s'ha aplicat el teorema d'Steiner per calcular el moment d'inèrcia respecte el c.g. del bumerang de cada figura que formen en conjunt el bumerang i finalment s'han sumat tots els moments d'inèrcia obtinguts per aconseguir el del bumerang.



Havent descompost la geometria del bumerang en figures de geometria coneguda, es procedeix a calcular els moments d'inèrcia de les parts descompostes.

Però per conèixer els moments d'inèrcia de qualsevol figura s'ha partit dels segons moments d'inèrcia, els quals són els moments d'inèrcia de les figures planes, i presenten

com a unitats els metres quadràtics ( $m^4$ ), i a causa d'aquest problema s'ha fet el següent procediment per tal d'obtenir les unitats pròpies del moment d'inèrcia ( $kg \cdot m^2$ ).

Sabent que:

$$[I_2] = m^4$$

$$[I] = kg \cdot m^2$$

$$[d_S] = kg/m^2$$

- $I_2$  = és el segon moment d'inèrcia des del c.g. de la figura. S'expressa en  $m^4$ .
- $I$  = és el moment d'inèrcia des del c.g. de la figura. S'expressa en  $kg \cdot m^2$ .
- $d_S$  = és la densitat bidimensional, de superfície. S'expressa en  $kg/m^2$ .

Llavors s'aplica el següent procediment:

$$I = d \cdot I_2$$

És a dir:

$$[I] = \frac{kg}{m^2} \cdot m^4$$

$$[I] = kg \cdot m^2$$

Un cop es coneix aquesta relació s'aïlla una fórmula general de la següent manera:

$$I_B = I_{cg} + m \cdot D^2$$

$$I_B = I_{2cg} \cdot d_S + d \cdot S \cdot h \cdot D^2$$

Però la distància (D) del centre de gravetat de la figura al del bumerang és el calculat amb el Word, el que significa que s'ha de fer la proporció per obtenir la distància a escala real, és a dir multiplicar pel valor 2,89. També es fa aquesta proporció amb qualsevol dada sobre distància: radi, diàmetre, distàncies...

A més les unitats del 2,89 són els m, el que vol dir que quan s'ha de calcular alguna superfície real partint de la obtinguda al dibuix del Word s'ha de multiplicar el valor elevat al quadrat, és a dir  $2,89^2$ .

Una última observació és que la  $d_S$  no és la mateixa que la d, ja que:

$$[d] = \frac{kg}{m^3}$$

Però en canvi:

$$[d_s] = \frac{kg}{m^3}$$

A la pàgina web on es va obtenir el contraplacat de bedoll es deia que la seva densitat es de  $650 \text{ kg/m}^3$ , amb el següent procediment s'ha calculat la densitat aproximada del material del bumerang:

$$d = \frac{m}{V}$$

La massa del bumerang sense cap perfil fet es va calcular amb la bàscula de precisió KERN EMB 500-I. Aquesta bàscula presenta una sensibilitat de  $\pm 0,1 \text{ g}$ .

$$m = 0,0423 \text{ kg}$$

$$d = \frac{m}{h \cdot \sum S}$$

$$\sum S = 16,61 \text{ cm}^2$$

$$d = \frac{0,0423}{4 \times 10^{-3} \cdot ((0,77 + 6,66 + 0,61 + 7,42 + 0,45 + 0,7) \cdot 2,89^2) \times 10^{-4}}$$

$$d = 762,28 \text{ kg/m}^3$$

Com es veu la densitat surt una mica diferent a la mostrada al lloc de compra del material. Aquesta variació segurament és a causa que el valor de la superfície teòrica és una mica diferent al valor real ja que s'ha calculat a partir del sumatori de diverses superfícies de figures que formaven el bumerang. A continuació és calcula l'error relatiu de la densitat:

$$e_r = \frac{e_a}{\bar{x}} \cdot 100$$

$$e_r = \frac{|x - \bar{x}| \{màxim\}}{\bar{x}} \cdot 100$$

$$e_r = \frac{\left| 762,28 - \frac{762,28 + 650}{2} \right|}{\frac{762,28 + 650}{2}} \cdot 100$$

$$e_r = 7,95\%$$

En principi perquè un resultat es consideri correcte l'error relatiu no hauria de sobrepassar el 2%, però com que tampoc ha sigut molt exagerat l'error doncs es procedeix a calcular la densitat mitjana:

$$d_m = \frac{762,28 + 650}{2}$$

$$d_m \cong 706 \text{ kg/m}^3$$

Un cop coneguda la densitat del contraplacat de bedoll es calcula el la densitat superficial d'aquest mitjançant el següent procediment:

$$d = \frac{m}{h \cdot \sum S}$$

Llavors:

$$d_s = \frac{m}{h \cdot \sum S} \cdot h$$

És a dir:

$$d_s = d \cdot h$$

Per tant:

$$d_s = 706 \cdot 0,004$$

$$d_s \cong 2,8 \text{ kg/m}^2$$

Finalment la fórmula comprimida per calcular el moment d'inèrcia d'una figura respecte el c.g. del bumerang és la següent:

$$I_B = I_{2_{cg}} \cdot d_s + d \cdot S \cdot h \cdot D^2$$

$$I_B = I_{2_{cg}} \cdot d \cdot h + d \cdot (S \cdot 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot h \cdot (D \cdot 10^{-2} \cdot 2,89)^2$$

$$I_B = d \cdot h \cdot \left( I_{2_{cg}} + (S \cdot 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (D \cdot 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

- $I_B$  = és el moment d'inèrcia d'una figura des del c.g. del bumerang. S'expressa en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .
- $d$  = és la densitat mitjana del contraxapat de bedoll. S'expressa en  $\text{kg/m}^3$ .
- $h$  = és l'altura, l'espessor, del bumerang. S'expressa en m.
- $I_{2_{cg}}$  = és el segon moment d'inèrcia d'una figura des del seu c.g. S'expressa en  $\text{m}^4$ .
- $S$  = és la superfície de la figura descomposta del bumerang. S'expressa en  $\text{m}^2$ .
- $D$  = és la distància entre el c.g. del bumerang i el c.g. de la figura descomposta. S'expressa en m.

Un cop calculats tots els moments d'inèrcia de les figures descompostes que configuren el bumerang es realitza el següent procediment per tal d'aïllar el moment d'inèrcia del bumerang:

$$I_B = \sum I_F$$

- $I_B$  = és el moment d'inèrcia del bumerang des del seu centre de rotació. S'expressa en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .
- $I_F$  = és el moment d'inèrcia de cada figura respecte el c.g. del bumerang. S'expressa en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

$$I_B = 4,56 \times 10^{-5} + 6,07 \times 10^{-6} + 1,18 \times 10^{-4} + 1,30 \times 10^{-4} + 1,03 \times 10^{-4} + 2,25 \times 10^{-6}$$

$$I_B = 4,05 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### 7.3.1.1 ÀREA SEMICIRCULAR

Les fórmules per conèixer el moment d'inèrcia d'un semicercle són les següents:

$$I_{2cg} = 0$$

Per tant:

$$I_{2cg} = 0 \text{ m}^4$$

Això significa que per fer girar un semicercle no cal fer cap força.

Llavors:

$$I_B = d \cdot h \cdot (I_{2cg} + (S \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (D \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2)$$

$$I_B = 706 \cdot 0,004 \cdot (0 + (0,77 \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (5,48 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2)$$

$$I_B = 4,56 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

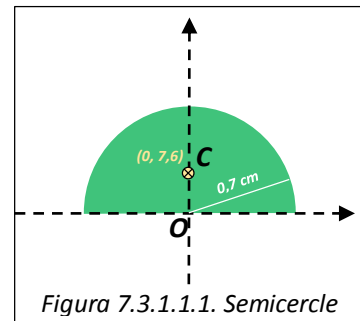


Figura 7.3.1.1.1. Semicercle

### 7.3.1.2 QUART D'ÀREA CIRCULAR

Les fórmules per conèixer el moment d'inèrcia d'un quart d'àrea circular són les següents:

$$I_{2cg} = \frac{R^4}{8}$$

- $R$  = és el radi del quart de l'àrea circular, expressat en cm per comoditat.

Llavors:

$$I_{2cg} = \frac{(0,88 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^4}{8}$$

$$I_{2cg} = 5,23 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

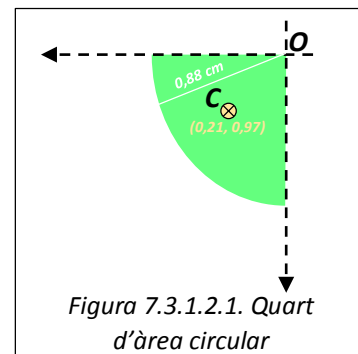


Figura 7.3.1.2.1. Quart d'àrea circular

Tot seguit:

$$I_B = d \cdot h \cdot \left( I_{2_{cg}} + (Sx10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (Dx10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_B = 706 \cdot 0,004 \cdot (5,23x10^{-8} + (0,61x10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (2,22x10^{-2} \cdot 2,89)^2)$$

$$I_B = 6,07x10^{-6} kg \cdot m^2$$

### 7.3.1.3 RECTANGLE

Les fórmules per conèixer el moment d'inèrcia d'un rectangle són les següents:

$$I_{2_{cg}} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

Llavors:

$$I_{2_{cg}} = \frac{(1,11x10^{-2} \cdot 2,89)^2 \cdot (6x10^{-2} \cdot 2,89)^2}{4}$$

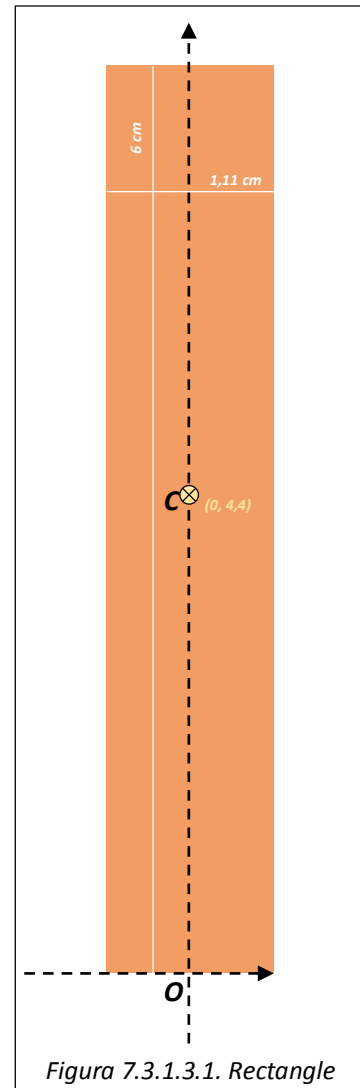
$$I_{2_{cg}} = 7,74x10^{-6} m^4$$

I finalment:

$$I_B = d \cdot h \cdot \left( I_{2_{cg}} + (Sx10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (Dx10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_B = 706 \cdot 0,004 \cdot (7,74x10^{-6} + (6,66x10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (2,7x10^{-2} \cdot 2,89)^2)$$

$$I_B = 1,18x10^{-4} kg \cdot m^2$$

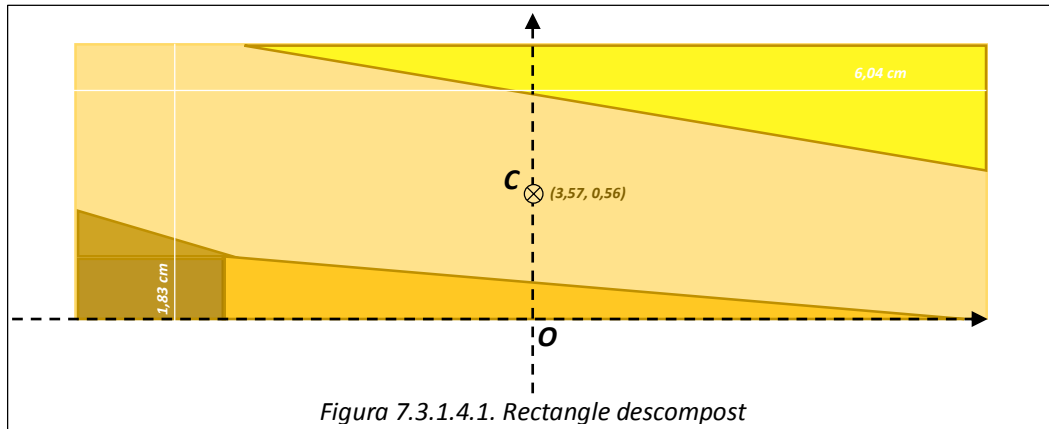




## 7.3.1.4 RECTANGLE DESCOMPOST

Les fórmules per conèixer el moment d'inèrcia d'un rectangle són les mateixes que les de l'apartat anterior:

$$I_{2_{cg}} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$



Llavors:

$$I_{2_{cg}} = \frac{(6,04 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \cdot (1,83 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2}{4}$$

$$I_{2_{cg}} = 2,13 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

I finalment:

$$I_B = d \cdot h \cdot (I_{2_{cg}} + (S \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (D \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2)$$

$$I_B = 706 \cdot 0,004 \cdot (2,13 \times 10^{-5} + (11,05 \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (2,55 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2)$$

$$I_B = 2,02 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Però el que es vol conèixer és el moment d'inèrcia de la figura irregular que forma una pala del bumerang. Un cop es coneixen els moments d'inèrcia de les figures que sobren del rectangle (subapartats següents) es realitza el següent procediment per obtenir el moment d'inèrcia de la figura irregular respecte el centre de rotació del bumerang:

$$I_{\text{figura irr.}} = I_{\text{rectangle}} - \sum I_{\text{sobrant}}$$

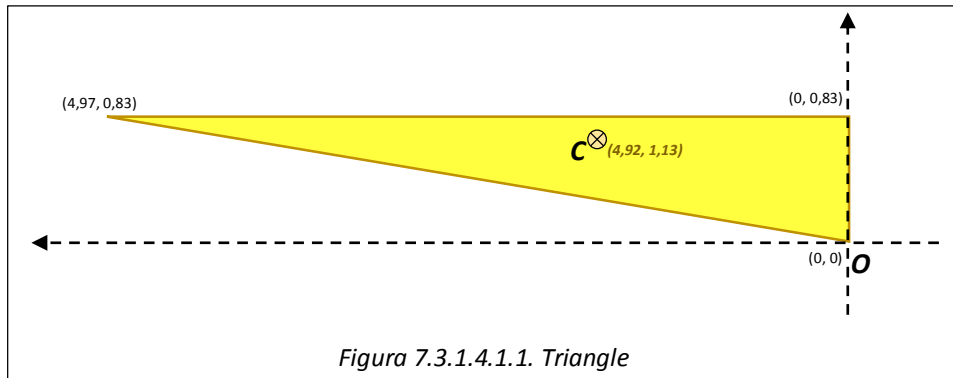
$$I_{\text{figura irr.}} = 2,02 \times 10^{-4} - (4,64 \times 10^{-5} + 2,00 \times 10^{-6} + 1,78 \times 10^{-5} + 5,8 \times 10^{-6})$$

$$I_{\text{figura irr.}} = 1,3 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

## 7.3.1.4.1 TRIANGLE

Les fórmules per conèixer el moment d'inèrcia d'un triangle són les següents:

$$I_{2cg} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$



Llavors:

$$I_{2cg} = \frac{(0,83 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \cdot (4,97 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2}{24}$$

$$I_{2cg} = 4,95 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

I per últim s'aplica el teorema d'Steiner per trobar el moment d'inèrcia del triangle respecte el c.g. del bumerang:

$$I_{F-R} = d \cdot h \cdot \left( I_{2cg} + (S \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (D \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_{F-R} = 706 \cdot 0,004 \cdot \left( 4,95 \times 10^{-7} + (2,06 \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (3,33 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

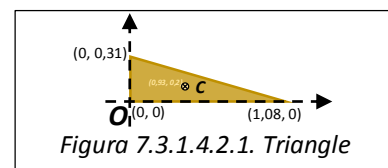
$$I_{F-R} = 4,64 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- $I_{F-R}$  és el moment d'inèrcia de la figura respecte el c.g. del rectangle.

## 7.3.1.4.2 TRIANGLE

Les fórmules per conèixer el moment d'inèrcia del triangle són les mateixes que les de l'apartat anterior:

$$I_{2cg} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$



Llavors:

$$I_{2cg} = \frac{(1,08 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \cdot (0,31 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2}{24}$$

$$I_{2cg} = 3,26 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Finalment es troba el moment d'inèrcia del triangle respecte el c.g. del bumerang:

$$I_{F-R} = d \cdot h \cdot \left( I_{2_{cg}} + (S \cdot 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (D \cdot 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_{F-R} = 706 \cdot 0,004 \cdot \left( 3,26 \cdot 10^{-9} + (0,17 \cdot 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (2,44 \cdot 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

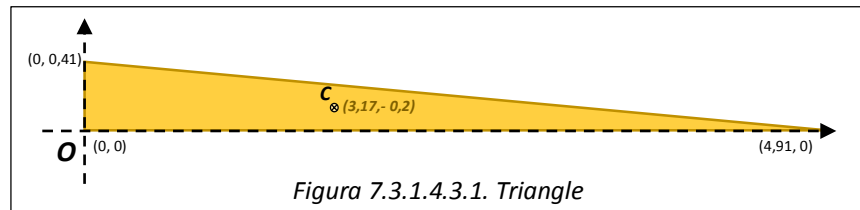
$$I_{F-R} = 2,00 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

#### 7.3.1.4.3 TRIANGLE

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un triangle són les següents:

$$I_{2_{cg}} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$

Llavors:



$$I_{2_{cg}} = \frac{(4,91 \cdot 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \cdot (0,41 \cdot 10^{-2} \cdot 2,89)^2}{24}$$

$$I_{2_{cg}} = 1,18 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

Finalment es troba el moment d'inèrcia del triangle respecte el c.g. del bumerang:

$$I_{F-R} = d \cdot h \cdot \left( I_{2_{cg}} + (S_{rectangle} \cdot 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (D \cdot 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_{F-R} = 706 \cdot 0,004 \cdot \left( 1,18 \cdot 10^{-7} + (1,01 \cdot 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (2,96 \cdot 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_{F-R} = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

#### 7.3.1.4.4 RECTANGLE

Les fórmules per conèixer el moment d'inèrcia d'un rectangle són les següents:

$$I_{2_{cg}} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

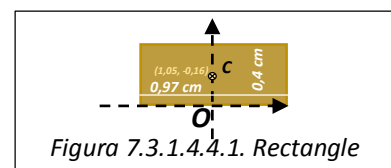
Llavors:

$$I_{2_{cg}} = \frac{(0,97 \cdot 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \cdot (0,4 \cdot 10^{-2} \cdot 2,89)^2}{4}$$

$$I_{2_{cg}} = 2,63 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

I per últim:

$$I_{F-R} = d \cdot h \cdot \left( I_{2_{cg}} + (S_{rectangle} \cdot 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (D \cdot 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$



$$I_{F-R} = 706 \cdot 0,004 \cdot \left( 2,63 \times 10^{-8} + (0,39 \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (2,73 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_{F-R} = 5,8 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### 7.3.1.5 EXTRADÓS DE FORMA GENERAL

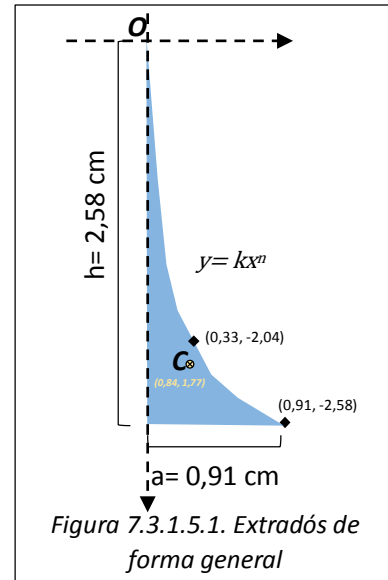
Les fórmules per esbrinar el moment d'inèrcia d'un extradós de forma general són les següents:

$$I_{2_{cg}} = \frac{b^2 \cdot h^2}{12}$$

Per tant:

$$I_{2_{cg}} = \frac{(0,91 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \cdot (2,58 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2}{12}$$

$$I_{2_{cg}} = 3,2 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$



I finalment:

$$I_B = d \cdot h \cdot \left( I_{2_{cg}} + \left( \sum S x 10^{-4} \cdot 2,89^2 \right) \cdot (D x 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_{F-R} = 706 \cdot 0,004 \cdot \left( 3,2 \times 10^{-7} + (0,45 \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (1,23 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_{F-R} = 2,25 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### 7.3.1.6 RECTANGLE DESCOMPOST

Per obtenir el moment d'inèrcia d'un rectangle s'ha d'aplicar el següent procediment:

$$I_{2_{cg}} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

Llavors:

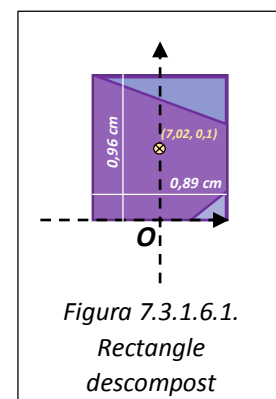
$$I_{2_{cg}} = \frac{(0,89 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \cdot (0,96 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2}{4}$$

$$I_{2_{cg}} = 1,27 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

I finalment:

$$I_B = d \cdot h \cdot \left( I_{2_{cg}} + (S x 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (D x 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_B = 706 \cdot 0,004 \cdot \left( 2,13 \times 10^{-5} + (0,85 \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (5,67 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$



$$I_B = 1,13 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Però el que es vol conèixer és el moment d'inèrcia de la figura irregular. Un cop es coneixen els moments d'inèrcia respecte el c.r. del bumerang de les figures que sobren del rectangle (subapartats següents) es realitza el següent procediment:

$$I_{\text{figura irr.}} = I_{\text{rectangle}} - \sum I_{\text{sobrant}}$$

$$I_{\text{figura irr.}} = 1,13 \times 10^{-4} - (8,27 \times 10^{-6} + 1,39 \times 10^{-6})$$

$$I_B = 1,03 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

#### 7.3.1.6.1 TRIANGLE

Les fórmules per conèixer la posició del c.g. i l'àrea d'un triangle són les següents:

$$I_{2_{cg}} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$

Llavors:

$$I_{2_{cg}} = \frac{(0,84 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \cdot (0,31 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2}{24}$$

$$I_{2_{cg}} = 1,97 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Finalment es troba el moment d'inèrcia del triangle respecte el c.g. del bumerang:

$$I_{F-R} = d \cdot h \cdot \left( I_{2_{cg}} + (S \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (D \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_{F-R} = 706 \cdot 0,004 \cdot \left( 1,97 \times 10^{-9} + (0,13 \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (5,68 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_{F-R} = 8,27 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

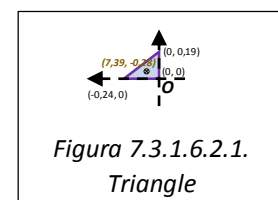
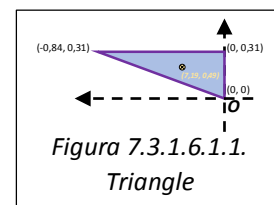
#### 7.3.1.6.2 TRIANGLE

Les fórmules per conèixer el moment d'inèrcia del triangle són les mateixes que les del subapartat anterior:

$$I_{2_{cg}} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$

Llavors:

$$I_{2_{cg}} = \frac{(0,24 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \cdot (0,19 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2}{24}$$



$$I_{2cg} = 6,04 \times 10^{-11} \text{ m}^4$$

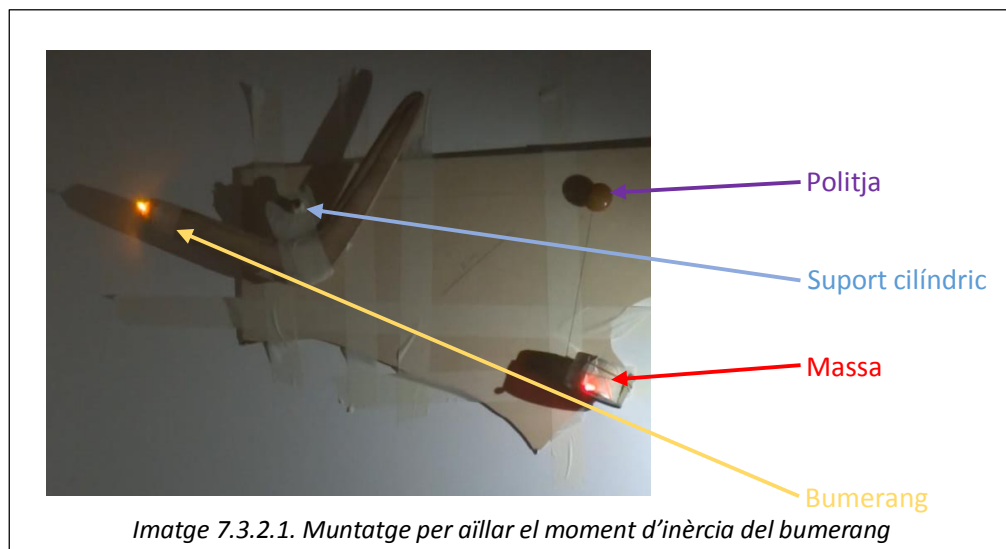
Tot seguit es troba el moment d'inèrcia del triangle respecte el c.g. del bumerang:

$$I_{F-R} = d \cdot h \cdot \left( I_{2cg} + (S_{rectangle} \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (D \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_{F-R} = 706 \cdot 0,004 \cdot \left( 6,04 \times 10^{-11} + (0,02 \times 10^{-4} \cdot 2,89^2) \cdot (5,94 \times 10^{-2} \cdot 2,89)^2 \right)$$

$$I_{F-R} = 1,39 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### 7.3.2 MOMENT D'INÈRCIA EXPERIMENTAL DEL BUMERANG



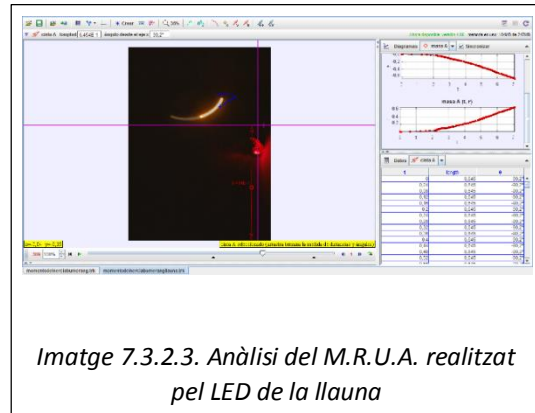
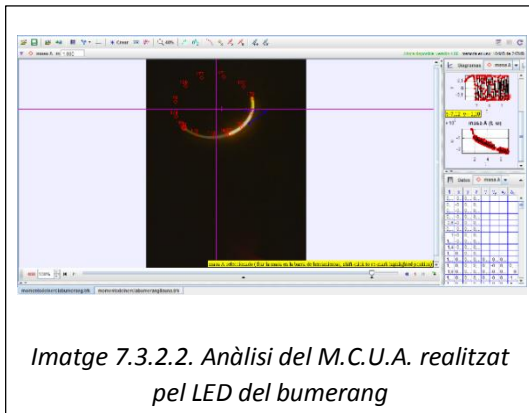
Ha consistit en fer el sistema de la Imatge 4.3.2.1. seguint els següents passos:

1. Trobant el c.g. del bumerang experimentalment, es procedeix a col·locar un suport cilíndric que passi pel c.g., per tal que giri sense desviar-se. Per fer-ho s'enganxa un tall de cartró pedra per darrere del bumerang i es passa un cilindre metàl·lic pel c.g. del bumerang. El cilindre s'enganxa amb cola tèrmica, per tal que al girar el suport, també giri el bumerang.
2. Es col·loca un LED amb una pila a un dels extrems de la pala, per tal que al girar es dibuixi un cercle lluminós.
3. Es passa un clau pel suport cilíndric buit, travessant la fusta, i ficant la femella per darrere perquè quedi subjecte. Llavors, el suport juntament amb el bumerang, podrà girar lliurement pel clau.
4. Es clava la politja separada del bumerang horitzontalment.

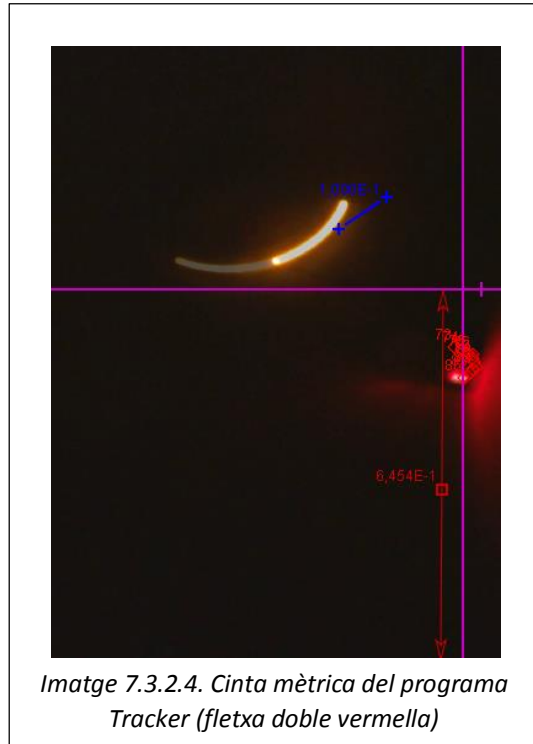
5. S'enrotlla un fil de cosir al suport, ja que així a l'hora d'estirar del fil, es desenrotllarà i farà donar voltes al bumerang gràcies al suport.
6. Es lliga un extrem del fil a la llauna que farà de pes.
7. Es col·loca un LED d'un altre color a la llauna.
8. Es fa passar el fil per la politja.
9. Es deixa caure la llauna, i llavors a mesura que vagi caient farà girar al bumerang acceleradament.
10. Gràcies al programa Tracker podem conèixer dades essencials, com la velocitat amb que cau la llauna i la velocitat angular del bumerang gràcies a l'acció anterior.

Per calcular les dades necessàries s'ha realitzat el següent:

1. S'efectua el procediment explicat a l'apartat EXEMPLE D'ANÀLISI D'UN LLANÇAMENT AMB EL PROGRAMA TRACKER per analitzar els vídeos del moviment circular del bumerang i la caiguda lliure de la llauna amb el programa Tracker.



2. Amb l'eina "cinta mètrica" de Tracker s'ha pogut conèixer l'altura inicial a la que es deixa caure la llauna respecte l'instant en que es recull la velocitat instantània final de la llauna. Aquesta altura és de 0,59 m.



3. Llavors seleccionem les dades que necessitem dels moviments al principi i al final de l'experiment. De l'anàlisi de la llauna seleccionem l'alçada inicial a la que es deixa anar, que és de 0,59 m, i la velocitat al final del trajecte. Per trobar la velocitat final, farem servir la següent fórmula:

$$v = \frac{r - r_0}{\Delta t}$$

Les posicions són entre el fotograma 391 i el 389, per conèixer la velocitat puntual en aquell instant. Al fotograma 391 la llauna es troba a l'origen de coordenades ( a 0 m).

Llavors:

$$v = \frac{0,596 - 0,589}{6,76 - 6,68}$$

$$v = 0,088 \text{ m/s}$$

Ara necessitem conèixer la  $\omega$  del bumerang al fotograma 390, ja que és el que es troba entre el 391 i el 389. Per sort, el programa Tracker ja ens la dóna, aquesta és de 2078,8 graus/s. Per convertir els graus a radians es fa servir el següent factor de conversió:

$$2078,8 \cdot \frac{\text{graus}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{360 \text{ graus}}$$



$$\omega = 36,28 \text{ rad/s}$$

4. Finalment, per conèixer el moment d'inèrcia del bumerang cal realitzar el següent balanç d'energia:

$$E_{p_{llauna_0}} = E_{c_{llauna}} + E_{rotacional}$$

$$m_{llauna} \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} \cdot m_{llauna} \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot (I_{bumerang} + I_{suport}) \cdot \omega^2$$

$$I_{total} = \frac{m_{llauna} \cdot g \cdot h_0 - \frac{1}{2} \cdot m_{llauna} \cdot v^2}{\frac{1}{2} \omega^2}$$

$$I = \frac{m_{llauna} \cdot (g \cdot h_0 - \frac{1}{2} \cdot v^2)}{\frac{1}{2} \omega^2}$$

$$I = \frac{0,085 \cdot (9,8 \cdot 0,59 - \frac{1}{2} \cdot 0,088^2)}{\frac{1}{2} \cdot 36,28^2}$$

$$I = 7,46 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^2$$

Aquest moment d'inèrcia és el de tot el sistema rotacional, però s'ha de tenir en compte que també hi ha inclòs el cilindre metàl·lic i el rectangle de cartró pedra. Per obtenir el moment d'inèrcia de només el bumerang s'ha de fer el següent:

1. Es troba el moment d'inèrcia del cilindre buit de paret ample, sabent que és calcula amb la fórmula següent:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (R_1^2 + R_2^2)$$

On:

- $R_1$  = és el radi del cilindre.
- $R_2$  = és el radi de la circumferència circumdant.

Per conèixer la massa del cilindre utilitzem la següent fórmula:

$$m = d \cdot V$$

On:

I sabent que el volum d'un cilindre és:

- $h$  = és l'altura del cilindre.

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$$

Coneixent la densitat de l'acer,  $7850 \text{ kg/m}^3$ , només cal fer el següent procediment:

$$m = d \cdot (V - V_{buit})$$

$$m = d \cdot \pi \cdot h \cdot (R_1^2 - R_2^2)$$

$$m = 7850 \cdot \pi \cdot 0,03 \cdot (0,004^2 - 0,003^2)$$

$$m = 0,0052 \text{ kg}$$

El càlcul ha sigut excel·lent, ja que el resultat obtingut amb la bàscula de precisió KERN EMB 500-I, la qual presenta una precisió de 0,1 gr., ens dona també 0,0052 kg.

Llavors:

$$I = \frac{1}{2} \cdot 0,0052 \cdot (0,004^2 + 0,003^2)$$

$$I = 6,5 \times 10^{-8} \text{ kg/m}^2$$

2. Es troba el moment d'inèrcia del rectangle, sabent que és calcula amb la fórmula següent:

$$I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a^2 + b^2)$$

Per conèixer la massa del rectangle utilitzem la següent fórmula:

$$m = d \cdot V$$

I sabent que el volum d'un rectangle és:

$$V = a \cdot b \cdot h$$

Coneixent la densitat del cartró pedra, 2250 kg/m<sup>3</sup>, només cal fer el següent procediment:

$$m = d \cdot V$$

$$m = d \cdot a \cdot b \cdot h$$

$$m = 2250 \cdot 0,055 \cdot 0,095 \cdot 0,002$$

$$m = 0,024 \text{ kg}$$

El resultat obtingut és bastant erroni ja que la bàscula de precisió marcava 0,0092 kg.

$$e_r = \frac{e_a}{\bar{x}} \cdot 100$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$e_{particular} = |x - \bar{x}|$$

$$e_r = \frac{|x - \bar{x}| \{màxim\}}{\bar{x}} \cdot 100$$

$$\bar{x} = \frac{0,024 + 0,0092}{2}$$

$$e_{p1} = |0,024 - 0,0166|$$

$$e_{p1} = 0,0074 \text{ kg}$$

$$\bar{x} = 0,0166 \text{ kg}$$

$$e_{p2} = |0,0092 - 0,0166|$$

$$e_{p2} = 0,0074 \text{ kg}$$

Llavors:

$$e_r = \frac{0,0074}{0,0166} \cdot 100$$

$$e_r = 44,58\%$$

Com es pot observar, s'obté un error relatiu exagerat, ja que perquè un resultat és consideri vàlid no ha de sobrepassar el 2% de diferència. Per tant, seleccionem el resultat marcat per la bàscula de precisió perquè la densitat del cartró pedra va ser extreta d'una font molt poc fiable.

Llavors:

$$I = \frac{1}{12} \cdot 0,0092 \cdot (0,055^2 + 0,095^2)$$

$$I = 9,24 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^2$$

L'únic problema és que acabem de calcular el moment d'inèrcia del rectangle quan gira respecte el seu eix de rotació principal, o sigui, on es troba el seu centre de gravetat.

Per troba el moment d'inèrcia real en aquest cas, cal aplicar el teorema d'Steiner, que serveix per calcular els moments d'inèrcia de cossos quan no giren per l'eix que passa pel centre de gravetat, si no per un eix paral·lel a aquest. Aquest teorema diu el següent:

On:

- $I_z$  = és el moment d'inèrcia del rectangle en l'eix z.
- $I_{zG}$  = és el moment d'inèrcia del rectangle en l'eix z principal, el que passa pel centre de masses.
- $D$  = és la distància entre l'eix principal i el paral·lel.

$$I_z = I_{zG} + m \cdot D^2$$

Per tant, només caldrà fer aquest procediment:

$$I_z = 9,24 \times 10^{-6} + 0,0092 \cdot 0,03^2$$

$$I_z = 1,75 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$$

3. Finalment cal aïllar el moment d'inèrcia del bumerang de tots els moments d'inèrcia:

$$I = I_{\text{bumerang}} + I_{\text{rectangle}} + I_{\text{cilindre}}$$

$$I_{\text{bumerang}} = I - I_{\text{rectangle}} - I_{\text{cilindre}}$$

$$I_{\text{bumerang}} = 7,46 \times 10^{-4} - 1,75 \times 10^{-5} - 6,5 \times 10^{-8}$$

$$I_{\text{bumerang}} = 7,28 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^2$$

### 7.3.3 MOMENT D'INÈRCIA D'UN CERCLE DE PAPER

Per comprovar si el mètode de càlcul del moment d'inèrcia del bumerang ha esdevingut efectiu es realitza el mateix procediment per conèixer el moment d'inèrcia d'un cercle de paper, el qual ja es pot conèixer teòricament. D'aquesta manera es podrà comparar el moment d'inèrcia obtingut experimentalment i teòricament i establir el percentatge d'error per aplicar-lo al bumerang i obtenir un moment d'inèrcia del bumerang més precís.

## 7.3.3.1 MOMENT D'INÈRCIA TEÒRIC D'UN CERCLE DE PAPER

Es calcula el moment d'inèrcia amb la següent fórmula:

$$I_{\text{cercle}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$$

La massa es calcula d'aquesta manera:

$$m = d \cdot S$$

$$m = 300 \cdot \frac{\text{gr.}}{\text{m}^2} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ gr.}} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$m = 0,3 \cdot \pi \cdot 0,1^2$$

$$m = 9,43 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

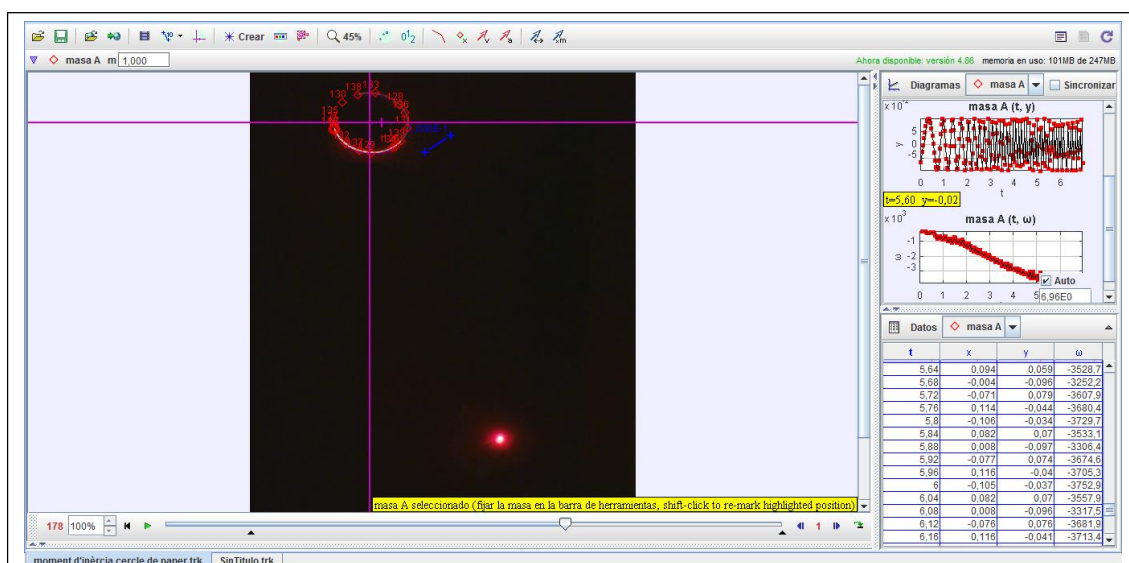
Per tant:

$$I_{\text{cercle}} = \frac{1}{2} \cdot 9,43 \times 10^{-3} \cdot 0,1^2$$

$$I_{\text{cercle teòric}} = 4,72 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

## 7.3.3.2 MOMENT D'INÈRCIA EXPERIMENTAL D'UN CERCLE DE PAPER

1. Es realitza el mateix experiment que amb el bumerang, però amb un cercle de paper i un bumerang de massa coneguda com a pes.
2. S'analitza el moviment amb el programa Tracker.



Imatge 7.3.2.2.3. Anàlisi del M.C.U.A. realitzat pel LED del cercle de paper. Anàlisi del M.R.U.A. realitzat pel LED del bumerang.

3. Amb l'eina "cinta mètrica" de Tracker es troba l'altura inicial a la que es deixa caure la llauna respecte l'instant en que es recull la velocitat instantània final de la llauna. Aquesta altura és de 0,53 m.
4. Llavors seleccionem les dades que necessitem dels moviments al principi i al final de l'experiment. De l'anàlisi del pes seleccionem l'alçada inicial a la que es deixa anar, que és de 0,53 m, i la velocitat al final del trajecte. Per trobar la velocitat final, farem servir la següent fórmula:

$$v = \frac{r - r_0}{\Delta t}$$

Les posicions són entre el fotograma 150 i el 152 per conèixer la velocitat puntual en aquell instant. Al fotograma 152 el pes es troba a l'origen de coordenades ( a 0 m).

Llavors:

$$v = \frac{0,54 - 0,44}{4,56 - 4,48}$$

$$v = 1,25 \text{ m/s}$$

Ara necessitem conèixer la  $\omega$  del bumerang al fotograma 151, ja que és el que es troba entre el 152 i el 150. Per sort, el programa Tracker ja ens la dóna, aquesta és de 3159,4 graus/s. Per convertir els graus a radians es fa servir el següent factor de conversió:

$$3159,4 \frac{\text{graus}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{360 \text{ graus}}$$

$$\omega = 55,14 \text{ rad/s}$$

5. Finalment, per conèixer el moment d'inèrcia del bumerang cal realitzar el següent balanç d'energia:

$$E_{p_{pes_0}} = E_{c_{pes}} + E_{rotacional}$$

$$m_{pes} \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} \cdot m_{pes} \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot (I_{bumerang} + I_{cilindre}) \cdot \omega^2$$

$$I_{total} = \frac{m_{pes} \cdot g \cdot h_0 - \frac{1}{2} \cdot m_{pes} \cdot v^2}{\frac{1}{2} \omega^2}$$

$$I = \frac{m_{pes} \cdot (g \cdot h_0 - \frac{1}{2} \cdot v^2)}{\frac{1}{2} \omega^2}$$

$$I = \frac{(35,6 + 0,2 + 0,7 + 0,1 + 0,2) \times 10^{-3} \cdot (9,8 \cdot 0,53 - \frac{1}{2} \cdot 1,25^2)}{\frac{1}{2} \cdot 55,14^2}$$

$$I = 1,07 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Aquest moment d'inèrcia és el de tot el sistema rotacional, ja que s'ha de tenir en compte que també hi ha inclòs el cilindre metàl·lic. Per obtenir el moment d'inèrcia de només el cercle de paper s'ha de fer el següent:

$$I = I_{cercle} + I_{cilindre}$$

$$I_{cercle} = I - I_{cilindre}$$

$$I_{cercle} = 1,07 \times 10^{-4} - 6,5 \times 10^{-8}$$

$$I_{cercle} = 1,07 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ara només cal comparar el moment d'inèrcia del cercle obtingut de forma teòrica i experimental.

Com es pot veure els moments d'inèrcia teòric i experimental varien bastant. Es realitza el tractament d'error corresponent per conèixer el % error relatiu.

$$e_r = \frac{e_a}{\bar{x}} \cdot 100$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$e_{particular} = |x - \bar{x}|$$

$$e_r = \frac{|x - \bar{x}| \{màxim\}}{\bar{x}} \cdot 100$$

$$\bar{x} = \frac{1,07 \times 10^{-4} + 4,72 \times 10^{-5}}{2}$$

$$e_{p1} = |1,07 \times 10^{-4} - 7,71 \times 10^{-5}|$$

$$\bar{x} = 7,71 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$$

$$e_{p1} = 2,99 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$$

Llavors:

$$e_r = \frac{2,99 \times 10^{-5}}{7,71 \times 10^{-5}} \cdot 100$$

$$e_r = 38,78\%$$

Com s'aprecia, l'error es bastant exagerat.

Tot seguit s'aplica la següent proporció:

$$I_{\text{EXPERIMENTAL cercle}} = 1,07 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \longrightarrow I_{\text{TEÒRIC cercle}} = 4,72 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{\text{EXPERIMENTAL bumerang}} = 7,28 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \longrightarrow I_{\text{TEÒRIC bumerang}} = ? \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{\text{TEÒRIC bumerang}} = \frac{I_{\text{EXPERIMENTAL bumerang}} \cdot I_{\text{TEÒRIC cercle}}}{I_{\text{EXPERIMENTAL cercle}}}$$

$$I_{\text{TEÒRIC bumerang}} = \frac{7,28 \times 10^{-4} \cdot 4,72 \times 10^{-5}}{1,07 \times 10^{-4}}$$

$$I_{\text{TEÒRIC bumerang}} = 3,21 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



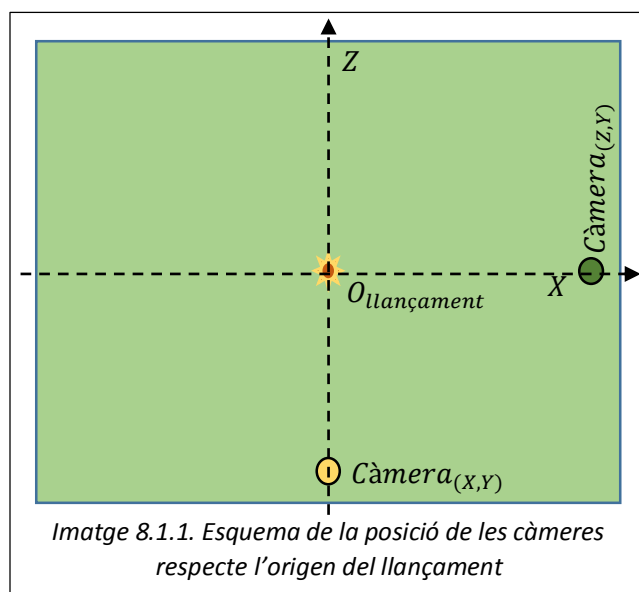
## 8 EXPERIMENTS SOBRE EL VOL DEL BUMERANG

Amb aquests experiments s'ha esbrinat com influencien en el vol del bumerang cada variable. Però tot i haver pogut establir lleis sobre el comportament del vol del bumerang segons les condicions de cada llançament, no ha sigut possible deduir-ne fórmules exactes degut a que han sigut experiments que tot i han servit per esbrinar diversos comportaments, foren massa precaris i amb molt d'error com per haver pogut extret fórmules exactes.

### 8.1 METODOLOGIA D'EXPERIMENTACIÓ I D'OBTENCIÓ DE DADES

Per analitzar els llançaments s'ha optat per enregistrar el vol amb dues càmeres col·locades de forma perpendicular una respecte l'altre. Una ha gravat el vol vist des dels eixos (X,Y) del pla, i l'altre ha gravat els eixos (Y,Z).

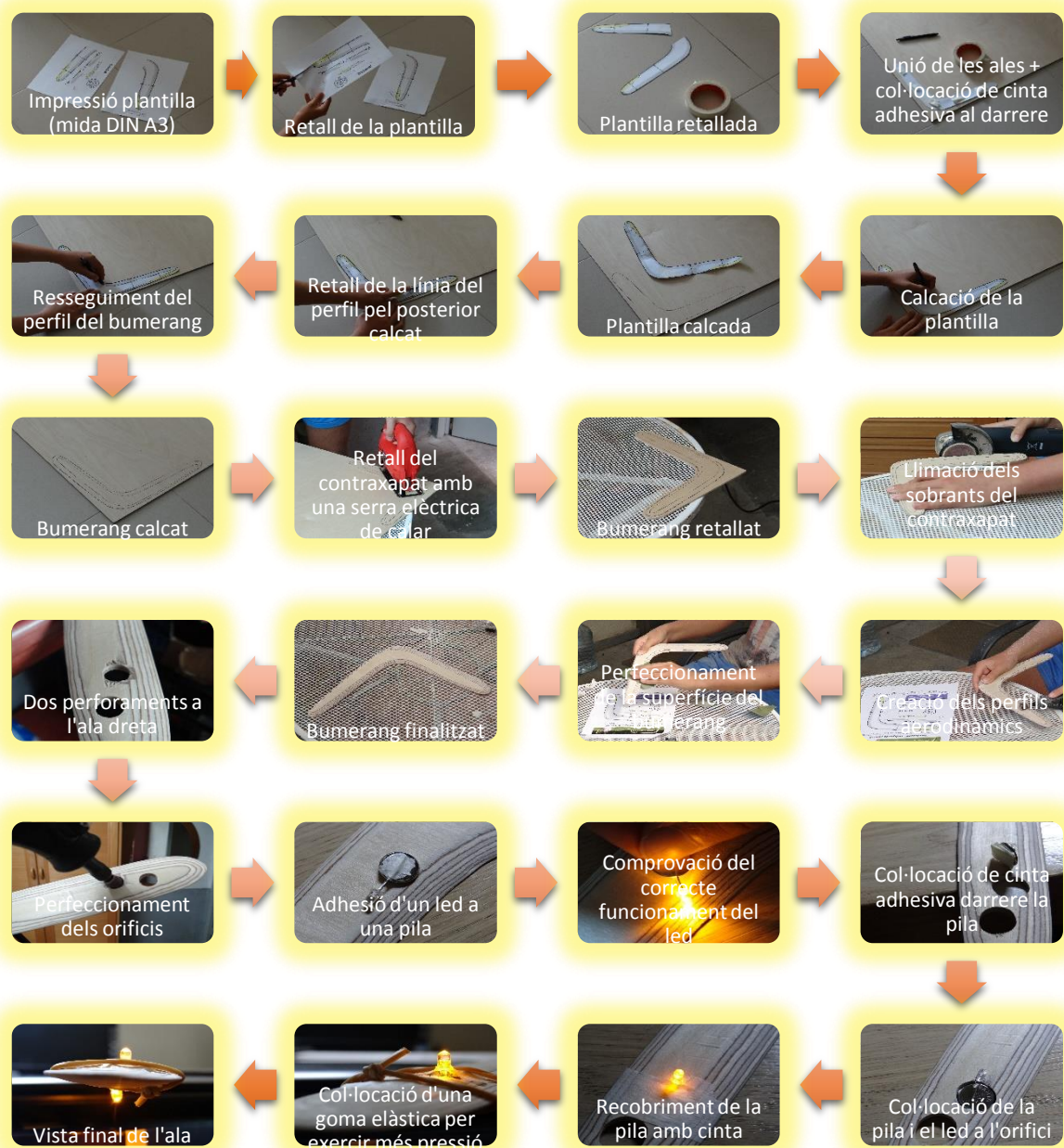
Per tal que a les gravacions es veiés clarament el recorregut descrit pel bumerang es va procedir a col·locar



dos LED's al bumerang i fer les gravacions de nit perquè la llum contrastés més amb la foscor i d'aquesta manera el programa d'anàlisi Tracker pogués fer l'estudi del vol correctament.

En els pròxims apartats s'explica detalladament tot el procés d'experimentació i els resultats obtinguts.

## 8.1.1 PROCÉS DE CONSTRUCCIÓ DEL BUMERANG PER ALS EXPERIMENTS



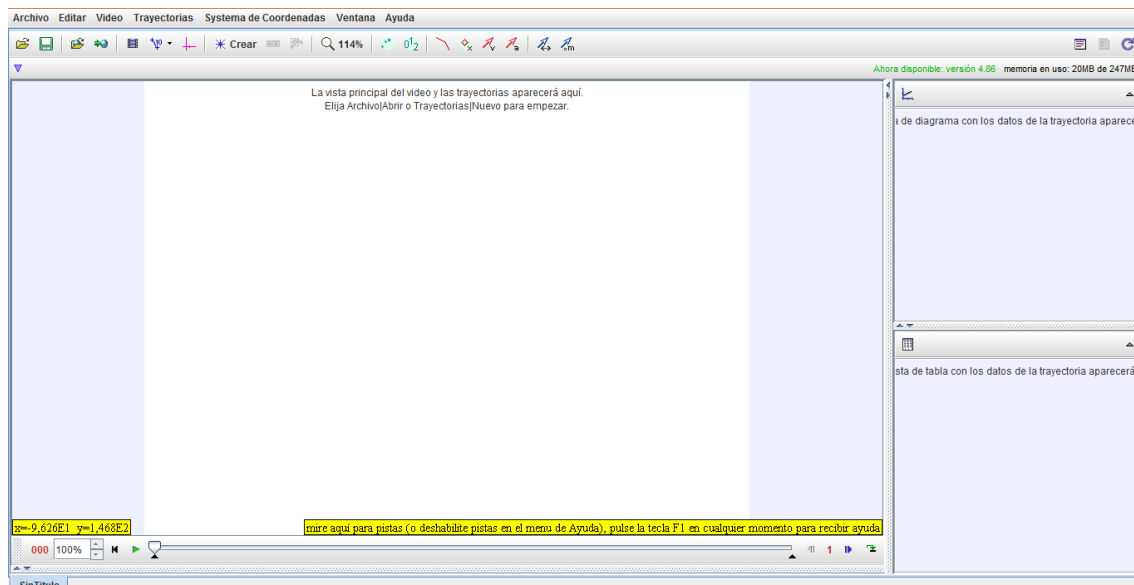
Tot i que s'afegeix una goma elàstica a la pala, s'ha considerat que no interfereix gaire en l'actitud del vol ja encara així retorna al llançador.

## 8.1.2 EXEMPLE D'ANÀLISI DEL VOL D'UN BUMERANG AMB TRACKER

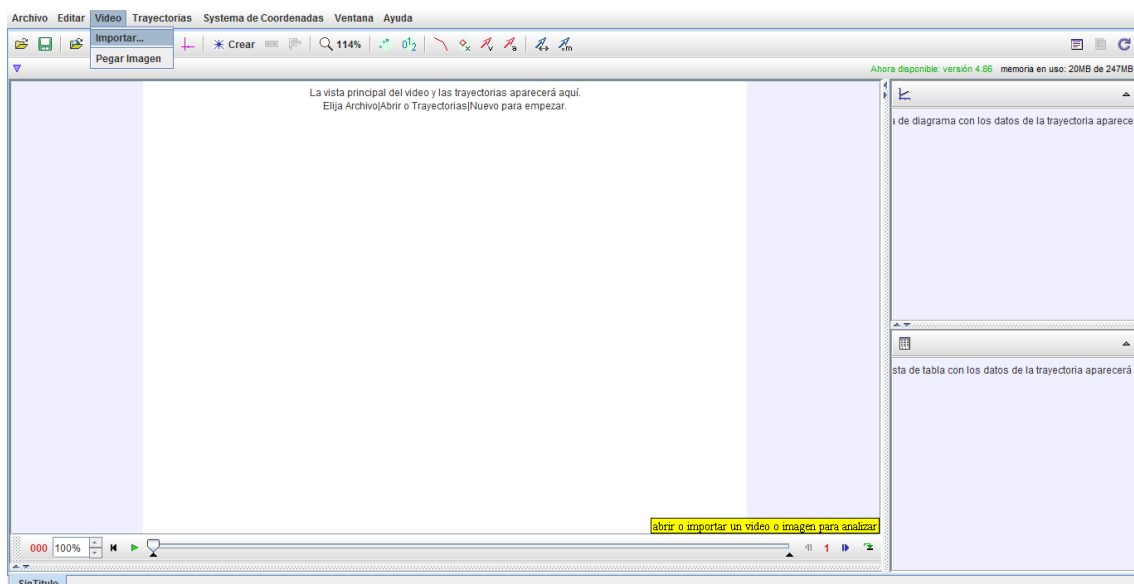
Amb l'ajuda del programa Tracker, una eina educativa virtual gratuïta que serveix per analitzar sistemes físics mitjançant gravacions, s'obtenen totes les dades necessàries per fer els anàlisis dels vols. Aquest programa es pot descarregar des del següent enllaç: <https://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>

### 8.1.2.1 MOSTRA D'ANÀLISI D'UN VOL AMB TRACKER

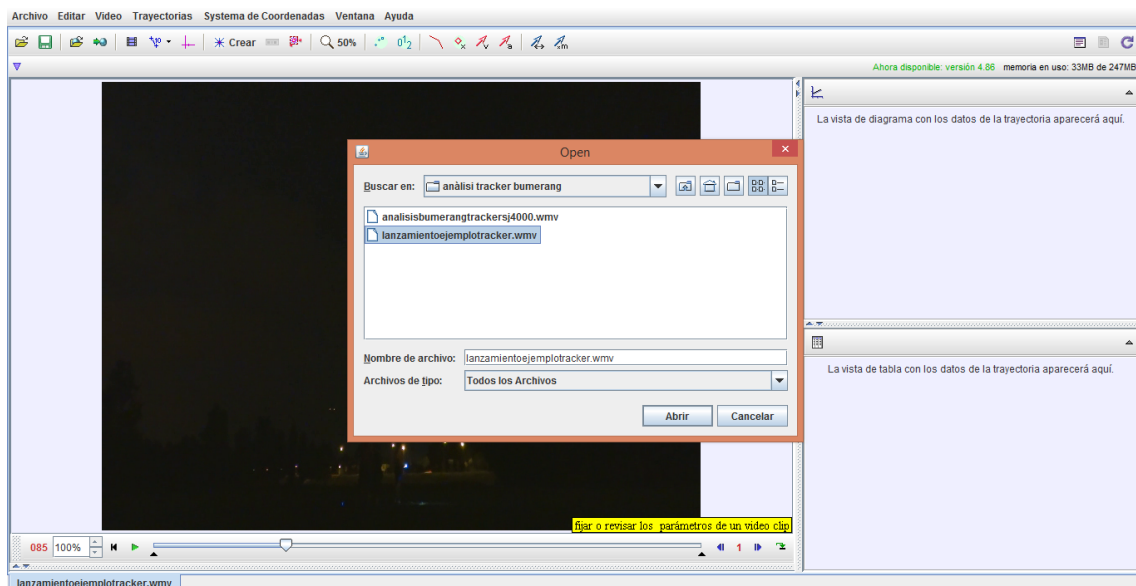
1) Obrirem el programa Tracker i llavors ens trobarem amb la següent pantalla:



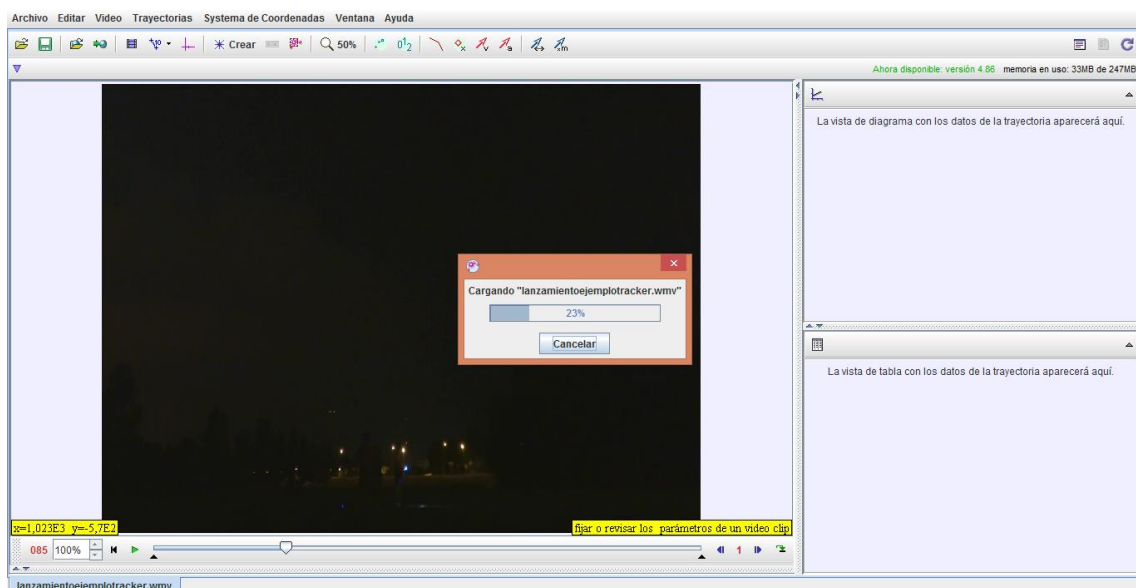
2) Cliquem a la pestanya “Vídeo” i seguidament a “Importar”:



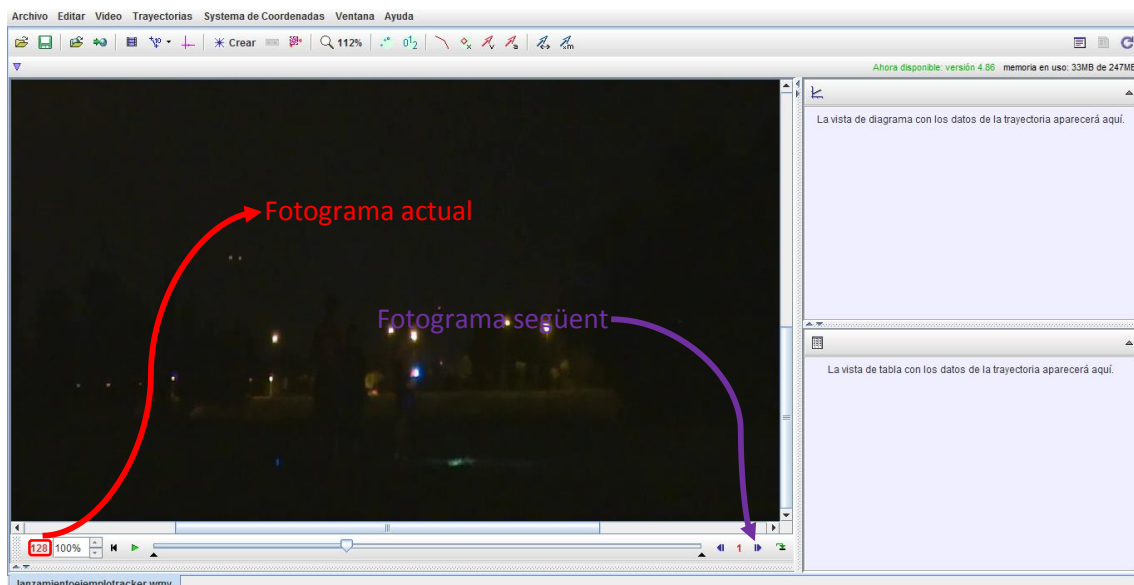
- 3) Llavors se'ns obrirà una finestra on podrem navegar pels arxius de vídeo de l'ordinador i seleccionar el que desitgem analitzar:



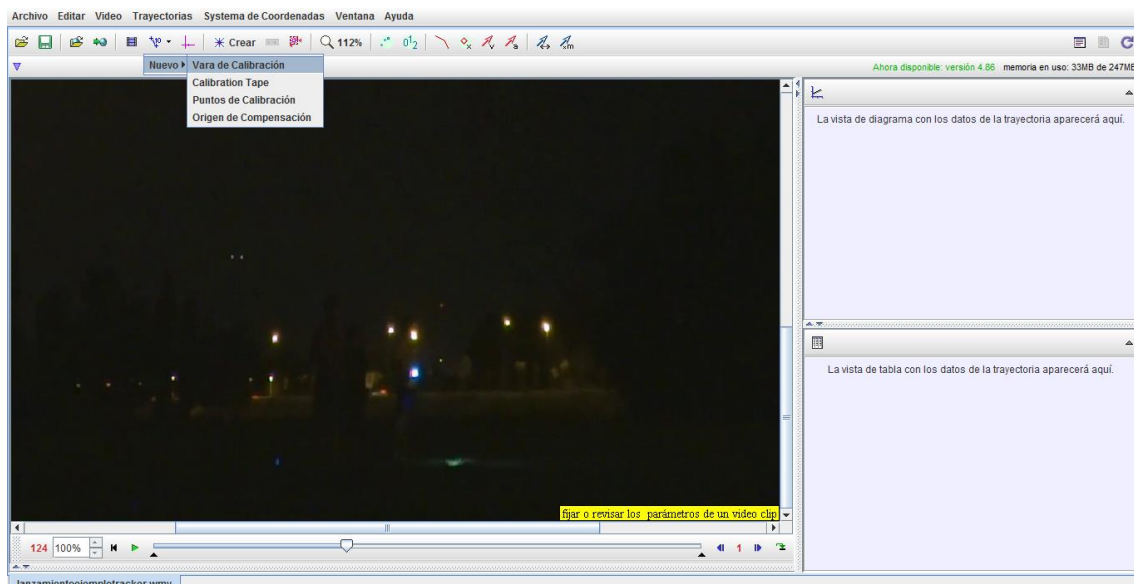
- 4) S'obrirà una finestreta on ens dirà el procés de càrrega del vídeo:



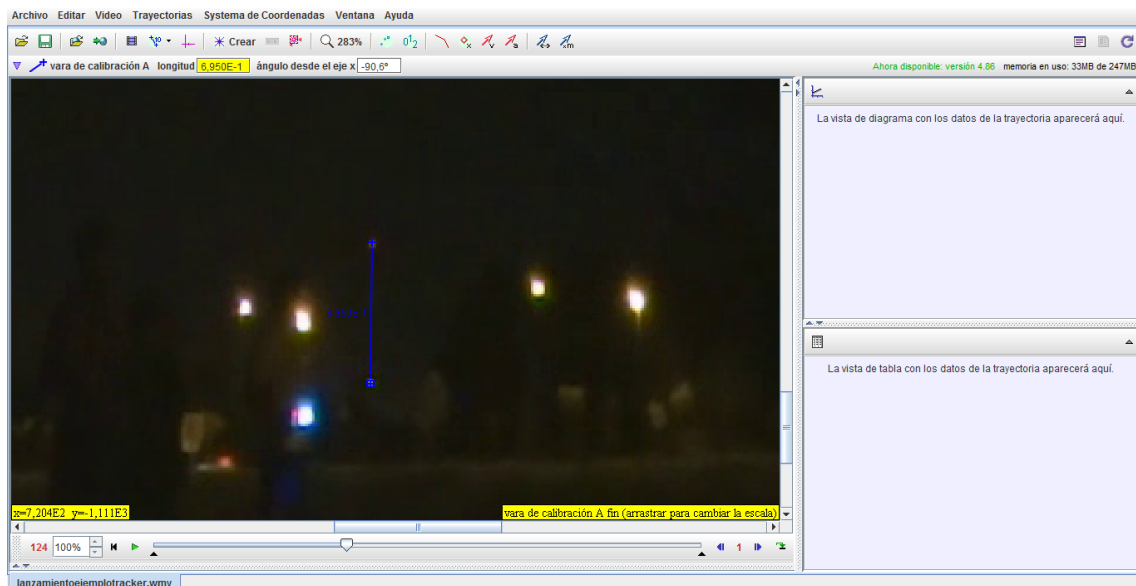
5) Quan s'hagi carregat el vídeo, el tindrem a la pantalla del programa:



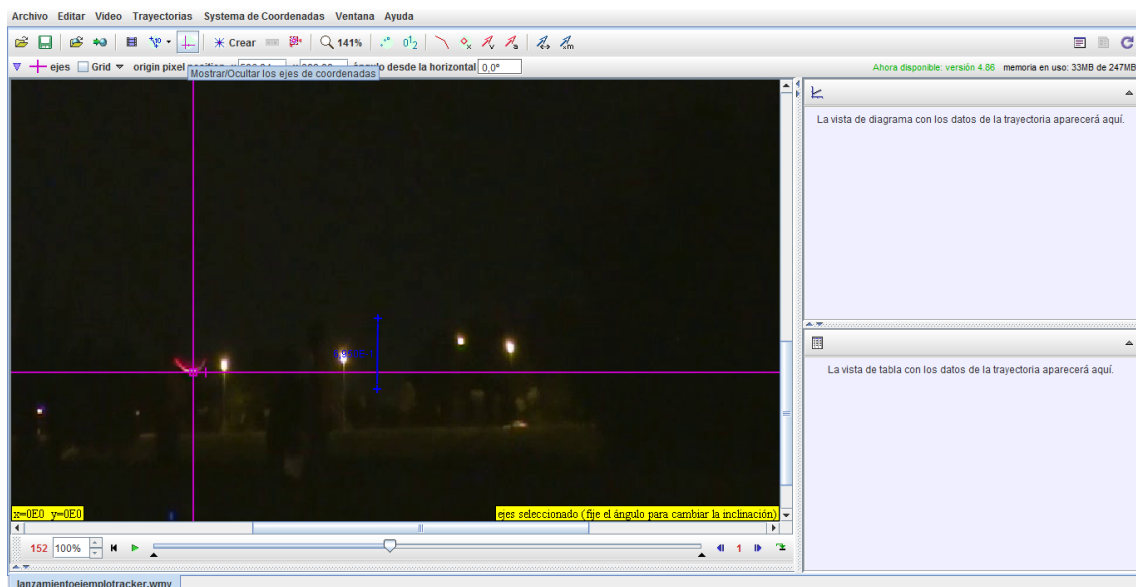
6) Cliquem a la icona blava de la barra d'eines per seleccionar l'opció "Vara de calibratge", que serveix per tenir una mesura coneguda del vídeo, i així el programa pot calcular dades:



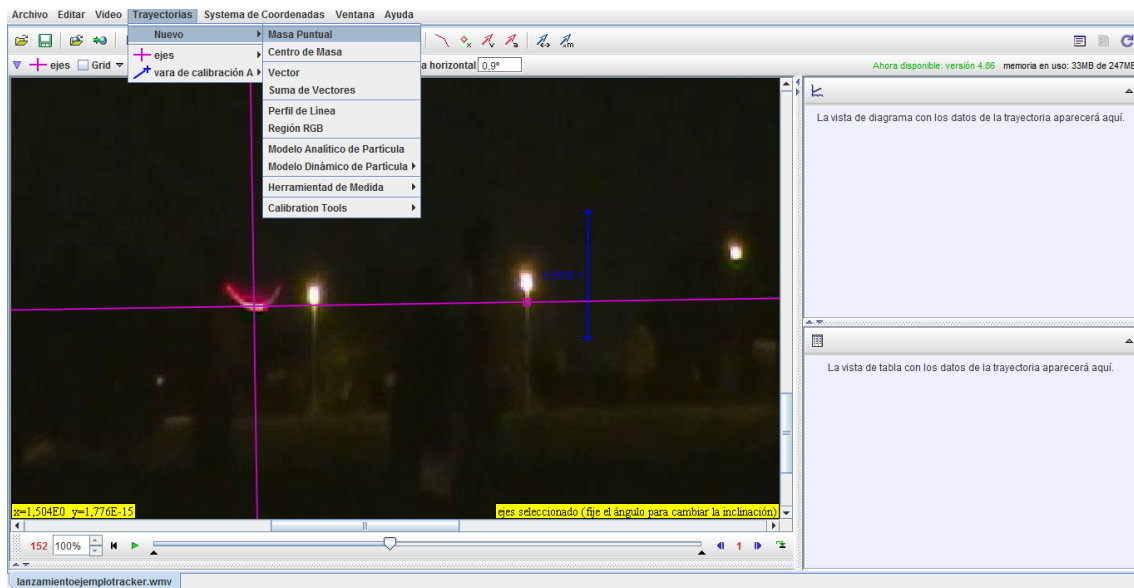
- 7) Seleccionem la vara de calibratge i li donem el valor de 0,695 m, que és la llargada del pal amb LED's a cada extrem:



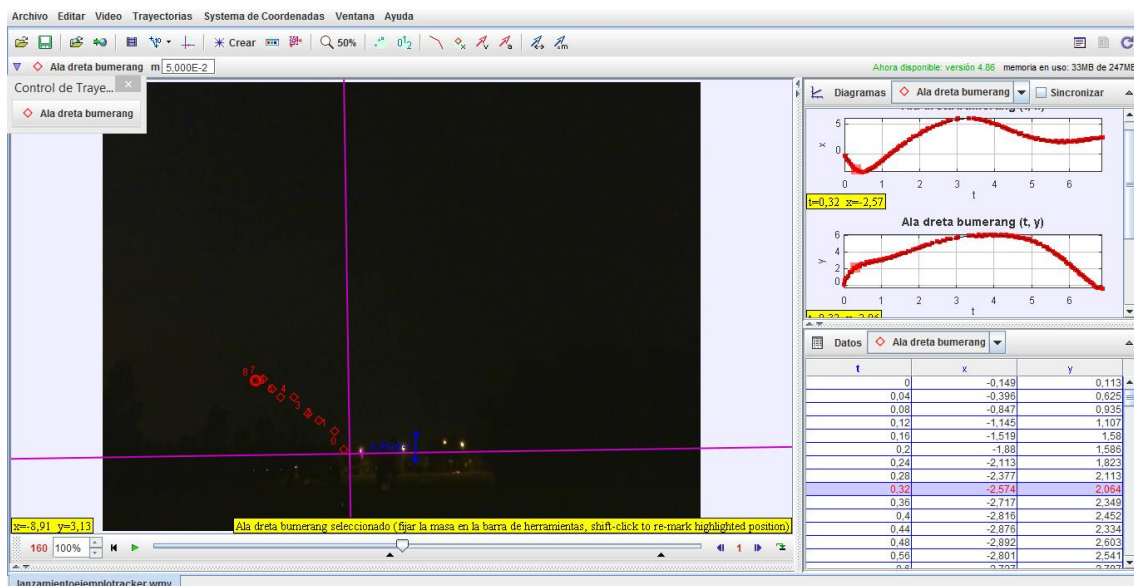
- 8) Anem a la barra d'eines superior i cliquem a una icona que apareix un eix de coordenades rosa. Llavors seleccionem aquest eix que apareixerà a la pantalla i el col·loquem a on comença el llançament del bumerang:



9) Anem a “Trajectòries”, i seleccionem una nova “Massa Puntual”:

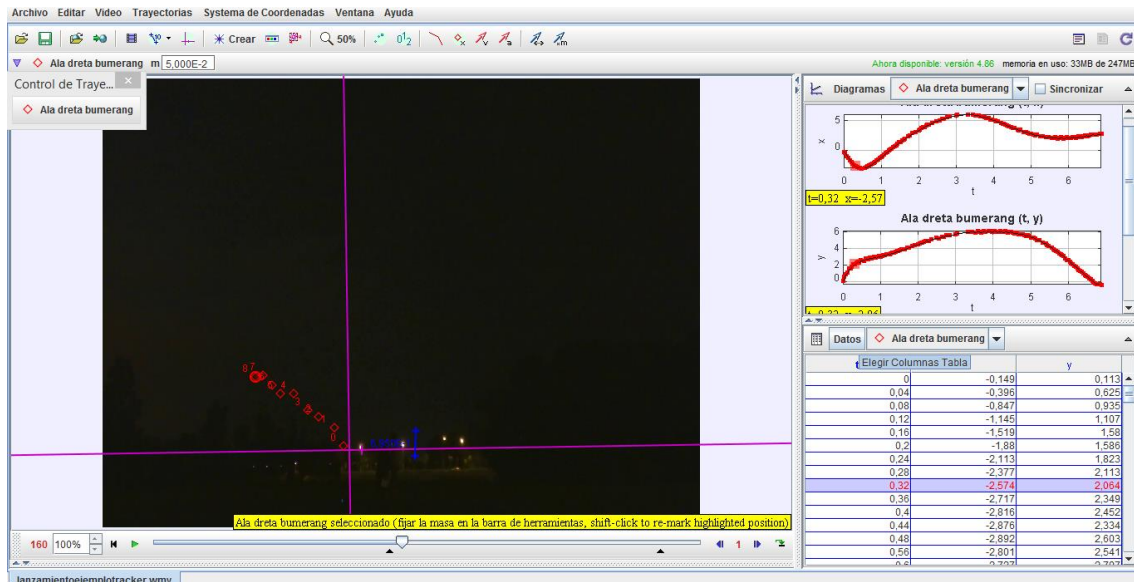


10) Amb el botó “Shift” i clicant amb el botó esquerre del ratolí anem seleccionant a cada fotograma la posició del bumerang:

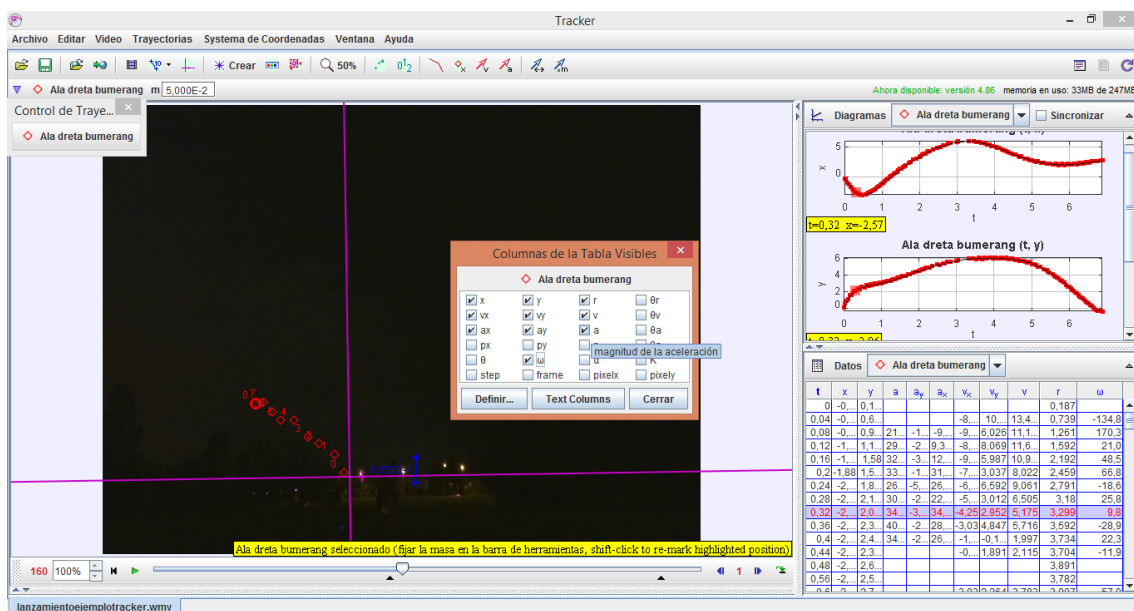




- 11) Un cop s'hagi analitzat tot el recorregut del bumerang, es clica a la pestanyeta que diu "Dades":

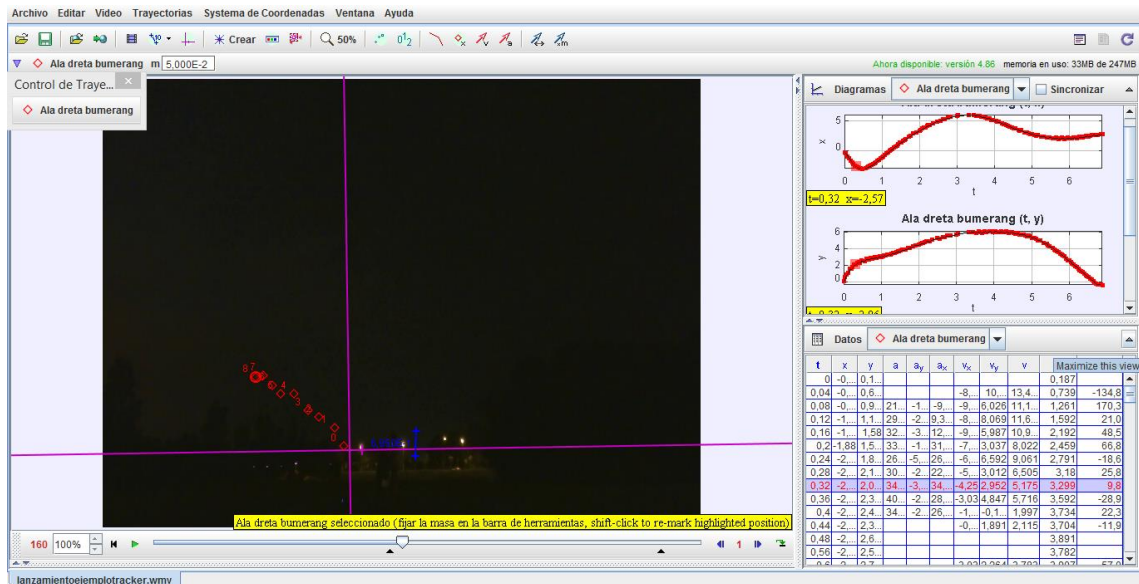


- 12) S'escullen totes les dades que es vulguin observar:

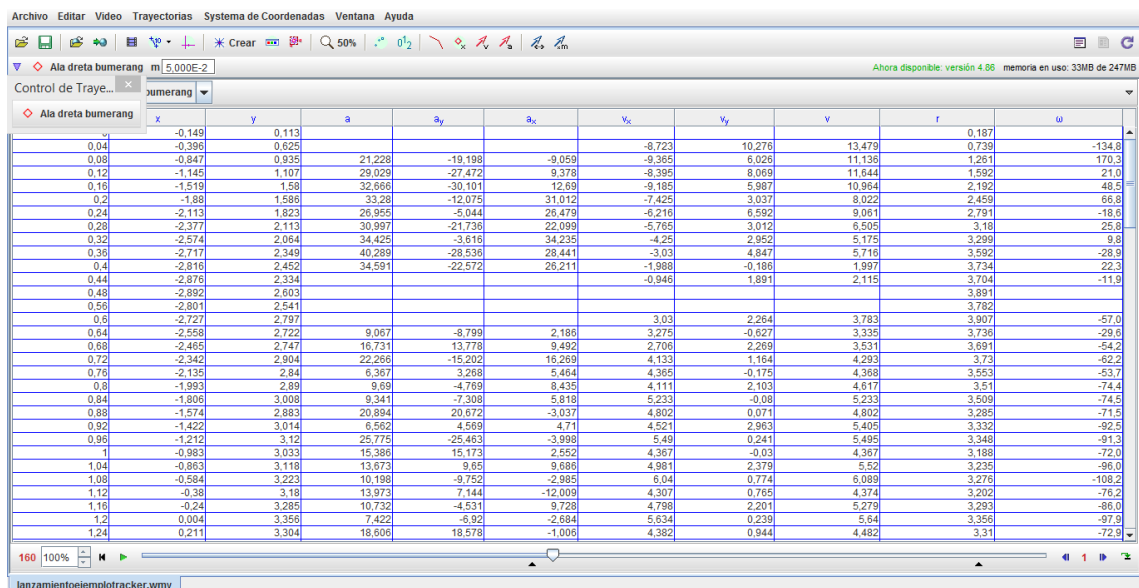




13) Cliquem a la pestanyeta que diu “Amplia aquesta vista”:



14) Finalment tenim a la pantalla totes les dades del vol, podent seleccionar les que resultin necessàries.



Un cop obtingudes les posicions del bumerang per cada fotograma es realitzen els càlculs dels apartats següents per obtenir totes les dades necessàries.

8.1.2.2  $\Delta r$ 

$$\Delta_{x\text{màx.}} = x_{\text{màx.}} - x_{\text{mín.}}$$

$$\Delta_{x\text{màx.}} = 6,05 - (-2,89)$$

$$\Delta_{x\text{màx.}} = 8,94 \text{ m}$$

$$\Delta_{y\text{màx.}} = y_{\text{màx.}} - y_{\text{mín.}}$$

$$\Delta_{y\text{màx.}} = 6,17 - 0,11$$

$$\Delta_{y\text{màx.}} = 6,06 \text{ m}$$

$$\Delta_{z\text{màx.}} = z_{\text{màx.}} - z_{\text{mín.}}$$

$$\Delta_{z\text{màx.}} = 12,78 - 0,18$$

$$\Delta_{z\text{màx.}} = 12,6 \text{ m}$$

Representen els valors màxims de desplaçament en les tres dimensions.

8.1.2.3  $R_{\text{vol}}$ 

El radi aquí trobat és “tridimensional”, per tant és el mòdul de la meitat dels desplaçaments màxims:

$$R = \frac{\sqrt{\Delta_{x\text{màx.}}^2 + \Delta_{y\text{màx.}}^2 + \Delta_{z\text{màx.}}^2}}{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{8,94^2 + 6,06^2 + 12,6^2}}{2}$$

$$R = 8,3 \text{ m}$$

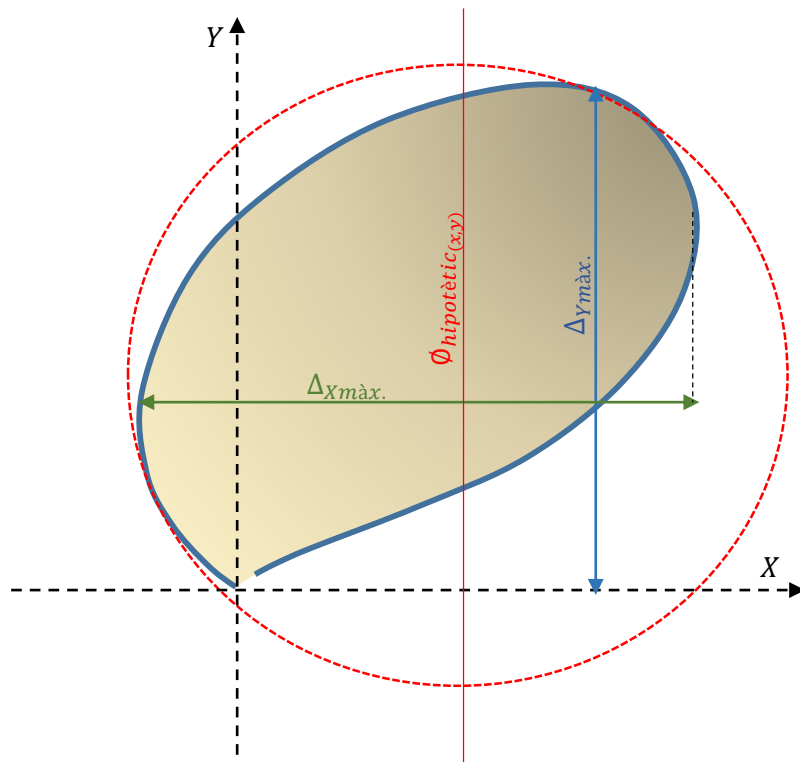


Figura 8.1.2.3. Esquema del diàmetre aproximat del vol del bumerang (x,y)

Per obtenir el diàmetre “tridimensional”, simplement seria fer el mateix procediment i realitzar el mòdul amb les distàncies del diàmetre (x,y) i  $\Delta_{z\text{màx.}}$ .

8.1.2.4  $\Delta s_{vol}$ 

$$\Delta s_{vol} = \varphi \cdot R$$

$$\Delta s_{vol} = 2\pi \cdot 8,3$$

$$\Delta s_{vol} = 52,15 \text{ m}$$

8.1.2.5  $v_0$ 

$$v_{x0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_{x0} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2}$$

$$v_{x0} = \frac{-0,85 - 0,4}{0,08 - 0,04}$$

$$v_{x0} = -31,25 \text{ m/s}$$

$$v_{y0} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$v_{y0} = \frac{y_3 - y_2}{t_3 - t_2}$$

$$v_{y0} = \frac{0,94 - 0,63}{0,08 - 0,04}$$

$$v_{y0} = 7,75 \text{ m/s}$$

$$v_{z0} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$v_{z0} = \frac{z_3 - z_2}{t_3 - t_2}$$

$$v_{z0} = \frac{1,19 - 0,41}{0,08 - 0,04}$$

$$v_{z0} = 19,5 \text{ m/s}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2}$$

$$v_0 = \sqrt{(-31,25)^2 + 7,75^2 + 19,5^2}$$

$$v_0 = 37,64 \text{ m/s}$$

8.1.2.6  $v$ 

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_x = \frac{x_{167} - x_{166}}{t_{167} - t_{166}}$$

$$v_x = \frac{2,64 - 2,74}{6,68 - 6,64}$$

$$v_x = -2,5 \text{ m/s}$$

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$v_y = \frac{y_{167} - y_{166}}{t_{167} - t_{166}}$$

$$v_y = \frac{-0,04 - 0,123}{6,68 - 6,64}$$

$$v_y = -4,1 \text{ m/s}$$

$$v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$v_z = \frac{z_{167} - z_{166}}{t_{167} - t_{166}}$$

$$v_z = \frac{1,56 - 1,46}{6,68 - 6,64}$$

$$v_z = 2,5 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$v = \sqrt{(-2,5)^2 + (-4,1)^2 + 2,5^2}$$

$$v = 5,41 \text{ m/s}$$

8.1.2.7  $v_m$ 

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{r - r_0}{t - t_0}$$

$$v_m = \frac{52,15 - 0}{6,68 - 0}$$

$$v_m = 7,81 \text{ m/s}$$

8.1.2.8  $a_m$ 

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_m = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$a_m = \frac{-2,5 - 37,64}{6,68 - 0}$$

$$a_m = -6,01 \text{ m/s}$$

8.1.2.9  $F_0$ 

$$\sum F = m \cdot a$$

$$F_0 = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$F_0 = m \cdot \frac{v_0}{\Delta t}$$

$$F_0 = 0,038 \cdot \frac{37,64}{(0,08 - 0,04)/2}$$

$$F_0 = 71,52 \text{ N}$$

Per esbrinar si aquesta força és possible considerant les capacitats humanes es realitza el següent càlcul:

$$\sum F = m \cdot a$$

$$F_0 - m \cdot g = m \cdot 0$$

$$m = \frac{F_0}{g}$$

$$m = \frac{71,52}{9,81}$$

$$m = 7,29 \text{ kg}$$

Això significa que la força aplicada per llançar aquest bumerang és equivalent a sostenir un pes de 7,29 kg, una massa possible de sostenir i per tant, és possible que la força calculada sigui correcte.

8.1.2.10  $F$ 

$$\sum F = m \cdot a$$

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$F = m \cdot \frac{v}{\Delta t}$$

$$F = 0,038 \cdot \frac{5,41}{(6,68 - 6,64)/2}$$

$$F = 10,28 \text{ N}$$

O sigui que en teoria, aquesta és la força mínima necessària que s'ha de realitzar per escapar el bumerang.

#### 8.1.2.11 $r_{\text{bumerang}}$

És la distància a la que cau el bumerang des de l'origen del llançament.

$$r_{\text{bumerang}} = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$r_{\text{bumerang}} = \sqrt{2,8^2 + 1,56^2}$$

$$r_{\text{bumerang}} = 3,2 \text{ m}$$

8.1.2.12  $\omega_0$ 

Per calcular la velocitat angular s'utilitza un balanç d'energia, aprofitant que s'ha calculat el moment d'inèrcia del bumerang anteriorment.

$$E_{c_0} + E_{p_0} = E_c + E_p + E_{rot} + W_{drag}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 + F_{drag} \cdot s$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h_0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot h - F_{drag} \cdot s}{\frac{1}{2} \cdot I}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h_0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \cdot s}{\frac{1}{2} \cdot I}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot (m \cdot v_0^2 - v^2 \cdot (m + C \cdot \rho \cdot A \cdot s)) + m \cdot g \cdot (h_0 - h)}{\frac{1}{2} \cdot I}}$$

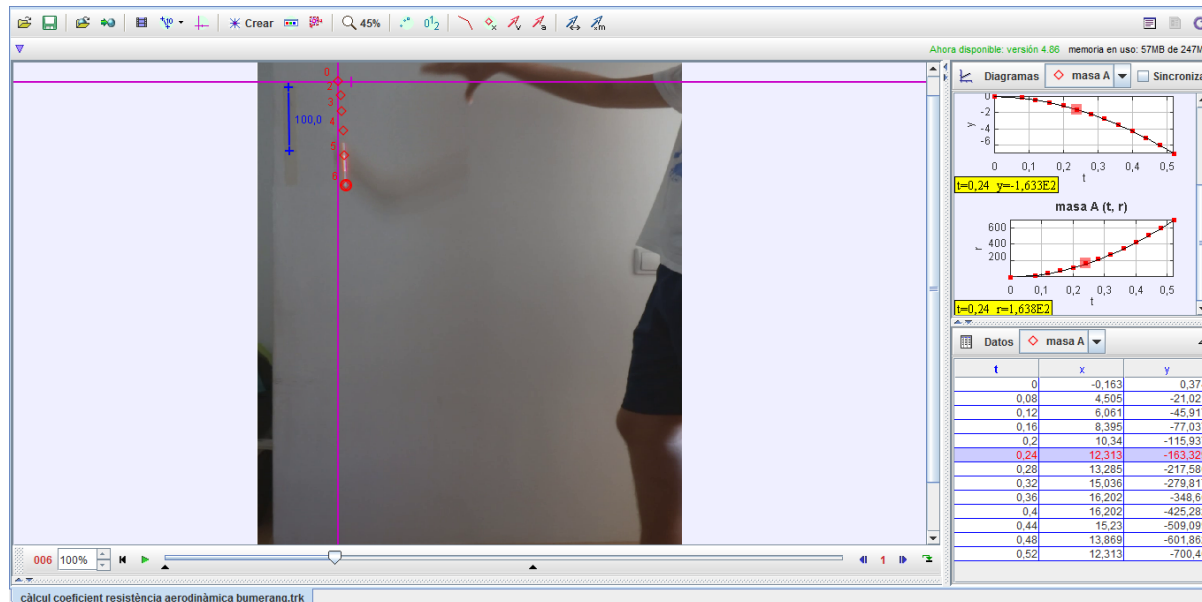
$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot \left( m \cdot \left( \frac{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2}}{\Delta t_1} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2 + \Delta z_2^2}}{\Delta t_2} \right)^2 \cdot (m + C \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta s) \right) + m \cdot g \cdot (h_0 - h)}{\frac{1}{2} \cdot I}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot \left( m \cdot \left( \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{t_2 - t_1} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2 + (z_6 - z_5)^2}}{t_6 - t_5} \right)^2 \cdot (m + C \cdot \rho \cdot A \cdot (\sqrt{(x_6 - x_1)^2 + (y_6 - y_1)^2 + (z_6 - z_1)^2})) \right) + m \cdot g \cdot (h_0 - h)}{\frac{1}{2} \cdot I}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 0,038 \cdot \left( \sqrt{\frac{(-0,847 - (-0,396))^2 + \left(\frac{0,935 + 0,822}{2} - \frac{0,625 + 0,652}{2}\right)^2 + (0,897 - 0,247)^2}{0,08 - 0,04}} \right)^2 - \left( \sqrt{\frac{(-2,113 - (-1,88))^2 + \left(\frac{1,823 + 1,835}{2} - \frac{1,586 + 1,516}{2}\right)^2 + (2,652 - 2,4)^2}{0,24 - 0,20}} \right)^2 \cdot \left( 0,038 + C \cdot 1,23 \cdot 0,33 \cdot 0,004 \cdot \left( \sqrt{\frac{(-2,113 - (-0,396))^2 + \left(\frac{1,823 + 1,835}{2} - \frac{0,625 + 0,652}{2}\right)^2 + (2,652 - 0,247)^2}{0,24 - 0,20}} \right)^2 \right) \right) + 0,038 \cdot 9,81 \cdot (0,639 - 1,829) \right)}$$

Com es pot veure, falta conèixer la “C”, que és el coeficient de resistència aerodinàmica del bumerang. Per trobar-lo es realitza el següent procediment:

1. Es col·loca un LED al bumerang.
2. S’adhereix cinta a la paret i es dibuixa una mesura determinada que servirà com a regla al programa Tracker.
3. Es posiciona una càmera enregistrant perpendicularment la paret i la regla.
4. Es deixa caure el bumerang al costat de la paret, per tal que la càmera enregistri la seva caiguda lliure.
5. Amb el programa Tracker s’analitza el moviment, i se’n recullen les últimes dues posicions finals, a més dels seus respectius temps.



6. Obtingudes les dades necessàries es procedeix a realitzar els següents càlculs:

$$\sum F = m \cdot a$$

$$P - F_{drag} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$m \cdot g - \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 = m \cdot \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$C = \frac{m \cdot \frac{v}{t} - m \cdot g}{-\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2}$$

$$C = \frac{m \cdot \left( \frac{\frac{r_{13} - r_{12}}{t_{13} - t_{12}}}{t_{13}} - g \right)}{-\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \left( \frac{r_{13} - r_{12}}{t_{13} - t_{12}} \right)^2}$$

$$C = \frac{m \cdot \left( \frac{\frac{r_{13} - r_{12}}{t_{13} - t_{12}}}{t_{13}} - g \right)}{-\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \left( \frac{r_{13} - r_{12}}{t_{13} - t_{12}} \right)^2}$$

$$C = \frac{m \cdot \left( \frac{\frac{\sqrt{(x_{13} - x_{12})^2 + (y_{13} - y_{12})^2}}{t_{13} - t_{12}}}{t_{13}} - g \right)}{-\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \left( \frac{\sqrt{(x_{13} - x_{12})^2 + (y_{13} - y_{12})^2}}{t_{13} - t_{12}} \right)^2}$$

$$C = \frac{0,038 \cdot \left( \frac{\frac{\sqrt{(0,025 - 0,028)^2 + (-1,401 - (-1,204))^2}}{0,52 - 0,48}}{0,52} - 9,81 \right)}{-\frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 0,335 \cdot 0,004 \cdot \left( \frac{\sqrt{(0,025 - 0,028)^2 + (-1,401 - (-1,204))^2}}{0,52 - 0,48} \right)^2}$$



$$C = 0,645$$

Llavors:

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot \left( 0,038 \cdot \left( \sqrt{\frac{(-0,847 - (-0,396))^2 + \left(\frac{0,935 + 0,822}{2} - \frac{0,625 + 0,652}{2}\right)^2} + (0,897 - 0,247)^2} \right)^2 - \left( \sqrt{\frac{(-2,113 - (-1,88))^2 + \left(\frac{1,823 + 1,835}{2} - \frac{1,586 + 1,516}{2}\right)^2} + (2,652 - 2,4)^2} \right)^2 \cdot \left( 0,038 + 0,645 \cdot 1,225 \cdot 0,335 \cdot 0,004 \cdot \left( \sqrt{\frac{(-2,113 - (-0,396))^2 + \left(\frac{1,823 + 1,835}{2} - \frac{0,625 + 0,652}{2}\right)^2} + (2,652 - 0,247)^2} \right)^2 + 0,038 \cdot 9,81 \cdot (0,639 - 1,829) \right) \right)}{\frac{1}{2} \cdot 4,85 \times 10^{-4}}}$$

$$\omega = 114,2 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 114,2 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}}$$

$$\omega = 18,2 \text{ voltes/s}$$

Malauradament aquest resultat sembla una mica erroni, ja que presenta una velocitat angular bastant exagerada. Això pot ser perquè s'ha considerat que inicialment el bumerang no té  $\omega$  però si que porta  $v$ , però això és fals ja que també porta una velocitat angular, i llavors també una energia cinètica rotacional, el que suposaria que el balanç d'energia seria diferent, però s'ha hagut de descartar la velocitat angular inicial ja que no es pot conèixer.

Per comprovar més detalladament si encara pot ser el resultat possible dins els valors més o menys reals es realitza el procediment explicat a l'apartat següent.

#### 8.1.2.12.1 EXPLICACIÓ TEÒRICA DEL DESPLAÇAMENT VISUALMENT ONDULATORI DEL LED DEL BUMERANG

El que succeeix és que a l'hora d'analitzar els vídeos ens assabentem que el LED del bumerang descriu un moviment en forma d'ona i no d'hèlix, tal com seria d'esperar, ja que el bumerang gira sobre ell mateix mentre que es desplaça per l'espai.

- L'explicació més lògica que se l'hi pot trobar a aquest fet és que el LED del bumerang segueix una trajectòria d'acord amb aquestes equacions (només s'expressen les hipotètiques equacions (x,y) i es considera que no hi ha acceleració angular en la rotació del bumerang):

- Equacions de la rotació del bumerang:

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$$x = R_{bumerang} \cdot \cos \varphi$$

$$y = R_{bumerang} \cdot \sin \varphi$$

- Equacions del desplaçament del bumerang (considerant que és semblant els primers instants a un tret parabòlic):

$$x = v_{x_0} \cdot t$$

$$y = v_{y_0} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Per tant s'obtenen les següents equacions definitives:

$$x = v_{x_0} \cdot t + R_{bumerang} \cdot \cos(\omega_{bumerang} \cdot t)$$

$$y = v_{y_0} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + R_{bumerang} \cdot \sin(\omega_{bumerang} \cdot t)$$

Per comprovar que tals equacions descriuen aproximadament el moviment en forma d'ona del LED, es representen gràficament les dades obtingudes de l'anàlisi del vol que ha servit d'exemple en el treball.

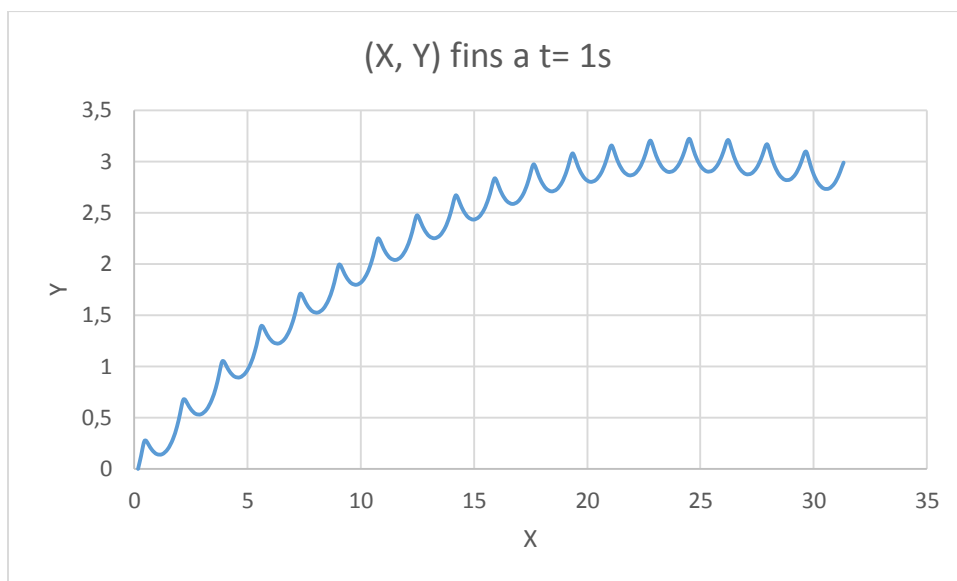
Dades necessàries:

$$v_{x_0} = -31,25 \text{ m/s}$$

$$v_{y_0} = 7,75 \text{ m/s}$$

$$R_{\text{bumerang}} = 0,16 \text{ m}$$

$$\omega_{\text{bumerang}} = 114,2 \text{ rad/s}$$



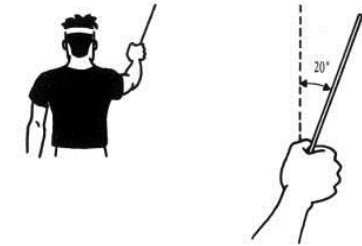
En aquesta gràfica queda reflectit que la teoria pot ser certa.

## 8.2 ESTUDI DE LES VARIABLES DELS EXPERIMENTS

### 8.2.1 ANGLE VERTICAL DE LLANÇAMENT

És la inclinació que el canell dona al bumerang a l'hora de llançar-lo.

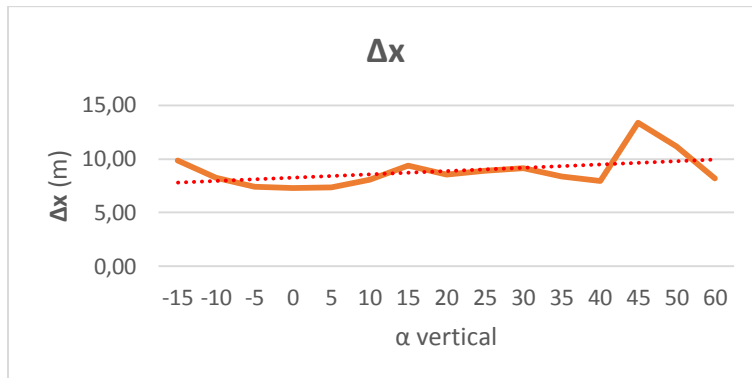
#### 8.2.1.1 DADES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DE LES INCLINACIONS VERTICALS INICIALS DEL BUMERANG



*Imatge 8.2.1.1. Angle vertical de llançament idoni del bumerang*

$\alpha_{\text{vertical}}$	$\Delta_x$	$\Delta_y$	$\Delta_z$	$R_{\text{vol}}$	$\Delta S_{\text{vol}}$	$V_{x0}$	$V_{y0}$	$V_{z0}$	$V_0$	$V_x$	$V_y$	$V_z$	$V_m$	$A_m$	$F_0$	$V$	$F$	$r_{\text{bumerang}}$	$\omega_0$	$t_{y\text{màx}}$	$t_{\text{vol}}$
-15	7,00	5,84	12,45	7,72	48,50	-15,60	5,98	9,65	19,29	-4,90	-3,84	2,86	10,45	-2,68	18,33	6,85	6,51	5,82	86,43	3,12	7,24
-10	9,87	7,59	11,93	8,62	54,18	-11,53	9,98	10,10	18,29	3,90	-2,88	0,05	7,02	-1,80	17,80	5,16	4,60	5,30	166,31	3,28	7,72
-5	8,23	6,90	12,76	8,34	52,39	-12,29	6,89	5,94	15,29	-3,70	0,06	1,02	9,85	-3,43	21,00	3,84	3,65	7,29	35,18	3,24	7,60
0	7,40	8,58	12,64	8,49	53,33	-6,73	16,51	14,01	22,68	-1,96	-2,25	2,96	6,87	-1,56	15,47	2,38	3,99	6,79	78,67	3,52	7,84
5	7,28	8,81	12,08	8,32	52,26	-6,47	16,17	9,30	19,74	-2,09	-2,41	1,18	6,60	-2,06	18,75	3,40	3,23	3,94	171,26	3,64	7,68
10	7,35	8,31	13,96	8,92	56,03	-5,28	14,32	17,54	23,24	0,99	-0,71	-4,87	7,18	-2,34	22,08	5,02	4,77	4,49	209,43	3,44	7,84
15	8,05	8,61	11,89	8,37	52,60	-8,81	13,92	11,09	19,86	-1,50	-1,89	0,92	6,61	-2,17	18,87	2,58	2,45	5,88	67,93	4,08	7,96
20	9,35	8,63	12,45	8,90	55,91	-3,63	6,69	18,82	20,30	8,94	-4,01	-1,38	7,44	-1,38	19,28	9,89	9,40	5,74	31,69	3,20	7,52
25	8,57	10,61	14,58	9,98	62,72	-10,48	6,69	12,15	17,38	-0,51	-3,32	2,33	7,69	-1,63	16,51	4,09	3,88	5,44	125,37	3,92	8,16
30	8,93	8,32	16,13	10,11	63,53	-11,60	8,35	19,37	24,08	7,63	-8,02	-2,54	9,45	-1,89	22,87	11,36	10,79	7,17	183,85	2,88	6,80
35	9,16	5,62	13,13	8,48	53,30	-14,43	17,79	11,55	25,66	-4,76	-1,07	5,95	8,49	-2,86	24,38	7,69	7,31	11,44	121,14	3,96	6,28
40	8,33	8,01	12,57	8,54	53,65	-6,94	14,41	14,54	21,61	-1,04	-1,35	1,73	6,99	-2,50	20,53	2,43	2,31	9,29	180,80	4,12	7,76
45	7,97	7,91	13,86	8,92	56,04	-13,00	8,93	14,50	21,42	-2,95	-9,45	7,33	8,39	-1,36	20,35	12,32	11,71	4,74	162,39	5,04	6,72
50	13,37	10,19	20,21	13,14	82,59	-10,55	8,20	9,19	16,22	5,40	6,71	-6,43	18,11	-1,20	15,41	10,75	10,21	7,59	164,60	4,56	6,40
60	11,14	5,08	11,80	8,51	53,44	-13,18	13,92	9,15	21,24	4,70	4,75	-9,83	13,10	-2,29	20,18	11,89	11,29	8,98	169,18	1,76	5,80
70	8,20	7,56	8,89	7,13	44,80	-14,67	14,16	8,75	22,19	3,35	-4,05	-8,05	11,20	-3,14	21,08	9,61	9,13	5,84	103,85	2,04	4,00

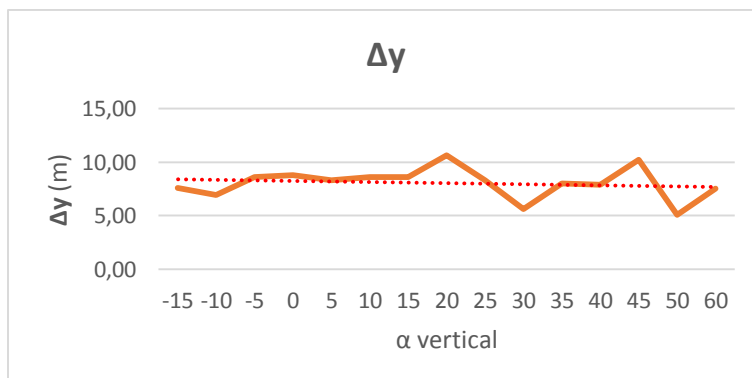
## 8.2.1.2 GRÀFIQUES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DE L'ANGLE VERTICAL DE LLANÇAMENT

➤ GRÀFICA  $\Delta x - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta x - \alpha_{vertical}$ 

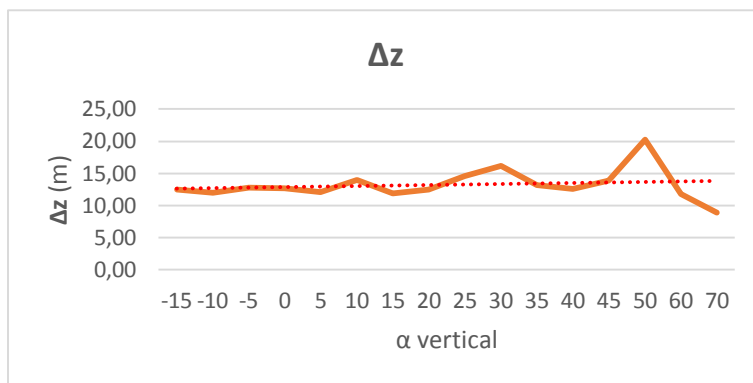
Com es pot veure a la gràfica, a mesura que s'augmenta la inclinació vertical el bumerang tendeix a fer un recorregut a l'eix X una mica més ampli.

Tot i els resultats obtinguts, jo crec que la conclusió és errònia, ja que teòricament a l'estar cada cop més pla hi haurà cada vegada més sustentació Y que elevarà el bumerang més cap amunt, en canvi, en teoria hi ha menys sustentació X degut a que cada cop es llença més pla.

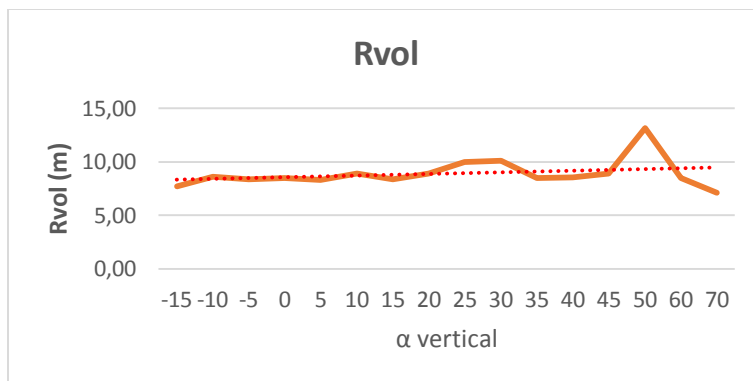
El que jo crec que hauria d'haver passat seria que s'hagués elevat enormement i anés caient sense gairebé fer precessió, com si fos un avió que vola.

➤ GRÀFICA  $\Delta y - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta y - \alpha_{vertical}$ 

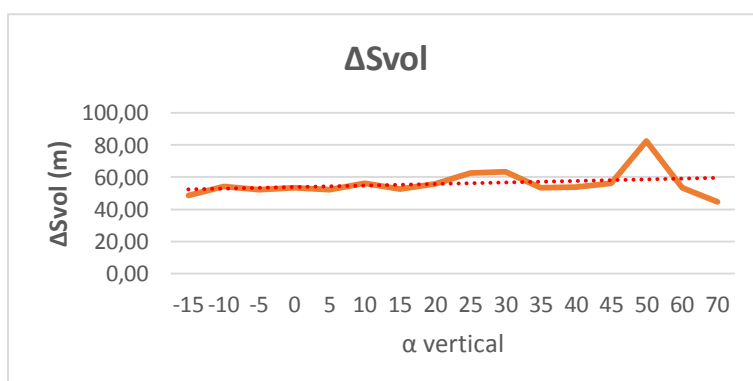
La gràfica ens diu que gairebé l' $\Delta y$  gairebé no varia, cosa que anul·la totalment la deducció teòrica explicada a l'apartat anterior.

➤ GRÀFICA  $\Delta z - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta z - \alpha_{vertical}$ 

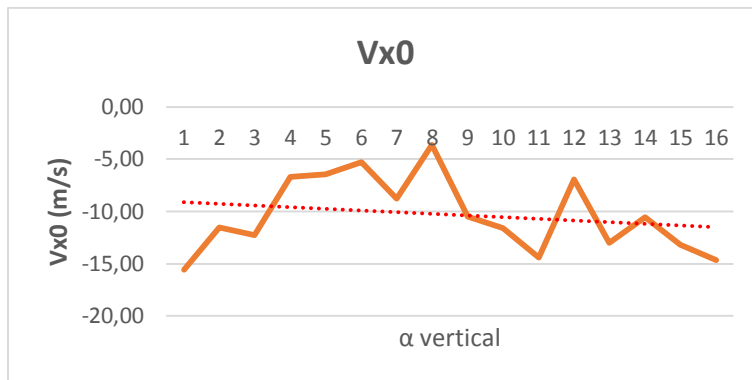
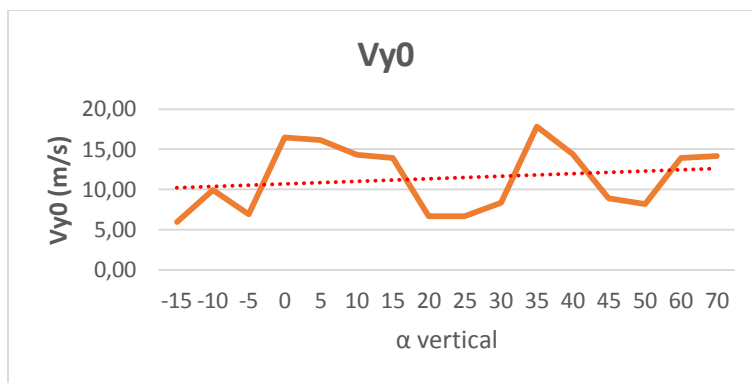
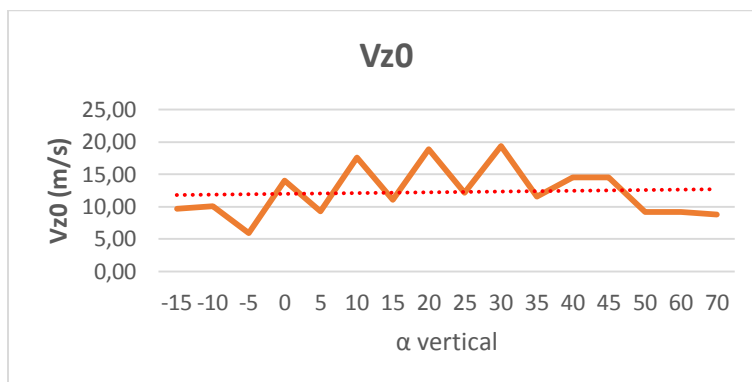
Com es pot veure  $\Delta z$  es manté pràcticament invariable.

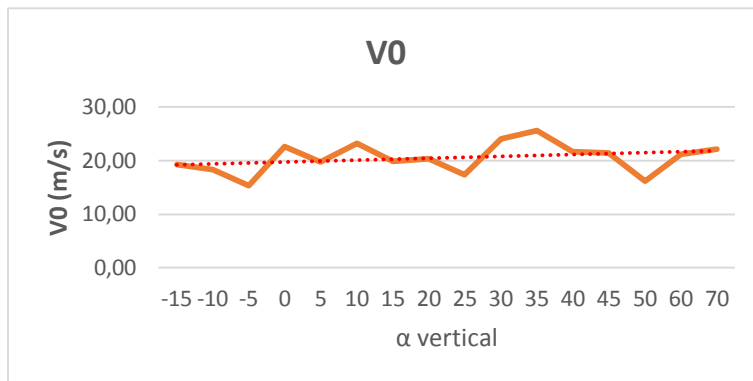
➤ GRÀFICA  $R_{vol} - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $R_{vol} - \alpha_{vertical}$ 

El radi de vol augmenta lleugerament a mesura que la inclinació de llançament del bumerang es va fent més gran.

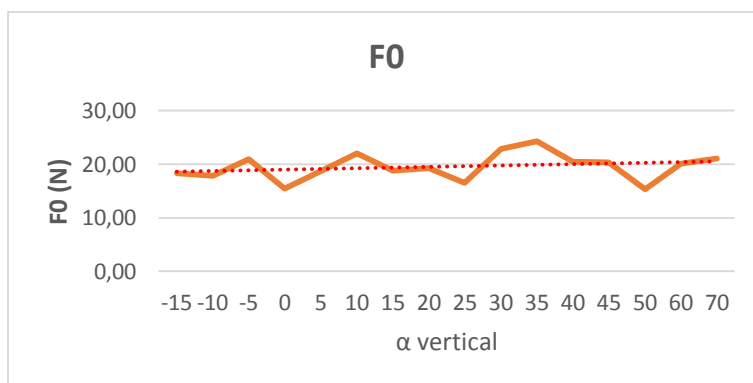
➤ GRÀFICA  $\Delta S_{vol} - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta S_{vol} - \alpha_{vertical}$ 

Amb l'espai recorregut succeeix exactament el mateix que a l'apartat anterior.

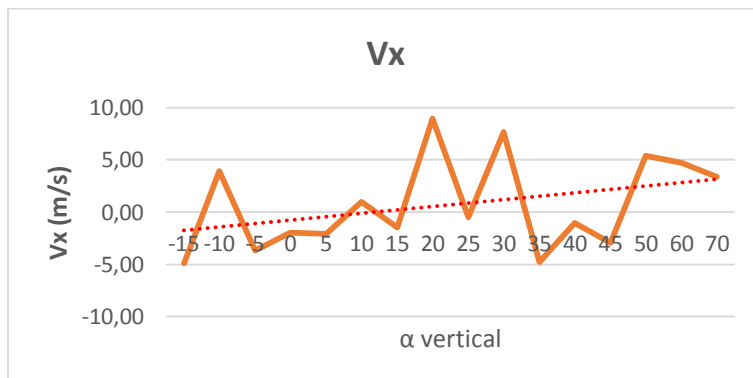
➤ GRÀFICA  $v_{x_0} - \alpha_{vertical}$ ➤ GRÀFICA  $v_{y_0} - \alpha_{vertical}$ ➤ GRÀFICA  $v_{z_0} - \alpha_{vertical}$ 

➤ GRÀFICA  $v_0 - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_0 - \alpha_{vertical}$ 

Malauradament les velocitats de llançament del bumerang varien una mica, el que fa que l'anàlisi resulti menys fiable, però com a mínim es mantenen al voltant dels 20 m/s.

➤ GRÀFICA  $F_0 - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $F_0 - \alpha_{vertical}$ 

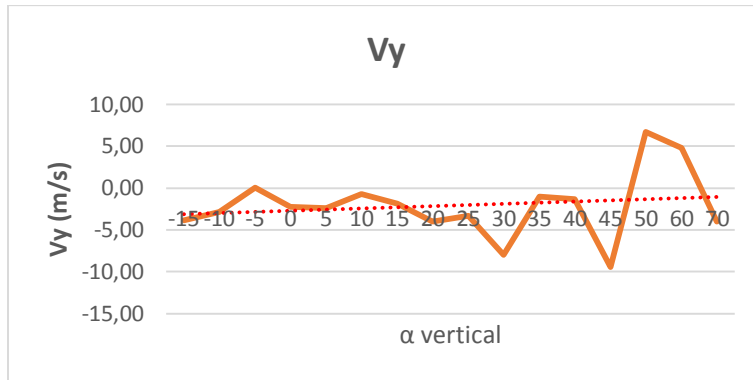
La força amb que es llença el bumerang a cada llançament tampoc varia massa, per tant l'anàlisi pot considerar-se vàlid.

➤ GRÀFICA  $v_x - \alpha_{vertical}$ 

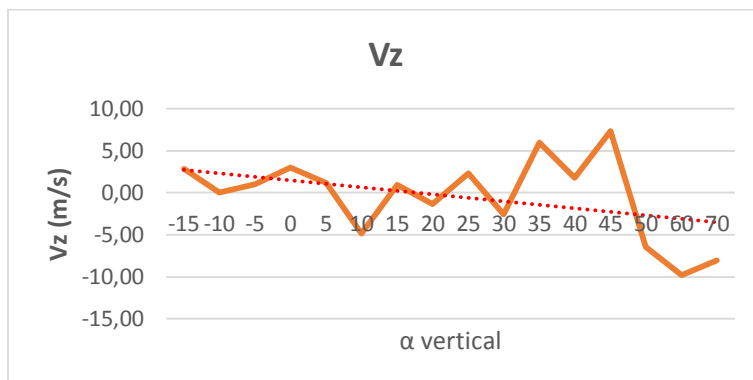


❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_x - \alpha_{vertical}$ 

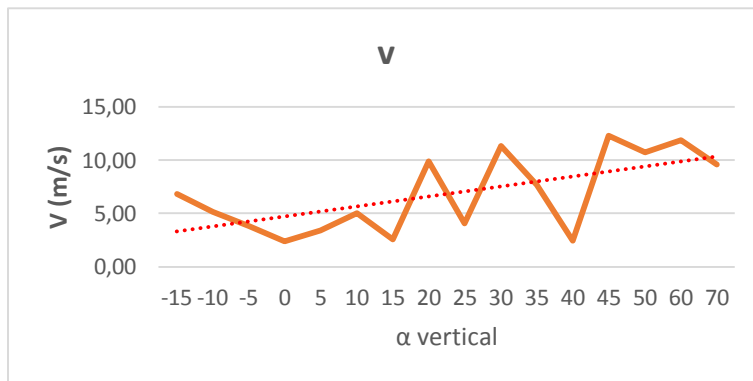
Observant la línia de tendència podríem concloure la velocitat x d'arribada al terra del bumerang és directament proporcional amb la inclinació del llançament del bumerang.

➤ GRÀFICA  $v_y - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_y - \alpha_{vertical}$ 

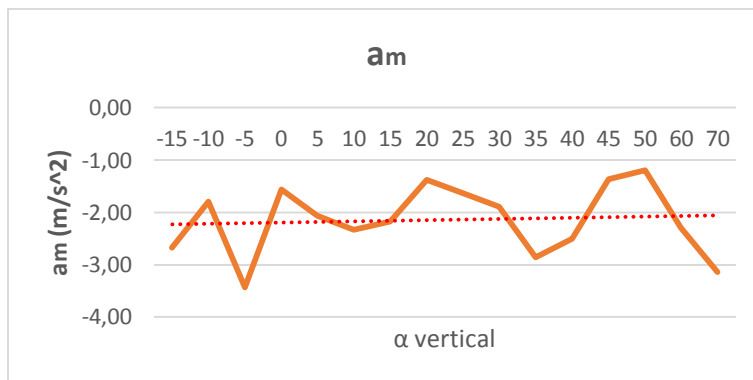
Succeeix el mateix amb la component de la velocitat y.

➤ GRÀFICA  $v_z - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_z - \alpha_{vertical}$ 

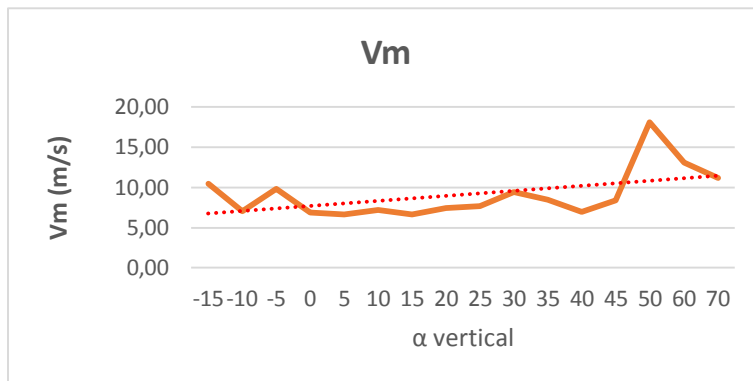
Fixant-se en la línia de tendència s'afirma que la component z de la velocitat del bumerang a l'arribar a terra és inversament proporcional a l'angle vertical de llançament.

➤ GRÀFICA  $v - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v - \alpha_{vertical}$ 

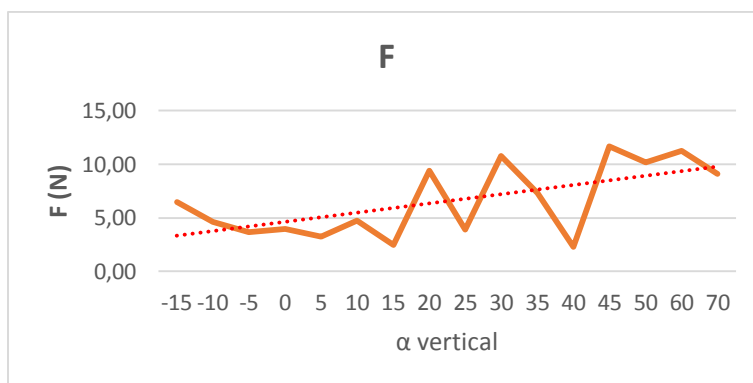
La línia de tendència de la gràfica ens mostra que la velocitat d'arribada al terra del bumerang augmenta respecte la inclinació del bumerang a l'hora de llançar-lo.

➤ GRÀFICA  $a_m - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $a_m - \alpha_{vertical}$ 

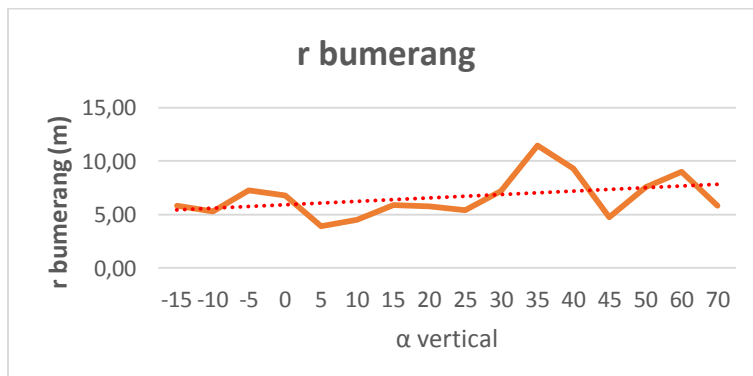
Segons la línia de tendència l'acceleració mitjana del vol es manté més o menys constant segons les diferents inclinacions de llançament. Però si ens fixem en la línia real, no es presenta cap relació.

➤ GRÀFICA  $v_m - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_m - \alpha_{vertical}$ 

La velocitat mitjana del vol augmenta quan més gran és la inclinació del bumerang a l'hora de llançar-lo.

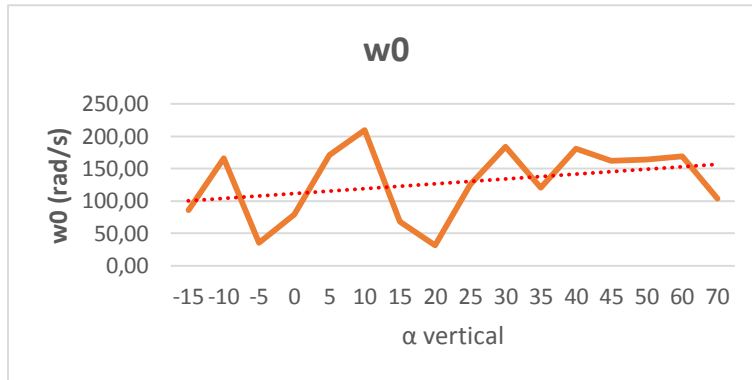
➤ GRÀFICA  $F - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $F - \alpha_{vertical}$ 

La força mínima d'escapçada també li ocorre igual que a la velocitat mitjana, és a dir, la força final és directament proporcional a la inclinació del bumerang.

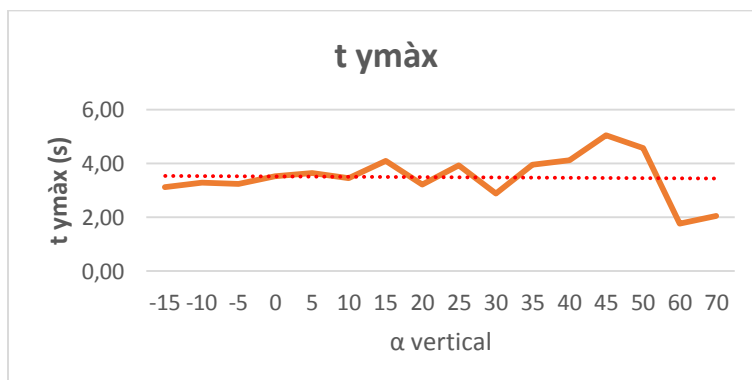
➤ GRÀFICA  $r - \alpha_{vertical}$ 

❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $r - \alpha_{vertical}$ 

A mesura que es llança el bumerang amb una inclinació més gran el bumerang cau una mica més lluny, segons la línia de tendència.

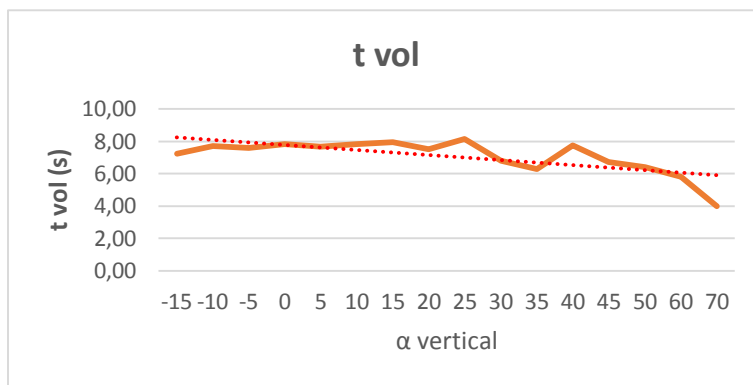
➤ GRÀFICA  $\omega_0 - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\omega_0 - \alpha_{vertical}$ 

Si l'anàlisi hagués estat el correcte llavors la velocitat angular hauria de ser constant en tots els llançaments, cosa que no ha sigut així.

➤ GRÀFICA  $t_{y_{màx}} - \alpha_{vertical}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $t_{y_{màx}} - \alpha_{vertical}$ 

Com es pot veure, gairebé sempre el bumerang aconsegueix la seva altura màxima en el mateix moment independentment de amb quina inclinació hagi estat llançat.

➤ GRÀFICA  $t_{vol} - \alpha_{vertical}$



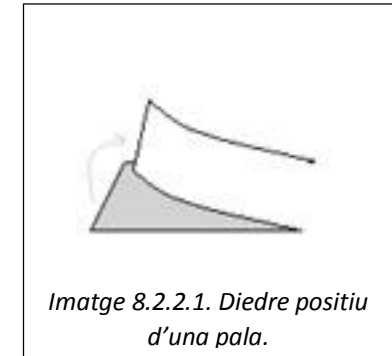
❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $t_{vol} - \alpha_{vertical}$

Es pot concloure que la durada del vol es cada vegada més curta a mesura que s'augmenta la inclinació del llançament del bumerang.

## 8.2.2 DIEDRES AMBDUES PALES

És la torsió que s'exerceix a les pales en sentit vertical.

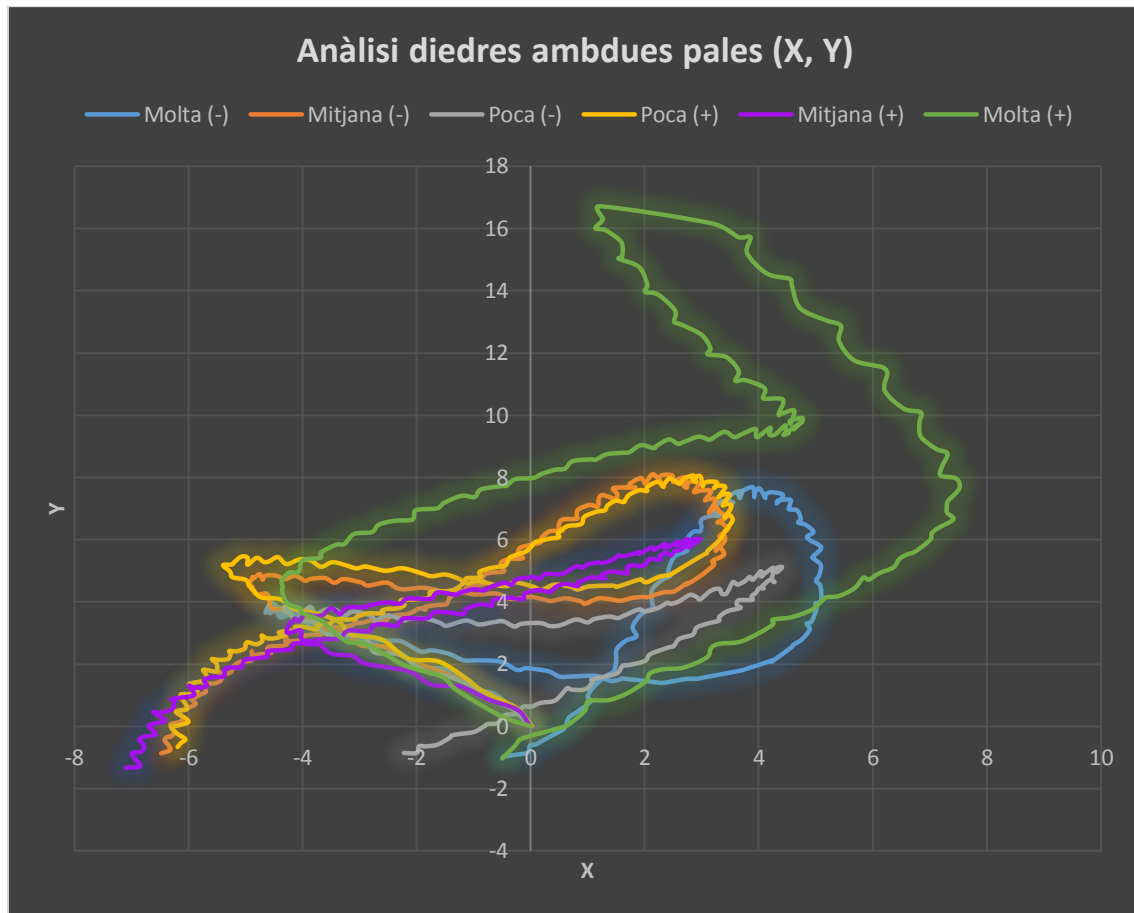
### 8.2.2.1 DADES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DELS DIEDRES D'AMBDUES PALES DEL BUMERANG



Diedres	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	Rvol	$\Delta S_{vol}$	$V_{x0}$	$V_{y0}$	$V_{z0}$	$V_0$	$V_x$	$V_y$	$V_z$	$V_m$	$A_m$	$F_0$	$V$	$F$	r bumerang	t ymàx	t vol
<b>Molta (-)</b>	9,74	9,88	10,34	8,65	54,38	-10,01	16,62	9,43	21,57	-5,92	-2,09	3,12	9,78	-2,62	20,49	7,01	6,66	5,90	3,48	5,60
<b>Mitjana (-)</b>	9,94	11,05	11,41	9,37	58,87	-13,90	9,60	10,75	20,02	-3,98	-2,57	-3,03	7,01	-1,71	19,02	5,62	5,34	7,19	3,60	8,40
<b>Poca (-)</b>	8,75	9,26	10,86	8,37	52,57	-10,93	8,81	6,16	15,33	-5,64	-0,12	-2,36	9,46	-1,66	14,56	6,11	5,81	2,65	2,76	5,76
<b>Poca (+)</b>	9,85	10,38	11,02	9,03	56,75	-15,29	14,41	8,30	22,59	-1,63	-3,51	-6,36	7,13	-1,90	21,46	7,44	7,07	7,13	3,44	7,96
<b>Mitjana (+)</b>	10,08	9,26	12,13	9,15	57,47	-13,02	8,54	11,41	19,31	-6,33	-1,35	3,17	8,55	-1,80	18,34	7,21	6,85	7,77	2,32	6,72
<b>Molta (+)</b>	11,88	13,44	16,42	12,16	76,40	-19,18	20,56	4,20	28,43	-5,84	-10,58	-0,47	9,23	-1,97	27,01	12,10	11,49	2,82	2,24	8,36

### 8.2.2.2 GRÀFIQUES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DELS DIEDRES DE LES DUES PALES

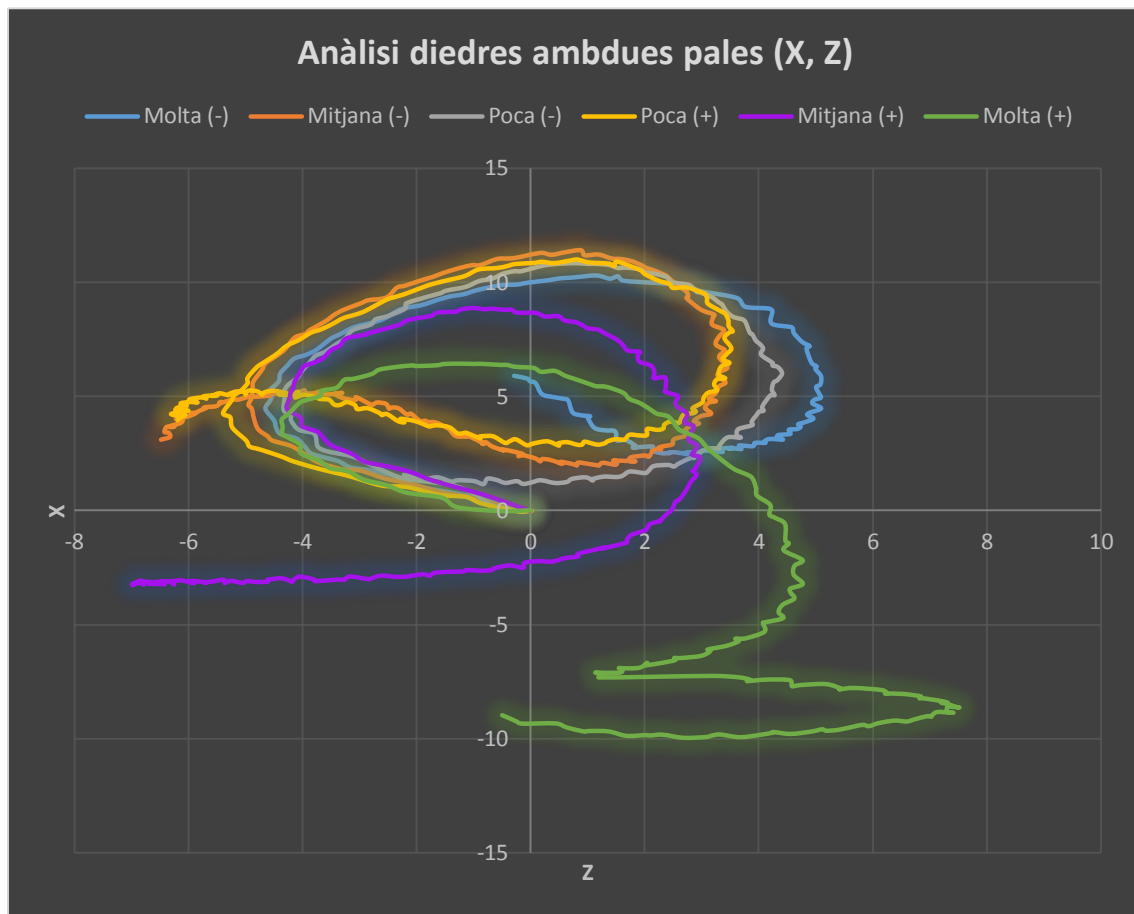
#### ➤ GRÀFICA (x,y)



#### ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (x,y)

A simple vista no es pot extreure cap conclusió, però s'observa que el llançament que es va realitzar amb una quantitat de diedres positius molt elevada a les dues pales va aconseguir una alçada molt superior als altres llançaments.

## ➤ GRÀFICA (x,z)

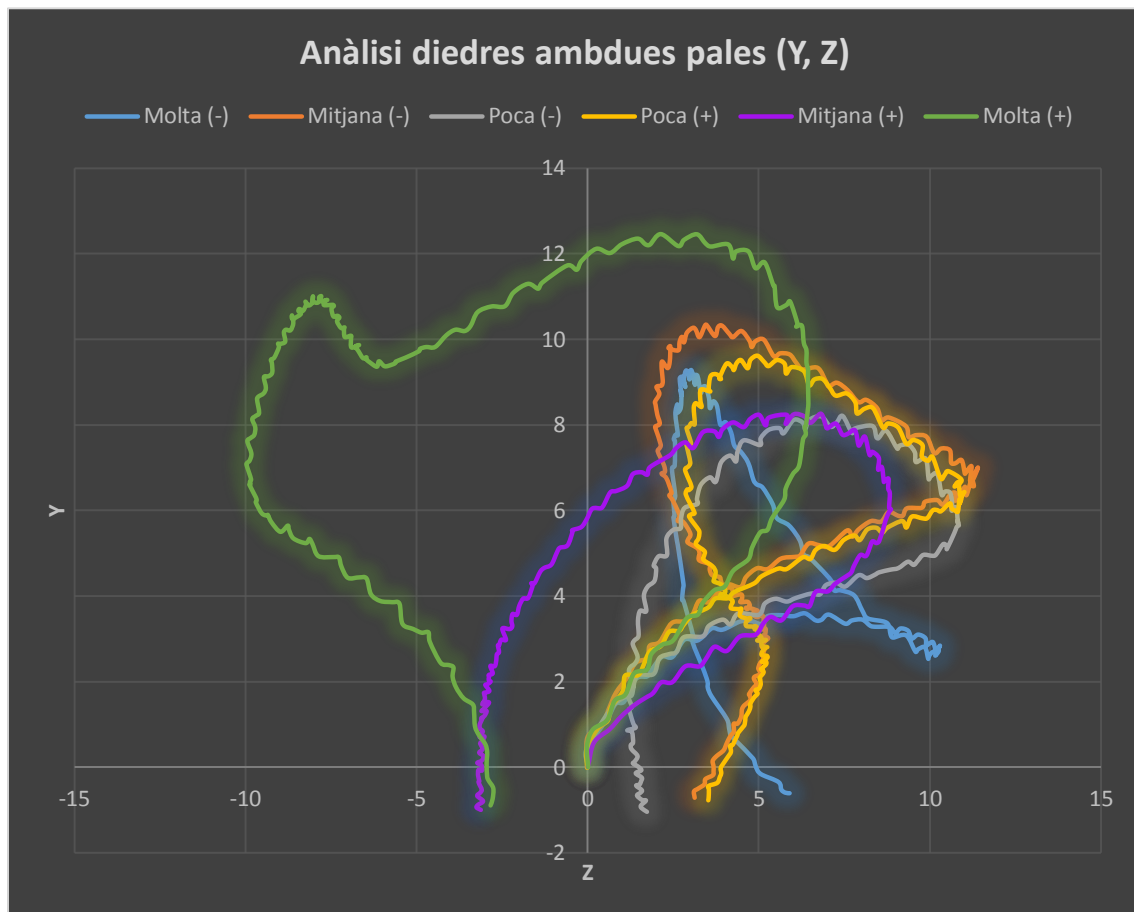


## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (x,z)

Es pot concloure que a mesura que es realitza un llançament amb uns diedres cada cop més positius el bumerang cau més cap enrere.



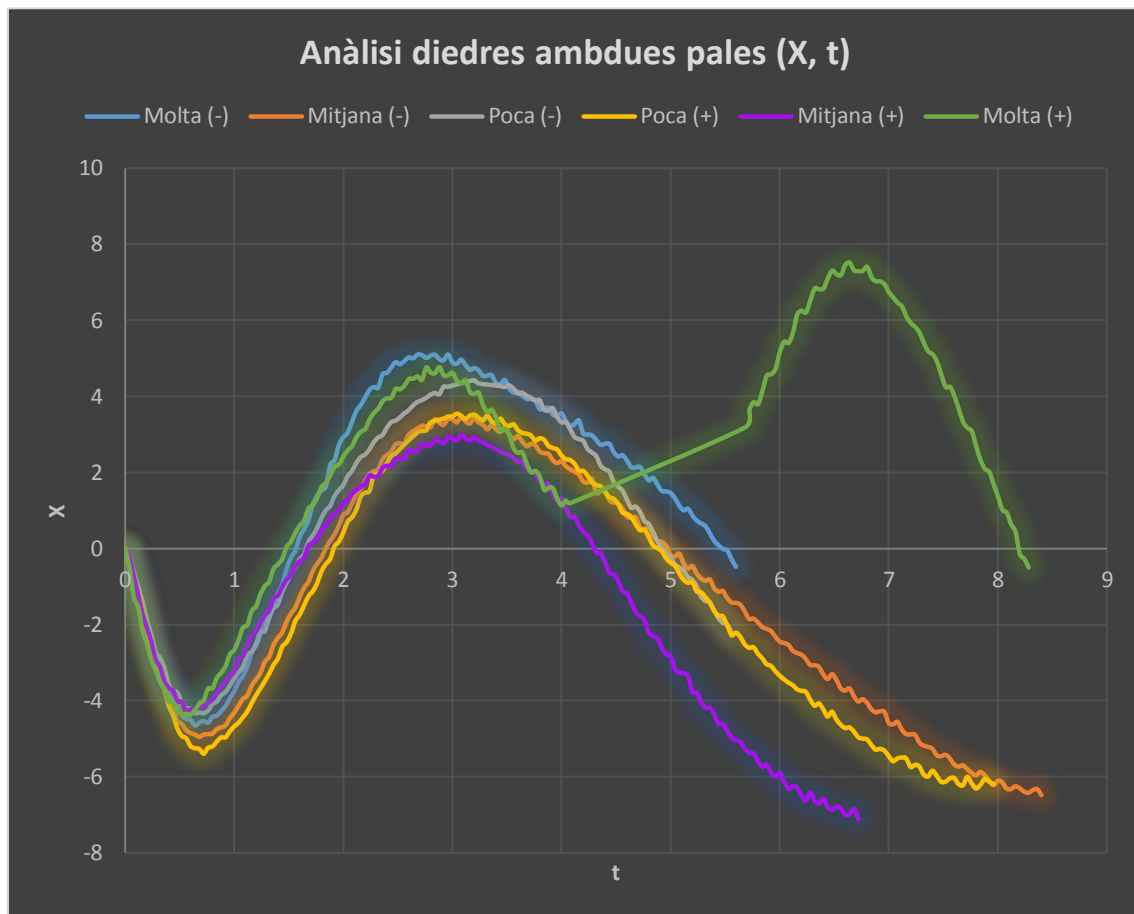
## ➤ GRÀFICA (y,z)



## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (y,z)

S'observa que a mesura que es llança el bumerang amb uns diedres cada vegada més positius, el bumerang cau més enrere del llançador i assoleix unes alçades màximes més grans.

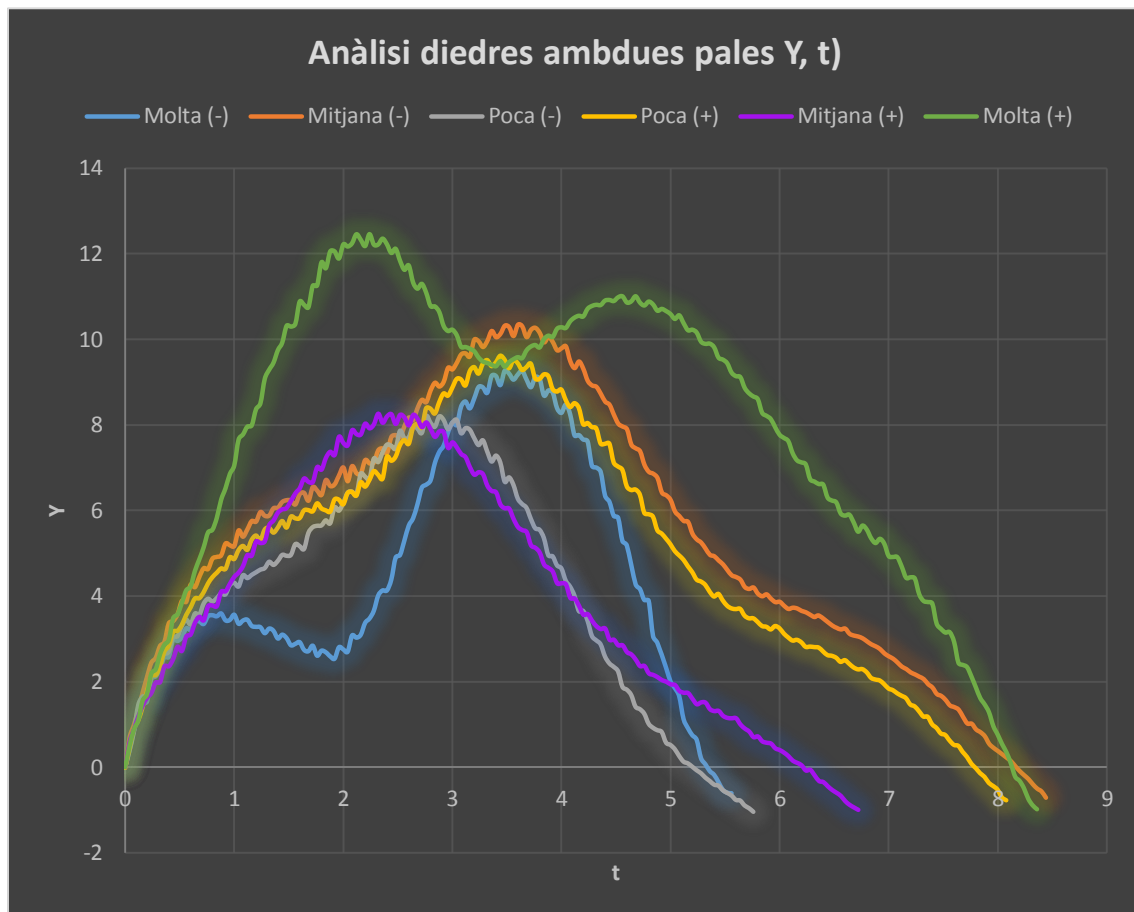
## ➤ GRÀFICA (x,t)



## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (x,t)

No se'n pot extreure cap conclusió, però s'observa que el diedre molt positiu pateix una funció molt diferent a les altres.

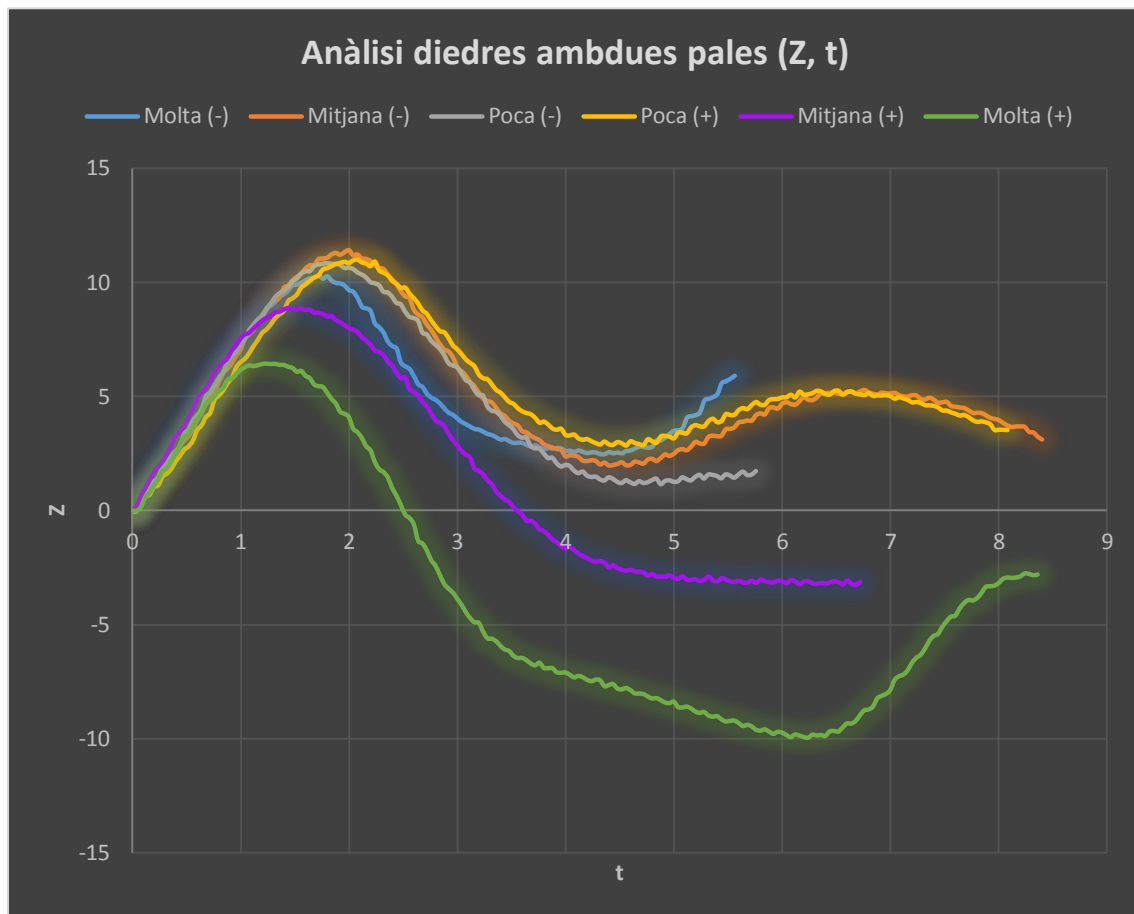
## ➤ GRÀFICA (y,t)



## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (y,t)

No s'observen relacions considerables.

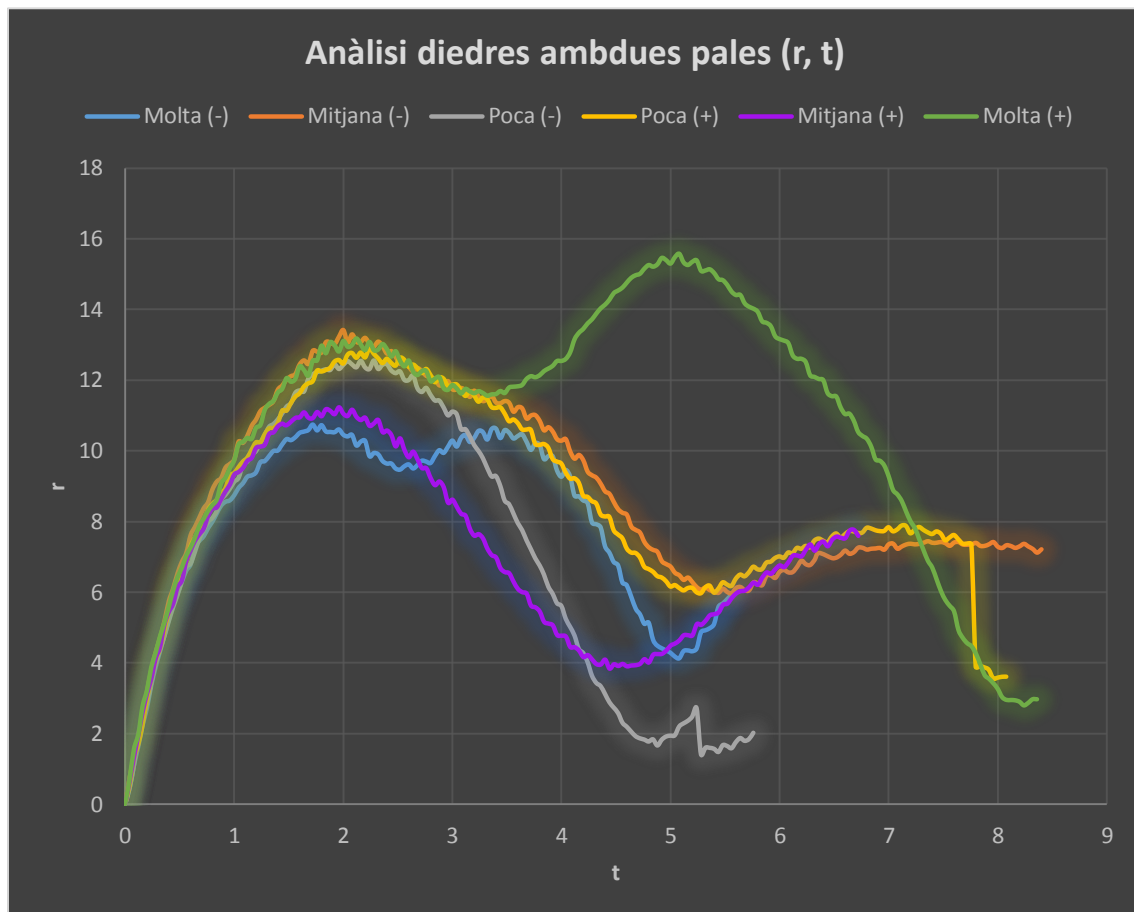
## ➤ GRÀFICA (z,t)



## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (z,t)

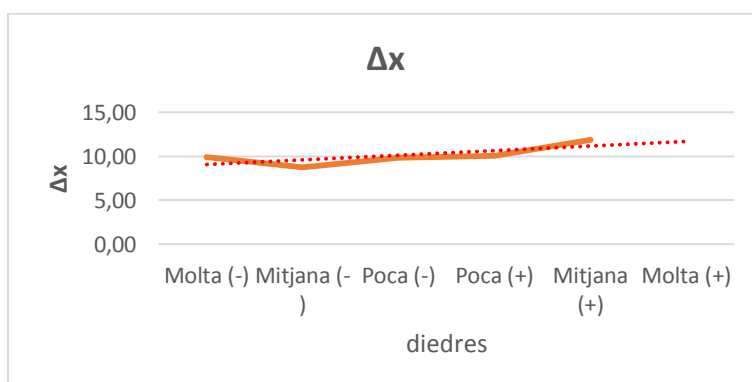
Es conclou que el bumerang cau més enrere de l'origen del llançament quan més positius siguin els diedres.

## ➤ GRÀFICA (r,t)



## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (r,t)

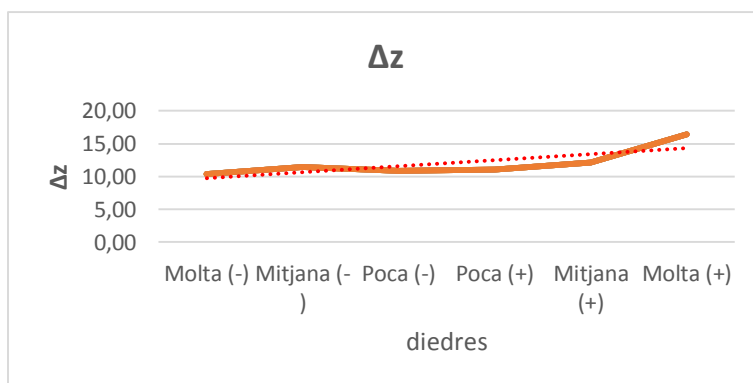
No es poden extreure conclusions fiables.

➤ GRÀFICA  $\Delta x$  – diedres❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta x$  – diedres

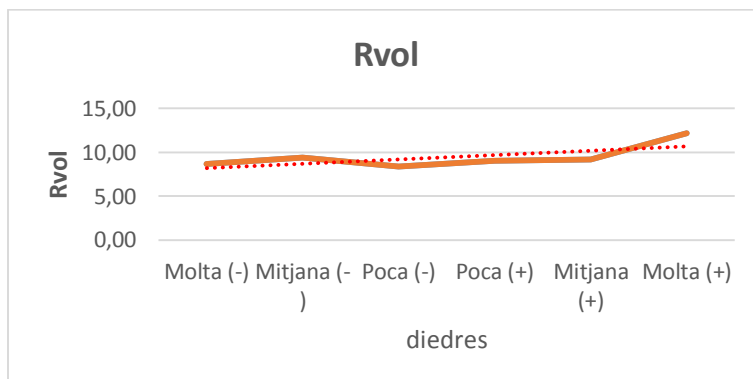
Es pot observar que l'amplitud x màxima del bumerang és directament proporcional a la positivitats dels diedres.

➤ GRÀFICA  $\Delta y$  – diedres❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta y$  – diedres

Es conclou el mateix que a la gràfica anterior amb l' $\Delta y$ .

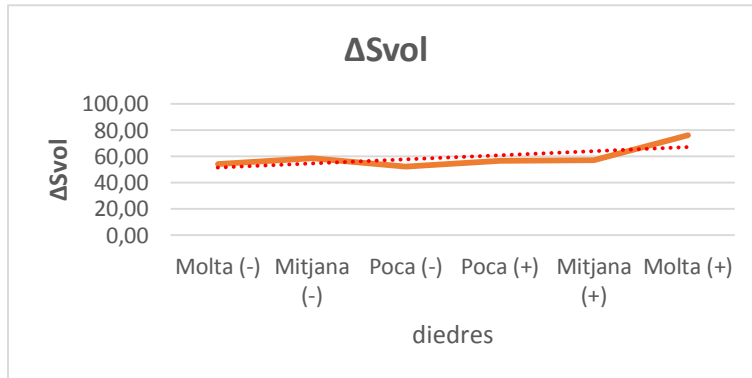
➤ GRÀFICA  $\Delta z$  – diedres❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta z$  – diedres

Com es pot veure  $\Delta z$  augmenta una mica el seu valor quant més positius són els diedres d'ambdues pales.

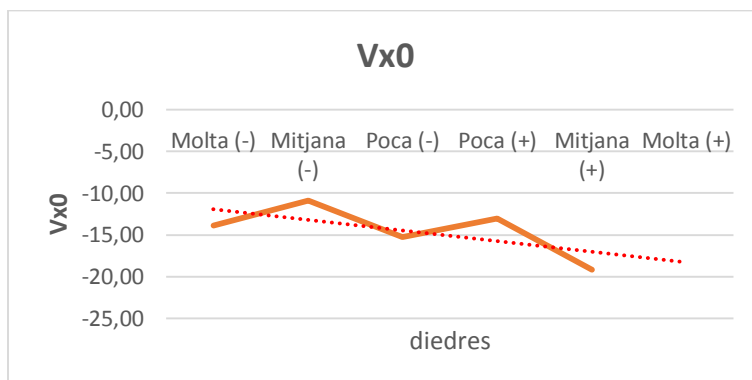
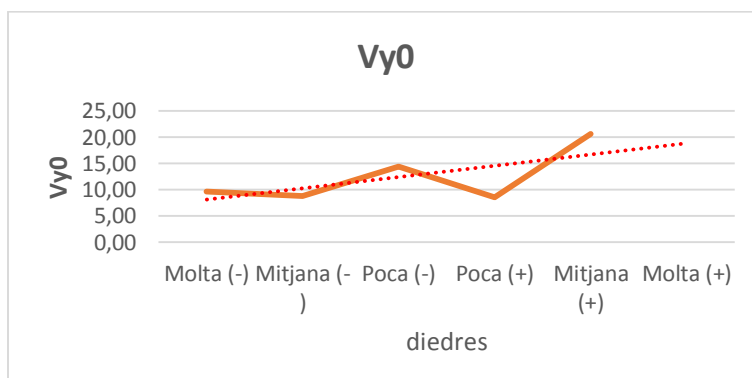
➤ GRÀFICA  $R_{vol}$  – diedres

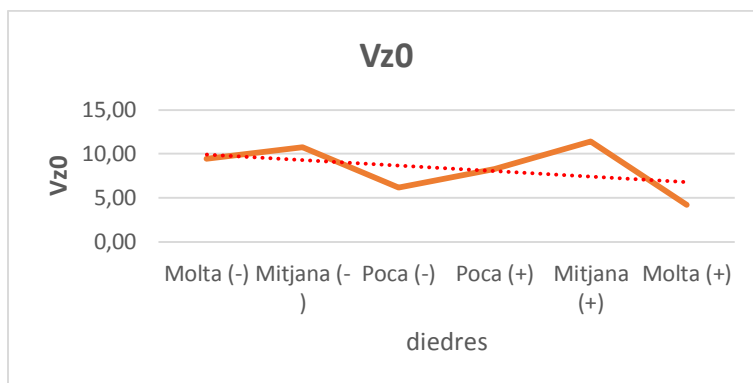
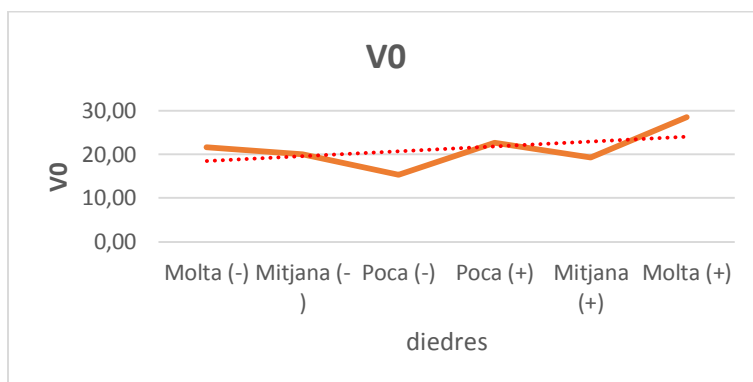
❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $R_{vol} - diedres$ 

El radi de vol augmenta lleugerament a mesura que els diedres de les pales prenen valors cada cop més grans.

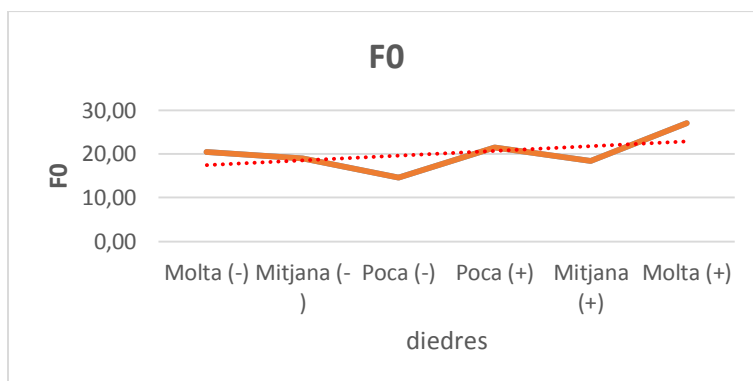
➤ GRÀFICA  $\Delta S_{vol} - diedres$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta S_{vol} - diedres$ 

Amb l'espai recorregut succeeix exactament el mateix que a l'apartat anterior, ja que per obtenir aquestes dades simplement es multiplica el radi per  $2\pi$ .

➤ GRÀFICA  $v_{x_0} - diedres$ ➤ GRÀFICA  $v_{y_0} - diedres$ 

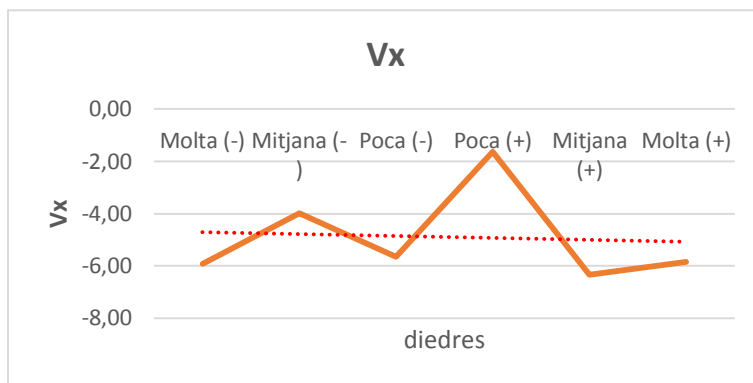
➤ GRÀFICA  $v_{z_0}$  – *diedres*➤ GRÀFICA  $v_0$  – *diedres*❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_0$  – *diedres*

Malauradament les velocitats de llançament del bumerang varien una mica, el que fa que l'anàlisi resulti menys fiable, tot i que es mantenen al voltant dels 20 m/s.

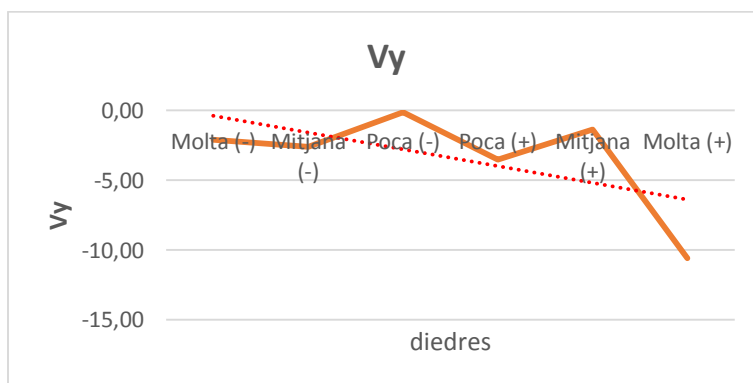
➤ GRÀFICA  $F_0$  – *diedres*❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $F_0$  – *diedres*

La força amb què es llença el bumerang a cada llançament tampoc varia massa, per tant l'anàlisi pot considerar-se vàlid.

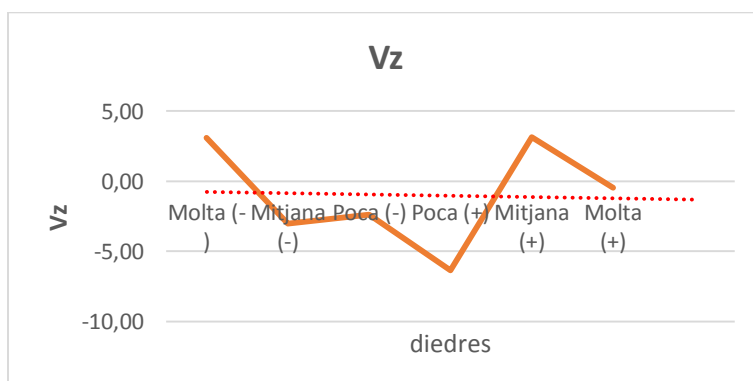


➤ GRÀFICA  $v_x$  – *diedres*❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_x$  – *diedres*

Observant la gràfica es pot entendre que no es manifesta cap relació entre el component de la velocitat x i l'augment positiu dels diedres. Tot i així, la línia de tendència ens mostra que hi ha una relació inversament proporcional, però molt lleu i menyspreable.

➤ GRÀFICA  $v_y$  – *diedres*❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_y$  – *diedres*

Succeeix el mateix amb la component de la velocitat y, però en canvi la línia de tendència aquest cop mostra una proporció inversament proporcional més elevada.

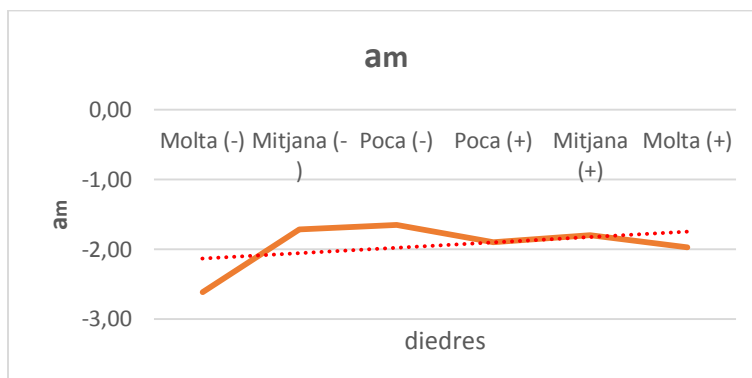
➤ GRÀFICA  $v_z$  –  $\alpha_{vertical}$ 

❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_z$  – *diedres*

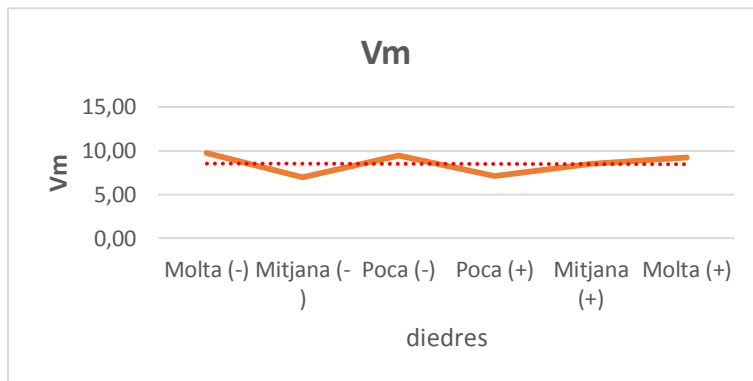
Fixant-se en la línia de tendència s'afirma que la component z de la velocitat del bumerang a l'arribar a terra és inversament proporcional a l'angle vertical de llançament, però en el fons és una observació molt general, i per tant falsa, ja que en veritat la línia real indica que no hi ha cap relació.

➤ GRÀFICA  $v$  – *diedres*❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v$  – *diedres*

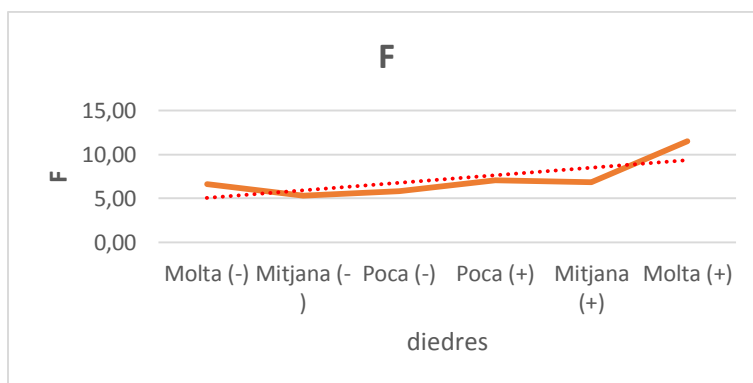
La línia de tendència de la gràfica ens mostra que la velocitat d'arribada al terra del bumerang augmenta respecte la inclinació del bumerang a l'hora de llançar-lo.

➤ GRÀFICA  $a_m$  – *diedres*❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $a_m$  – *diedres*

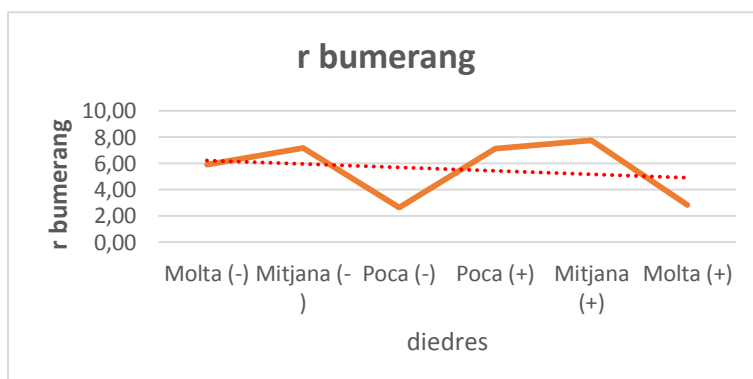
Segons la línia de tendència l'acceleració mitjana del vol es manté més o menys constant segons les diferents inclinacions de llançament.

➤ GRÀFICA  $v_m$  – diedres❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_m$  – diedres

La velocitat mitjana del vol es manté constant independentment dels diedres de les pales.

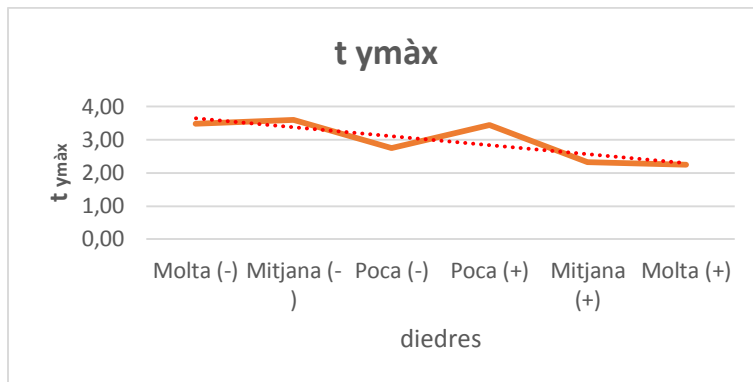
➤ GRÀFICA  $F$  – diedres❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $F$  – diedres

La força mínima d'escapçada és directament proporcional a la inclinació del bumerang.

➤ GRÀFICA  $r$  – diedres❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $r$  – diedres

A mesura que es llança el bumerang amb uns diedres més positius el bumerang cau una mica més a prop, segons mostra la línia de tendència.

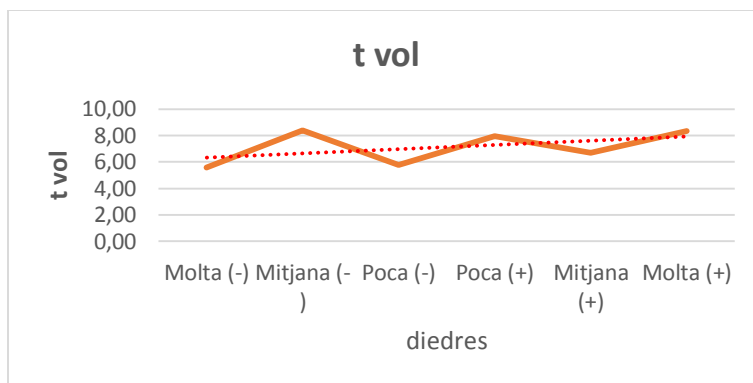
➤ GRÀFICA  $t_{y_{m\grave{a}x}}$  – *diedres*



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $t_{y_{m\grave{a}x}}$  – *diedres*

Com es pot veure, a mesura que els diedres del bumerang van sent més positius, l'alçada màxima de la trajectòria s'assoleix en un temps més petit.

➤ GRÀFICA  $t_{vol}$  – *diedres*



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $t_{vol}$  – *diedres*

Es pot concloure que la durada del vol es cada vegada més gran a mesura que s'augmenten positivament els diedres del bumerang.

### 8.2.3 INCIDÈNCIA PALA ESQUERRA

És la torsió que s'exerceix a les pales en sentit diagonal.

#### 8.2.3.1 DADES OBTINGUDES DE LA VARIACIÓ DE LA INCIDÈNCIA DE LA PALA ESQUERRA

La incidència es mesura amb quantitats aproximades ja que resulta molt complicat torçar la pala del bumerang i fer que es mantingui en tal posició. Per aconseguir s'hauria d'haver escalfat el bumerang al microones i després haver estat torçant contínuament el bumerang en la posició desitjada durant hores per tal que aconseguís la forma que es vulgui.

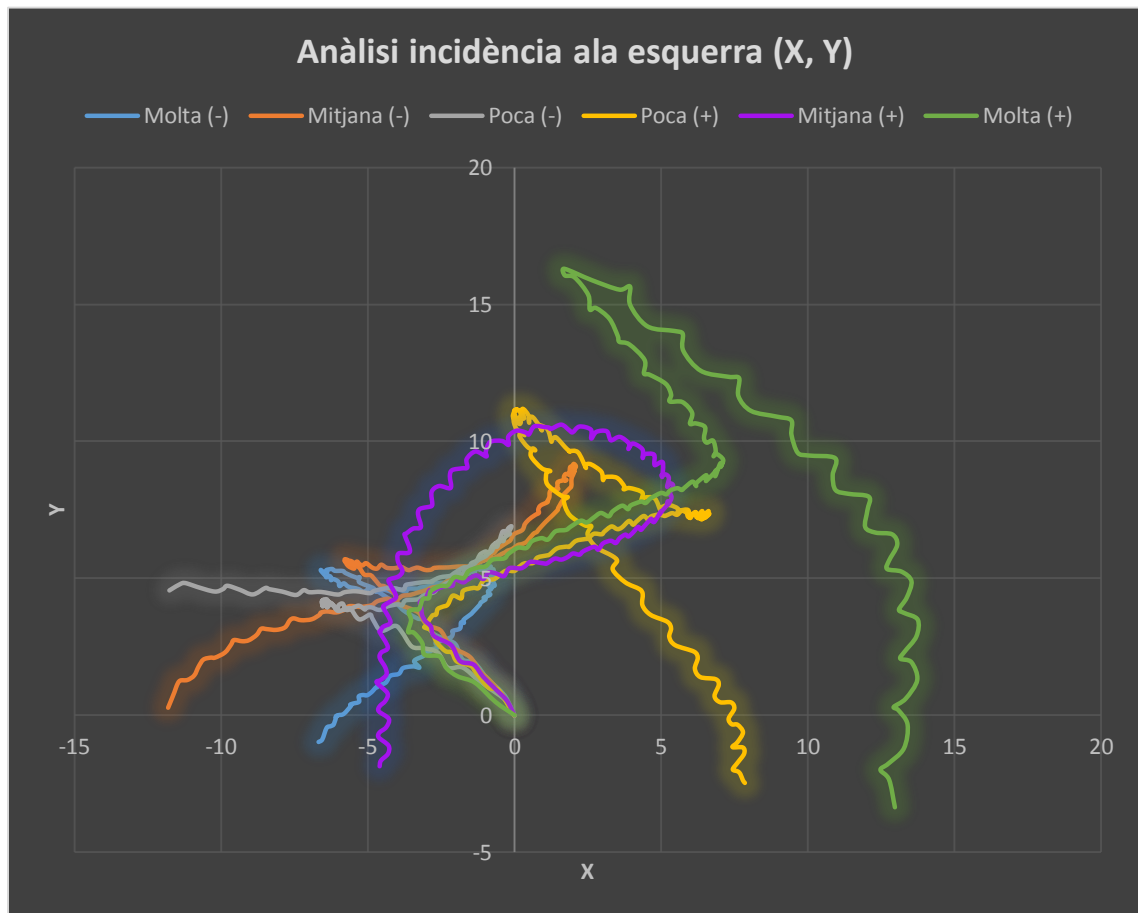


*Imatge 5.2.3.1. Incidència positiva a la pala esquerra (angle d'atac positiu)*

Incidència	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	Rvol	$\Delta Svol$	$V_{x0}$	$V_{y0}$	$V_{z0}$	$V_0$	$V_x$	$V_y$	$V_z$	$V_m$	$A_m$	$F_0$	$V$	$F$	r bumerang	t ymàx	t vol
<b>Molta (-)</b>	6,68	8,44	12,52	8,25	51,86	-6,33	8,14	5,78	11,82	-3,11	-2,21	-3,43	7,54	-0,97	11,23	5,13	4,87	7,93	3,48	6,88
<b>Mitjana (-)</b>	13,91	11,72	13,39	11,30	70,98	-11,78	14,23	10,24	21,13	-5,45	1,00	-3,86	9,59	-1,94	20,07	6,75	6,41	12,26	3,64	7,40
<b>Poca (-)</b>	11,76	9,46	15,63	10,87	68,28	-13,05	10,54	4,39	17,34	-10,29	1,00	-0,46	12,28	-1,26	16,47	10,35	9,83	14,51	2,28	6,36
<b>Poca (+)</b>	10,92	11,19	20,01	12,70	79,77	-7,69	12,75	4,78	15,64	1,72	-2,44	0,26	10,72	-1,70	14,86	3,00	2,85	14,21	2,16	7,40
<b>Mitjana (+)</b>	10,09	9,44	15,70	10,46	65,72	-10,65	11,56	4,57	16,37	7,04	-2,80	3,45	10,40	-1,27	15,55	8,33	7,911	9,807	2,28	6,32
<b>Molta (+)</b>	17,39	12,77	23,51	15,96	100,25	-17,44	17,44	4,24	25,02	4,97	1,00	-0,78	12,72	-2,52	23,77	5,13	4,87	20,97	2,08	6,28

### 8.2.3.2 GRÀFIQUES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DE LA INCIDÈNCIA DE LA PALA ESQUERRA

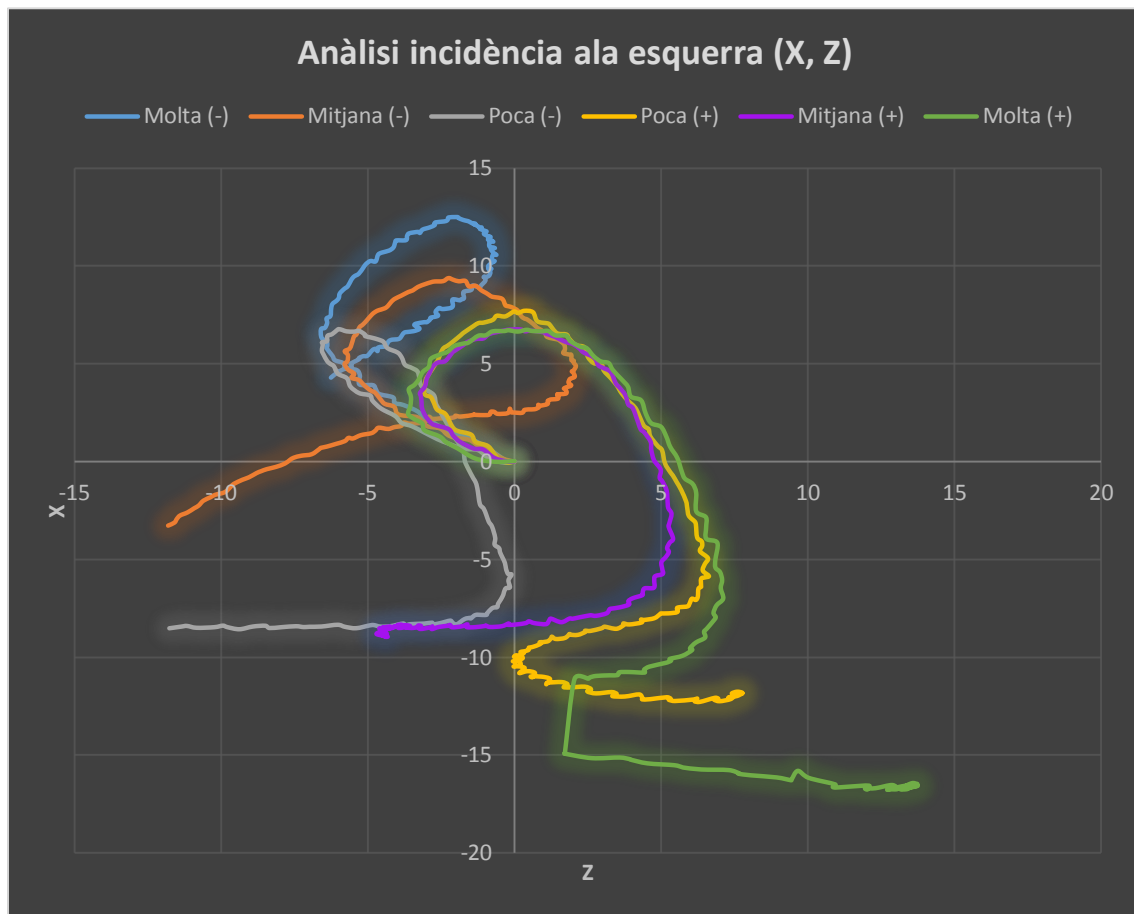
#### ➤ GRÀFICA (x,y)



#### ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (x,y)

A simple vista no es pot extreure cap conclusió, però s'observa que el llançament que es va realitzar amb una quantitat d'incidència positiva molt elevada va aconseguir una alçada molt superior als altres llançaments.

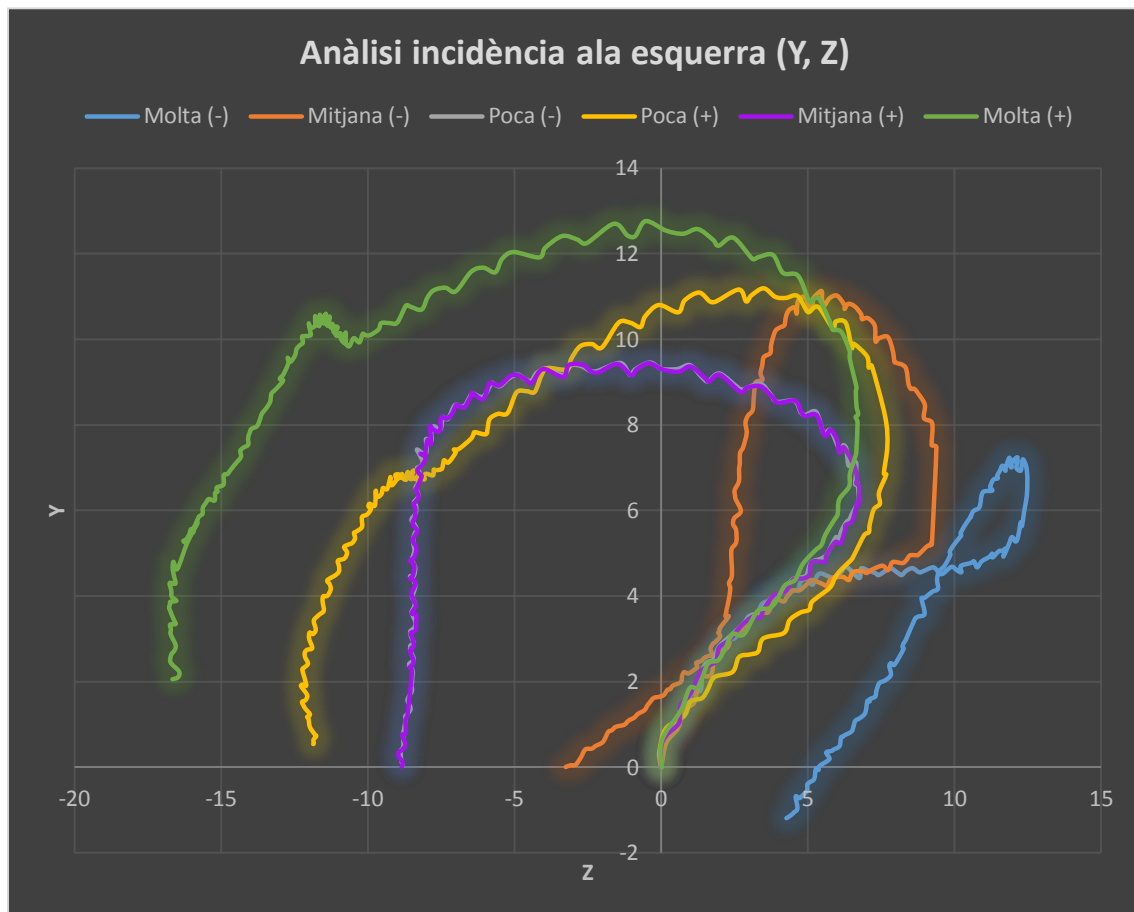
## ➤ GRÀFICA (x,z)



## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (x,z)

Es pot concloure que a mesura que es realitza un llançament amb una incidència cada cop més positiva el bumerang cau més cap enrere de l'origen del llançament.

## ➤ GRÀFICA (y,z)

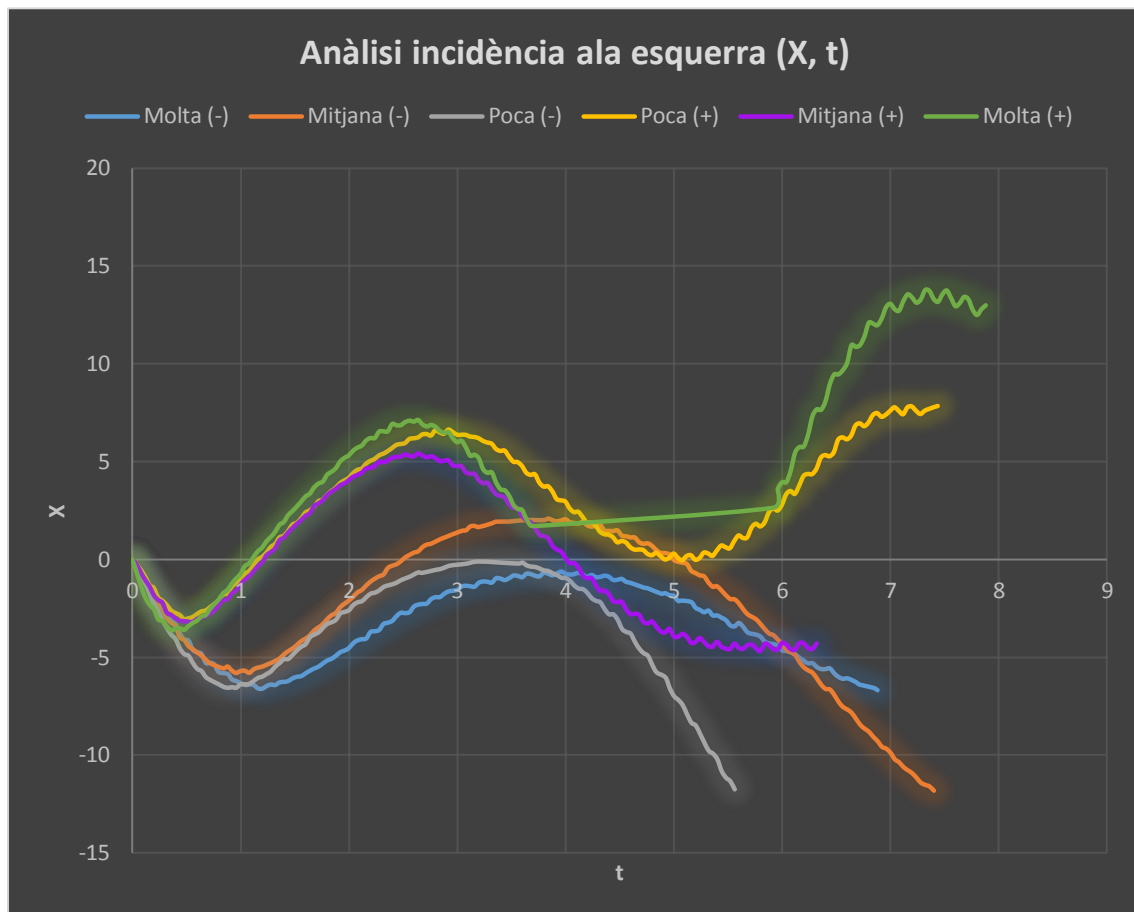


## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (y,z)

S'interpreta el mateix que a la gràfica anterior.



## ➤ GRÀFICA (x,t)



## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (x,t)

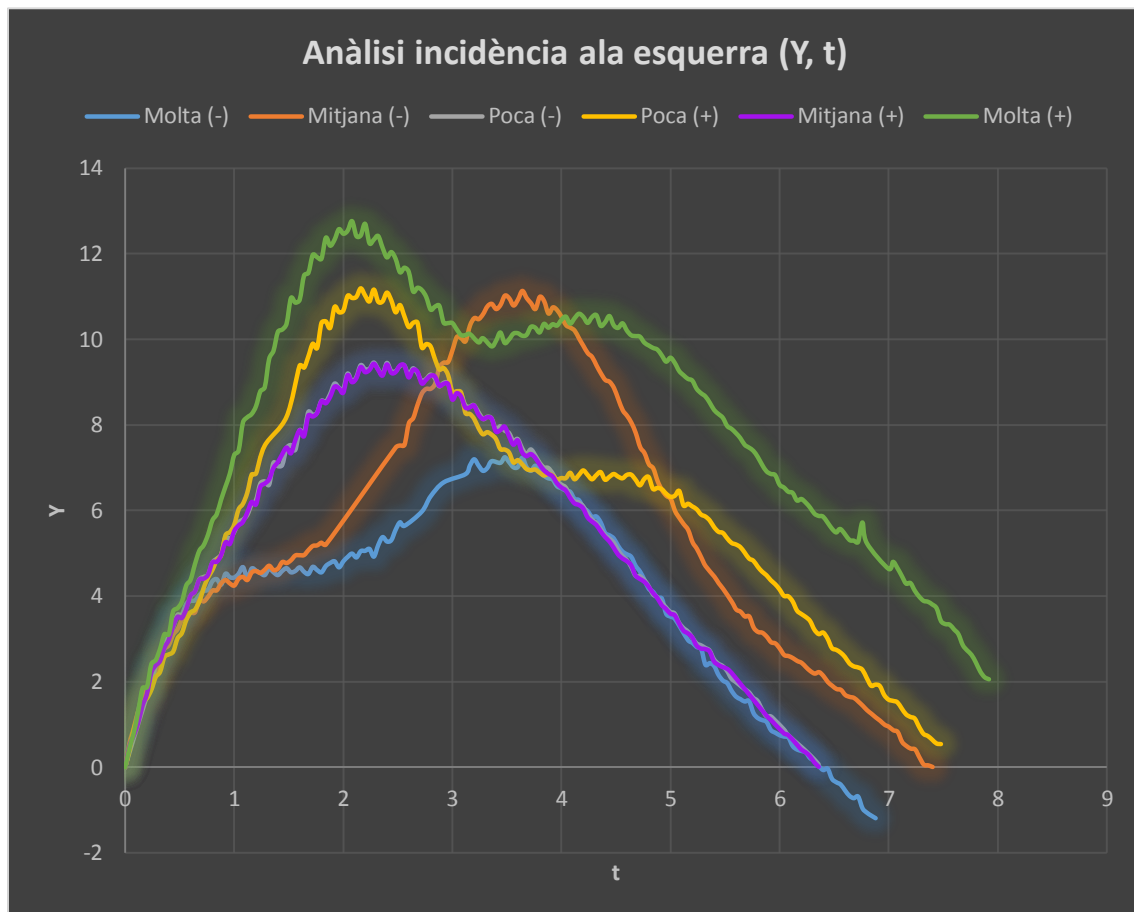
S'observa que curiosament el grup de les incidències positives presenta una x coincident de valor aproximat -4 al voltant dels 0,5 s de vol. En canvi el grup de les incidències negatives presenta la x coincident amb un valor aproximat de -6 en un temps aproximat d'1 s.

Un fenomen semblant succeeix amb gairebé les x màximes:

El grup de les incidències positives presenta una x coincident al voltant de 5 m cap als 2,5 s de vol. En canvi el grup de les incidències negatives presenta la x coincident amb un valor aproximat de 0 en un temps aproximat d'3 s.

D'aquestes observacions es pot concloure que les incidències d'un signe són còpies de les del signe contrari però desplaçades en el temps.

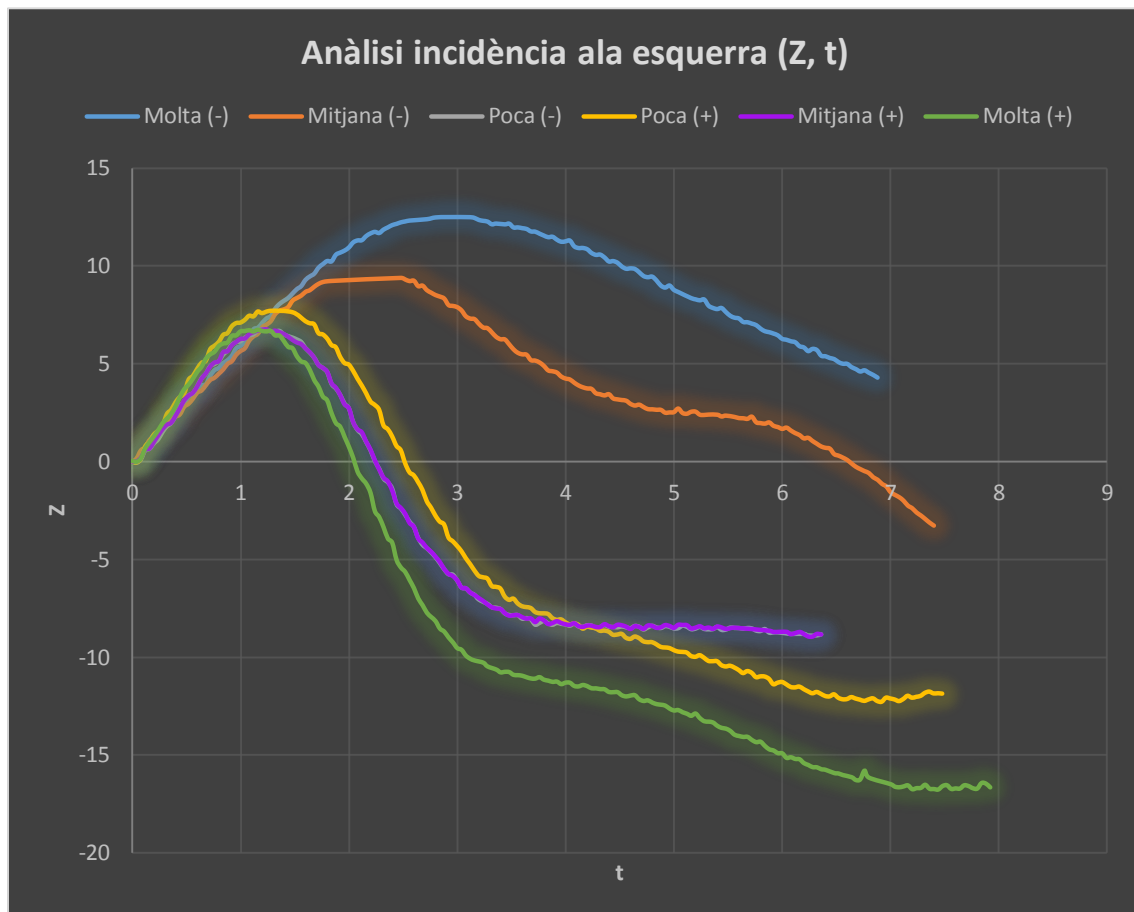
## ➤ GRÀFICA (y,t)



## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (y,t)

No s'observen relacions considerables.

## ➤ GRÀFICA (z,t)

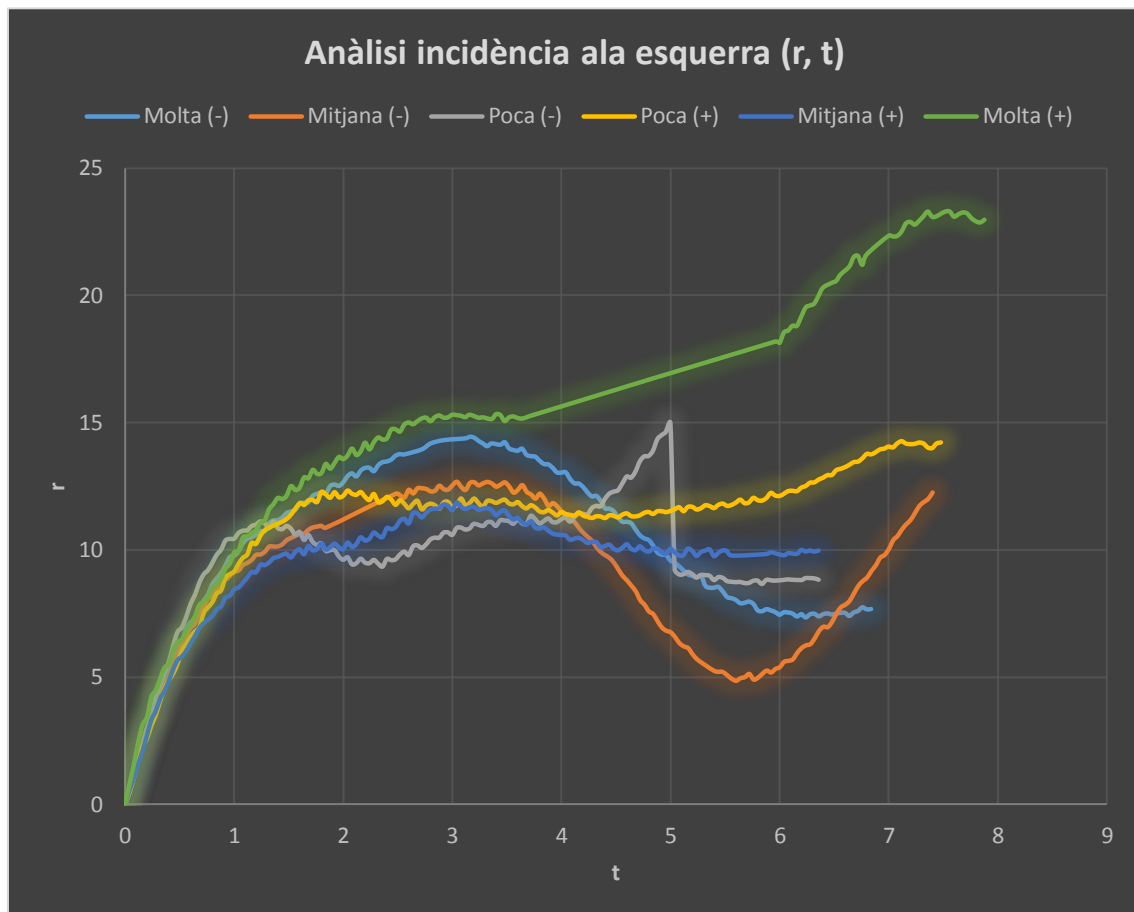


## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (z,t)

Es conclou que el bumerang cau més enrere de l'origen del llançament com més incidència positiva presenti.

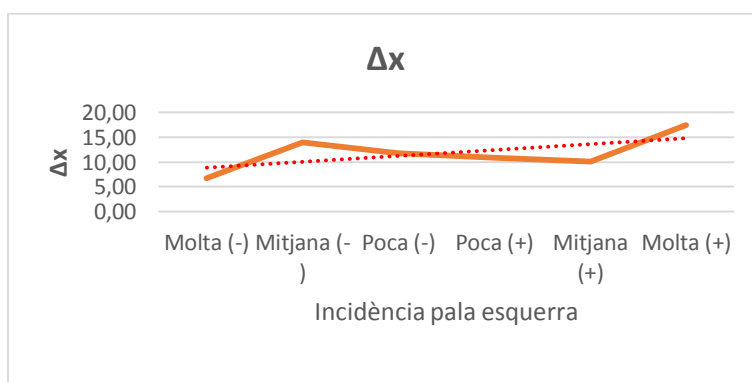
També es veu que a mesura que s'augmenta la incidència positiva de la pala esquerra el bumerang assoleix una distància positiva màxima a l'eix de les  $z$  i cau més a prop de l'origen del llançament.

## ➤ GRÀFICA (r,t)



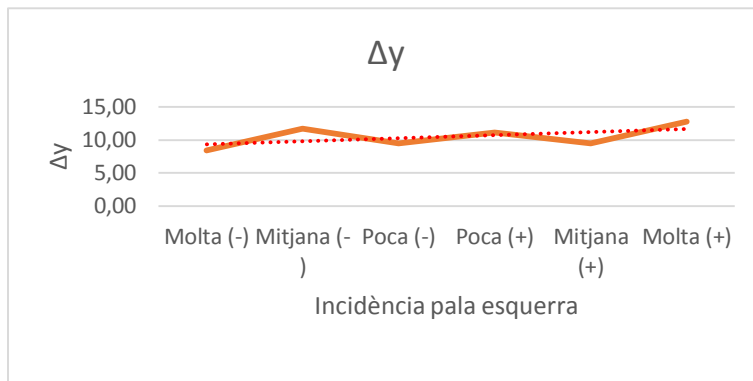
## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (r,t)

No es poden extreure conclusions raonables.

➤ GRÀFICA  $\Delta x$  – incidència pala esquerra❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta x$  – incidència pala esquerra

Segons la línia de tendència es pot observar que l'amplitud x màxima del bumerang és directament proporcional a l'augment de la incidència positiva, però de forma poc fiable.

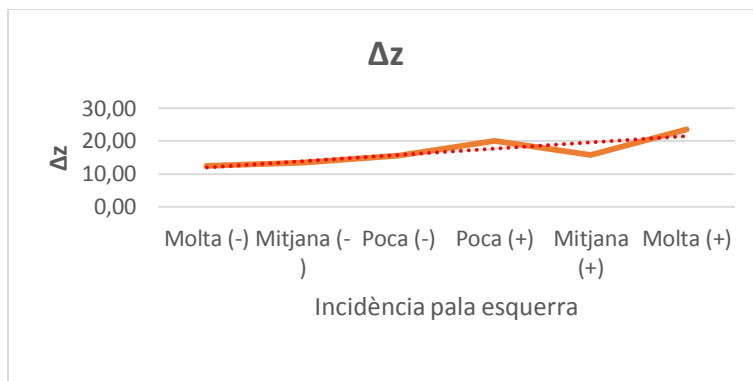
➤ GRÀFICA  $\Delta y$  – incidència pala esquerra



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta y$  – incidència pala esquerra

Es pot dir que  $\Delta y$  no varia respecte la incidència positiva de la pala esquerra.

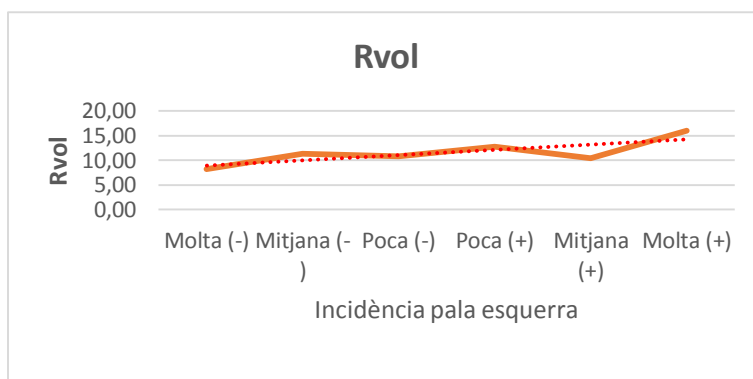
➤ GRÀFICA  $\Delta z$  – incidència pala esquerra



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta z$  – incidència pala esquerra

Com es pot veure  $\Delta z$  es augmenta una mica el seu valor quant més incidència positiva presenta la pala esquerra.

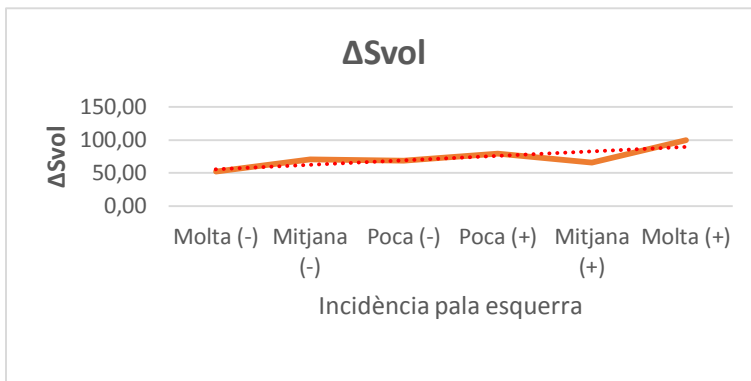
➤ GRÀFICA  $R_{vol}$  – incidència pala esquerra



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $R_{vol}$  – incidència pala esquerra

El radi de vol augmenta lleugerament a mesura que la incidència positiva de la pala esquerra pren valors cada cop més grans.

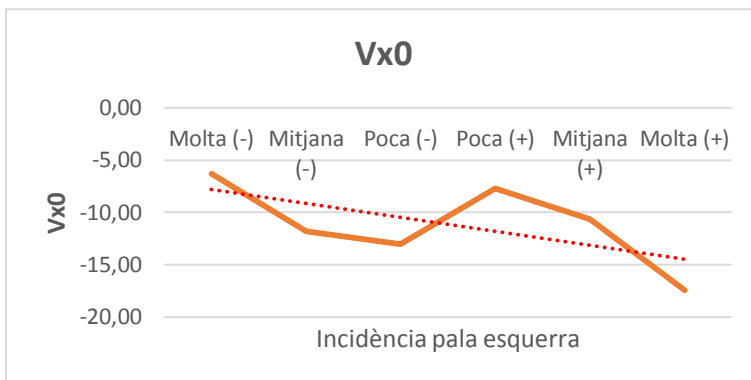
➤ GRÀFICA  $\Delta S_{vol}$  – incidència pala esquerra



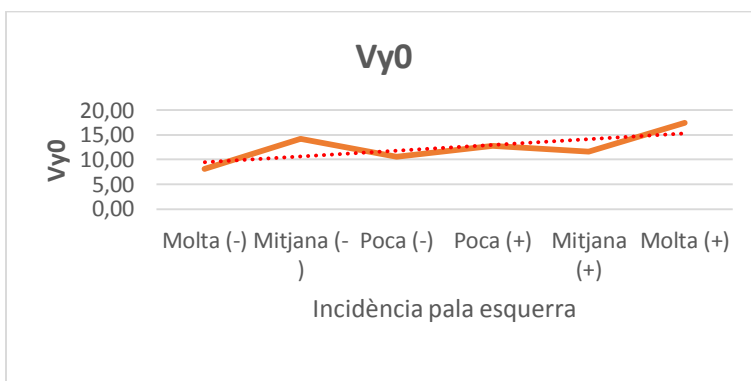
❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta S_{vol}$  – incidència pala esquerra

Amb l'espai recorregut succeeix exactament el mateix que a l'apartat anterior.

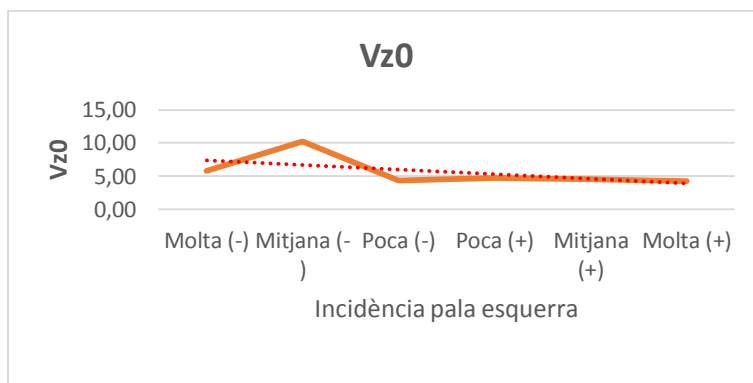
➤ GRÀFICA  $v_{x_0}$  – incidència pala esquerra



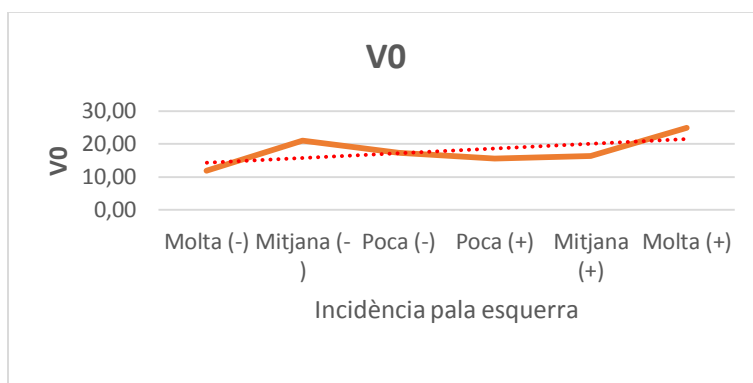
➤ GRÀFICA  $v_{y_0}$  – incidència pala esquerra



➤ GRÀFICA  $v_{z0}$  – incidència pala esquerra



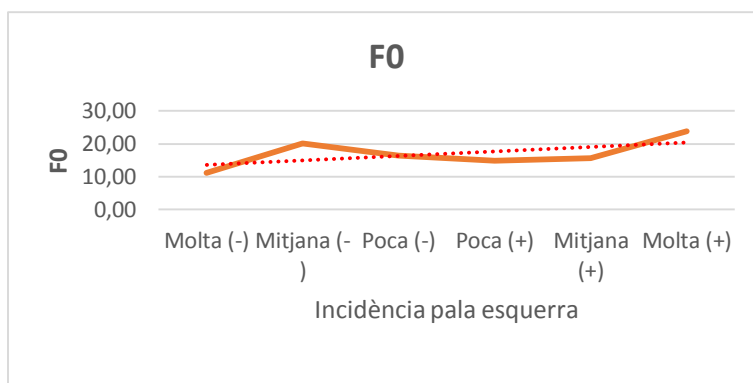
➤ GRÀFICA  $v_0$  – incidència pala esquerra



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_0$  – incidència pala esquerra

Les velocitats de llançament es mantenen bastant constants, el que significa que l'anàlisi pot haver estat real.

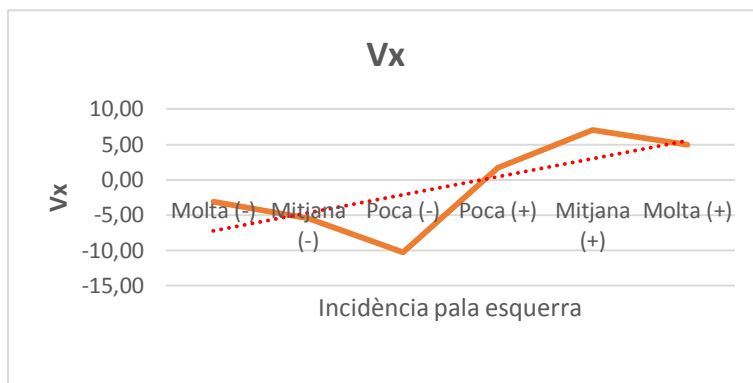
➤ GRÀFICA  $F_0$  – incidència pala esquerra



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $F_0$  – incidència pala esquerra

La força amb què es llença el bumerang a cada llançament tampoc varia massa, per tant l'anàlisi pot considerar-se vàlid.

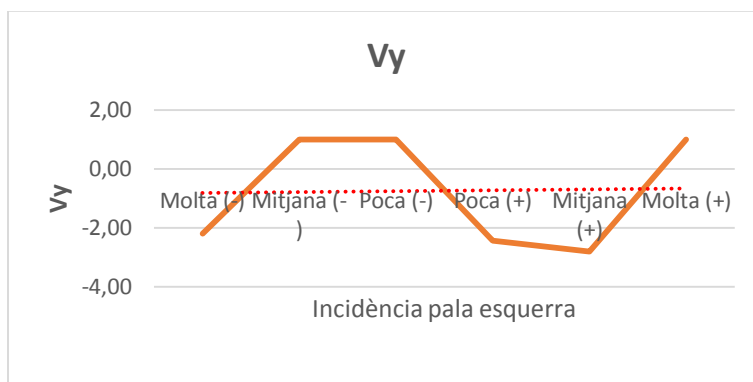
➤ GRÀFICA  $v_x$  – incidència pala esquerra



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_x$  – incidència pala esquerra

Observant la gràfica es pot entendre que no es manifesta cap relació entre el component de la velocitat  $x$  i l'augment positiu de la incidència.

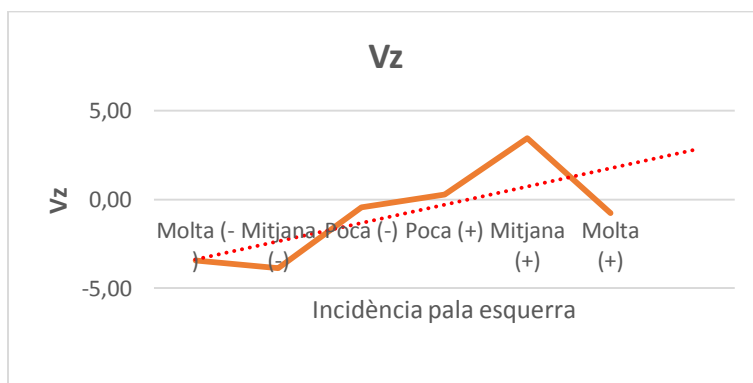
➤ GRÀFICA  $v_y$  – incidència pala esquerra



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_y$  – incidència pala esquerra

Succeeix el mateix amb la component de la velocitat  $y$ , però en canvi la línia de tendència aquest cop mostra una invariabilitat absoluta.

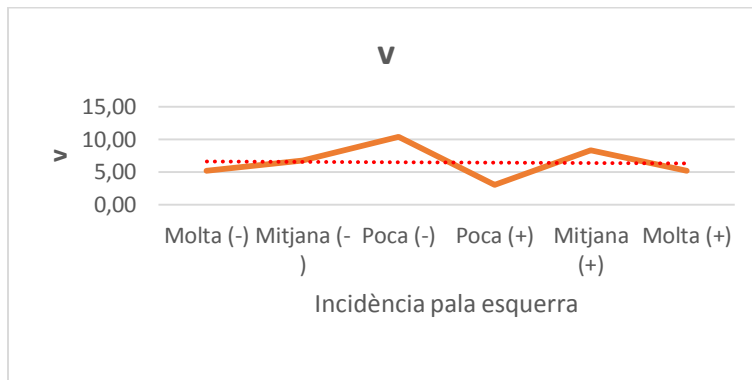
➤ GRÀFICA  $v_z$  – incidència pala esquerra



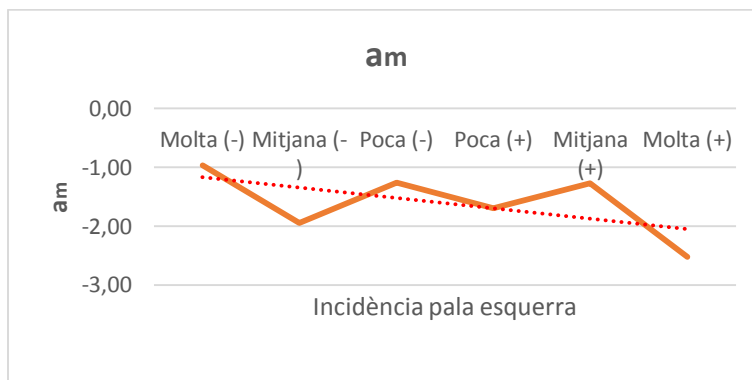


❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_z$  – incidència pala esquerra

Fixant-se en la línia de tendència s'afirma que la component z de la velocitat del bumerang a l'arribar a terra és directament proporcional a l'angle vertical de llançament.

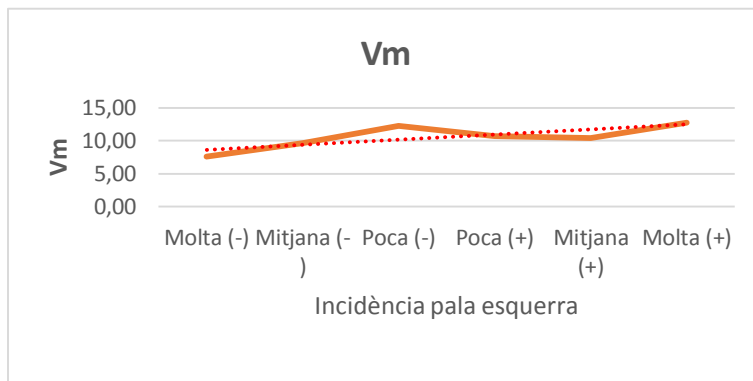
➤ GRÀFICA  $v$  – incidència pala esquerra❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v$  – incidència pala esquerra

La línia de tendència de la gràfica ens mostra que la velocitat d'arribada al terra del bumerang es manté constant respecte la variació de la incidència en la pala esquerra.

➤ GRÀFICA  $a_m$  – incidència pala esquerra❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $a_m$  – incidència pala esquerra

Segons la línia de tendència l'acceleració mitjana del vol augmenta amb valors negatius a mesura que s'incrementa positivament la incidència positiva de la pala esquerra.

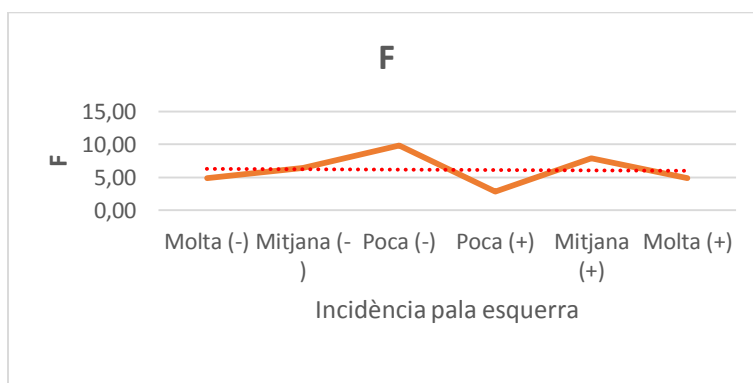
➤ GRÀFICA  $v_m$  – incidència pala esquerra



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_m$  – incidència pala esquerra

La velocitat mitjana del vol es manté constant independentment de la incidència de la pala esquerra.

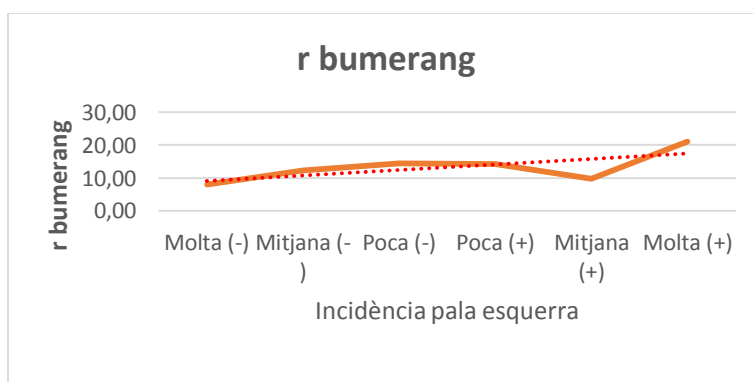
➤ GRÀFICA  $F$  – incidència pala esquerra



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $F$  – incidència pala esquerra

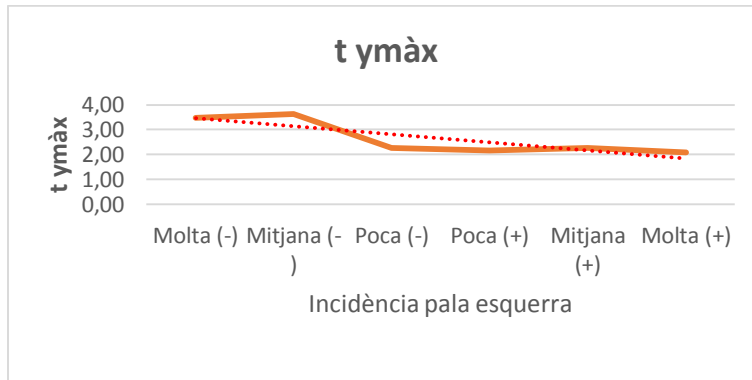
La força mínima d'escapçada, segons la línia de tendència, gairebé no varia respecte l'increment d'incidència positiva a la pala esquerra del bumerang.

➤ GRÀFICA  $r$  – incidència pala esquerra

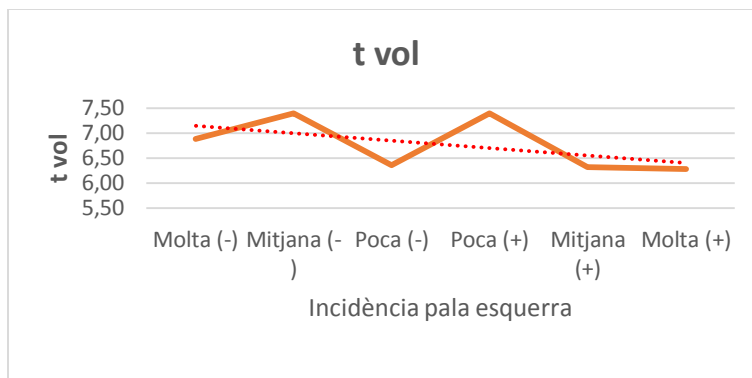


❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $r$  – *incidència pala esquerra*

A mesura que es llança el bumerang amb una incidència a la pala esquerra el bumerang cau una mica més lluny, segons mostra la línia de tendència.

➤ GRÀFICA  $t_{y_{m\grave{a}x}}$  – *incidència pala esquerra*❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $t_{y_{m\grave{a}x}}$  – *incidència pala esquerra*

Com es pot veure, a mesura que la incidència positiva de la pala esquerra del bumerang van sent més positius, l'alçada màxima de la trajectòria s'assoleix en un temps més petit.

➤ GRÀFICA  $t_{vol}$  – *incidència pala esquerra*❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $t_{vol}$  – *incidència pala esquerra*

Es pot concloure que la durada del vol es cada vegada més petita a mesura que s'augmenta positivament la incidència de la pala esquerra del bumerang.

### 8.2.4 C.G. EXTREM ALA DRETA

Ha consistit en adherir una sèrie de pesos a l'extrem de l'ala dreta del bumerang per tal de variar el c.g. d'aquest.

#### 8.2.4.1 DADES OBTINGUDES DE LA VARIACIÓ DEL C.G. EXTREM PALA DRETA

Només hi tres llançaments diferents ja que al afegir cada cop 5gr. el vol varia enormement, i arriba un moment on el bumerang vola en línia recta.

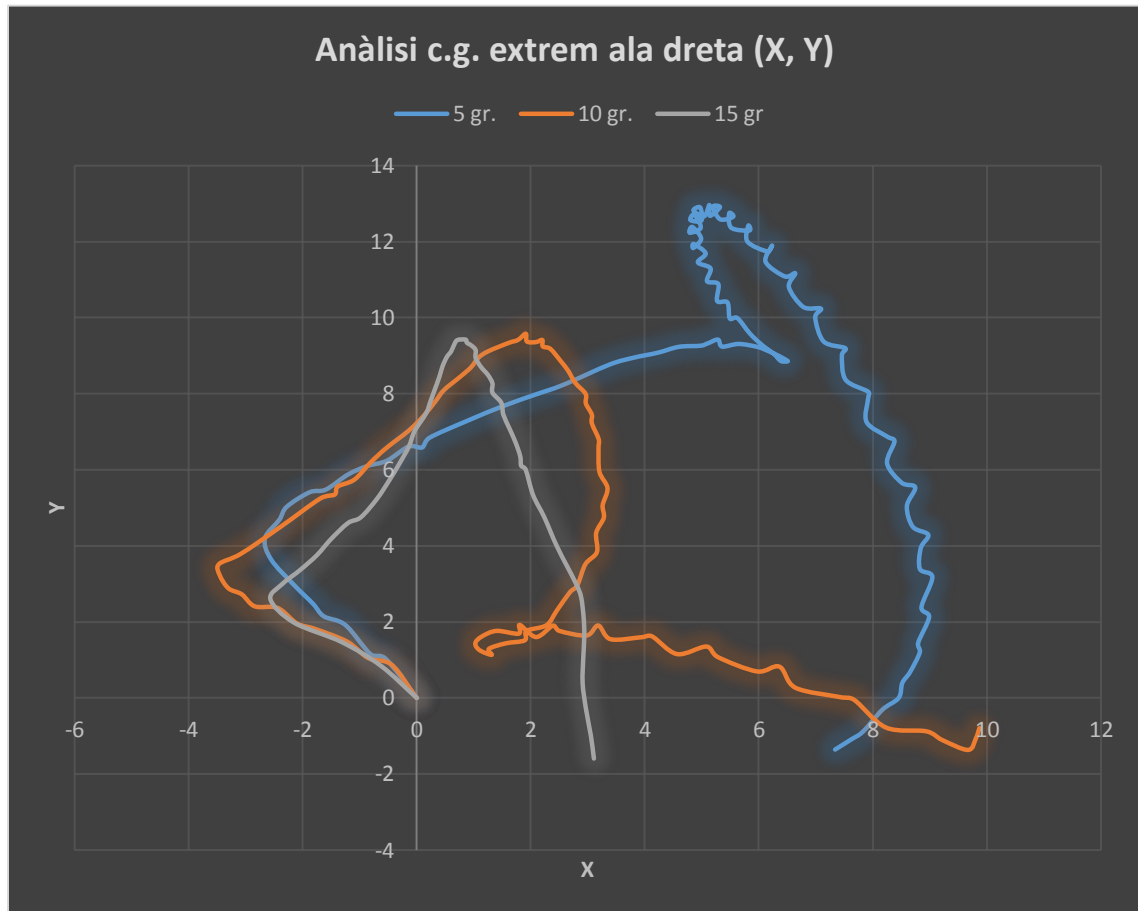


*Imatge 5.2.4.1. Massa externa a l'extrem de l'ala dreta del bumerang.*

Massa	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	Rvol	$\Delta Svol$	Vx0	Vy0	Vz0	V0	Vx	Vy	Vz	Vm	Am	F0	V	F	r bumerang	t ymàx	t vol
5 gr.	11,71	14,82	16,09	12,40	77,94	-6,67	3,03	8,31	11,08	-7,20	-6,77	0,52	11,01	-0,17	10,52	9,89	9,40	8,91	2,48	7,08
10 gr.	13,34	13,54	17,81	13,02	81,83	-10,50	4,65	6,17	13,04	1,52	-2,06	-2,06	11,43	-1,36	12,38	3,29	3,12	4,73	2,72	7,16
15 gr.	5,67	10,24	8,17	7,14	44,83	-8,55	7,80	9,13	14,74	1,32	-14,97	-4,06	10,78	0,20	7,00	15,57	14,79	7,11	2,76	4,32

## 8.2.4.2 GRÀFIQUES OBTINGUES DE LA VARIACIÓ DE LA INCIDÈNCIA DE LA PALA ESQUERRA

## ➤ GRÀFICA (x,y)

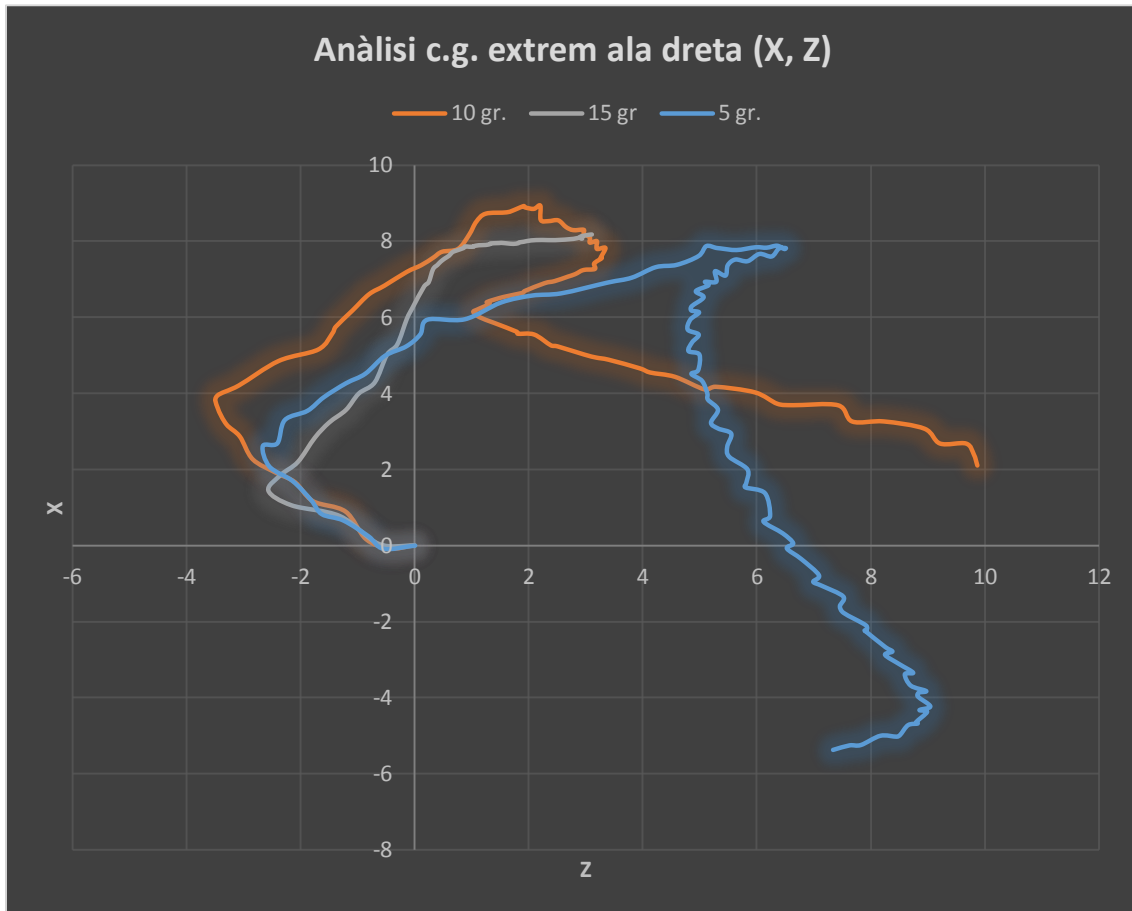


## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (x,y)

D'aquesta gràfica es pot dir que a mesura que s'augmenta el pes de l'extrem de l'ala dreta, el bumerang cau més cap a la dreta.

A més, s'observa que com més pes es col·loca a l'extrem de la pala dreta del bumerang, la x mínima es va produint a una alçada més baixa, i la y màxima es troba a una x més petita de l'origen del llançament.

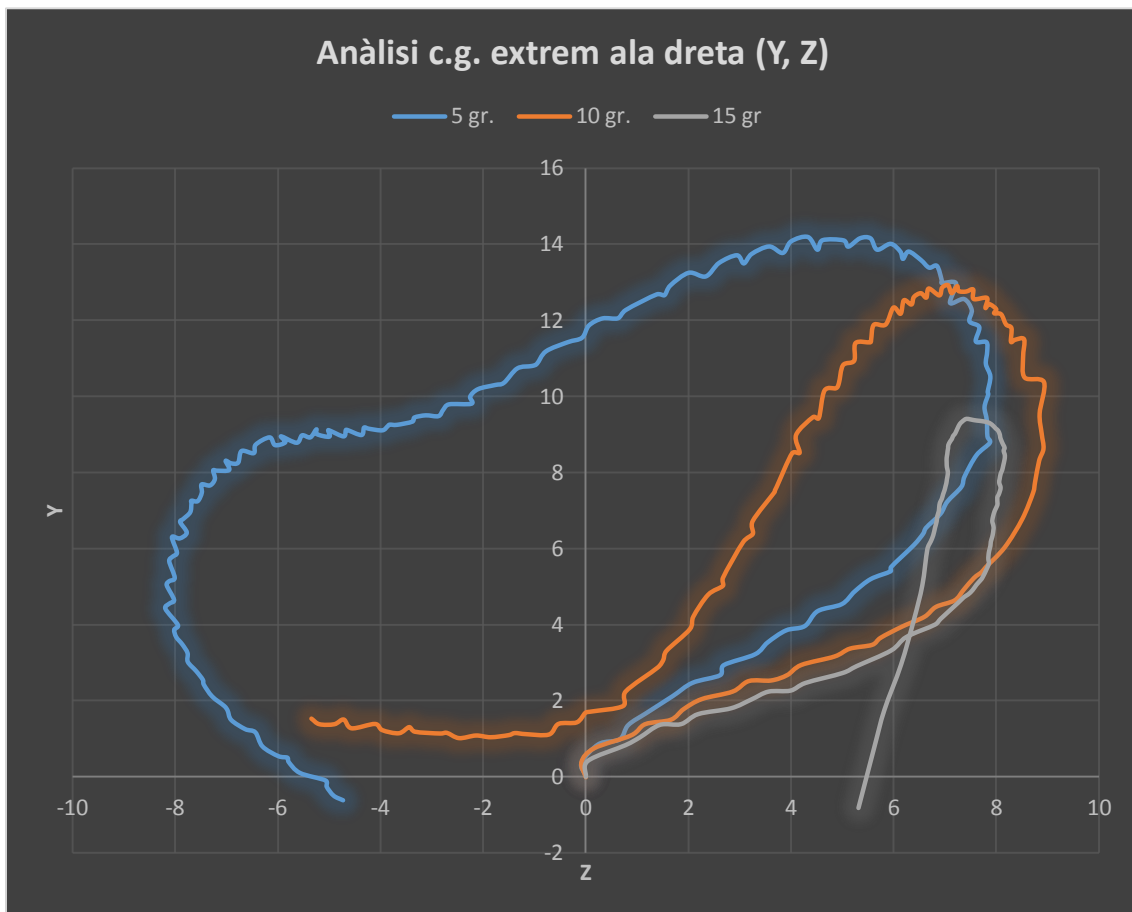
## ➤ GRÀFICA (x,z)



## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (x,z)

No es pot deduir gaire res.

## ➤ GRÀFICA (y,z)



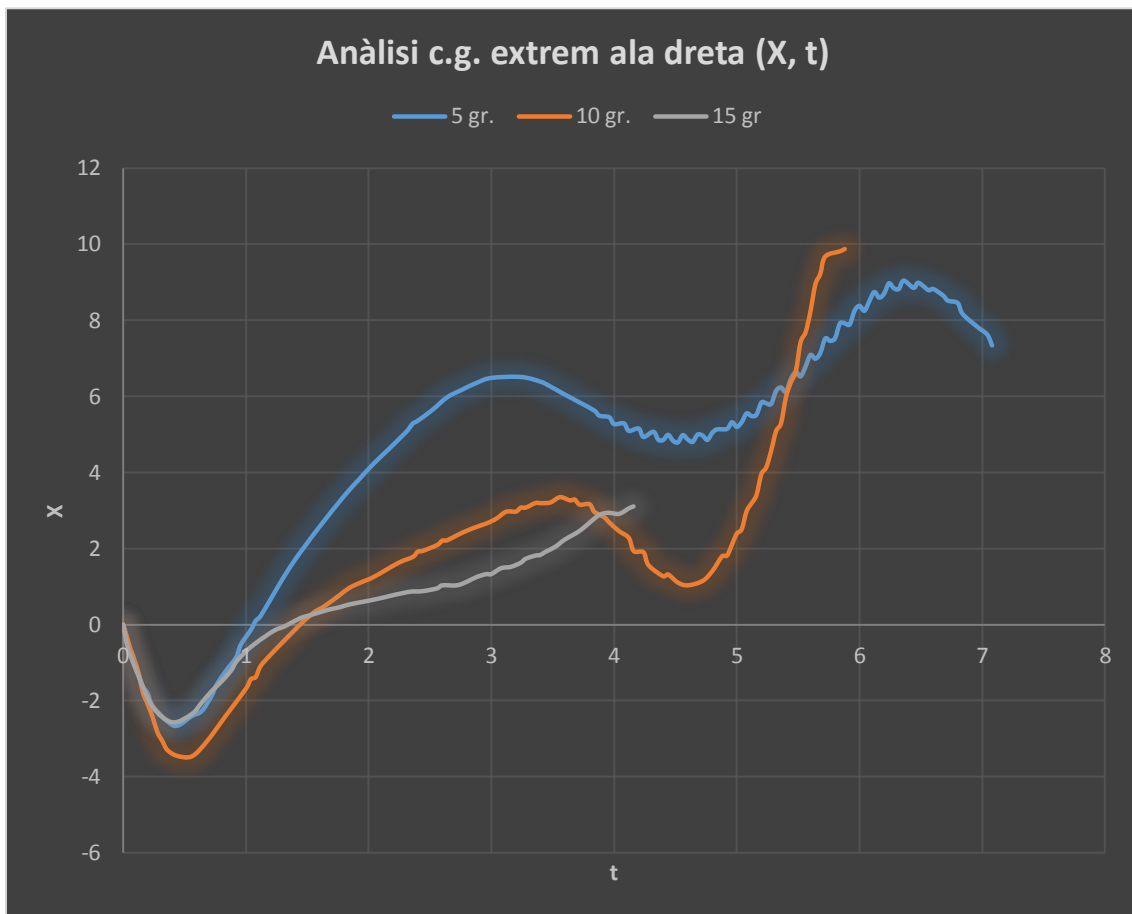
## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (y,z)

Es pot interpretar que com més gran és el pes afegit a l'extrem de l'ala dreta del bumerang la y màxima es més petita, però es troba gairebé exactament en la mateixa x sempre.

A més, a mesura que s'augmenta la massa afegida, el bumerang passa de caure darrere del llançador a davant del llançador. Casualment, amb una massa de 5 gr. El bumerang cau aprox. -5 m en l'eix Z respecte l'origen, i amb la massa de 15 gr. Cau a uns 5 m de l'origen.

Per últim, també es veu que a la massa de 5 gr. el bumerang és capaç de fer un màxim relatiu en la seva alçada, però a mesura que s'augmenta la massa els vols d'aquests només realitzen un màxim absolut.

## ➤ GRÀFICA (x,t)

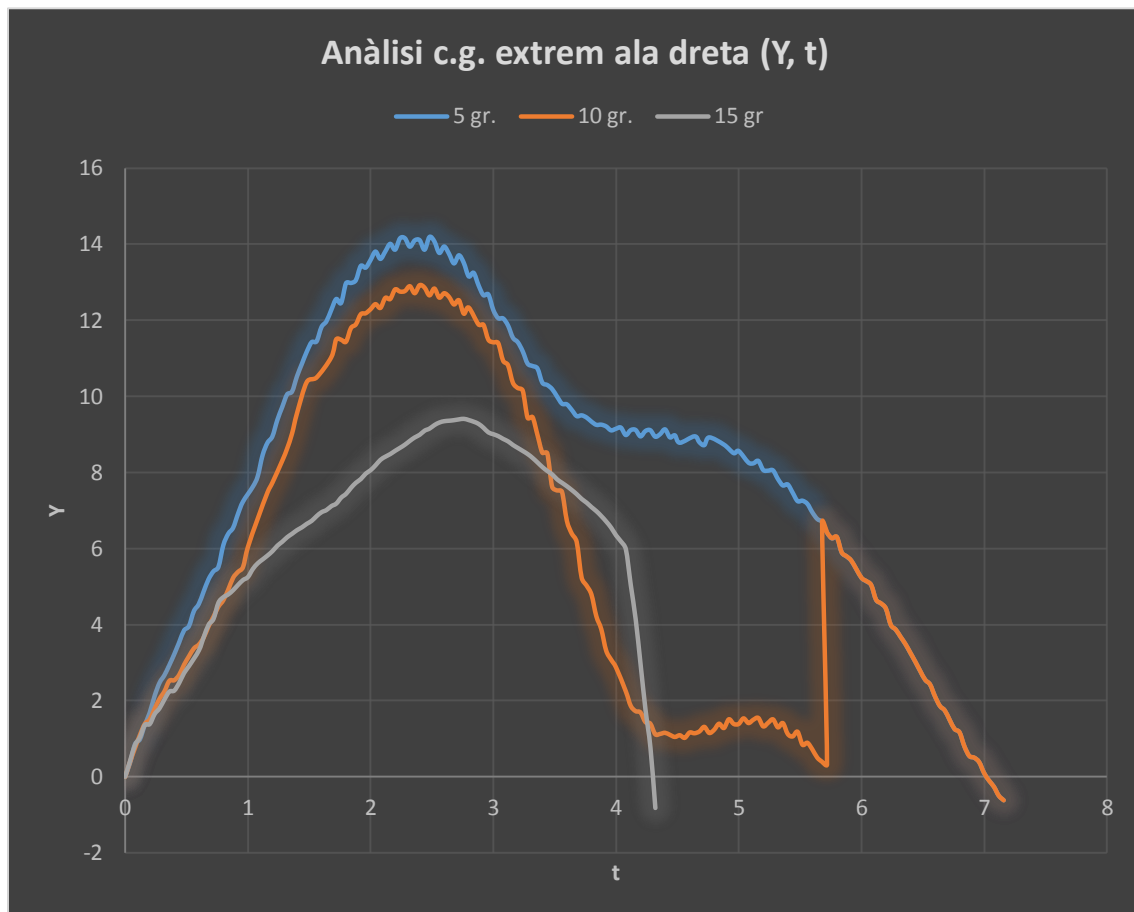


## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (x,t)

S'observa que a mesura que s'augmenta la massa afegida a l'extrem de la pala dreta el bumerang aterra en un vol de durada més curta i en una distància a l'origen del llançament en l'eix x superior.



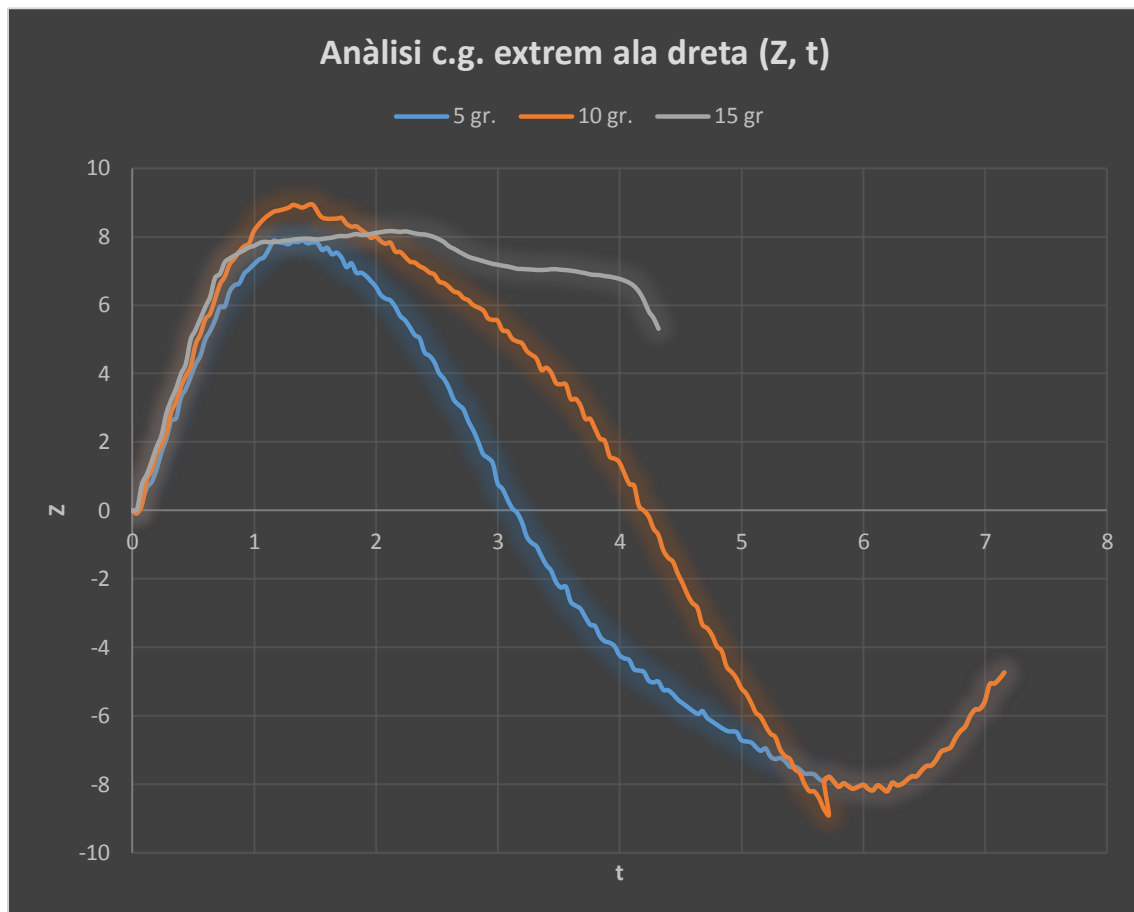
## ➤ GRÀFICA (y,t)



## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (y,t)

Es conclou que la y màxima és inversament proporcional a la massa de l'extrem de la pala dreta del bumerang.

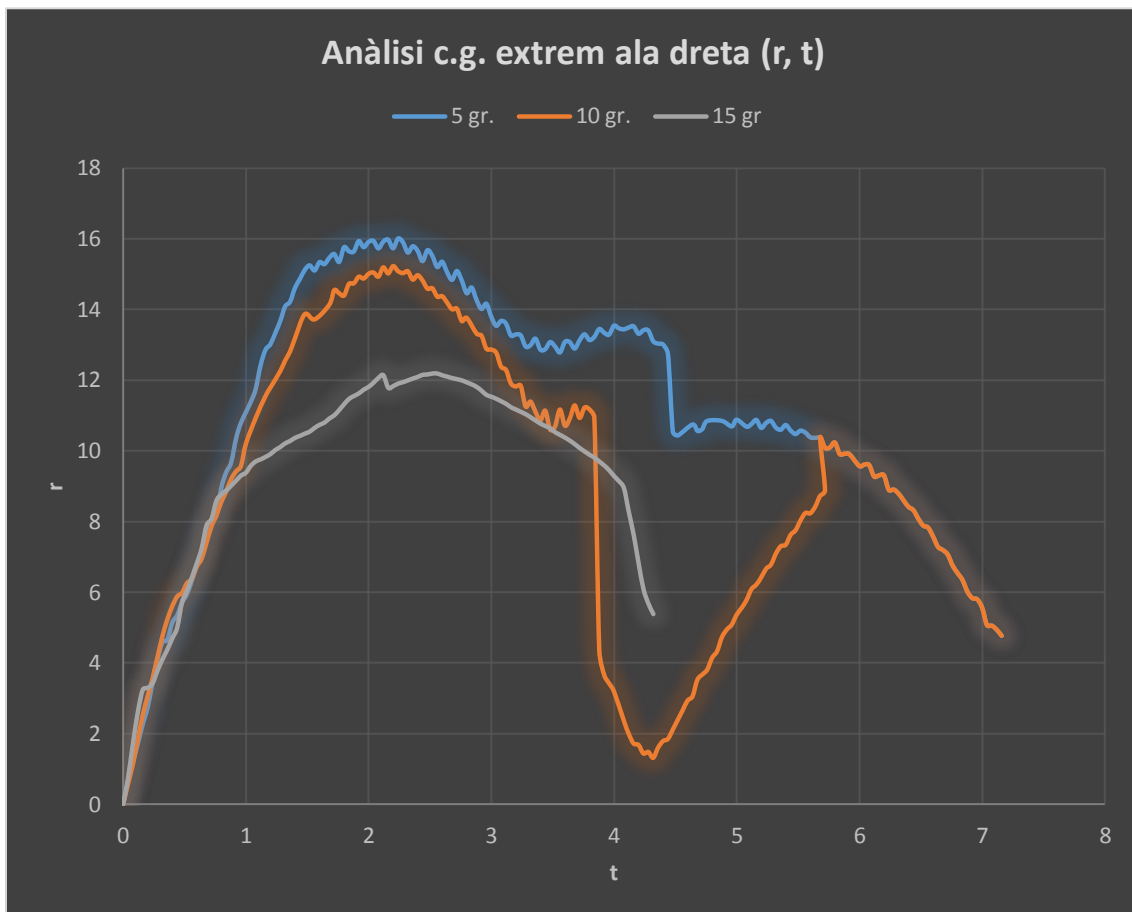
## ➤ GRÀFICA (z,t)



## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (z,t)

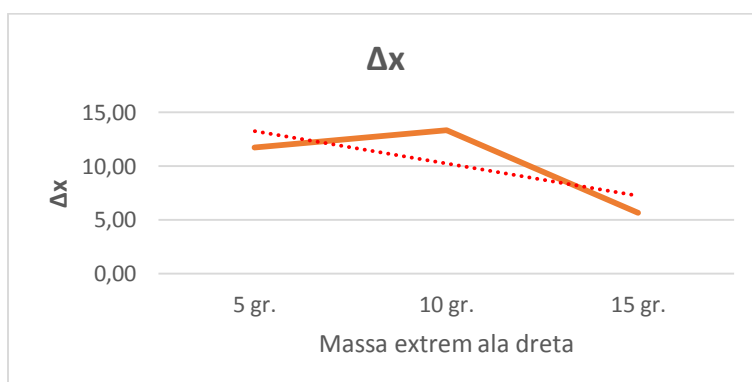
Només es pot afirmar que tots els vols presenten la seva distància x màxima gairebé al mateix valor.

## ➤ GRÀFICA (r,t)



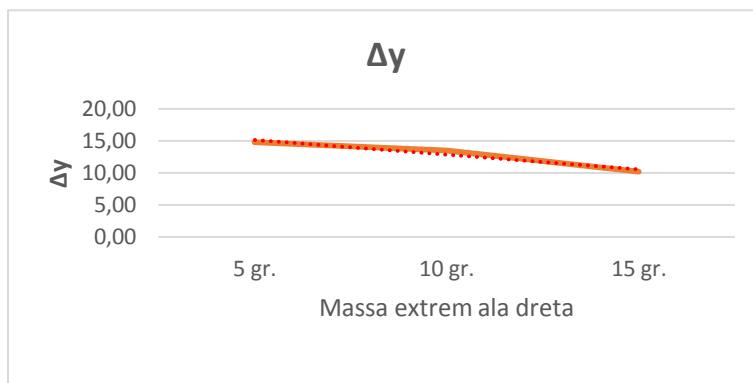
## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (r,t)

No se'n poden extreure conclusions.

➤ GRÀFICA  $\Delta x$  – c.g. extrem ala dreta❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta x$  – c.g. extrem ala dreta

Segons la línia de tendència es pot observar que l'amplitud x màxima del bumerang és inversament proporcional a l'augment de la massa de l'extrem de la pala dreta del bumerang.

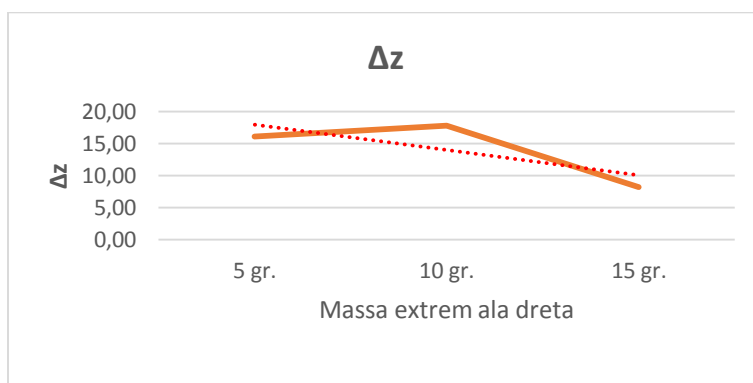
➤ GRÀFICA  $\Delta y$  – *c.g. extrem ala dreta*



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta y$  – *c.g. extrem ala dreta*

Es pot dir que  $\Delta y$  disminueix lleugerament respecte l'augment de la massa de l'extrem de la pala dreta.

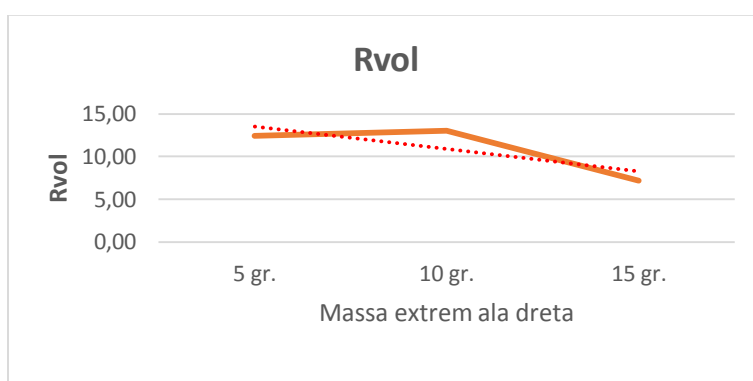
➤ GRÀFICA  $\Delta z$  – *c.g. extrem ala dreta*



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta z$  – *c.g. extrem ala dreta*

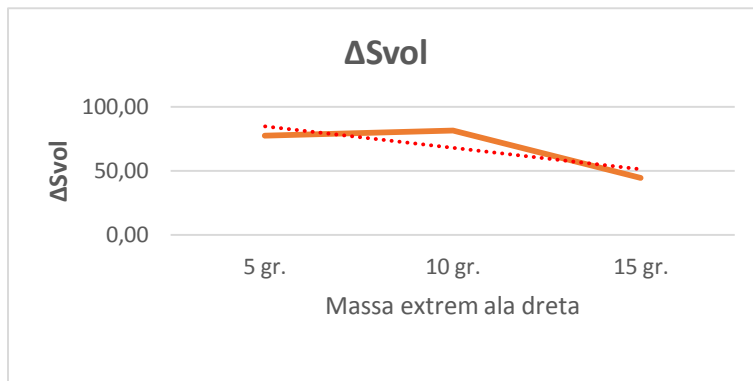
Com es pot veure  $\Delta z$  disminueix una mica el seu valor quant més gran és el valor de la massa adherida, tot i que no es gaire fiable aquesta conclusió ja que només s'han realitzat tres variacions, i una sobresurt molt de la línia de tendència.

➤ GRÀFICA  $R_{vol}$  – *c.g. extrem ala dreta*

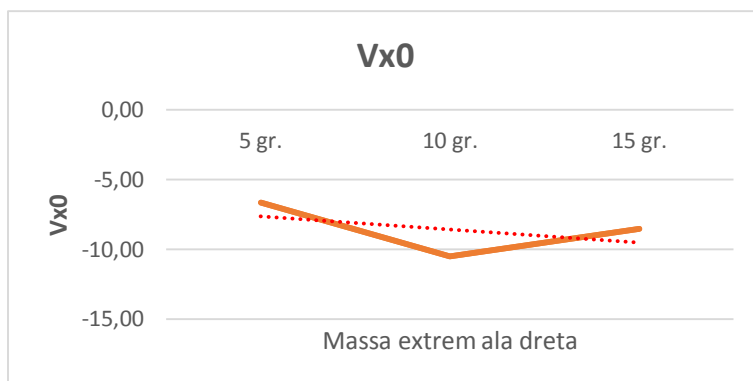
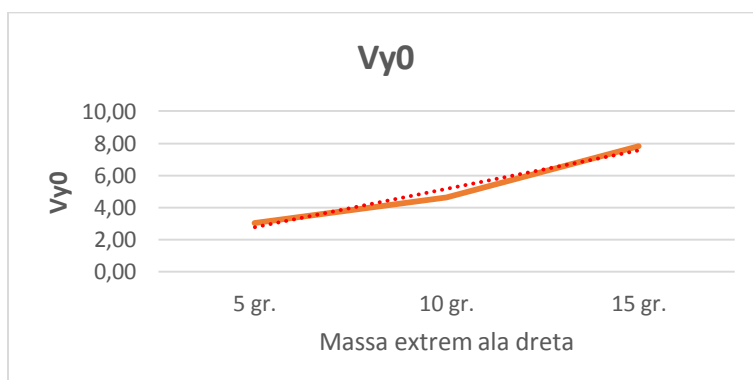


❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $R_{vol} - c.g. \text{extrem ala dreta}$ 

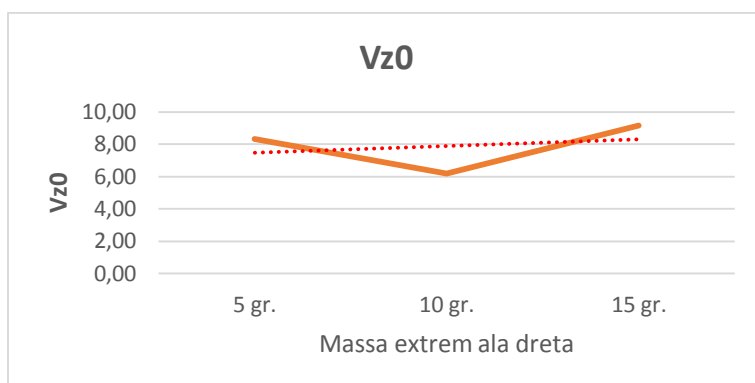
El radi de vol disminueix a mesura que la massa afegida a la pala dreta pren valors cada cop més grans.

➤ GRÀFICA  $\Delta S_{vol} - c.g. \text{extrem ala dreta}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta S_{vol} - c.g. \text{extrem ala dreta}$ 

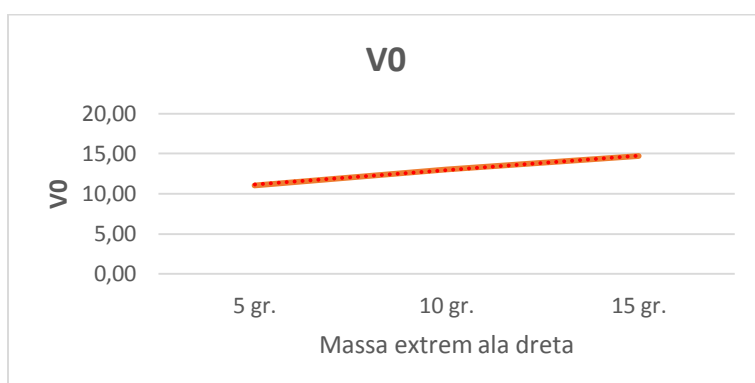
Amb l'espai recorregut succeeix exactament el mateix que a l'apartat anterior.

➤ GRÀFICA  $v_{x_0} - c.g. \text{extrem ala dreta}$ ➤ GRÀFICA  $v_{y_0} - c.g. \text{extrem ala dreta}$ 

➤ GRÀFICA  $v_{z0} - c.g. \text{extrem ala dreta}$



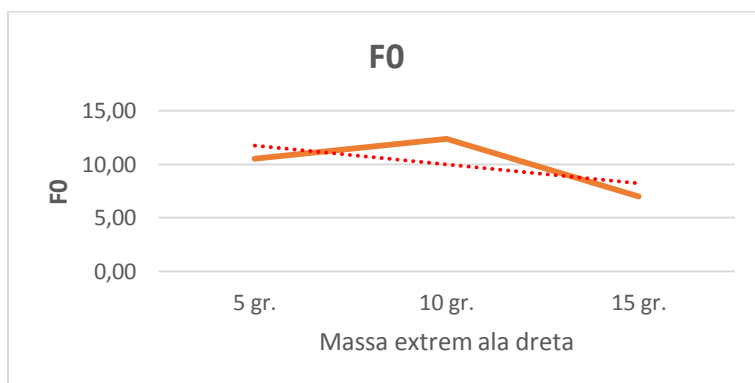
➤ GRÀFICA  $v_0 - c.g. \text{extrem ala dreta}$



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_0 - c.g. \text{extrem ala dreta}$

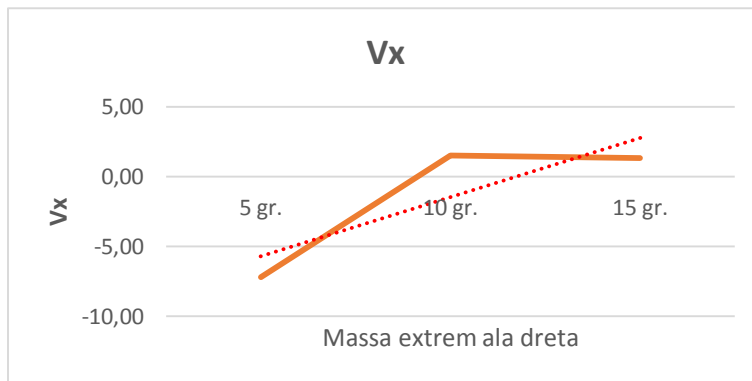
Les velocitats de llançament augmenten a mesura que s'augmenta la massa, el que vol dir que en principi l'anàlisi no ha estat gaire controlat. L'augment tan considerable pot ser a causa que a l'augmentar la massa general del bumerang i estar acostumat a fer els llançaments amb la mateixa massa, inconscientment hagi optat per llançar amb més força per compensar l'augment de massa i així assolir les mateixes velocitats, però com es pot veure, no ha sigut gaire efectiu.

➤ GRÀFICA  $F_0 - c.g. \text{extrem ala dreta}$

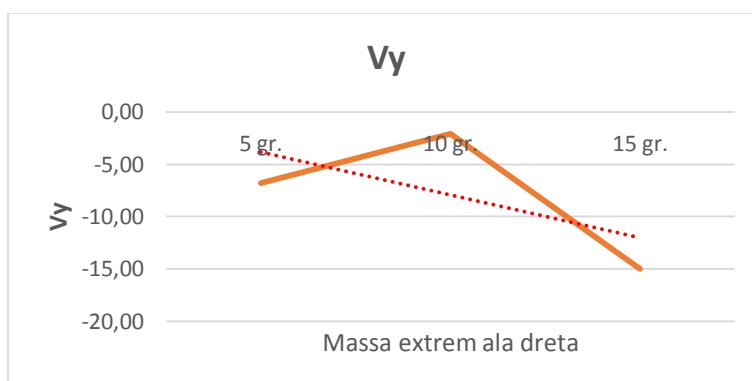


❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $F_0 - c.g.extrem ala dreta$ 

La força amb què es llença el bumerang a cada llançament varia bastant com poder considerar l'anàlisi vàlid.

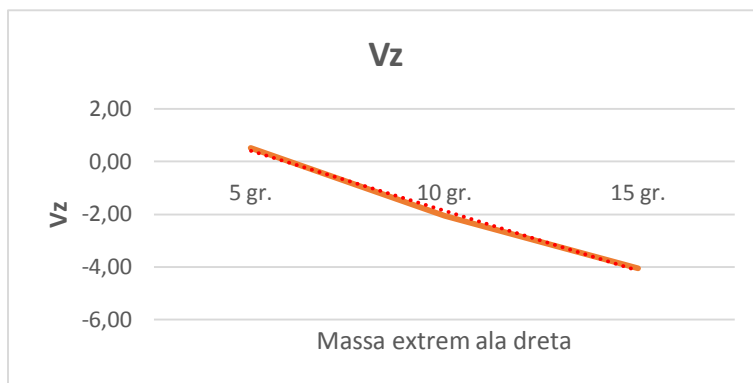
➤ GRÀFICA  $v_x - c.g.extrem ala dreta$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_x - c.g.extrem ala dreta$ 

Observant la gràfica es veu que a mesura que s'augmenta la massa, s'incrementa la component de la velocitat x, segons la línia de tendència.

➤ GRÀFICA  $v_y - c.g.extrem ala dreta$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_y - c.g.extrem ala dreta$ 

Succeeix a la inversa amb la component de la velocitat y.

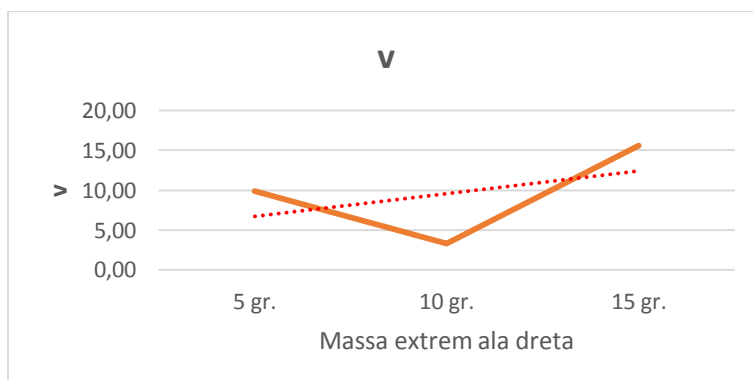
➤ GRÀFICA  $v_z - c.g. \text{extrem ala dreta}$



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_z - c.g. \text{extrem ala dreta}$

Aquesta gràfica mostra clarament que a mesura s'augmenta la massa de l'extrem de l'ala dreta del bumerang s'incrementa negativament de forma considerable la velocitat z.

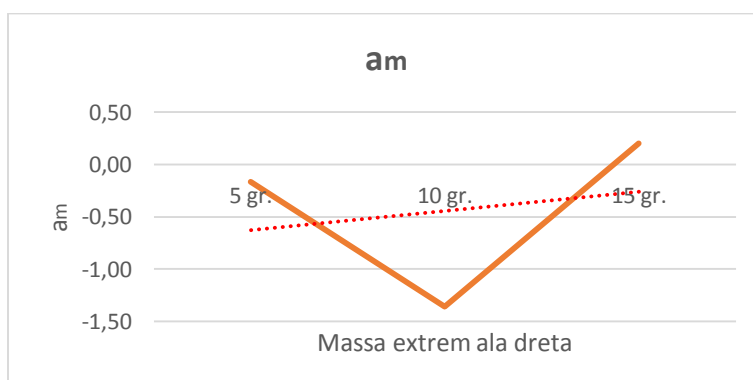
➤ GRÀFICA  $v - c.g. \text{extrem ala dreta}$



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v - c.g. \text{extrem ala dreta}$

La línia de tendència de la gràfica ens mostra que la velocitat d'arribada al terra del bumerang incrementa a mesura que s'augmenta la massa.

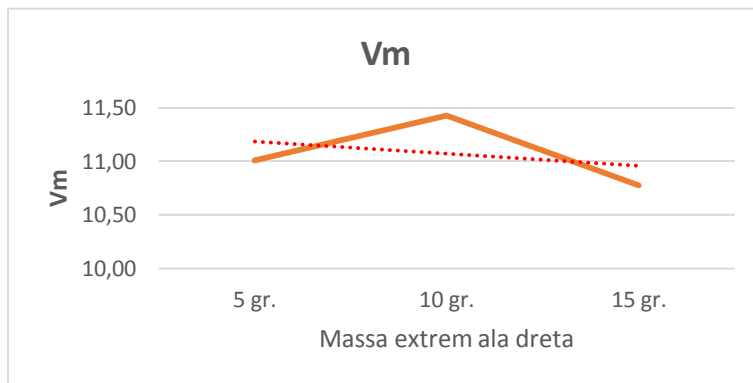
➤ GRÀFICA  $a_m - c.g. \text{extrem ala dreta}$



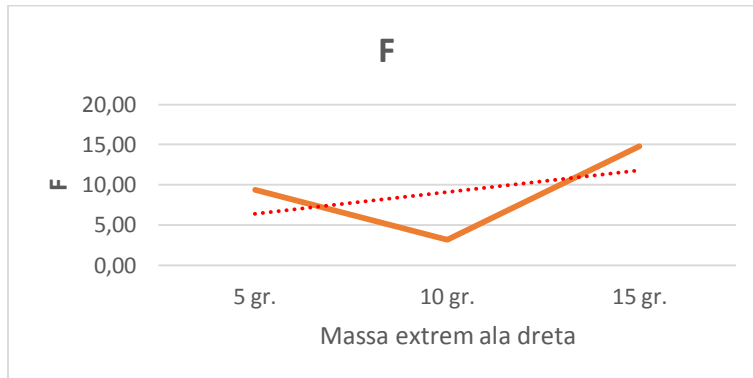


❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $a_m - c.g. \text{extrem ala dreta}$ 

Vist la trajectòria que descriu la línia taronja (real), no se'n poden extreure bones conclusions sobre l'acceleració mitjana.

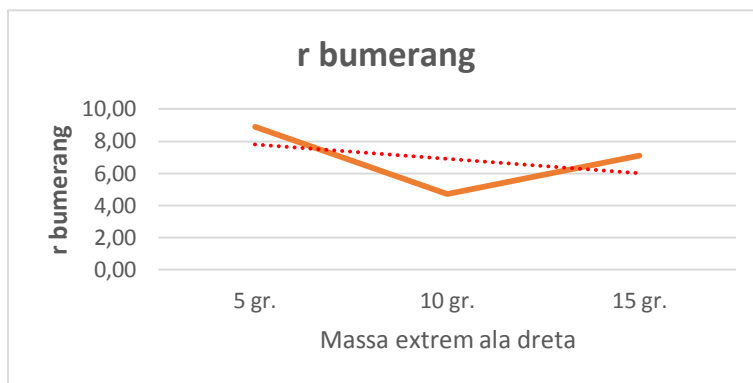
➤ GRÀFICA  $v_m - c.g. \text{extrem ala dreta}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_m - c.g. \text{extrem ala dreta}$ 

Succeeix el mateix amb la velocitat mitjana.

➤ GRÀFICA  $F - c.g. \text{extrem ala dreta}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $F - c.g. \text{extrem ala dreta}$ 

Es podria dir que a mesura que s'augmenta la massa de l'extrem dret de la pala dreta del bumerang la força mínima d'escapçada també augmenta.

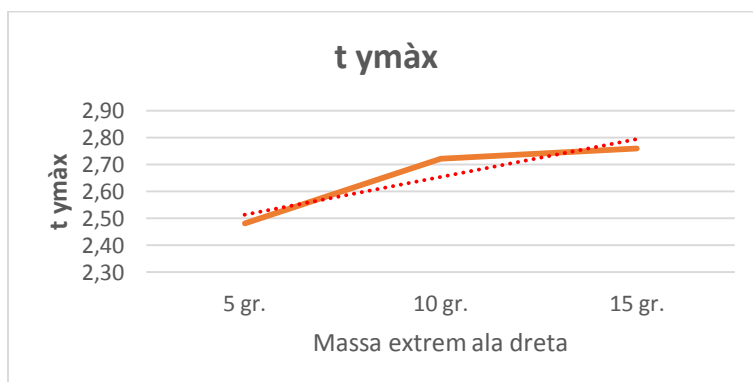
➤ GRÀFICA  $r - c.g. \text{extrem ala dreta}$



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $r - c.g. \text{extrem ala dreta}$

Es conclou que com més pes se li afegeix a l'extrem de la pala dreta del bumerang, aquest aterra més a prop de l'origen.

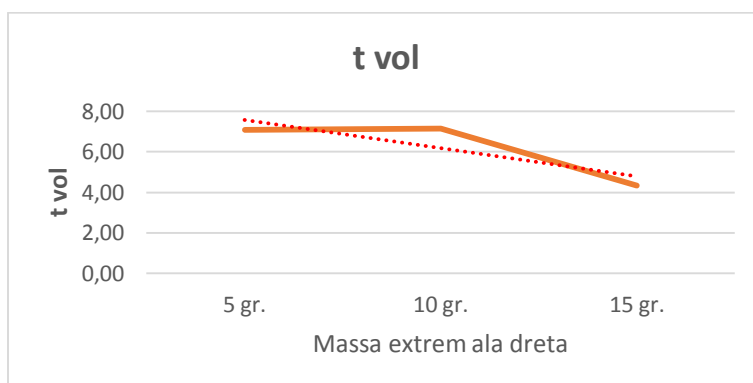
➤ GRÀFICA  $t_{y\text{màx}} - c.g. \text{extrem ala dreta}$



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $t_{y\text{màx}} - c.g. \text{extrem ala dreta}$

Com es pot veure, a mesura que s'augmenta la massa de l'extrem de la pala dreta, l'alçada màxima s'assoleix en un temps superior.

➤ GRÀFICA  $t_{vol} - c.g. \text{extrem ala dreta}$



❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $t_{vol} - c.g. \text{extrem ala dreta}$

Es pot concloure que la durada del vol es cada vegada més petita a mesura que s'augmenta la massa afegida a l'extrem de la pala dreta del bumerang.

### 8.2.5 $\alpha$ DE LLANÇAMENT RESPECTE LA DIRECCIÓ DEL VENT

L'anàlisi ha consistit en llançar el bumerang en diferents angles respecte la direcció del vent. Per exemple, quan es llança a  $0^\circ$  significa que s'ha llançat en la mateixa direcció però en sentit oposat, és a dir, a contravent. La volta completa dels diferents angles és realitzada en sentit antihorari.

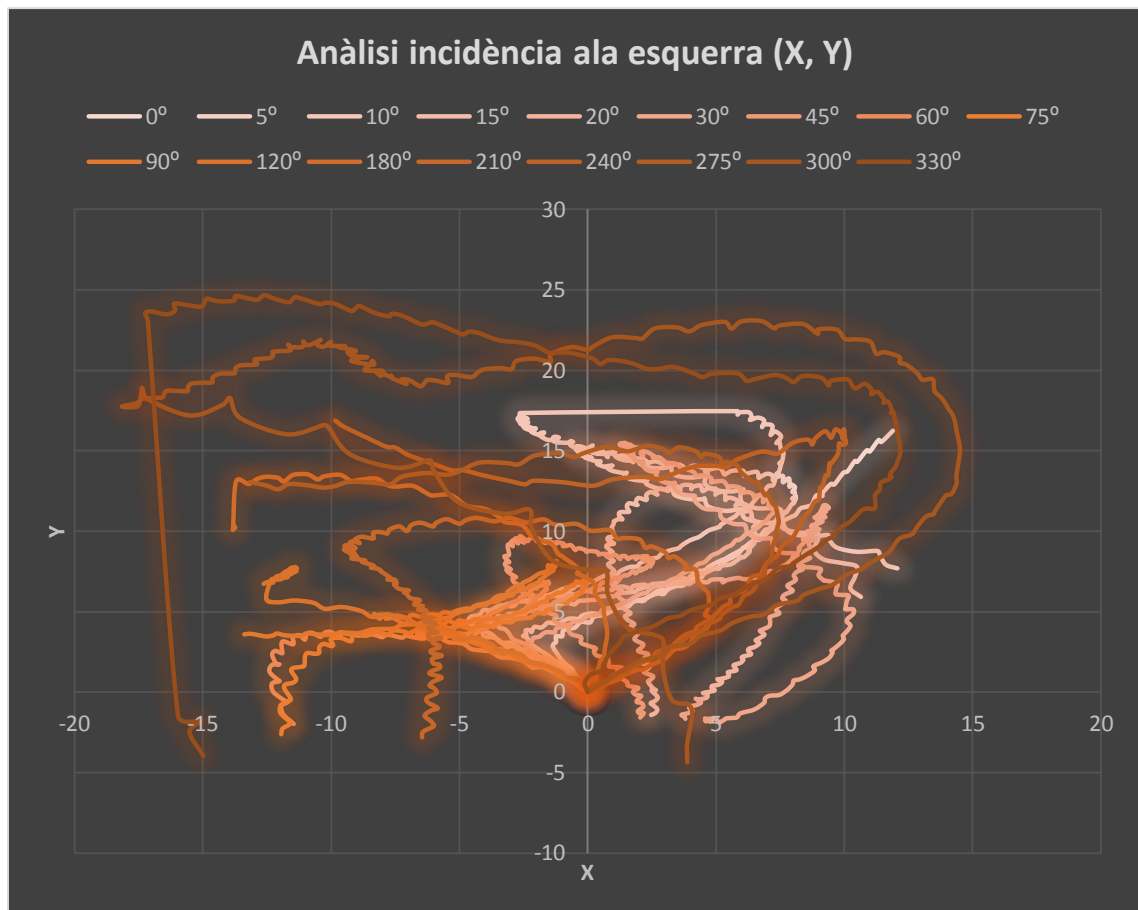
#### 8.2.5.1 DADES OBTINGUDES DE LA VARIACIÓ DE L' $\alpha_{vent}$

$\alpha_{vent}$	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	Rvol	$\Delta Svol$	$V_{x0}$	$V_{y0}$	$V_{z0}$	V0	$V_x$	$V_y$	$V_z$	Vm	Am	F0	V	F	r bumerang	t ymàx	t vol
$0^\circ$	13,26	19,71	31,43	19,70	123,75	-4,39	9,68	4,65	11,60	2,82	-25,42	-14,12	16,11	2,29	11,02	29,21	27,75	26,19	2,12	7,68
$5^\circ$	14,61	14,85	23,69	15,77	99,11	-5,20	12,46	9,93	16,76	2,81	-7,51	-0,08	12,45	-1,10	15,92	8,02	7,62	17,30	2,52	7,60
$10^\circ$	15,32	17,11	21,73	15,81	99,33	-11,04	19,56	10,71	24,88	-4,73	3,93	-0,75	10,22	-1,92	23,64	6,19	5,88	15,91	2,68	9,72
$15^\circ$	10,87	16,17	14,50	12,14	76,31	-7,45	15,99	3,22	17,94	-4,35	-3,27	1,36	9,59	-1,55	17,04	5,61	5,33	4,37	2,80	8,00
$20^\circ$	13,30	18,23	18,51	14,59	91,69	-11,65	15,59	4,39	19,95	-6,20	-1,91	-1,66	11,88	-1,72	18,95	6,70	6,36	8,19	3,68	7,96
$30^\circ$	12,76	18,97	21,64	15,74	98,90	-13,56	15,94	14,67	25,56	3,00	-0,82	4,21	11,04	-2,27	24,28	5,23	4,97	9,26	2,64	8,96
$45^\circ$	6,96	11,35	16,32	10,53	66,17	-4,85	9,01	8,34	13,20	-4,93	-5,78	3,99	8,19	-0,57	12,54	8,58	8,16	8,60	2,72	8,20
$60^\circ$	12,41	8,22	15,26	10,66	66,98	-12,39	5,61	0,87	13,63	10,29	-15,10	-1,54	9,97	0,70	12,95	18,34	17,42	14,35	3,08	6,80
$75^\circ$	11,99	8,68	16,55	11,10	69,75	-16,41	7,44	0,70	18,03	-1,24	-8,59	0,61	9,69	-1,30	17,13	8,70	8,26	15,34	3,28	7,00
$90^\circ$	13,39	9,44	15,36	11,23	70,56	-15,90	3,60	-2,34	16,47	-6,95	-2,06	-0,29	9,69	-1,27	15,64	7,25	6,89	15,93	3,24	7,28
$120^\circ$	12,66	5,28	11,42	8,92	56,07	-15,02	5,31	-5,37	16,81	-4,63	-2,02	-1,80	8,29	-1,69	15,97	5,36	5,09	16,56	2,96	6,76
$180^\circ$	14,57	6,53	18,75	12,31	77,36	2,36	13,84	-14,18	19,96	0,39	-2,29	-0,36	9,87	-2,24	18,96	2,36	2,24	23,24	1,56	7,84
$210^\circ$	14,25	8,58	21,55	13,61	85,53	5,79	5,44	-9,08	12,07	-1,05	-2,02	-0,84	12,22	-1,38	11,46	2,43	2,31	22,48	1,12	7,00
$240^\circ$	19,90	15,46	27,84	18,77	117,96	7,01	12,27	4,45	14,82	-7,84	0,33	-1,65	16,38	-0,94	14,08	8,02	7,62	28,60	1,36	7,20
$275^\circ$	20,61	11,52	21,98	16,13	101,34	13,03	5,19	11,40	18,07	-15,47	-3,04	-1,90	15,74	-0,34	17,17	15,88	15,09	24,33	1,36	6,44
$300^\circ$	32,67	14,61	24,44	21,67	136,15	14,17	14,17	5,86	20,87	-4,90	-5,86	6,72	16,06	-1,26	19,83	10,17	9,67	20,06	1,48	8,48
$330^\circ$	29,43	16,97	26,30	21,48	134,96	5,33	12,36	13,47	19,04	13,61	-1,98	1,09	16,07	-0,62	18,09	13,80	13,11	25,25	1,96	8,40

### 8.2.5.2 GRÀFIQUES OBTINGUDES DE LA VARIACIÓ DE L' $\alpha_{vent}$

Les gràfiques de les trajectòries dels vols no s'han realitzat totes ja que a l'haver tants angles diferents no es distingeixen les línies bé i no se'n pot extreure conclusions.

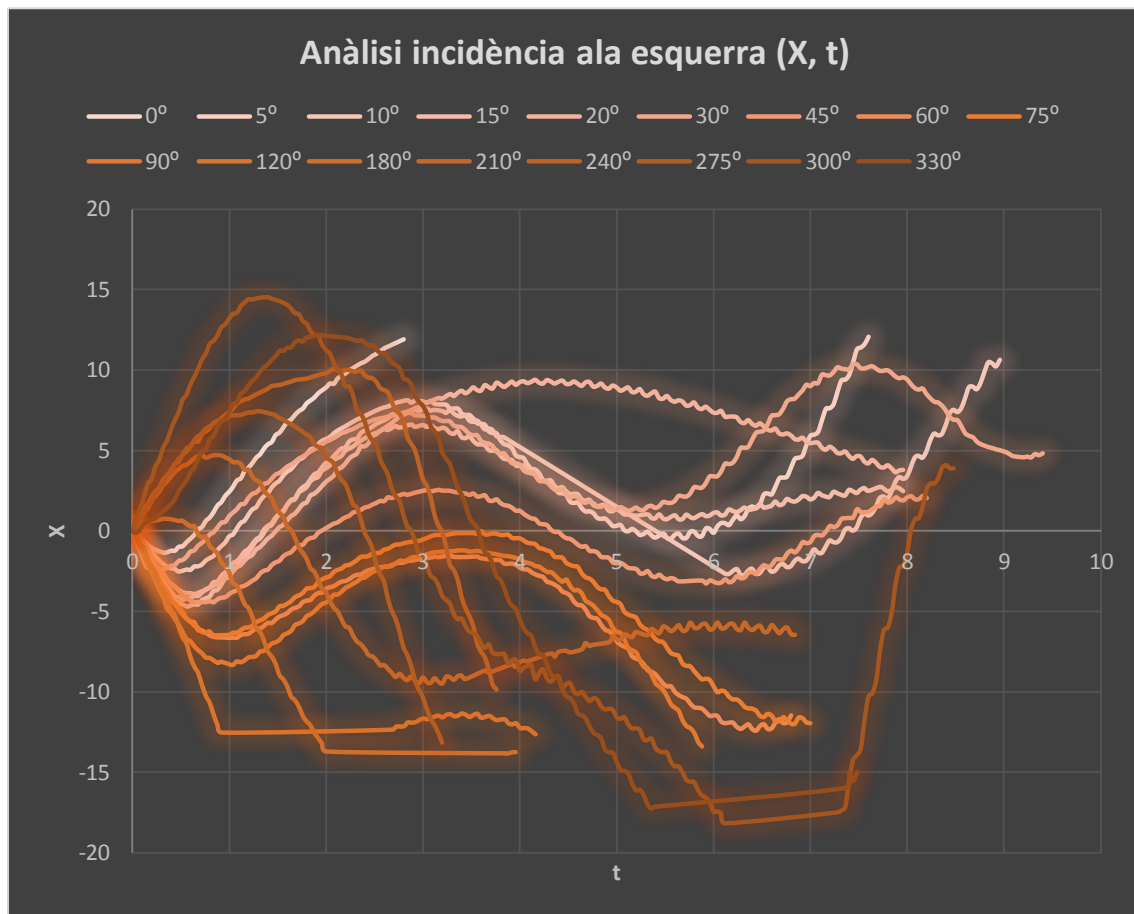
#### ➤ GRÀFICA (x,y)



#### ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (x,y)

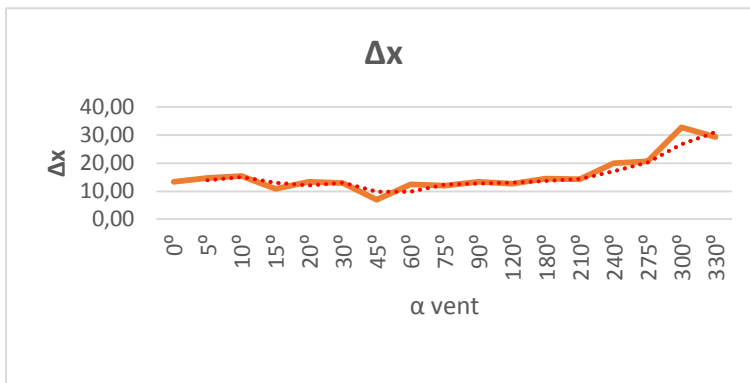
No es pot concloure res ja que no es distingeixen bé les línies.

## ➤ GRÀFICA (x,t)

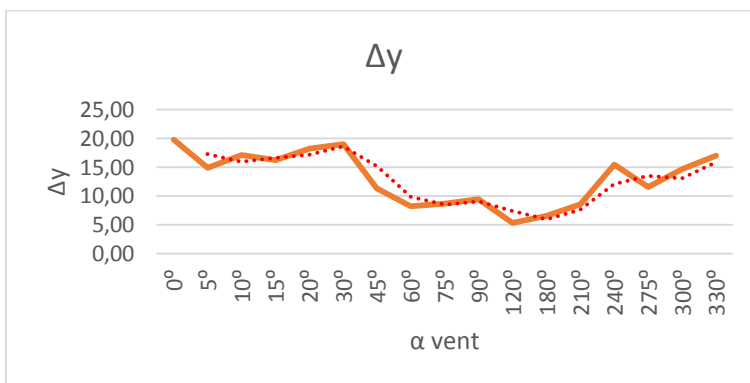


## ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA (x,t)

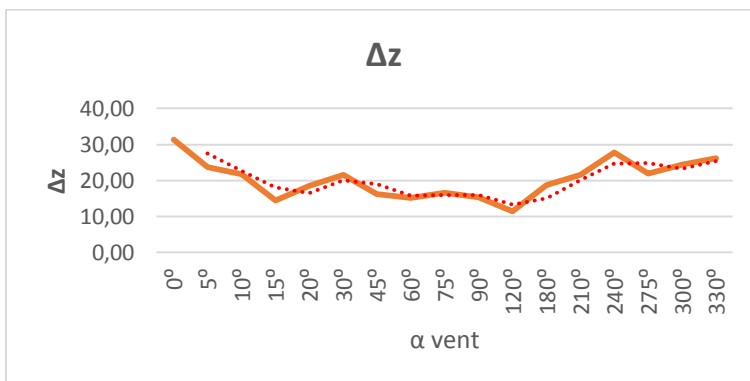
Succeeix el mateix problema que a la gràfica anterior.

➤ GRÀFICA  $\Delta x - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta x - \alpha_{vent}$ 

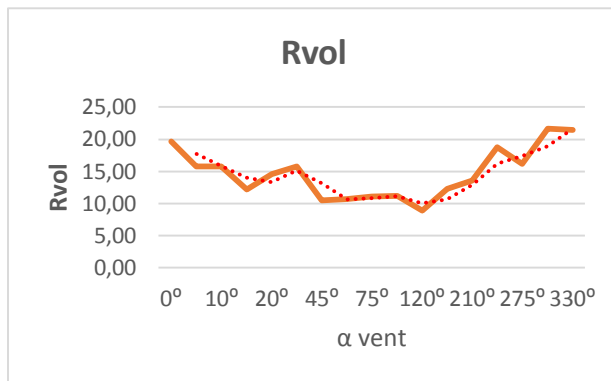
S'entén que a mesura que s'incrementa l'angle de llançament respecte el vent l'amplitud x màxima també augmenta.

➤ GRÀFICA  $\Delta y - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta y - \alpha_{vent}$ 

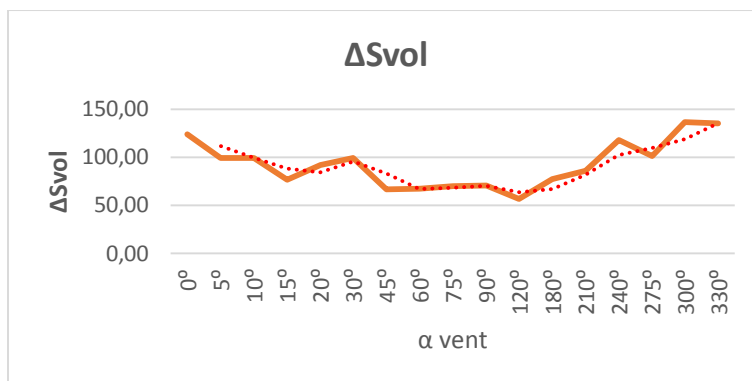
No es pot extreure cap conclusió fiable.

➤ GRÀFICA  $\Delta z - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta z - \alpha_{vent}$ 

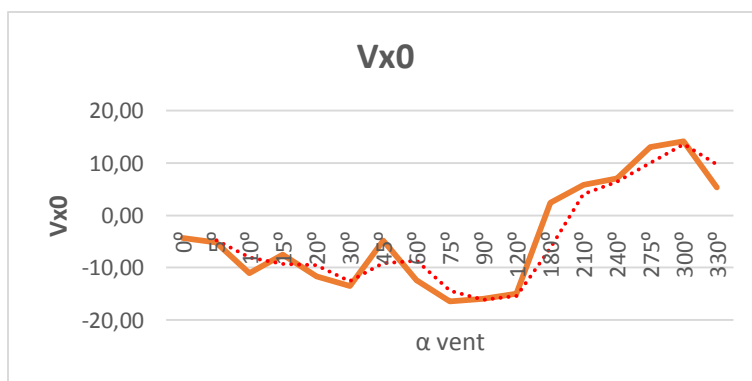
Succeeix el mateix que a la gràfica anterior.

➤ GRÀFICA  $R_{vol} - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $R_{vol} - \alpha_{vent}$ 

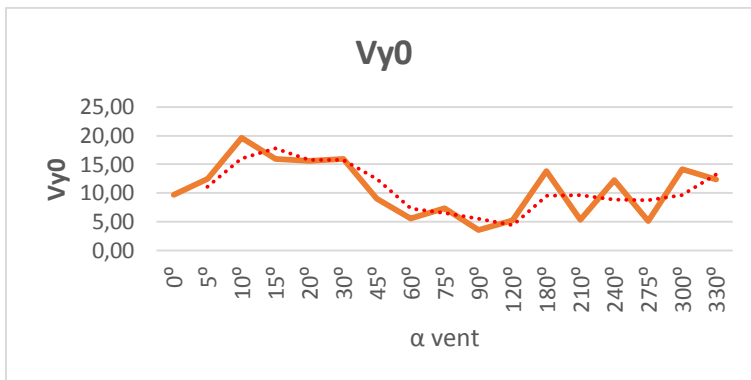
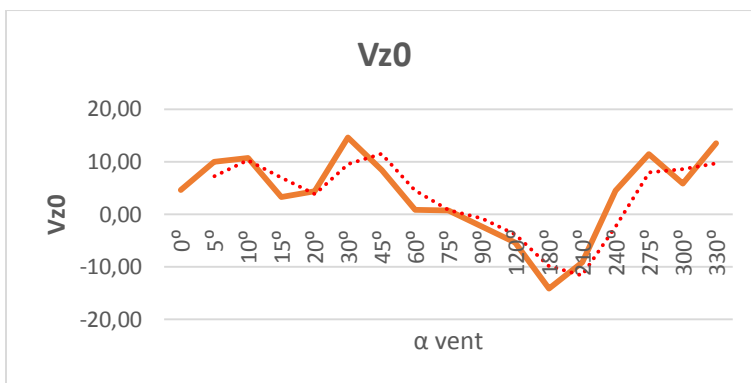
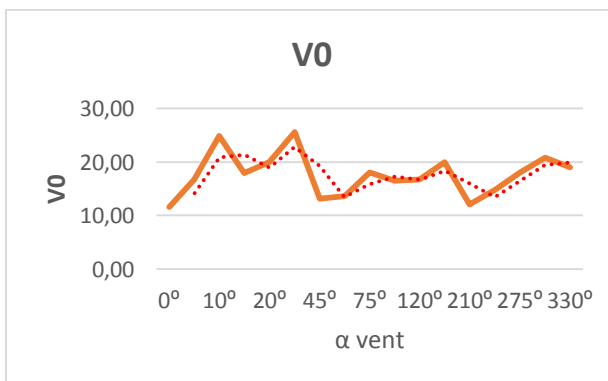
S'observa que el radi del vol aconsegueix un valor mínim cap als angles  $75^\circ$  o  $120^\circ$ , i assolix uns màxims als angles propis dels extrems, el que provoca una funció en forma de corba cònca. Això pot ser a causa que al llançar el bumerang a contravent, el vent se l'enduu molt lluny i per això s'incrementa el radi.

➤ GRÀFICA  $\Delta S_{vol} - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $\Delta S_{vol} - \alpha_{vent}$ 

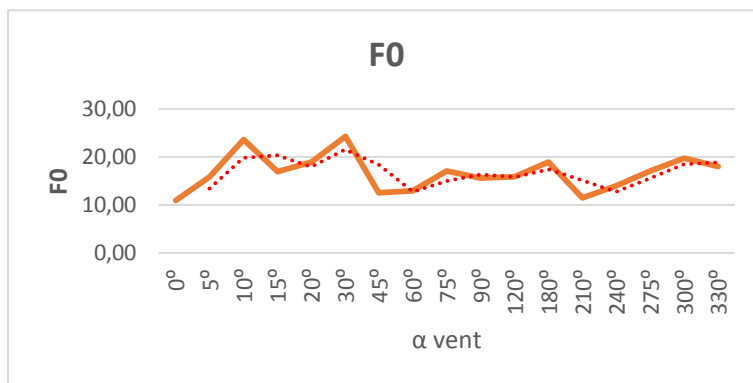
Amb l'espai recorregut succeeix exactament el mateix que a l'apartat anterior.

➤ GRÀFICA  $v_{x_0} - \alpha_{vent}$ 

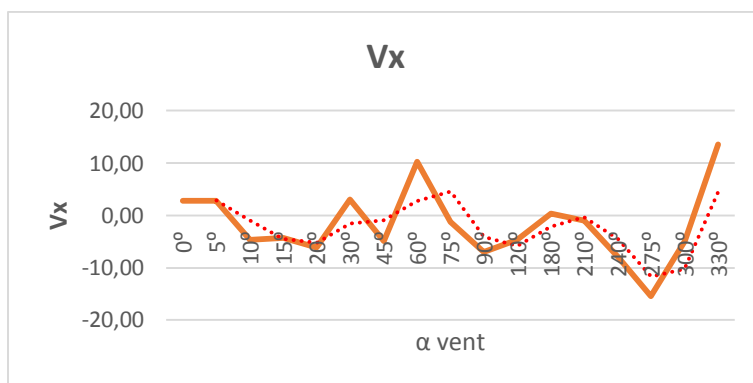


➤ GRÀFICA  $v_{y_0} - \alpha_{vent}$ ➤ GRÀFICA  $v_{z_0} - \alpha_{vent}$ ➤ GRÀFICA  $v_0 - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_0 - \alpha_{vent}$ 

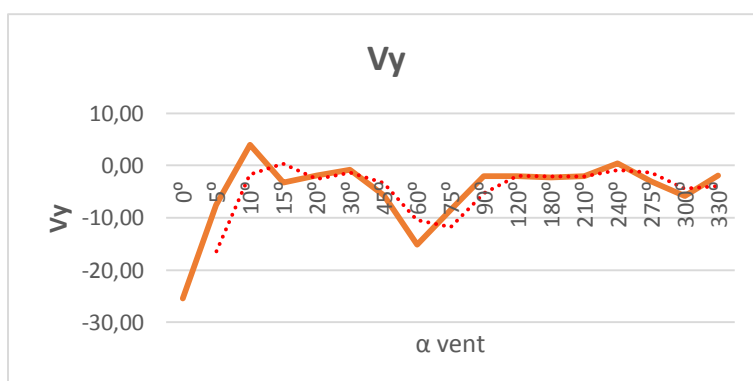
Les velocitats de llançament són molt diferents a cada llançament, el que segurament anul·la la validesa de l'experiment.

➤ GRÀFICA  $F_0 - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $F_0 - \alpha_{vent}$ 

La força amb què es llença el bumerang a cada llançament varia bastant com poder considerar l'anàlisi vàlid.

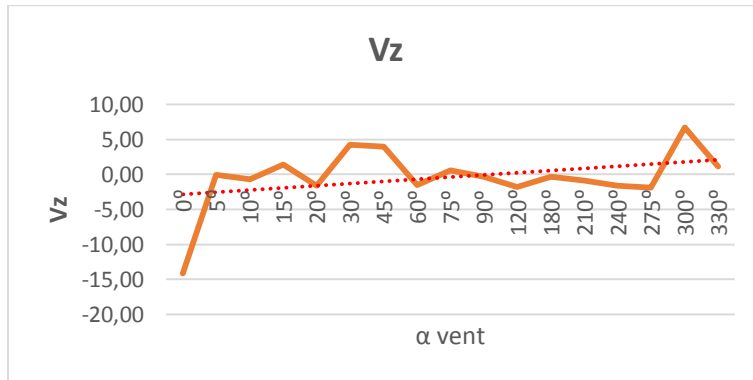
➤ GRÀFICA  $v_x - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_x - \alpha_{vent}$ 

Observant la gràfica no es pot extreure cap conclusió interessant.

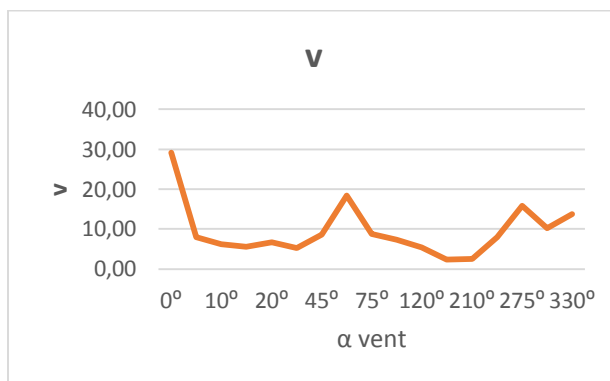
➤ GRÀFICA  $v_y - \alpha_{vent}$ 

❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_y - \alpha_{vent}$ 

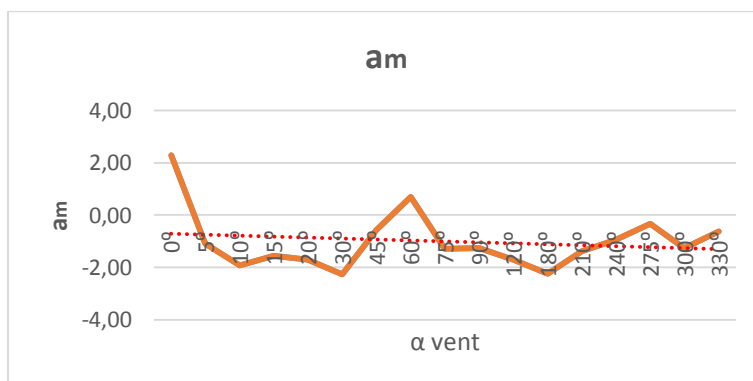
Es pot dir que la velocitat y es manté bastant invariable excepte per algun valor molt extrem.

➤ GRÀFICA  $v_z - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_z - \alpha_{vent}$ 

El mateix es pot concloure amb aquesta velocitat.

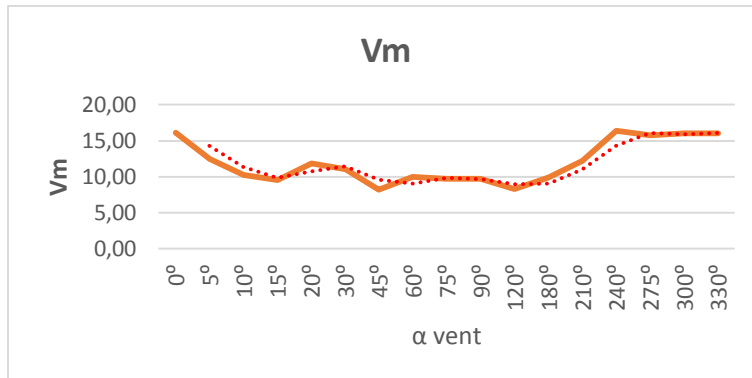
➤ GRÀFICA  $v - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v - \alpha_{vent}$ 

La gràfica no ens resol res.

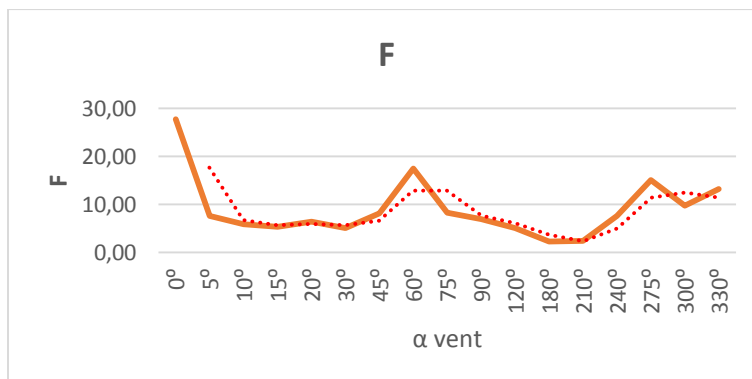
➤ GRÀFICA  $a_m - \alpha_{vent}$ 

❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $a_m - \alpha_{vent}$ 

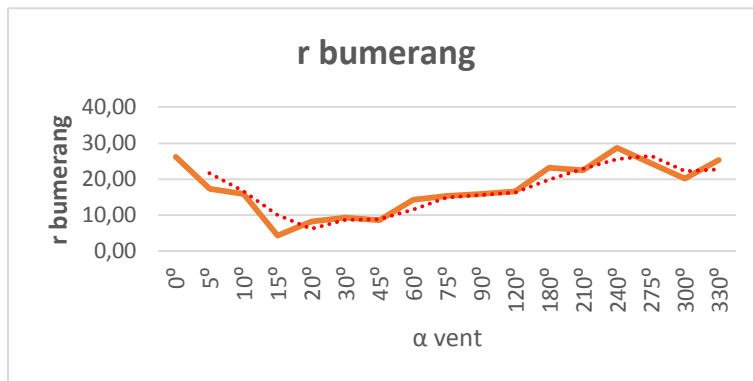
Es contempla que totes les acceleracions són negatives menys la del vol amb  $0^\circ$  respecte el vent, ja que segurament el que ha passat és que el vent li ha incrementat la velocitat i ha acabat accelerant, és a dir, la força exercida en el moment de llançar va ser inferior que la del vent.

➤ GRÀFICA  $v_m - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $v_m - \alpha_{vent}$ 

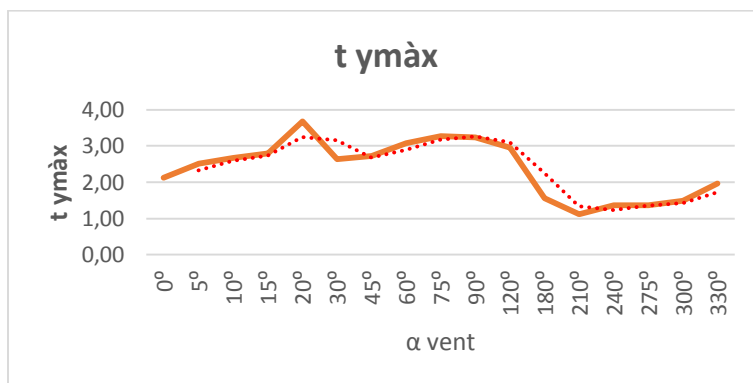
No s'observa cap relació entre la variable independent i la velocitat mitjana.

➤ GRÀFICA  $F - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $F - \alpha_{vent}$ 

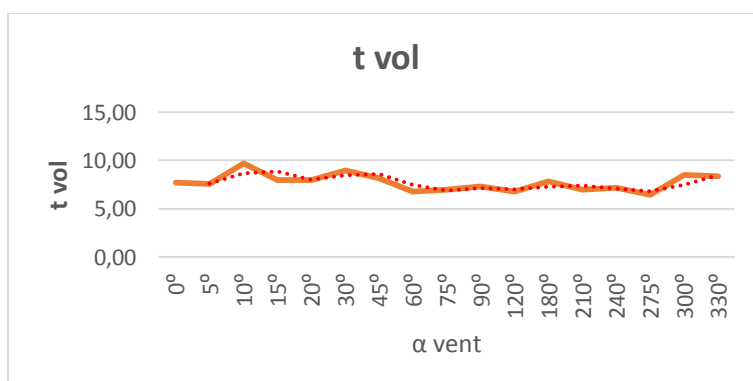
El mateix es pot dir amb la força final mínima d'escapçada.

➤ GRÀFICA  $r - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $r - \alpha_{vent}$ 

D'aquesta gràfica podríem concloure que a la velocitat de 15 km/h aproximadament l'angle òptim de llançament del bumerang respecte la direcció del vent és de 15°, ja que a mesura que el valor de l'angle de llançament s'allunya de tal valor, el bumerang cau més lluny de l'origen.

➤ GRÀFICA  $t_{y_{màx}} - \alpha_{vent}$ ❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $t_{y_{màx}} - \alpha_{vent}$ 

No es pot extreure una deducció correcta amb aquesta gràfica.

➤ GRÀFICA  $t_{vol} - \alpha_{vent}$ 

❖ CONCLUSIÓ GRÀFICA  $t_{vol} - \alpha_{vent}$

Es pot concloure que la durada del vol es manté bastant invariable independentment de l'angle de llançament del bumerang respecte la direcció del vent.

### 8.3 CONCLUSIONS FINALS

Un cop s'han analitzat unes quantes possibles variables del bumerang, es conclou que dels resultats obtinguts no se'n pot extreure cap afirmació realista, ja que sorgeixen dades amb poca o cap relació respecte les variables independents corresponents.

Tots aquests resultats anteriors inversemblants fan pensar que l'error és greu i es troba en la metodologia d'obtenció de dades. Així ho penso pels següents motius:

- Analitzar trajectòries amb el programa Tracker només resulta eficaç i verídica si es tracta de moviments BIDIMENSIONALS, i no tridimensionals com el cas del bumerang. Això és perquè el bumerang, al moure's per tot el pla, presenta profunditat, i llavors, encara que s'utilitzi el mètode de les dues càmeres col·locades perpendicularment per enregistrar tots els eixos, mentre s'enregistra per exemple els eixos (x,y), el bumerang no es mou només en aquests, sinó que alhora també ho fa sobre l'eix z (profunditat), i per tant, com que el programa Tracker es basa en una proporció entre un objecte de mida coneguda a la gravació i a la vida real, doncs la profunditat del suposat enregistrament bidimensional distorsiona les dades. Per fer-ho més entenedor es pot dir que és semblant a si per conèixer la velocitat d'un avió que es troba a 10 km de profunditat d'on es troba la càmera es col·loca el pal de mida coneguda per realitzar la proporció a una distància de 50 m, doncs podria sortir perfectament que l'avió es mou a 1 m/s.
- No s'ha realitzat cap rèplica dels llançaments per reduir els errors humans, el que significa que no es poden considerar gaire verídics els resultats.
- El bumerang ha estat llançat per mi i no per una màquina, el que accentua molt l'error en l'obtenció de dades reals ja que hi ha moltes variables a controlar a l'hora de llançar (velocitat, velocitat angular, força, angles...) .
- Els llançaments es van enregistrar en dies que malauradament s'arribaven als 13-18 km/h, el que va provocar un vol deformat del bumerang, ja que el vent ideal sempre sol ser de 5 km/h, si no ja s'han de realitzar modificacions al bumerang, però variaria els vols.

Un cop s'ha vist la gran quantitat de problemes que s'han presentat en l'anàlisi per realitzar-lo amb la metodologia proposada inicialment, en el següent apartat s'exposa com hauria d'haver estat la metodologia per haver assolit uns resultats verídics.

### 8.3.1 METODOLOGIA IDÒNIA PER A L'OBTENCIÓ DE LES DADES

- ✓ Com que es suposa que no existeix cap robot capaç de llançar bumerangs de la mateixa manera sempre, els anàlisis haurien de realitzar-se amb la major quantitat de rèpliques possibles per tal d'esmortir l'error humà, i intentar controlar al màxim totes les variables.
- ✓ Trobar una alternativa al mètode d'enregistrament dels eixos. Sempre havia tingut la idea d'adherir un xip de tipus GPS que enregistrés les posicions del bumerang durant el vol, però el problema és que no en vaig trobar, i a més suposo que serien massa pesats i alterarien els resultats reals dels vols.
- ✓ Seria convenient per extreure conclusions més òptimes del vol del bumerang realitzar anàlisis d'altres variables, com: altres angles de llançament, angle entre les dues pales, formes dels perfils, sustentació d'aquests, modificacions dels angles d'atac i de fuga, diferents materials, formes diferents, velocitats de llançament, etc. Tot allò referent amb els perfils de les ales i les sustentacions es podria haver analitzat amb el programa Winfoil 3.

Si s'hagués aconseguit realitzar tal metodologia hagués estat molt probable que s'haguessin assolit resultats molt interessants i s'haurien pogut extreure conclusions encertades sobre el comportament del bumerang, i finalment es podria haver aconseguit dur a terme els objectius inicials d'obtenir una equació sobre la trajectòria del bumerang i dissenyar un d'esportiu per provar-lo en una competició.



## 9 REFERÈNCIES

- ✓ PÀGINA DE L'EMPRESA FABRICADORA DE BUMERANG "WALLABY". Història del bumerang. [Internet]. Disponible a [http://www.boomerangusa.us/History\\_of\\_the\\_boomerang.html](http://www.boomerangusa.us/History_of_the_boomerang.html) [consulta: 12-02-2014]
- ✓ JHONES, PHILIP. *Boomerang: Behind an Australian Icon*. Wakefield: Wakefield Press, 2004, 134 pàg.
- ✓ PÀGINA WEB ON HI HA REDACTATS ARTICLES DE TOTA MENA. Informe sobre el bumerang. [Internet]. Disponible a [http://centrodeartigos.com/articulos-de-todos-los-temas/article\\_30884.html](http://centrodeartigos.com/articulos-de-todos-los-temas/article_30884.html) [consulta: 08-06-2014]
- ✓ ARTICLE QUE TRACTA SOBRE EL DESCOBRIMENT D'AUSTRÀLIA. Descobriment d'Austràlia. [Internet]. Disponible a [http://es.wikipedia.org/wiki/Descubrimiento\\_de\\_Australia](http://es.wikipedia.org/wiki/Descubrimiento_de_Australia) [consulta: 08-06-2014]
- ✓ AGÈNCIA DE VIATJES A AUSTRÀLIA "AUSTRÀLIA ALTERNATIVA" . Informació sobre la cultura d'Austràlia. [Internet]. Disponible a <http://www.australia-alternativa.com/informacion-de-australia/el-pais-y-su-cultura/> [consulta: 08-06-2014]
- ✓ PÀGINA WEB D'UN MUSEU AUSTRALIÀ. Descobriment europeu del bumerang aborigen. [Internet]. Disponible a <http://australianmuseum.net.au/How-Europeans-Discovered-the-Aboriginal-Boomerang> [consulta: 08-06-2014]
- ✓ PORTAL WEB EDUCATIVA SOBRE FÍSICA DE LA UNIVERSITAT DE L'ESTAT DE GEORGIA. Mecànica. [Internet]. Disponible a <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hph.html> [consulta: 08-06-2014]
- ✓ ESSER, ERNIE. *What makes boomerangs come back?* California: UCLA, (data de publicació no disponible: e-book extret d'Internet), 55 pàg. [Internet]. Disponible a <http://www.math.uci.edu/~eesser/papers/justboom.pdf> [consulta: 21-06-2014]

- ✓ LLOC WEB EDUCATIU AMB LLIÇONS DE MOLTES ASSIGNATURES. Esforç de torsió.  
[Internet]. Disponible a [http://www.profesorenlinea.cl/fisica/Fuerzas\\_Torque\\_momento.html](http://www.profesorenlinea.cl/fisica/Fuerzas_Torque_momento.html)  
[consulta: 21-06-2014]
- ✓ VÍDEO ON UN PROFESSOR EXPLICA QUÈ ÉS L'ESFORÇ DE TORSIÓ. Esforç de torsió.  
[Internet]. Disponible a <http://www.youtube.com/watch?v=a91wFb4DhVc>  
[consulta: 21-06-2014]
- ✓ LLOC WEB DE L'ASSOCIACIÓ ESPANYOLA DELS BUMERANGS ESPORTIUS.  
Associació Espanyola del bumerang esportiu. [Internet]. Disponible a <http://www.boomeralia.org/>
- ✓ *Forces distribuïdes i centres de gravetat. Fonaments Físics de l'Arquitectura Tècnica*. Editorial Mc Graw Hill.  
PÀGINA WEB ON ES VEN CARTRÓ PEDRA I SE N'INDIQUEN LES PROPIETATS. Propietats del cartró pedra. [Internet]. Disponible a <http://spanish.alibaba.com/p-detail/De-color-gris-de-papel-la-laminaci%C3%B3n-de-cart%C3%B3n-300003408433.html>  
[consulta: 14-07-2014]
- ✓ *Forces distribuïdes i centres de gravetat. Fonaments Físics de l'Arquitectura Tècnica*. Editorial Mc Graw Hill.
- ✓ *Moments d'inèrcia plans (segons moments d'inèrcia). Fonaments Físics de l'Arquitectura Tècnica*. Editorial Mc Graw Hill.
- ✓ LLOC WEB ON ES MOSTREN VARIS DELS MOMENTS D'INÈRCIA CONEGUTS.  
Moments d'inèrcia. [Internet]. Disponible a [http://www.fisica.uns.edu.ar/descargas/descarga\\_305124.jpg](http://www.fisica.uns.edu.ar/descargas/descarga_305124.jpg)  
[consulta: 12-09-2014]

## 10 AGRAÏMENTS a

*Santi Corcoll i Oriols*, mestre de física, enginyeria i matemàtiques, per explicar-me conceptes poc entenedors pel meu nivell.

*Carles Prieto*, pel mateix motiu.

