

La Geometria Fractal



Índex del treball

<u>1.- Introducció</u>	4
------------------------------	---

2.- L'evolució de la geometria

2.1.- Geometria euclidiana.....	5
2.2.- Geometria al Renaixement	
2.2.1.- Geometria projectiva.....	7
2.2.2.- Geometria cartesiana o analítica.....	9
2.3.- Geometries no euclidianes del s. XIX	
2.3.1.- Gauss (geometria diferencial de superfícies).....	10
2.3.2.- Lobatxevski i Bolyai (geometria hiperbòlica).....	11
2.3.3.- Riemann (geometria de Riemann).....	12
2.3.4.- Programa d'Erlangen (Felix Klein, 1872).....	12

3.- La geometria fractal com a model de la natura

3.1.- L'efecte Droste i les seves conseqüències matemàtiques (Henri Poincaré).....	13
3.2.- Les longituds de les fronteres: les mesures de Jaromir Korcak i la seva funció exponencial; els estudis de Lewis Fry Richardson.....	17
3.3.- Recobriments de superfície amb corbes: la corba de Peano i la corba de Hilbert.....	19
3.4.-Endinsament en el concepte de fractal	
3.4.1.- La corba de Koch.....	27
3.4.2.- El conjunt de Cantor.....	29
3.4.3.- El Triangle de Sierpinsky.....	32
3.4.4.- La catifa de Sierpinsky i l'esponja de Menger.....	34



3.4.5.- El conjunt de Julia.....38
3.4.6.- El conjunt de Mandelbrot.....40
3.4.7.- La corba del drac.....42

4.- Aplicacions dels fractals

4.1.- La funció de Takagi i el cinema.....43
4.2.- Relació amb el caos.....45
4.3.- La música fractal.....47
4.4.- La medicina, una altra aplicació important dels fractals.....48

5.- Imatges fractals de la natura.....49

6.- Conclusió.....53

7.- Bibliografia i Webgrafia

7.1.- Bibliografia.....54
7.2.- Bibliografia web.....54



1.- Introducció

La geometria fractal potser no té molta relació amb el meu futur, però no m'importava que fos així. És una part de les matemàtiques desconeguda per la majoria de gent, però que actualment cada cop té més aplicacions. Jo era un d'aquests que desconeixien què era aquest tipus de geometria, i és la principal causa per la qual he triat aquest tema: la curiositat. A la conclusió del treball, vull poder explicar què és la geometria fractal, però sobretot, poder entendre-la, per molt que pugui costar. Que si em pregunten pel carrer (encara que les probabilitats que passi això són bastant remotes), jo pugui explicar de què tracta.

No serà un treball gens fàcil, ja que la geometria fractal resulta complicada d'entendre, ja que és diferent al que he après fins ara i té una complexitat major. Però això no significa que em rendeixi, sinó que hauré de treballar molt més per tal de fer un bon treball.

Em vénen bastantes preguntes al cap sobre el tema, a les quals els hi vull trobar resposta. Per exemple, quin és l'origen de la geometria fractal? Quines són les aplicacions que té? Com es va originar? Qui és el principal desenvolupador d'aquest tipus de geometria? Ha evolucionat des del seu origen? De moment són qüestions bastant bàsiques, donat per la poca informació que conec del tema, però estic segur que a mesura que avanci el meu projecte, les resoldré i, fins i tot, crec que me'n sorgiran de noves, cada cop més interessants.

Una de les idees que tinc per aquest projecte és poder fer jo mateix algun fractal, com per exemple la Corba del Drac o la Corba de Koch. Per tal de fer-ho, utilitzarem programes com el *GeoGebra*, o per mitjà de les manualitats, per a la presentació del treball de recerca, cosa que ajudarà més encara a entendre com són els fractals.



2.- L'evolució de la geometria

En aquest apartat farem un breu resum dels principals tipus de geometries que hi ha, des de Euclides, creador de la geometria euclidiana, fins a Mandelbrot i la seva geometria fractal. Però també, parlarem del *Programa d'Erlangen*.

2.1.- Geometria euclidiana

Euclides (en grec: Εὐκλείδης) fou un matemàtic grec (325 aC-265 aC), conegut en el dia d'avui com "el pare de la geometria". Fou el fundador de l'escola de matemàtiques de la ciutat d'Alexandria. El seu treball més famós fou *els Elements*, considerat sovint el llibre de text de més èxit de la història de les matemàtiques.



Imatge 1: Euclides

La geometria euclidiana o parabòlica és l'estudi de les propietats geomètriques dels espais euclidians (un espai euclidià és un espai vectorial dotat d'un producte escalar). És aquella que estudia les propietats geomètriques del pla afí euclidià real i de l'espai afí euclidià tridimensional real mitjançant el mètode sintètic (procés de raonament en el qual es tendeix a reconstruir quelcom a partir dels elements distingits en l'anàlisi), introduint els cinc postulats d'Euclides.

Tota aquesta teoria i molta més es troba en el llibre escrit pel mateix Euclides, *Els Elements*.

Els Elements és una col·lecció de llibres (un total de 13 volums), la qual es creu que es va escriure cap al 300 aC. a Alexandria (Egipte). És el segon llibre amb més nombre d'edicions (més de 1000), després de la Bíblia. Consta de tres parts, en les quals es parla de temes diferents:

- Del llibres 1 al 4, tracten sobre la geometria plana.
- Del llibres 5 al 10, tracten sobre raons i proporcions.
- Del llibres 11 al 13, tracten sobre la geometria dels cossos sòlids.

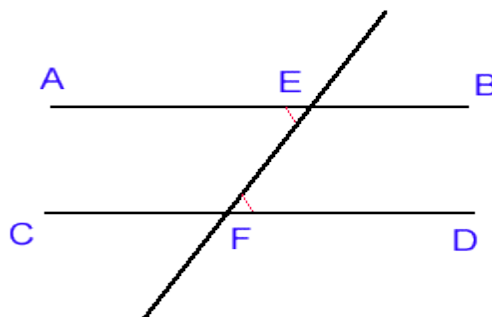


En aquest llibre, s'hi troben algunes demostracions de teoremes fonamentals com el Teorema de Pitàgores, i les nocions bàsiques, que eren vàlides per a tota la matemàtica:

- “Coses iguals a una mateixa cosa són iguals entre sí.”
- “Dos coses iguals a una tercera, són iguals entre sí”
- “Si quantitats iguals són sumades a quantitats iguals, les sumes són iguals.”
- “Si quantitats iguals són restades a quantitats iguals, les restes són iguals.”
- “El tot és major que la part.”

Els cinc postulats d'Euclides són els següents:

1. És possible traçar un segment entre dos punts donats.
2. És possible perllongar un segment, tant com es vulgui.
3. És possible construir una circumferència si es donen el centre i el radi de la mateixa.
4. Tots els angles rectes són iguals entre si.
5. Si una recta intercepta a dues rectes de manera que els angles interiors a un costat d'ella sumen menys que dos angles rectes, aquestes dues rectes es interceptaran, si es prolonguen prou, cap el costat en què la suma dels seus angles interiors és menor que dos rectes.



Imatge 2: Postulat nº 5 d'Euclides



2.2.- Geometria al Renaixement

Destaquen dos tipus de geometries en aquest període: la geometria projectiva, de Desargues, i la geometria analítica o cartesiana, de Descartes.

2.2.1.- Geometria Projectiva

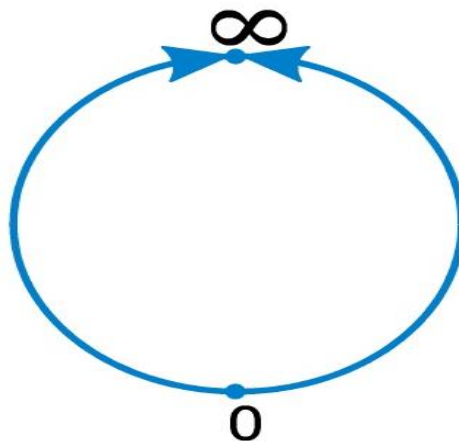
Gérard Desargues (21 de febrer del 1591- octubre de 1661) va ser un matemàtic i enginyer francès, considerat per alguns com a pare fundador de la geometria projectiva. El seu nom és emprat avui en dia com un epònim del teorema de Desargues i es pot dir està entre els privilegiats que posseeix un cràter amb el seu nom en la cartografia de la Lluna.



Imatge 3: Gérard Desargues

Abans d'entrar directament en el que és la geometria projectiva, mencionarem algun concepte com el punt infinit.

El punt de l'infinit, punt en l'infinit o punt impropri és una entitat topològica i geomètrica que s'introdueix a manera de tancament o frontera infinita del conjunt dels nombres reals. Quan s'afegeix a la recta real genera una corba tancada, coneguda com a recta projectiva real, que no és equivalent a la recta real ampliada, que té dos punts diferents en l'infinit. $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

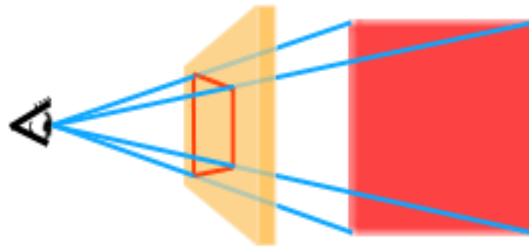


Imatge 4: Representació gràfica del punt de l'infinit



S'anomena geometria projectiva a la branca de la matemàtica que estudia les propietats d'incidència de les figures geomètriques, però abstractament totalment del concepte de mesura.

La geometria projectiva, més flexible que l'euclidiana, es converteix en una eina útil per a enunciar molts teoremes clàssics més senzillament, i fins i tot simplificar les demostracions, encara que no permet demostrar res que no pugui demostrar a l'euclidiana.



Imatge 5: Exemple de geometria projectiva

Realitzant un recorregut històric, sabem que la geometria va tenir les seves idees en els matemàtics grecs, però els orígens de la geometria projectiva es dona en les pintures del Renaixement.

Van ser els pintors renaixentistes els que li donen fonament a aquesta branca. Aquests pintors eren arquitectes o enginyers, com Leonardo da Vinci o Rafael Sanzio, entre d'altres. Ells van aconseguir plasmar en llenços plans els objectes i les figures tridimensionals.

L'essència de la representació tridimensional es basava en el principi de projecció i secció. El que es veu de l'escena depèn de la posició de l'observador.

Però no ens podem oblidar de Filippo Brunelleschi (1377 – 1446), el qual era un arquitecte, pintor i escultor renaixentista italià, a qui els seus coneixements de matemàtiques li van facilitar el camí en l'arquitectura, i permeteren inventar la perspectiva cònica.

La perspectiva cònica és un sistema de representació gràfic basat en la projecció d'un cos tridimensional sobre un pla auxiliant en rectes projectants que passen per un punt. El resultat s'aproxima a la visió obtinguda si l'ull estigués situat en aquest punt.



El quadre més conegut relacionat amb aquests autors, *La escuela de Atenas*, de Rafael Sanzio, mostra perfectament aquesta perspectiva que buscaven els autors renaixentistes.



Imatge 6: *La escuela de Atenas*, de Rafael Sanzio

En aquesta obra, hi apareixen importants matemàtics de la història clàssica, com Pitàgores (blau) o Euclides (vermell).

2.2.2.- Geometria Cartesiana o Analítica

René Descartes (La Haye, 1596 - Estocolm, 1650) va ser un filòsof, matemàtic i físic francès, considerat com el pare de la geometria analítica.. La seva obra més important va ser *Dicours de la methode*, on s'inclou l'assaig de *La Géométrie*, on recull la seva geometria analítica.

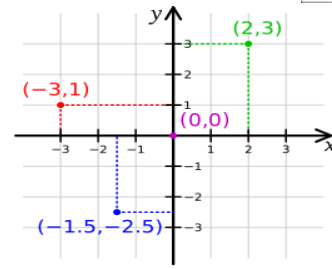


Imatge 7: René Descartes

La geometria analítica estudia les figures geomètriques mitjançant tècniques bàsiques de l'anàlisi matemàtica i de l'àlgebra en un determinat sistema de coordenades. El seu desenvolupament històric comença amb la geometria cartesiana, continua amb l'aparició de la geometria diferencial de Carl Friedrich Gauss i més tard amb el desenvolupament de la geometria algebraica.



Actualment la geometria analítica té múltiples aplicacions més enllà de les matemàtiques i l'enginyeria, ja que forma part ara de la feina d'administradors per a la planificació d'estratègies i logística en la presa de decisions.



Imatge 8: Eixos de coordenades

2.3- Geometries no euclidianes del s. XIX

En aquesta època destaquem a quatre matemàtics, que són Gauss, Lobachevski, Bolyai i Riemann.

2.3.1.- Gauss (geometria diferencial de superfícies)

Johann Karl Friedrich Gauss (Brunswick, 30 abril 1777 - Göttingen, 23 febrer 1855), va ser un matemàtic, astrònom i físic alemany que va contribuir significativament en molts camps, incloent-hi la teoria de nombres, l'anàlisi matemàtica, la geometria diferencial, l'estadística, l'àlgebra, la geodèsia, el magnetisme i l'òptica. És considerat «el príncep dels matemàtics».



Imatge 9: Gauss

La geometria diferencial de superfícies proposa definicions i mètodes per analitzar la geometria de superfícies o varietats diferencials de dues dimensions immerses en varietats de Riemann i, en particular, a l'Espai Euclidià. Aquí es tractarà de les superfícies en \mathbb{R}^3 .

Ja que una superfície en \mathbb{R}^3 és una varietat diferenciable de dimensió 2, en un entorn V d'una superfície les coordenades de qualsevol punt de V es poden escriure en funció de dos paràmetres:

$$r(u, v) = (x \cdot (u, v), y \cdot (u, v), z \cdot (u, v))$$



2.3.2.- Lobatxevski i Bolyai (geometria hiperbòlica)

Nikolai Ivànovitx Lobatxevski (1 desembre 1792 - 24 de febrer de 1856) va ser un matemàtic rus del segle XIX. Entre els seus principals èxits es troba la demostració de diverses conjetures relacionades amb el càlcul tensorial aplicats a vectors en l'espai de Hilbert. Va ser un dels primers matemàtics que va aplicar un tractament crític als postulats fonamentals de la geometria euclidiana.



Imatge 10: Lobatxevski

La geometria hiperbòlica és una geometria no euclidiana, el que significa que el postulat de les paral·leles de la geometria euclidiana es substitueix.

El postulat paral·lel en la geometria euclidiana és equivalent a l'afirmació que, en l'espai de dues dimensions, per a qualsevol línia R i punt donat P no en R , hi ha exactament una línia a través de P que no interseca R ; és a dir, que és paral·lela a R .

En la geometria hiperbòlica hi ha almenys dos línies diferents a través de P , que no s'intersequen R , de manera que el postulat de les paral·leles és fals.

Bolyai també va arribar a la mateixa conclusió que Lobachevski sense conèixer-lo, però tres anys més tard. Això va suposar que no es reconegués el seu treball, i va provocar que deixés la seva carrera com a matemàtic.

János Bolyai (15 de desembre de 1802, Kolozsvár, actual Romania, llavors part de l'Imperi austrohongarès - 27 de gener de 1860, Marosvásárhely, actual Hongria) fou un matemàtic hongarès. Als 13 anys ja dominava el càlcul. Al 1832 va publicar un complet tractat en geometria no euclidiana.

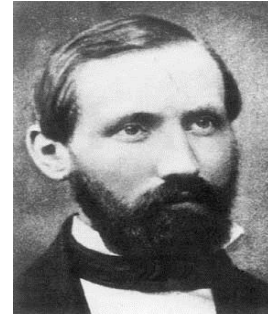


Imatge 11: Bolyai



2.3.3.- Riemann (geometria de Riemann)

Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, Alemanya 17 de setembre de 1826 - Verbania, Itàlia 20 de juliol de 1866) va ser un matemàtic alemany que va realitzar contribucions molt importants a l'anàlisi i la geometria diferencial, algunes de les quals van facilitar el camí per al desenvolupament més avançat de la relativitat general.



Imatge 12: Riemann

En geometria diferencial, la geometria de Riemann és l'estudi de les varietats diferencials amb mètriques de Riemann; es diu d'una aplicació que a cada punt de la varietat, li assigna una forma quadràtica definida positiva en el seu espai tangent, aplicació que varia suaument d'un punt a un altre. Això dóna idees locals de (entre altres magnituds) angle, longitud de corbes, i volum. A partir d'aquestes, es poden obtenir altres magnituds per integració de les magnituds locals.

2.3.4.- Programa d'Erlangen (Felix Klein, 1872)

Felix Christian Klein (Düsseldorf, 25 d'abril de 1849 - Göttingen, 22 de juny de 1925) va ser un matemàtic alemany que va demostrar que les geometries mètriques, euclidianes o no euclidianes, constitueixen casos particulars de la geometria projectiva. En 1872, va presentar una notable classificació de la geometria, el "programa d'Erlangen", que va posar fi a l'escissió entre geometria pura i geometria analítica.



Imatge 13: Felix Klein

Es coneix com a Programa d'Erlangen a un programa d'investigació publicat per Felix Klein al 1872, que pot considerar-se, al costat de la Conferència de Riemann i als Elements d'Euclides, com els punts essencials de l'estudi de la geometria.

Aquest Programa d'Erlangen va proposar un nou tipus de solució als problemes de la geometria del temps, que consistia en donar una definició



general de la geometria. A més, aquest programa va obrir el camí a l'estudi dels espais geomètrics abstractes, pensar en moltíssimes dimensions i en variables no espaials. Així, per exemple, parlem de l'espai de les variables termodinàmiques d'un gas.

També es coneix com la idea de la memòria.

Klein defineix la geometria introduint-hi un nou concepte de caràcter algebraic: el concepte de grup. Un grup és un conjunt G en el qual hi ha definida una operació, és a dir, una aplicació $G \times G \rightarrow G$ que a cada parell d'elements del conjunt li assigna altre element del conjunt (que serà el resultat d'operar aquests dos elements).

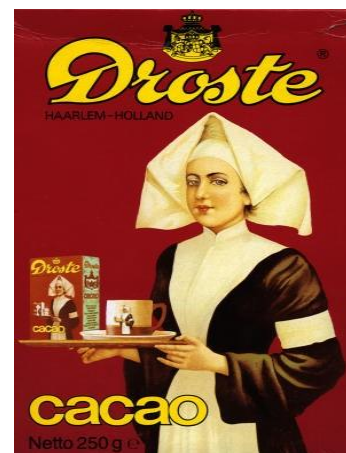
3.- La geometria fractal com a model de la natura

En aquest punt, explicaré els diferents fets predecessors que van causar que s'hagués de crear un nou tipus de geometria, totalment nou, que pogués explicar i englobar aquests fets, com per exemple l'efecte Droste que es troba en obres del pintor holandès Maurits Cornelis Scher, la corba de Peano o el conjunt de Mandelbrot.

3.1.- L'efecte Droste i les seves conseqüències matemàtiques (Henri Poincaré)

L'efecte Droste consisteix en incloure, dins d'una imatge, una versió d'ella mateixa però d'una mida més reduïda, que a l'hora, inclou una versió més reduïda d'aquesta, i així successivament. Les imatges que sorgeixen d'aquest efecte s'anomenen recursives.

L'efecte Droste s'anomena així, a causa d'una de les principals marques alimentàries holandeses (*Droste*), la qual va utilitzar una imatge recursiva en el seu envàs de cacau en pols.



Imatge 14: Envàs de Droste

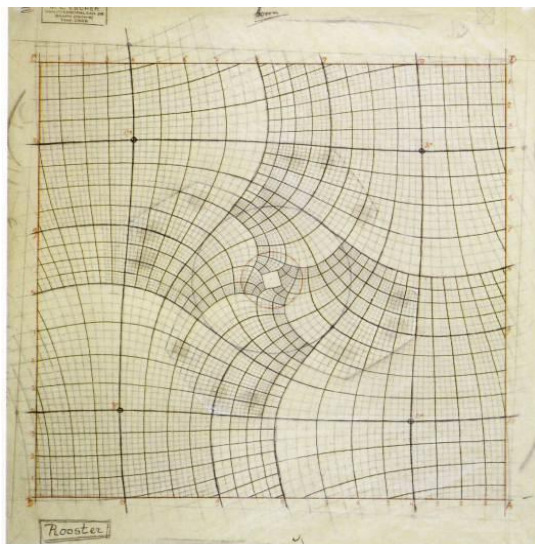


Però l'efecte Droste no és una cosa dels últims cent anys, sinó que ja va ser utilitzat anteriorment, sense saber què era això, com es veu en un quadre que va pintar Giotto di Bondone, l'any 1320. L'obra es diu *Tríptic Stefaneschi*.



Imatge 15: *Tríptic Stefaneschi*, de Giotto di Bondone

Aquest efecte Droste, es troba, de forma invisible, en l'obra d'un pintor holandès, Maurits Cornelis Scher (1898-1972). Aquí tenim alguns exemples:



Imatge 16 i 17: Exemples de l'efecte Droste, fets pel pintor M. C. Scher

Aquest efecte Droste no va servir únicament en els dibuixos de Scher o en l'àmbit artístic, sinó que també va tenir conseqüències en les matemàtiques, de la mà de Henri Poincaré.



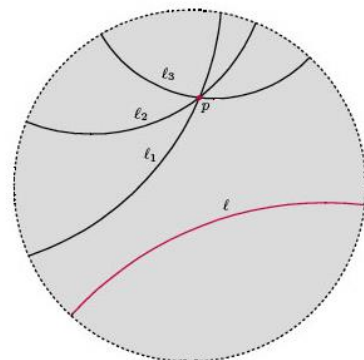
Jules Henri Poincaré (Nancy (França) 29 d'abril de 1854 - París, 17 de juliol de 1912), generalment conegut com Henri Poincaré, va ser un prestigiós polímata: matemàtic, físic, científic teòric i filòsof de la ciència. Poincaré és descrit sovint com l'últim «universalista» (després de Gauss) capaç d'entendre i contribuir en tots els àmbits de la disciplina matemàtica. En 1894 va establir el grup fonamental d'un espai topològic.



Imatge 18: Henri Poincaré

En el model de Poincaré, tot l'espai hiperbòlic \mathbb{H}^2 (és un disc de radi un centrat en l'origen del pla euclidià \mathbb{R}^2) està representat dins d'un disc de radi un. La vora del disc representa l'infinít. Dins d'aquest disc es compleixen els postulats d'Euclides exceptuant el 5è (el de les paral·leles):

- 1.- Es pot traçar una línia recta que passi per dos punts.
- 2.- Es pot perllongar una línia recta indefinidament a partir d'una recta finita.
- 3.- Es pot traçar una circumferència amb centre i radi donat.
- 4.- Tots els angles rectes són iguals.
- 5.- Si una línia recta que talla a dues rectes forma d'un mateix costat amb elles angles interiors la suma és menor que dos rectes, les dues últimes rectes prolongada indefinidament es tallen del costat en què la suma dels angles és menor que dos rectes (no es compleix).

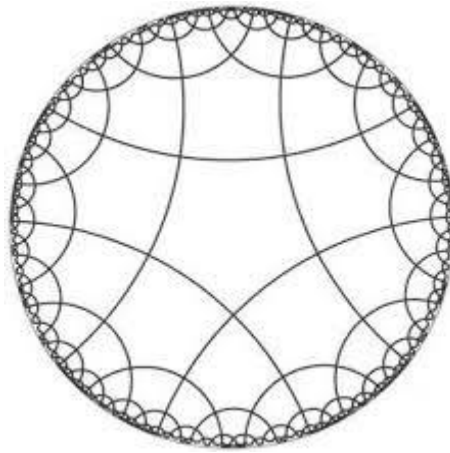


Imatge 19: Mostra de què no es compleix el 5è postulat d'Euclides

En \mathbb{H}^2 , la suma dels angles interns d'un triangle és menor a 180° . Més sorprenent encara, dues rectes amb direccions diferents poden ser paral·leles. El model de Poincaré permet visualitzar aquests aspectes de la geometria hiperbòlica, però en estar tot l'espai dins d'un disc, les línies que en realitat són rectes són percebudes com corbes (per aquest motiu se les



anomena "geodèsiques"). I la mètrica que ens permet mesurar distàncies dins del disc de Poincaré no és euclidiana.

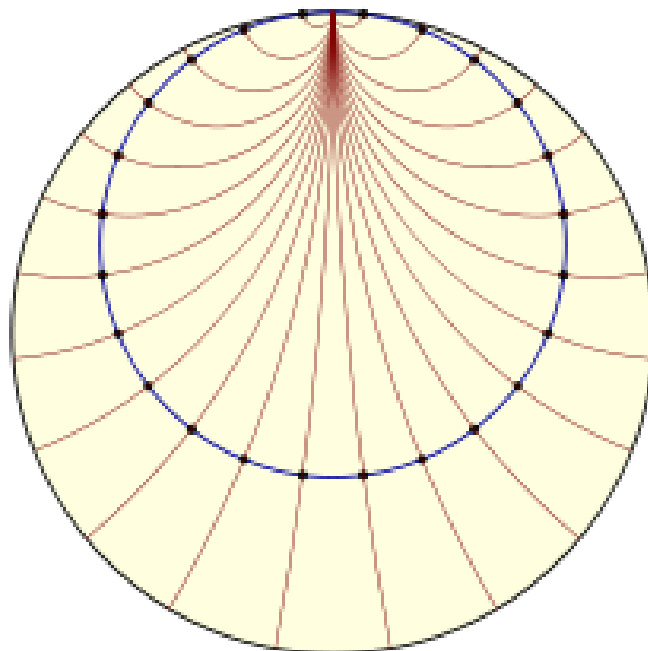


Imatge 20: Rectes en el disc de Poincaré

Per tal de calcular la distància entre dos punts en aquest disc, hem d'usar la següent fórmula:

$$\ln (PA \cdot PQ / PB \cdot PA)$$

I aquest seria el disc de Poincaré vist en perspectiva, també anomenat horocicle.

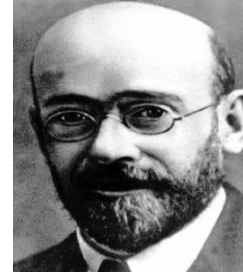


Imatge 21: Disc de Poincaré vist en perspectiva



3.2.- Les longituds de les fronteres: les mesures de Jaromir Korcak i la seva funció exponencial; l'estudi de Lewis Fry Richardson

Jaromir Korcak (Vražné o Jevíčka, 12 de juliol de 1895 - Praga, 6 d'octubre de 1989) va ser un estadista i geògraf txec que es va dedicar a l'estudi de la influència de l'entorn geogràfic en la població.



Imatge 22: Jaromir Korcak

Aquest estadista, va dur a terme diversos estudis estadístics sobre el nombre d'illes grans en certes regions de tot el món, els quals el van portar a deduir una llei essencial per al desenvolupament del concepte matemàtic de dimensió.

Aquesta llei consistia en: donada una certa extensió, S , calculava el nombre d'illes amb una superfície superior que S . Així, va fer el recompte, per a cada S , de les illes que complien aquestes característiques, $N(S)$, i va situar els punts en un eix de coordenades. Va repetir el procediment per a diferents regions, obtenint una gràfica de punts associada a cada una d'elles. Llavors es va adonar que totes les gràfiques tenien una cosa en comú: $N(S)$ depèn d'una potència inversa de S , és a dir, $N(S)$ és certa constant k dividida per S elevada a certa potència anomenada D .

$$N(S)=k/S^D$$

D'aquesta manera va poder associar a cada regió estudiada un valor D que la caracteritza.

Les seves observacions s'han millorat i sabem que el valor D associat a Àfrica és de 0'5 (amb predomini d'una illa gran i altres de petites), a Amèrica del Nord, de 0'75 (amb menor predomini de d'illes grans), i la mitja de la Terra és de 0'65.

Al llarg dels següents anys, diversos estudiosos van elaborar lleis semblants, però el més destacat va ser Lewis Fry Richardson.



Lewis Fry Richardson (11 octubre 1881 - 30 setembre de 1953) va ser un matemàtic, físic, meteoròleg i pacifista anglès. Va ser pioner en les modernes tècniques matemàtiques de la predicció del temps atmosfèric i en l'aplicació de tècniques similars per a l'estudi de les causes de les guerres i com prevenir-les. També va destacar pel seu treball precursor de la teoria de fractals i pel desenvolupament d'un mètode iteratiu per resoldre sistemes d'equacions lineals que porta el seu nom. Va ser membre de la Royal Society.



Imatge 23: Lewis Fry Richardson

Lewis Fry Richardson va decidir explorar la relació entre la probabilitat que dos països entrin en guerra i la longitud de la seva distància, com hem citat anteriorment, per tal de prevenir les guerres.

En el seu estudi, es va adonar que diferents països amb fronteres comunes, com per exemple és el cas entre Espanya i Portugal, no coincidien en la longitud d'aquestes. Mentre que Espanya deia que la seva frontera amb Portugal era de 987 km, Portugal afirmava que era de 1214 km. Però no és l'únic cas que es coneix (entre Holanda i Bèlgica, etc.).

Richardson, a través dels gràfics, va intentar descobrir quina era la causa d'aquesta diferència tan gran, sovint del 20%. L'explicació d'aquest problema va ser l'ús de la unitat de mesura usada pels països, ja que un d'ells podia usar una unitat més petita que l'altre.

Això ho va explicar per mitjà de l' "efecte Richardson", és a dir, com més petita és la unitat de mesura, la longitud tendeix a infinit.

El seu experiment, on demostra l' "efecte Richardson", simplement consisteix a calcular la mesura de les fronteres amb diferents unitats o escales.



En l'època que ell les va fer, van ser ignorades per la comunitat científica, però actualment són de vital importància, ja que van impulsar l'estudi modern dels fractals.

3.3.- Recobriments de superfície amb corbes: la corba de Peano i la corba de Hilbert

Primer, farem una breu introducció sobre qui era Giuseppe Peano, matemàtic que va idear la corba de Peano.

Giuseppe Peano (Cuneo (Itàlia) 1858 - Torí 1932) Va ser un matemàtic italià. Les seves aportacions més recordades són les referents a l'axiomàtica de les matemàtiques. Sobre això cal destacar els seus axiomes sobre el conjunt dels nombres enters naturals o sobre l'estructura d'un espai vectorial, així com la definició del concepte d'aplicació lineal. Interessat en l'ús de la lògica més com a mitjà d'exposició de la matemàtica que com el seu fonament, va desenvolupar una sintaxi, molts dels símbols (com els de pertinença, unió o intersecció) són avui dia empleats de forma universal.



Imatge 24: Giuseppe Peano

Abans de començar amb l'explicació de la corba de Peano, i posteriorment de Hilbert, cal definir un concepte: la dimensió de Hausdorff-Besicovitch.

La dimensió de Hausdorff-Besicovich és una generalització mètrica del concepte de dimensió d'un espai topològic, que permet definir una dimensió fraccionària (no entera) per a un objecte fractal.

Aquí tenim un exemple d'estimació de la dimensió de Hausdorff-Besicovich per a la costa de Gran Bretanya.



Imatge 25: Estimació de Hausdorff-Besicovich de la costa de Gran Bretanya



La **corba de Peano**, que rep aquest nom en honor al matemàtic italià Giuseppe Peano (anomenat anteriorment), és una corba que, en el seu límit, recobreix tot el pla. Si es canvia la seva dimensió, es situa en el context de la geometria fractal.

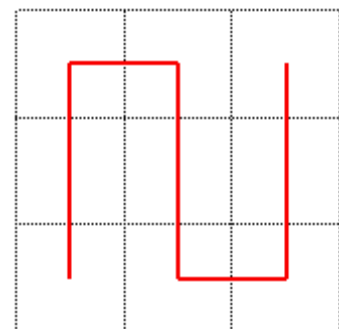
És una corba que sorgeix de completar el quadrat $[0, 1]^2$ definit per l'algorisme. És una corba de dimensió de Hausdorff-Besicovich 2, és a dir, té la mateixa dimensió que una superfície plana a causa que la corba omple el pla i tots els punts del pla pertanyen a la corba de Peano en continuar el procés fins a l'infinit. Aquest fractal és una de les excepcions, juntament amb el triangle de Sierpinsky i el pols de Cantor, de la definició de Mandelbrot, ja que excedeix la dimensió topològica.

Compleix les següents propietats:

- És una corba contínua.
- No té punts d'encreuament, és a dir, no passa dos cops per mateix punt.
- És una corba que omple un quadrat.
- Va ser el primer cas de corba que omplia un espai. I això va comportar moltes intrigues als matemàtics, com “com era possible que una corba unidimensional podia omplir un espai bidimensional?”.

Hi ha dos mètodes per a construir-la. Aquest és el primer:

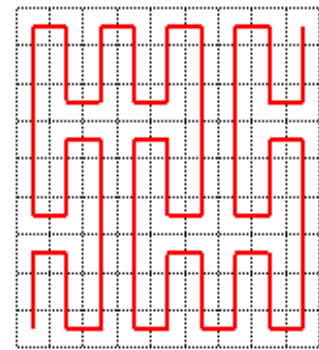
1.- Es parteix inicialment d'un quadrat unitat (1x1) al qual se li fan nou subdivisions iguals. Després, s'uneixen els centres de cada subdivisió amb una línia de manera que es vagin recorrent subdivisions contigües en tot moment. La figura de sota indica un exemple de recorregut inicial.



Imatge 26: 1ª iteració

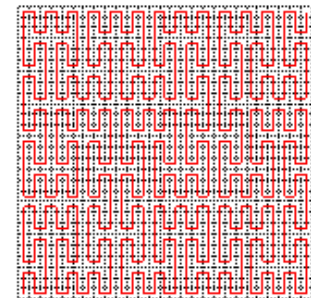


2.- Un cop fet això, a cadascuna de les subdivisions del quadrat se li aplica el mateix procediment que al quadrat anterior, de manera que s'han obtingut unes altres nou subdivisions per cada subdivisió anterior. El recorregut es fa de forma anàloga a l'anterior (sempre recorrent subdivisions contigües), però a més s'han de recórrer primer les nou subdivisions de la primera subdivisió del recorregut anterior i continuar per les de la subdivisió següent, d'aquesta manera:



Imatge 27: 2^a iteració

3.- Així, aquestes transformacions es van aplicant successivament per a cadascuna de les subdivisions obtingudes en cada etapa, tal que en l'etapa n-èsima s'obté una sèrie de 9^n subdivisions recorregudes en un ordre establert de manera que recobreixen successivament les subdivisions de l'etapa anterior.

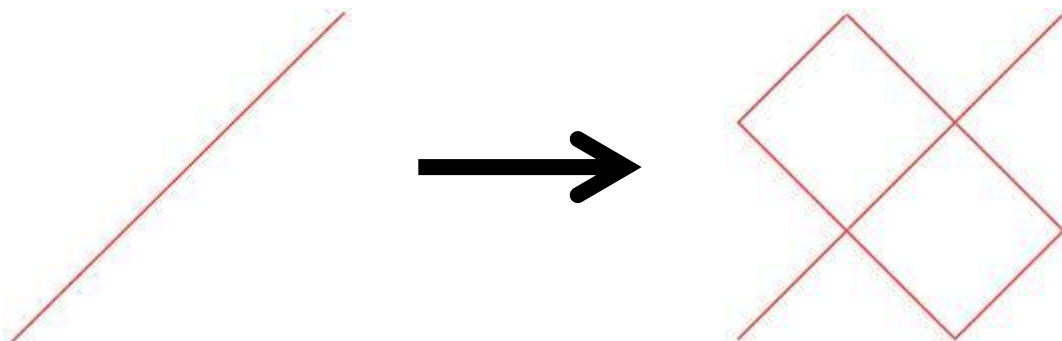


Imatge 28: 3^a iteració

Amb un valor de n prou gran, l'àrea de les subdivisions fetes tendeix a 0, i la corba traçada tendeix a ocupar tota la superfície del quadrat, de manera que s'aconsegueix omplir la superfície. A aquesta corba se la coneix també com a corba de Peano ternària (per cada quadrat s'obtenen 3×3 subdivisions).

Ara explicarem el següent mètode:

1.- Es parteix d'una única línia a la qual se li aplica la següent transformació:



Imatge 29: 1^a iteració

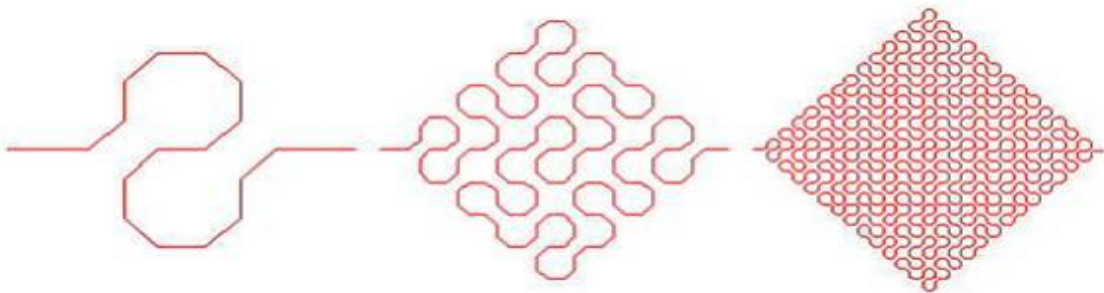


2.- Aplicant successivament aquesta transformació a cadascuna de les línies de la figura de la dreta un nombre n de vegades s'obté el farciment del quadrat, les cantonades oposades del qual es corresponen amb cada un dels extrems de la recta inicial. Aquestes imatges representen diferents passos de l'evolució de la línia:

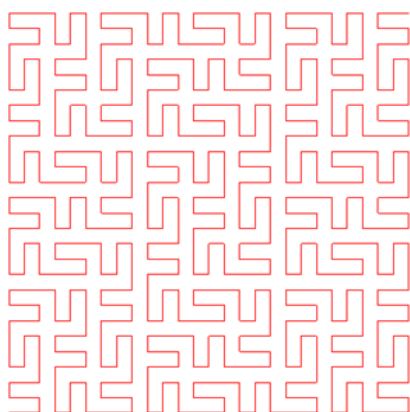


Imatge 30: 3^a, 4^a i 5^a iteració

Aquesta corba també té altres variants.



Imatge 31: Variants de la corba de Peano



Imatge 32: Variant de la corba de Peano comparada amb el Laberint de la catedral de Chartres

La segona imatge pertany al Laberint de la Catedral de Chartres, a uns 80 km al sud de París. Si ens hi fixem, aquest laberint desplegat es semblaria a una iteració de la corba de Peano.



Ara, parlarem d'una altra corba, que també compleix la propietat de omplir un quadrat sense cap encreuament: la corba de Hilbert. És una variació de la corba de Peano, ideada l'any 1892 per David Hilbert.

Introduïrem una mica de biografia del seu ideòleg.

David Hilbert (23 de gener de 1862, Königsberg, Prússia Oriental - 14 febrer de 1943, Göttingen, Alemanya) va ser un matemàtic alemany, reconegut com un dels més influents del segle XIX i principis del XX. Va establir la seva reputació com a gran matemàtic i científic inventant o desenvolupant un gran ventall d'idees, com la teoria de invariants, l'axiomatització de la geometria i la noció d'espai de Hilbert, un dels fonaments de l'anàlisi funcional. Hilbert i els seus estudiants van proporcionar parts significatives de la infraestructura matemàtica necessària per a la mecànica quàntica i la relativitat general. Va ser un dels fundadors de la teoria de la demostració, la lògica matemàtica i la distinció entre matemàtica i metamatemàtica.



Imatge 33: David Hilbert

La **corba de Hilbert** és una corba fractal contínua que recobreix el pla. A causa d'això, la seva dimensió de Hausdorff-Besicovich és 2 (precisament, la seva imatge és el quadrat unitari, la dimensió és 2 en qualsevol definició de dimensió).

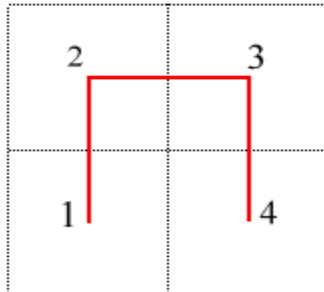
Compleix les següents propietats, gairebé les mateixes que la corba de Peano, exceptuant que aquesta ja no era la primera.

- És una corba contínua.
- No té punts d'encreuament, és a dir, no passa dos cops per mateix punt.
- És una corba que omple un quadrat.



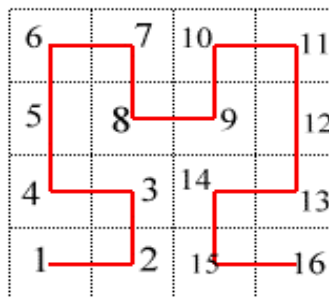
El mètode per a construir-lo és el següent:

1.- Es parteix d'un quadrat unitat que es divideix en 4 subdivisions iguals. Després, cada subdivisió es numera de manera que dos nombres consecutius s'associïn a dues subdivisions contigües. Aquest és el pas inicial:



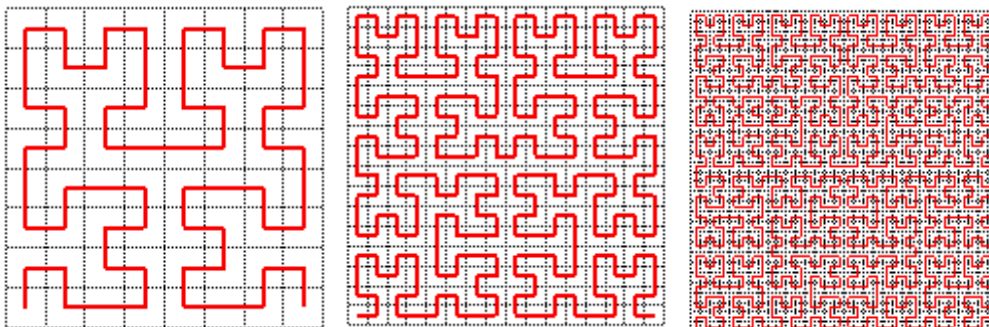
Imatge 34: 1ª iteració

2.- Posteriorment, amb cada subdivisió es realitza el mateix procediment que en el pas anterior, tenint en compte a més que la numeració s'ha de fer de manera que les primeres subdivisions que es recorrin siguin les corresponents al primer quadrat recorregut en el pas anterior. Aquest seria el següent pas:

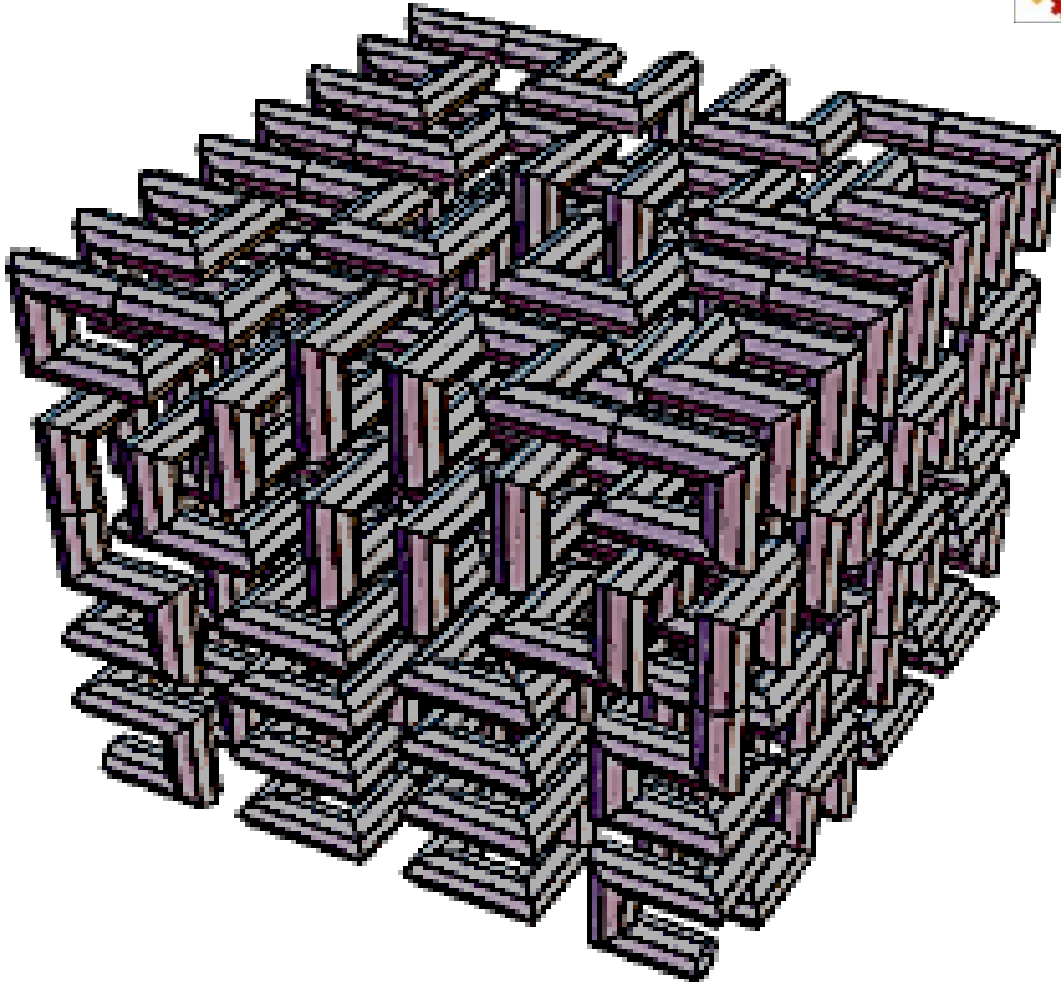


Imatge 35: 2ª iteració

3.- Així, es va realitzant aquest procés un nombre n de vegades prou gran fins que la mida de les àrees de cada subdivisió tendeixi a zero i la corba tendeixi a ocupar tota la superfície del quadrat (la trajectòria de la corba és densa en el quadrat).



Imatge 36: 3ª, 4ª i 5ª iteració



Imatge 37: Corba de Hilbert en 3D

Aplicacions de la corba de Hilbert

Tant la corba de Hilbert original com les seves aproximacions són útils perquè proveeixen una correspondència entre l'espai 1D i 2D que conserva força bé la localitat. Si (x, y) són les coordenades d'un punt dins del quadrat unitari, i d és la distància al llarg de la corba quan s'arriba a aquest punt, llavors els punts que tenen distàncies properes a d també tenen valors propers a (x, y) . El contrari no sempre pot ser cert, ja que punts amb coordenades (x, y) properes, poden tenir valors de d molt allunyats. Això és inevitable quan s'assigna un espai 2D a un espai 1D. No obstant això, la corba de Hilbert aconsegueix mantenir bastant bé els valors de d propers gran part del temps. Així que les assignacions en ambdues direccions mantenen bastant bé la localitat.



A causa d'aquesta propietat de localitat, la corba de Hilbert s'utilitza en la informàtica. Per exemple, el rang de les adreces IP utilitzades per equips pot ser representat gràficament en una imatge utilitzant la corba de Hilbert. El codi per generar la imatge hauria de fer una correspondència de 2D a 1D per trobar el color de cada píxel i la corba de Hilbert s'utilitza de vegades, ja que manté adreces IP similars properes entre si en la imatge. Una fotografia en escala de grisos es pot convertir en una imatge en blanc i negre interpolada usant llindars, amb la quantitat sobrant de cada píxel afegida al següent píxel al llarg de la corba de Hilbert. El codi per fer això fa una correspondència de 1D a 2D, i la corba de Hilbert s'usa de vegades perquè no crea els patrons de distracció que serien visibles a l'ull si l'ordre fos simplement d'esquerra a dreta en cada fila de píxels.

Les corbes de Hilbert en dimensions superiors són una generalització dels codis de Gray, que s'utilitzen per a propòsits similars, per les mateixes raons. Per a bases de dades multidimensionals, s'ha proposat l'ús de l'ordre de Hilbert en lloc del Z-ordre (és una ordre de superposició d'objectes bidimensionals, com les finestres en una interfície gràfica d'usuari (GUI)) perquè es comporta millor preservant la localitat.

Donada aquesta varietat d'aplicacions, és útil disposar d'algorismes de correspondència en ambdues direccions. En molts llenguatges de programació, això s'implementa millor usant iteració en comptes de recursivitat.

La corba de Hilbert també s'usa en el tramat o *dithering*.

El tramat és una tècnica emprada en un equip gràfic en les imatges de baixa resolució per produir colors amb una il·lusió de profunditat més gran. També es coneix com error difús .

El tramat s'empra per crear la il·lusió de profunditat de color en imatges amb una paleta de colors limitada (reducció de color). En una imatge tramada, els colors no disponibles a la paleta s'aproximen per una difusió de píxels de color dins de la gamma de colors disponibles.

Les imatges tramades, en particular les que tenen relativament pocs colors, sovint es distingeixen per un grau de granulositat característic.



3.4.- Endinsament en el concepte de dimensió fractal

En aquest punt, tractarem i estudiarem els fractals més importants, com ho són el conjunt de Mandelbrot, de Cantor i de Julia, el triangle de Sierpinsky, l'esponja de Menger-Sierpinsky o la corba de Koch.

3.4.1.- LA CORBA DE KOCH

Per tal de començar el punt, ho farem amb la corba de Koch.

Niels Fabian Helge von Koch (Estocolm, 25 gener 1870 - Ibídem, 11 de març de 1924) va ser un matemàtic suec, el nom s'ha assignat a una famosa corba fractal anomenada corba Floc de neu de Koch, una de les primeres corbes fractals en ser descrites.



Imatge 38: von Koch

La **corba de Koch**, també anomenada floc de neu de Koch, és una corba tancada contínua però no diferenciable en cap punt descrita pel matemàtic suec Helge von Koch en 1904.

En llenguatge actual, diríem que és una corba fractal. La seva construcció més simple es realitza mitjançant un procés iteratiu que s'inicia partint en tres un segment de recta i inserint dos més al tercer mitjà a manera d'un triangle equilàter, el procés es repeteix infinitat de vegades.

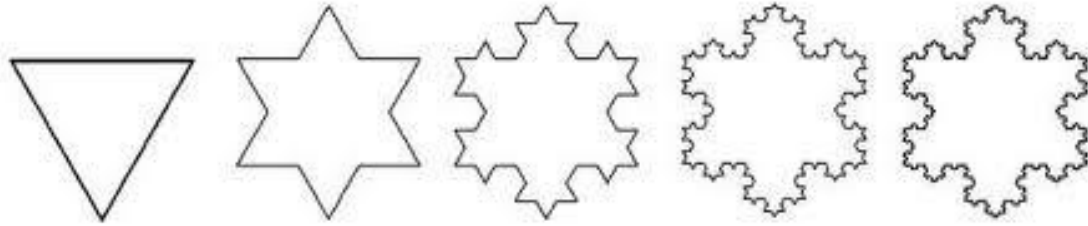
Compleix les següents propietats:

- És una corba contínua i tancada que no és derivable en cap punt.
- Malgrat tancar una àrea finita (és fàcil veure que està inscrita en un hexàgon regular), és de perímetre infinit.
- Donats punts qualssevol, la longitud de l'arc entre ells és infinita.

La corba de Koch es construeix partint d'un triangle equilàter de costat 1 (cas $n=0$). Cada un dels costats el dividim en tres parts iguals. A continuació, disposem en cada terç central un triangle equilàter de costat $1/3$, obtenint-se així un hexàgon regular estrellat (cas $n=1$). Seguidament, tornem a repetir el



mateix procés en cadascun dels seus 12 costats (cas $n=2$), i així successivament, obtenint en el límit la corba de Koch.



Imatge 39: Procés de formació del floc de neu o corba de Koch

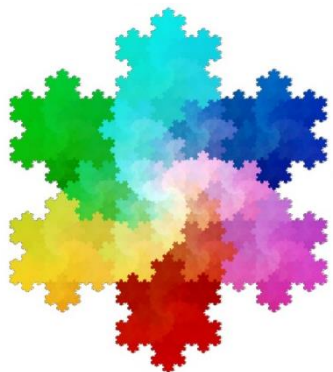
En l'operació n -èsima la corba està formada per $3 \cdot 4^n$ trossos, de perímetre $4^n / 3^{n-1}$. La corba de Von Koch resulta del pas al límit de la successió de corbes P^n quan n tendeix a infinit.

Per tant, el perímetre serà:

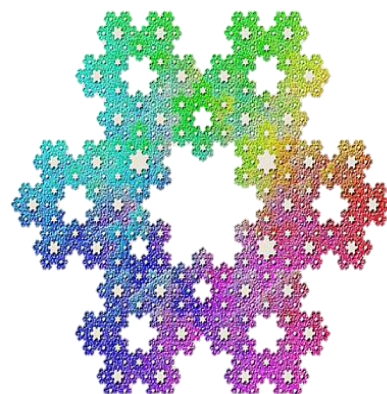
$$P_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \infty$$

En canvi, l'àrea de la corba de Koch tendeix a ser $8/5$ de l'àrea del triangle inicial. Per tant, això demostra que té una àrea finita, però un perímetre infinit.

Amb aquesta corba, es poden crear efectes tan espectaculars com els següents:



Imatge 40: Variant de la corba de Koch



Imatge 41: Variant de la corba de Koch



La dimensió fractal d'aquesta corba és calcula fent el següent:

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26186\dots$$

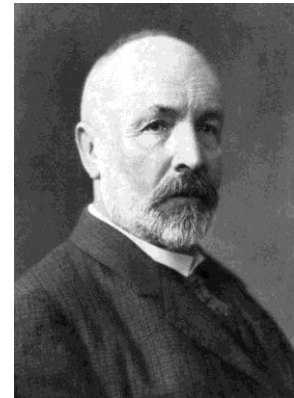
La corba de Koch també té una operació inversa, que donaria lloc a l'anti-corba de Koch. Per a ella, els càlculs són anàlegs al cas anterior. Simplement en comptes d'afegir trossos, els traiem.



Imatge 42: Procés de formació de l'anti-corba de Koch

3.4.2.- EL CONJUNT DE CANTOR

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (Sant Petersburg (Rússia), 3 març 1845 – Halle (Alemanya), 6 gener 1918) va ser un matemàtic Rus, inventor amb Dedekind i Frege de la teoria de conjunts, que és la base de les matemàtiques modernes. Gràcies a les seves atrevides investigacions sobre els conjunts infinits va ser el primer capaç de formalitzar la noció d'infinít sota la forma dels nombres transfinits (cardinals i ordinals).



Imatge 43: Cantor

El **conjunt de Cantor** (ideat l'any 1883), conegut d'aquesta manera pel seu precursor George Cantor, és un destacat subconjunt fractal de l'interval real $[0,1]$; pot ser la primera estructura fractal de la qual se'n té registre. Mandelbrot també l'anomena "Pols de Cantor", per la seva similitud amb la pols, que s'esvaeix progressivament fins fer-se invisible, encara que la seva longitud és diferent de zero.

S'obté iterativament eliminant en cada pas el segment obert corresponent al terç central de cada interval.



Es construeix de forma recursiva, i els passos per a construir-lo són els següents:

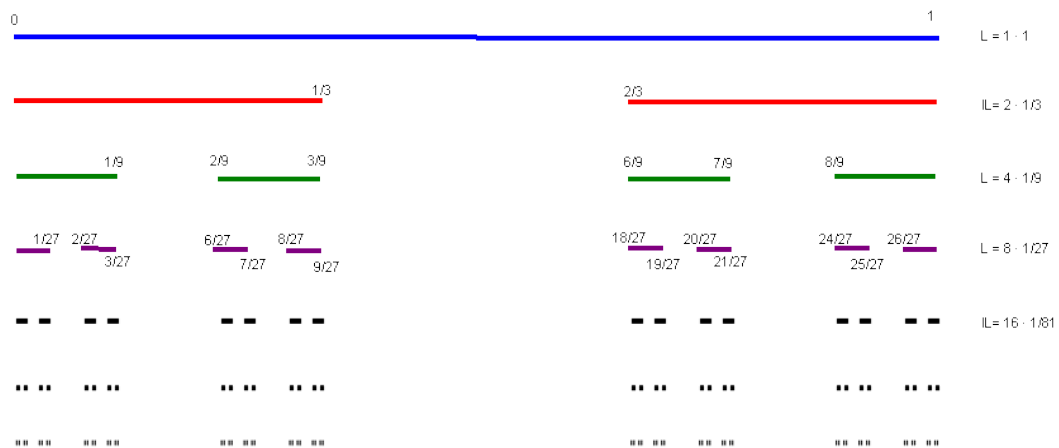
1.- Comencem amb un interval $[0,1]$.

2.- Traiem l'interval anterior el seu terç central, és a dir, l'interval $(1/3, 2/3)$, amb la qual cosa ens quedaran dos segments: $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$.

3.- Tornem a treure a cadascun dels dos intervals anteriors el seu terç central, amb el qual ens quedaran quatre segments: $[0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$.

4.- De nou tornem a treure a cadascun dels quatre intervals anteriors el seu terç central, amb el que ens quedaran vuit segments, que són $[0, 1/27] \cup [2/27, 3/27] \cup [6/27, 7/27] \cup [8/27, 9/27] \cup [18/27, 19/27] \cup [20/27, 21/27] \cup [24/27, 25/27] \cup [26/27, 1]$.

El procés es repeteix indefinidament juntament amb la longitud L de cada etapa:



Imatge 44: Conjunt de Cantor

Ara, observarem la relació entre el nombre de segments, i la longitud d'aquests:

Nombre de segments	Longitud dels segments
2	$1/3$
4	$1/9$
8	$1/27$
...	...



Amb aquestes dades, ens adonem d'una relació: en el pas n -èssim, tindrem 2^n costats, de longitud $1/3^n$ cada un.

Lavors, anem a calcular la longitud final de tots els segments eliminats successivament:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

Amb aquest resultat, ens adonem que la longitud final dels segments eliminats és la mateixa que la longitud inicial.

Això passa perquè els intervals que hem anat esborrant del total són oberts, i ens quedem amb els tancats. És a dir, de l'interval $(1/3, 2/3)$, els punts $1/3$ i $2/3$ (els extrems de l'interval triat) no són eliminats. I això passa amb la resta d'intervals també. Per tant, el conjunt de Cantor no està buit, sinó que trobem punts com el 0, l'1, l' $1/3$, el $2/3$, ... que pertanyen a aquest.

Amb totes aquestes deduccions, descobrim que el conjunt de Cantor exhibeix una de les principals propietats dels fractals: l'autosimilaritat.

Un exemple seria el següent: si agafem l'interval $[0, 1/3]$ i l'ampliem tres cops, tornem a obtenir el segment $[0,1]$ al complet. Es pot fer amb qualsevol interval i qualsevol nivell.

Per tant, per molt minúscula que sigui, tota part o interval té informació del tot (l'interval inicial, en aquest cas). Una part és idèntica al total, excepte per un factor d'escala.

També farem un càlcul de la seva dimensió de Hausdorff-Besicovich:

$$d = \frac{\log(2^k)}{\log\left(\frac{1}{1/3^k}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631$$



Per acabar amb el conjunt de Cantor, he trobat un exemple molt difícil d'elaborar amb un objecte molt quotidià:



Imatge 45:
Exemple
del conjunt
de Cantor
en un ou

3.4.3.- EL TRIANGLE DE SIERPINSKY

Wacław Franciszek Sierpinski (14 de març de 1882, Varsòvia - 21 octubre de 1969, Varsòvia) va ser un matemàtic polonès. Són notables les seves aportacions a la teoria de conjunts, la teoria de nombres, la topologia i la teoria de funcions. En la teoria de conjunts que va realitzar importants contribucions per l'axioma d'elecció i la hipòtesi del continu. Va estudiar la teoria de la corba que descriu un camí tancat que conté tots els punts interiors d'un quadrat.



Imatge 46: Sierpinsky

El **triangle de Sierpinsky** va ser ideada l'any 1919 per Wacław Sierpinsky, nombrat anteriorment.

Compleix les següents característiques:

- La superfície de la zona coberta de color negra és nul·la, un cop arribem al límit.
- Si intersequem el triangle de Sierpinsky amb una recta paral·lela a un dels seus costats, obtindrem una figura semblant al conjunt de Cantor.

Aquest conegut fractal mitjançant el següent procés: partim (pas $n=0$) d'un triangle equilàter de costat 1. Seguidament (pas $n=1$) prenem els punts mitjans de cada costat i retallem a partir d'ells el triangle equilàter invertit blanc de banda $1/2$. Repetim el procés amb cadascun dels tres triangles negres de



costat $1/2$ que ens quedaven (pas $n=2$), és a dir, retallem aquest cop tres triangles invertits blancs de costat $1/4$. I així, successivament fins arribar al límit, al pas n -èssim.



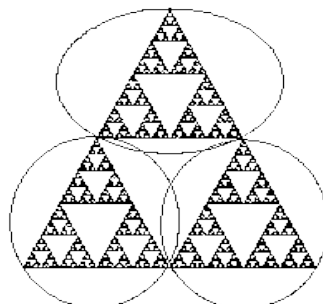
Imatge 47: Procés de formació del triangle de Sierpinsky

Un cop arribem al pas n -èssim, observem que:

Nº de Fase	0	1	2	3	4	n	$n \rightarrow \infty$
Nº de ▲	1	3	$9=3^2$	$27=3^3$	$81=3^4$	3^n	∞
Nº de ▴	0	1	4	13	40	$\frac{3^n - 1}{2}$	∞
Àrea total	$1 u^2$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3^2}{4^2}$	$\frac{3^3}{4^3}$	$\frac{3^4}{4^4}$	$\frac{3^n}{4^n}$	0
Perímetre total	$3 u$	$\frac{9}{2} = \frac{3^2}{2}$	$\frac{3^3}{2}$	$\frac{3^4}{2}$	$\frac{3^5}{2}$	$\frac{3^n}{2}$	∞

A partir de les dades obtingudes, deduïm que, a mesura que ens apropem al pas n -èssim, el perímetre del triangle de Sierpinsky tendeix a infinit, mentre que la seva àrea, tendeix a zero. Aquesta és una característica típica d'alguns fractals.

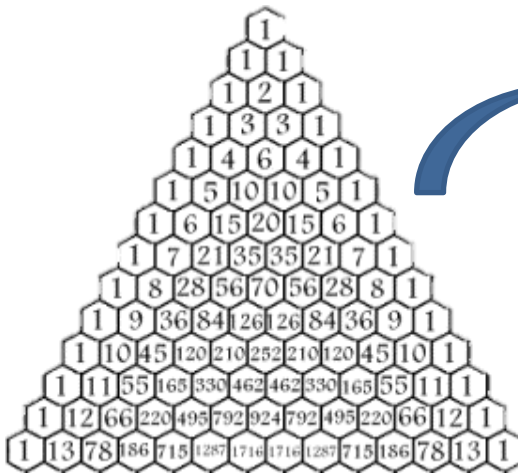
També és autosimilar, ja que la forma definitiva del triangle de Sierpinsky està formada per tres triangles autosimilars d'ell mateix.



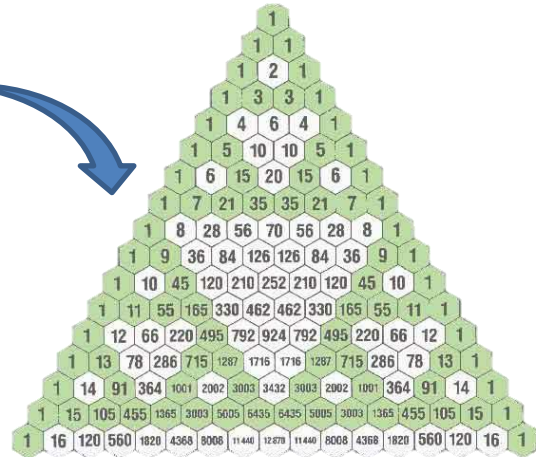
Imatge 48: Triangle de Sierpinsky, amb els tres triangles autosimilars assenyalats



Aquest fractal té una peculiar relació amb el triangle de Pascal, i es que si agafem un triangle de Pascal com el de la imatge de la esquerra i li pintem els polígons que continguin un nombre imparell, ens apareix el triangle de Sierpinsky.

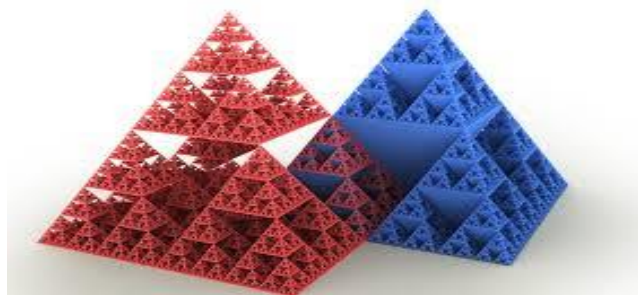


Imatge 49: Triangle de Pascal



Imatge 50: Triangle de Pascal amb els polígons amb nombre imparell marcats

Aquests és un altre exemple:



Imatge 51: Tetràedres de Sierpinsky

3.4.4.- LA CATIFA DE SIERPINSKY I L'ESPONJA DE Menger

La **catifa de Sierpinsky** és un conjunt fractal descrit per primera vegada per Waclaw Sierpinsky en 1916. Constitueix una generalització a dues dimensions del conjunt de Cantor. Comparteix amb ell moltes propietats: també és un conjunt compacte, no numerable i de mesura nul·la.



La seva dimensió de Hausdorff-Besicovich és:

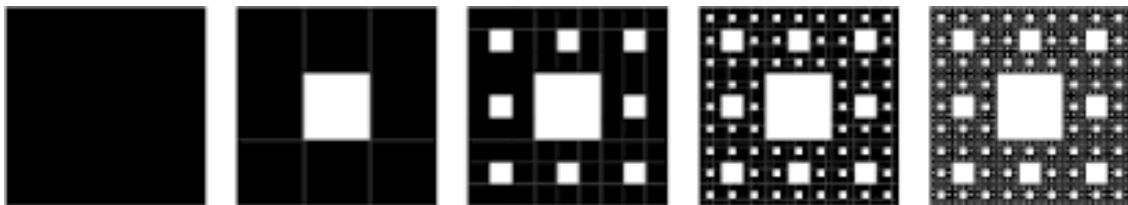
$$d = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,892789\dots$$

La construcció de la catifa de Sierpinsky es defineix de forma recursiva:

1.- Comencem amb un quadrat.

2.- El quadrat es talla en 9 quadrats congruents, i eliminem el quadrat central.

3.- El pas anterior torna a aplicar recursivament a cadascun dels 8 quadrats restants.



Imatge 52: Procés de formació de la catifa de Sierpinsky

La catifa de Sierpinsky és el límit d'aquest procés després d'un nombre infinit d'iteracions.

Un cop arribem al pas n-èssim, observem que:

Nº de fase	0	1	2	3	n
Nº de ■ (N_n)	1	8	$64=8^2$	$512=8^3$	8^n
Longitud (L_n)	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{3^n}$
Àrea total ($L_n^2 \cdot N_n$)	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81} = \frac{8^2}{9^2}$	$\frac{512}{729} = \frac{8^3}{9^3}$	$\frac{8^n}{9^n}$



Amb les dades que hem obtingut, ens adonem que l'àrea de la catifa de Sierpinsky, tendeix a zero, mentre que el seu perímetre, tendeix cap a l'infinit. Aquest fractal també té la mateixa característica que el triangle de Sierpinsky.

Ara parlarem de l'esponja de Menger-Sierpinsky. Primer, introduïrem una mica de biografia sobre un dels seus ideòlegs, Karl Menger.

Karl Menger (Viena (Àustria), 13 de gener de 1902 - Highland Park (Illinois, EUA), 5 de octubre de 1985) va ser un matemàtic, fill del famós economista Carl Menger, conegut pel teorema de Menger. Dins de les matemàtiques va treballar en àlgebra, àlgebra de la geometria, teoria de la corba i la dimensió, etc. A més, va contribuir a la teoria de jocs i a les ciències socials.

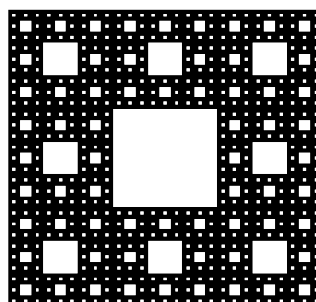


Imatge 53: Menger

L'**esponja de Menger** és un fractal concebut pel matemàtic austríac Karl Menger l'any 1926. També es diu cub de Menger-Sierpinsky. És una generalització tridimensional del conjunt de Cantor. Per tant, també comparteix moltes de les seves propietats.

Compleix les següents:

- És un conjunt de mesura nul·la (un conjunt és de mesura nul·la si pot ser recobert amb un nombre finit o infinit numerable d'interval·ls oberts i tancats, la longitud total dels quals sigui tan petita com vulguem).
- Si s'interseca l'esponja de Menger-Sierpinsky amb un pla paral·lel a una de les seves cares, s'obté la catifa de Sierpinsky.



Imatge 54: Catifa de Sierpinsky

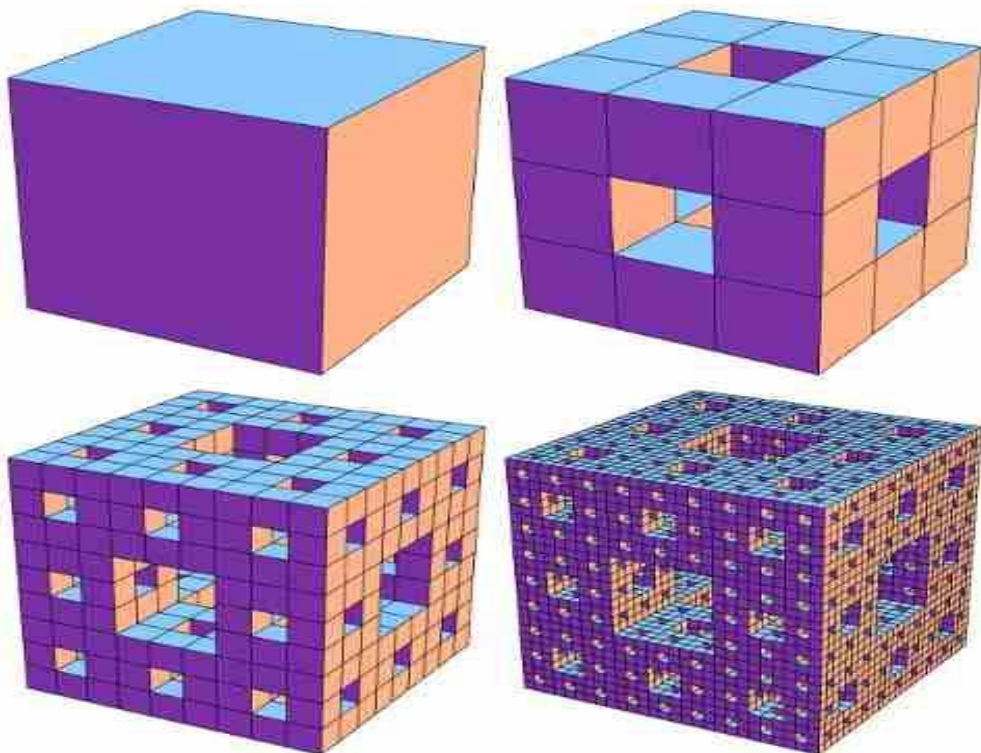


- És de destacar la seva propietat de corba universal: és un conjunt topològic de dimensió fractal 1, i qualsevol altra corba és homeomorfa a un subconjunt de l'esponja de Menger.

Es construeix de forma recursiva, seguint els passos següents:

- 1.- Comencem amb un cub.
- 2.- Dividim cada cara del cub en 9 quadrats. Això subdivideix el cub en 27 cubs més petits, com li passa al cub de Rubik.
- 3.- Eliminem els cubs centrals de cada cara (6) i el cub central (1), deixant només 20 cubs.
- 4.- Repetim els passos 1, 2 i 3 per a cada un dels vint cubs menors restants.

L'esponja de Menger-Sierpinsky és el límit d'aquest procés, després d'infinites iteracions.



Imatge 55: Procés de formació de l'esponja de Menger



3.4.5.- EL CONJUNT DE JULIA

Gaston Maurice Julia (3 de febrer de 1893, Sidi Bel Abes (Algèria) - 19 de març de 1978, París (França)) va ser un matemàtic francès. Va ser un precursor del que avui es coneix com fractals. Va ser el primer a estudiar el tema i en explicar com a partir de qualsevol funció complexa es pot fabricar, per mitjà d'una successió definida per inducció, un conjunt la frontera del qual és impossible de dibuixar a pols per ser de longitud infinita, entre altres propietats.

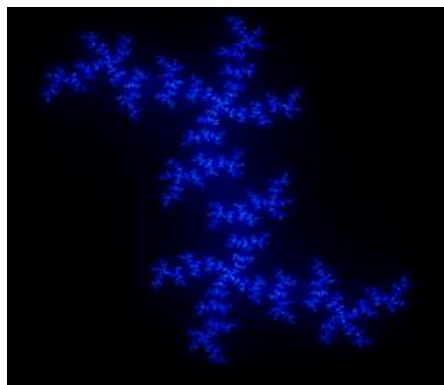


Imatge 56: Julia

Els **conjunts de Julia**, així anomenats pel matemàtic Gaston Julia, són una família de conjunts fractals que s'obtenen en estudiar el comportament dels nombres complexos en ser iterats per una funció holomorfa.

El conjunt de Julia d'una funció holomorfa f , està constituït per aquells punts que sota la iteració de f , tenen un comportament 'caòtic'. El conjunt es denota $J(f)$.

Els conjunts de Julia es defineixen a través d'una funció racional definida en el pla complex Z . Presa una funció $R(z \cdot [n + 1]) = P(z \cdot [n]) / Q(z \cdot [n])$, on $P(z \cdot [n])$ i $Q(z \cdot [n])$ són polinomis definits en Z i la n representa el valor de z en la n -èsima iteració. El conjunt de Julia associat a R inclou a tots els punts del pla complex com que en aplicar un nombre n de vegades la funció R el resultat sempre es troba dins d'un determinat límit (és a dir, el resultat no tendeix a infinit, sinó que està acotat per un cert valor).



Imatge 57: Conjunt de Julia



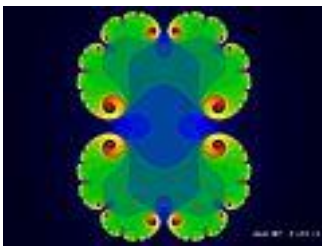
Una família molt notable de conjunts de Julia s'obtenen a partir de funcions quadràtiques simples: $f_c(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2 + \mathbf{c}$, on \mathbf{c} és un nombre complex. El conjunt de Julia que s'obté a partir d'aquesta funció es denota J_c .

Un algorisme per obtenir el conjunt de Julia de $f_c(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2 + \mathbf{c}$ és el següent:

Per tot complex \mathbf{z} es construeix per la següent successió:

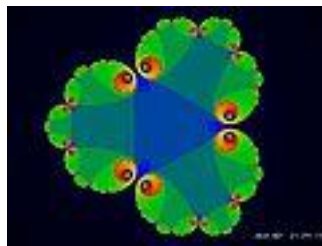
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z}_0 = \mathbf{z} \\ \mathbf{z}_{\{n+1\}} = \mathbf{z}_n^2 + \mathbf{c} \end{array} \right.$$

Si aquesta successió queda fitada, llavors es diu que \mathbf{z} pertany al conjunt de Julia de paràmetre \mathbf{c} , denotat per J_c ; en cas contrari, \mathbf{z} queda exclòs d'aquest. Aquí us mostro alguns exemples de fractals de la forma $Z = Z^m + C$:



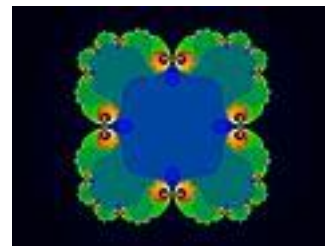
$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^2 + \mathbf{C}$$

$$C_x=0.279 \quad C_y=0.000$$



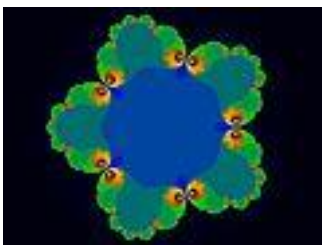
$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^3 + \mathbf{C}$$

$$C_x=0.400 \quad C_y=0.000$$



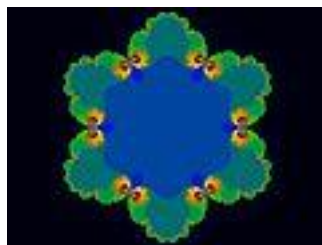
$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^4 + \mathbf{C}$$

$$C_x=0.484 \quad C_y=0.000$$



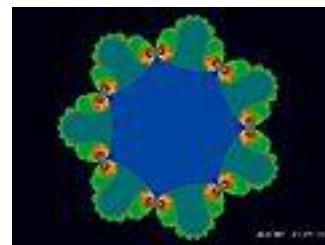
$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^5 + \mathbf{C}$$

$$C_x=0.544 \quad C_y=0.000$$



$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^6 + \mathbf{C}$$

$$C_x=0.590 \quad C_y=0.000$$

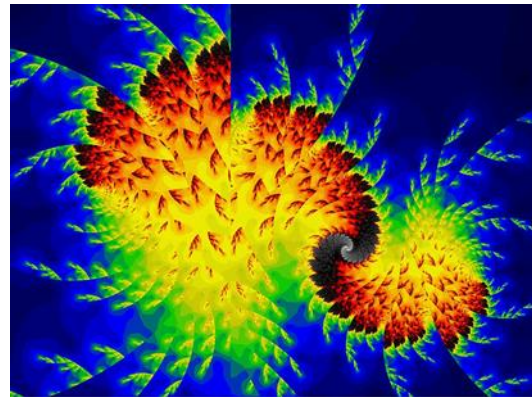
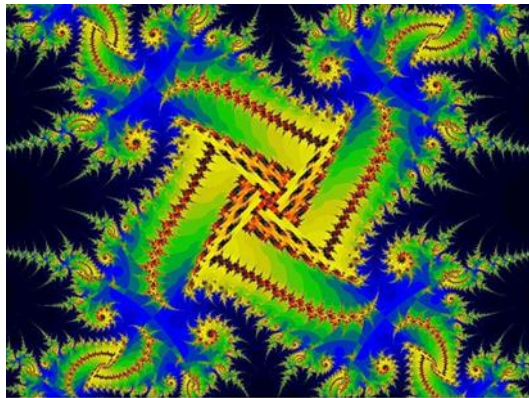


$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^7 + \mathbf{C}$$

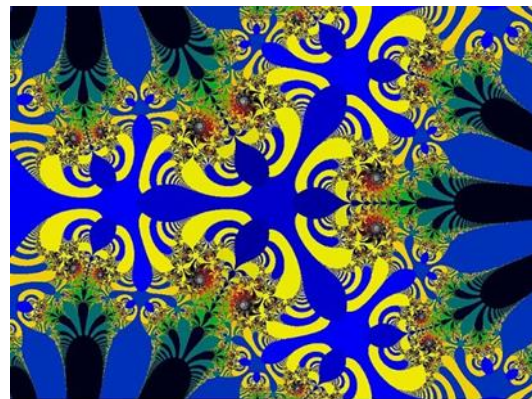
$$C_x=0.626 \quad C_y=0.000$$



També hi trobem més exemples, aquests més complexos de obtenir, ja sigui mitjançant funcions exponencials o funcions complexes:



Imatges 58 i 59: Variants del conjunt de Julia, mitjançant funcions exponencials



Imatges 60 i 61: Variants del conjunt de Julia, mitjançant funcions complexes

3.4.6.- EL CONJUNT DE MANDELBROT

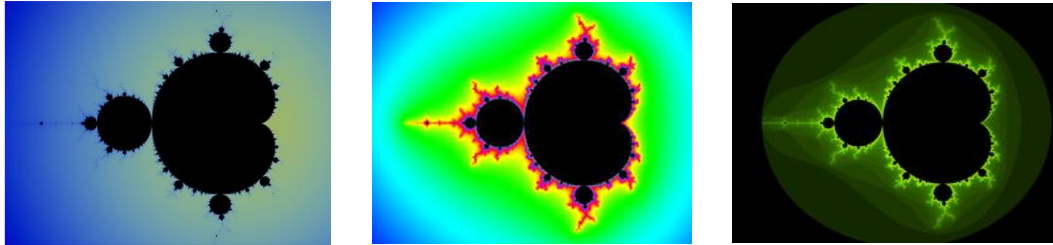
Benoît Mandelbrot (Varsòvia (Polònia) 20 de novembre de 1924 - Cambridge (Estats Units), 14 de octubre del 2010) va ser un matemàtic conegut pels seus treballs sobre els fractals. És considerat el principal responsable de l'auge d'aquest camp de les matemàtiques des de l'inici dels anys setanta, així com de la seva popularitat en utilitzar l'eina que s'estava popularitzant en aquesta època -l'ordinador- per traçar els més coneguts exemples de geometria fractal : el conjunt de Mandelbrot i els conjunts de Julia descoberts per Gaston Julia, qui va inventar les matemàtiques dels fractals, i desenvolupats després per Mandelbrot.



Imatge 62: Mandelbrot



El **conjunt de Mandelbrot** deu el seu nom al matemàtic Benoît Mandelbrot, que el 1979 va començar a estudiar un conjunt de punts en el pla complex Z , tals que el conjunt de Julia corresponent a ells era connex i alhora no computable.



Imatges 63, 64 i 65: Conjunt de Mandelbrot en diferents fons

Un fractal de Mandelbrot d'ordre n , es calcula operant sobre una equació de nombres complexos (l'equació de Mandelbrot). En realitat, hi ha molts fractals de Mandelbrot, la diferència entre cada un d'ells és el seu ordre. Un cop coneguda aquesta equació, ja és possible determinar si un punt del pla complex pertany o no a un fractal d'ordre n .

Compleix les següents propietats:

- És un conjunt connex, la qual cosa significa que és impossible separar en dues peces disjunctes, és a dir, que no tinguin cap element en comú.
- És un conjunt compacte, és a dir, tancat i acotat.
- A més, la seva frontera té dimensió topològica 1, però la seva dimensió de Hausdorff-Besicovich és 2, és a dir, la màxima possible, atès que és un subconjunt del pla.

La família de conjunts de Julia $\{f_c\}$, associades a la reiteració de funcions de la forma $f_c(z) = z^2 + c$ presenta conjunts d'una varietat sorprenent.

Aquesta família tindrà especial rellevància en quedar parametritzada en un mapa de fractals, popularitzat en els anys 1980. anomenat conjunt de Mandelbrot. Aquest conjunt representa un mapa en què cada píxel, corresponent a un valor del paràmetre $c \in \mathbb{C}$, s'acolorix de manera que



reflecteixi una propietat bàsica del conjunt de Julia associat a f_c . En concret, $c \in M$ si el conjunt de Julia associat a f_c és connex.

Aquest conjunt es defineix a partir d'un nombre c qualsevol, que defineix la següent successió:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

Hi ha una sèrie de fractals, de diferents potències de $Z = Z^m + C$ (les mateixes que en el conjunt de Julia, però aquest cop es produeixen segons el tipus de Mandelbrot).

Aquí hi ha uns exemples:



$$Z = Z^2 + C$$

(Conjunt de Mandelbrot)



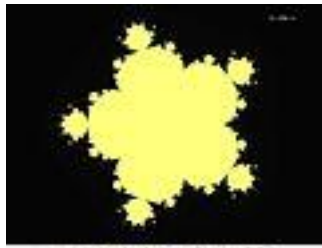
$$Z = Z^3 + C$$



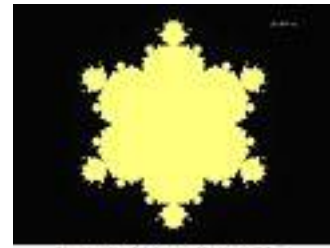
$$Z = Z^4 + C$$



$$Z = Z^5 + C$$



$$Z = Z^6 + C$$



$$Z = Z^7 + C$$

3.4.7.- LA CORBA DE DRAC

La **corba de drac** és membre d'una família de corbes fractals auto-similars, que es pot aproximar per mètodes recursius, com ara sistemes de Lindenmayer.

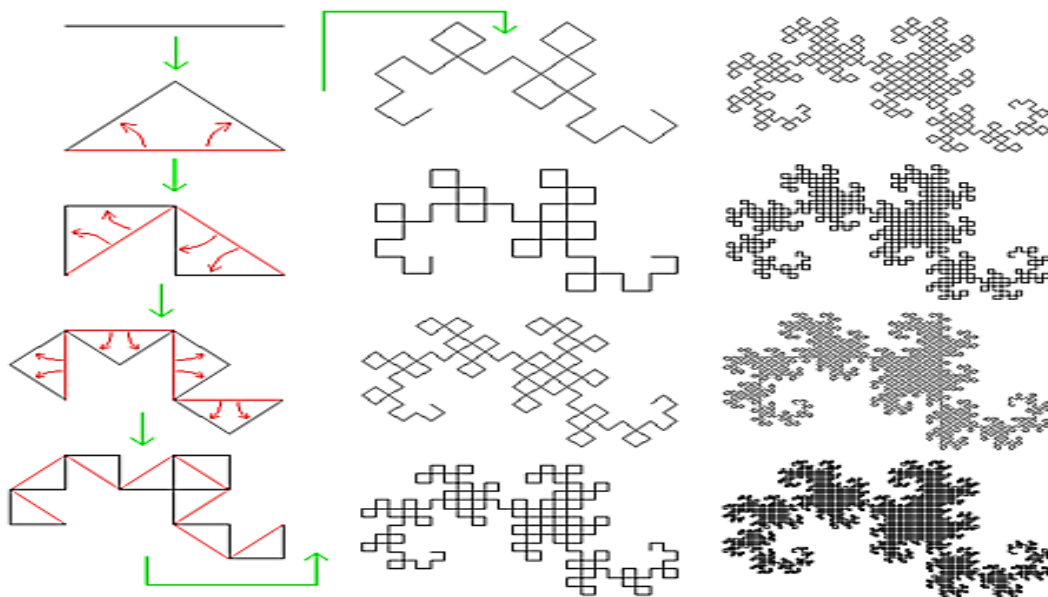


Com a curiositat, aquesta corba apareix a la novel·la Jurassic Park, de Michael Crichton.

Es construeix seguint els següents passos:

1.- A partir d'un segment, es construeix el triangle rectangle i isòsceles, com ho mostra les dues primeres figures. Després s'esborra el segment inicial.

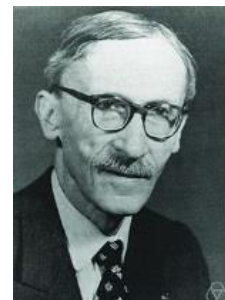
2.- Es repeteix una infinitat de vegades el procés de reemplaçar un segment per altres dos per a cada línia de la corba, alternant sempre l'orientació dels triangles.



Imatge 66: Procés de formació de la corba del drac

Com és una corba que pot arribar a ocupar una part del pla (com les corbes de Peano i Hilbert), la seva dimensió fractal deu ser 2, i es calcula de la mateixa forma que la del floc de neu de Koch, ja que són similars.

Paul Pierre Lévy (15 de setembre de 1886 - 15 desembre 1971) va ser un matemàtic francès que va treballar principalment en la teoria de probabilitats, introduint la Martingala, els vols de Lévy, els processos de Lévy, les mesures de Lévy, la constant de Lévy, la distribució de Lévy, l'àrea de Lévy i el fractal de la corba C de Lévy.



Imatge 67: Lévy




4.- Usos dels fractals

En aquest apartat, explicarem les principals aplicacions que tenen els fractals, ja que no només són una simple entitat matemàtica a estudiar. Gràcies a ells podem crear paisatges virtuals per al cinema, es pot crear art (ja sigui musical o amb pintura) o ens serveixen per representar gràfiques d'activitat cardíaca o el sistema nerviós. Aquestes són les principals aplicacions, i les que tractarem. Però n'hi ha moltes més: en robòtica, química, física, biologia, economia, etc.

4.1.- La funció de Takagi i el cinema

Primerament, introduïrem què és la corba de Takagi i com es crea.

En matemàtiques, la corba “blancmange” és una corba fractal construïble per subdivisió a mig punt. També es coneix com la corba de Takagi, en honor a Teiji Takagi que la va descriure el 1903.

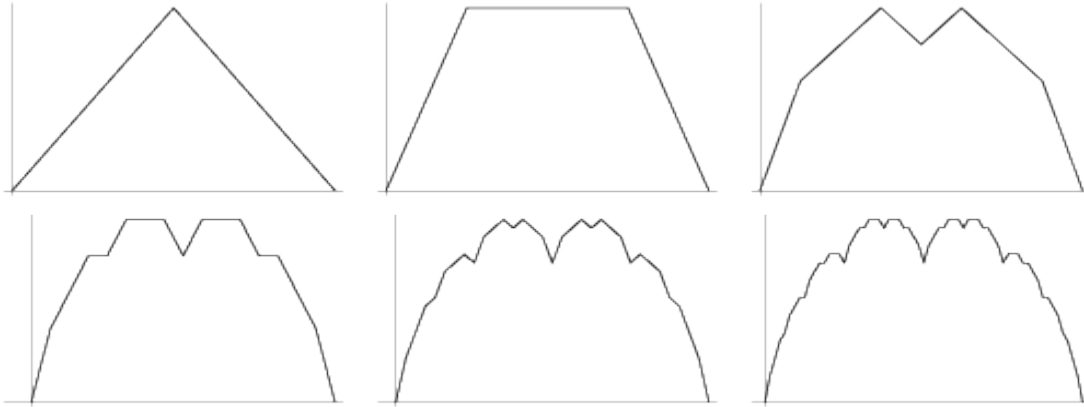
{	<p>Teiji Takagi (21 d'abril de 1875 - 28 febrer 1960) va ser un matemàtic japonès, conegut per comprovar l'existència del teorema de Takagi en la teoria de cossos de classes.</p>	}
	<p>Imatge 68: Takagi →</p>	

La funció de menjar blanc es defineix en l'interval unitat per

$$\text{blanc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(2^n \cdot x)}{2^n}$$

on $s(x)$ es defineix per $s(x) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$, és a dir, $s(x)$ és la distància de x a l'enter més pròxim.

Es tracta d'un exemple de funció contínua però no derivable en cap punt. La funció de Takagi és una corba fractal construïble per la subdivisió en el punt mitjà. Partim d'una V invertida i es subdivideix successivament, reduint a la meitat la seva alçada, formant una corba poligonal que s'assembla dents de serra. S'obté com a resultat de la suma infinita dels diferents dents de serra.



Imatge 69: Iteracions de la funció de Takagi

En tres dimensions, l'ús d'aquestes tècniques fractals permet generar imatges artificials que simulen, de vegades, paisatges naturals. El cinema, la publicitat i els videojocs està aprofitant aquests procediments per elaborar les seves pròpies escenografies i efectes especials. Alguns dels programes més populars per a la generació de paisatges fractals són MojoWorld i Terragen, que tenen les seves pròpies comunitats de seguidors. Aquest últim va ser utilitzat per produir imatges de la Terra en el film "Stealth" i diferents imatges planetàries en la sèrie de televisió "Star Trek: Némesis". També s'ha usat en sagues com "El Señor de los Anillos" o "Star Wars: El Retorno del Jedi", conegudes arreu del món.



Imatge 70: Fotograma de la pel·lícula *El Señor de los Anillos: El Retorno del Rey*



Imatge 71: Fotograma d'una ciutat futurista de la saga *Star Wars*

4.2.- Relació amb el caos

Per tal de començar aquest punt, explicaré què és el caos.

Es denomina caos al comportament impredecible d'un sistema determinista, a causa de la gran sensibilitat respecte a les condicions inicials (C.I.). Això provoca que dos punts arbitràriament junts divergeixin exponencialment, de manera que la seva evolució futura no és predecible.

També hi ha un tipus de moviment basat en el caos. És el que s'anomena moviment brownià, en honor al seu descobridor, l'escocès Robert Brown.

Robert Brown (Montrose, Escòcia, 21 de desembre de 1773 - Londres, Anglaterra, 10 de juny de 1858) fou un reconegut botànic de principis del segle XIX. Va descriure unes 1.200 espècies noves per a la ciència provinents d'Austràlia occidental. Va ser també el descobridor del nucli cel·lular en els organismes eucariotes. En 1827, examinant grans de pol·len, espores de molses, i *Equisetum* suspesos en aigua al microscopi, Brown va observar diminutes partícules amb vacúols en els grans de pol·len executant un continu moviment aleatori, el moviment brownià.



Imatge 72: R. Brown

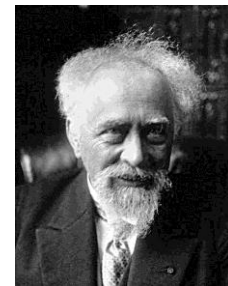


El moviment brownià és el moviment aleatori que s'observa en algunes partícules microscòpiques que es troben en un mitjà fluid (per exemple, pol·len en una gota d'aigua). Brown va observar que petites partícules de pol·len es desplaçaven en moviments aleatoris sense raó aparent.

El moviment estocàstic (és a dir, que no és determinista, sinó caòtic) d'aquestes partícules és perquè la seva superfície és bombardejada incessantment per les molècules (àtoms) del fluid sotmeses a una agitació tèrmica.

Aquest bombardeig a escala atòmica no és sempre completament uniforme i sofreix variacions estadístiques importants. Així, la pressió exercida sobre els costats pot variar lleugerament amb el temps, i així es genera el moviment observat.

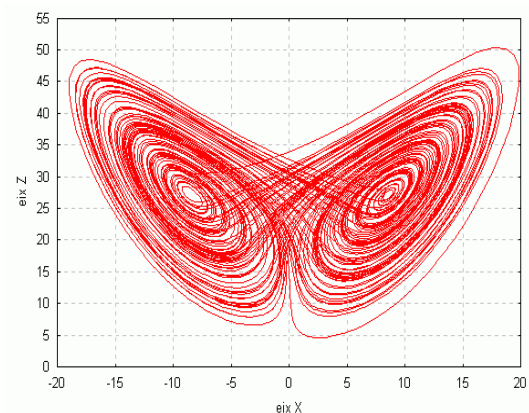
La descripció matemàtica del fenomen va ser elaborada per Albert Einstein l'any 1905, i Jean Perrin va realitzar experiments per tal de verificar els models matemàtics. Un cop Perrin va publicar els seus resultats, va posar fi a dos mil anys de disputa sobre la realitat de les molècules i els àtoms.



Imatge 73: J. Perrin

Un exemple molt clar i conegut és que el batre d'ales d'una papallona pot afectar a l'evolució meteorològica, de manera que pot determinar la diferència entre la calma i l'huracà un temps després.

Tot i tenir moltes diferències, ja que no caòtic i fractal no són sinònims, tenen certes semblances. Per exemple, bastants fenòmens caòtics tenen una estructura fractal subjacent (per exemple els seus atractors). I malgrat la seva aparent complexitat, ambdós solen tenir una formulació senzilla.



Imatge 74: Atractor de Lorentz



4.3.- La música fractal

La música pot contenir formes fractals. El principal impulsor de la música fractal és Joseph Schillinger.

Joseph Moiseyevich Schillinger (1895-1943) va ser un compositor i teòric rus-ucraïnès. En la seva curta vida Joseph Schillinger va aconseguir molt en l'àrea de la teoria de la música i la composició. Va ser mestre de música al *Columbia Teachers College* i també va donar classes privades de composició des de casa, durant aquest temps va desenvolupar el sistema de música Schillinger.



Imatge 75: Schillinger

Va desenvolupar un detallat sistema de composició musical basat en principis científics. El sistema està compost per set llibres, cadascun d'ells centrat en un aspecte diferent de la composició musical. Va influir enormement en la música del segle XX, especialment en compositors com George Gershwin, Glenn Miller o Benny Goodman, entre d'altres.

La base del sistema de Schillinger és geomètrica i es fonamenta en el concepte de relacions de fase de moviments periòdics simples. Schillinger va trobar diferents formes de projectar aquestes relacions en el ritme, però també en àrees molt menys òbvies com el to, l'escala, els acords, la progressió harmònica i, fins i tot, en els aspectes semàntics i emocionals de la composició musical.

El sistema de Schillinger va anticipar la música per ordinador abans que existissin els ordinadors i que va introduir moltes tècniques algorítmiques de composició, fins i tot la utilització de sèries numèriques autosemblants.

Segons uns estudis, també es diu que autors com Mozart, Bach o Beethoven també van introduir els fractals en la música, però de forma diferent. El mètode que van seguir aquests compositors, ja sigui de manera intencionada o no, per integrar fractals i matemàtiques en la música era mitjançant una analogia entre una dimensió fractal i el nombre i la disposició de les diferents notes d'una obra o peça.



4.4.- La medicina, una altra aplicació important dels fractals

Dins del cos humà, trobem diversos exemples de sistemes fractals, com per exemple la xarxa de vasos sanguinis o el sistema nerviós.

Una de les principals aplicacions dels fractals en la medicina s'obté amb els anomenats virus fractals; avui dia es realitzen estudis sobre alguns tumors que creixen i es ramifiquen amb una forma fractal.

També s'utilitzen tècniques fractals per tal de predir la osteoporosis dels pacients, que és una malaltia que afecta els ossos i està provocada per la disminució del teixit que el forma, tant de les proteïnes que constitueixen la seva matriu o estructura com de les sals minerals de calci que conté.

Mitjançant aquesta recent eina, s'està estudiant el funcionament del cervell per tal de poder localitzar tumors o danys provocats per diverses malalties o el consum de drogues.

Les tècniques fractals són una important eina en auge en la medicina, que cada cop permet més avenços, alhora que les noves tecnologies ajuden en l'ús d'aquestes tècniques.

L'activitat cardíaca també mostra una disposició caòtica.

5.- Imatges fractals en la natura

En aquest punt, bàsicament visual, us mostraré exemples de fractals en la natura, com zones del riu Nil o la col romanésca.



Imatge 76: El romanescu

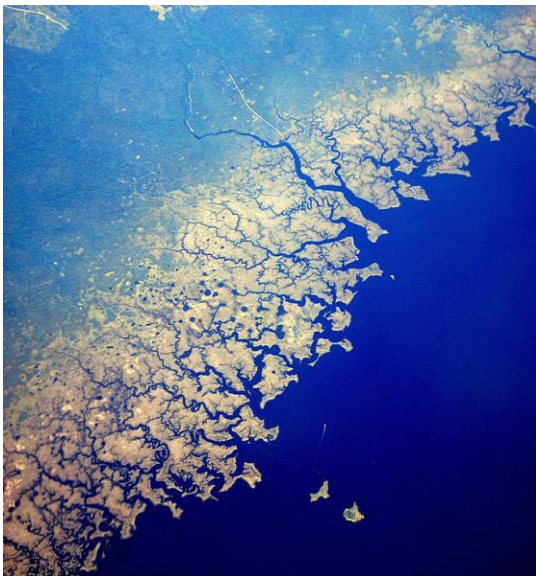
El romanescu o col romanésca (*Brassica oleracea*), és un híbrid de bròquil i coliflor de la família de les brassicàcies. El bròquil romanescu va ser documentat inicialment a Itàlia al segle XVI.



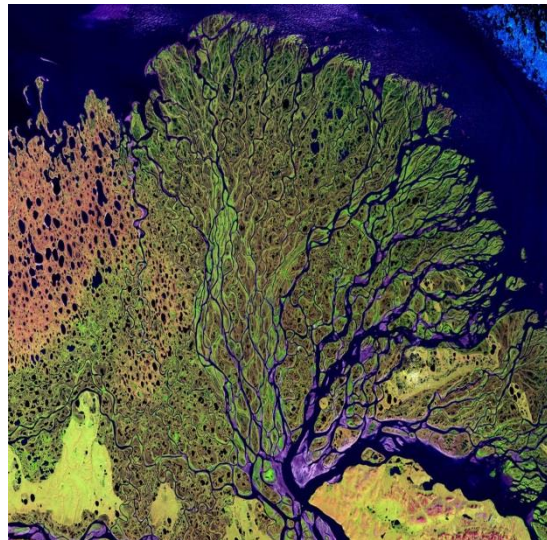
Imatge 77: Vasos sanguinis del cos humà



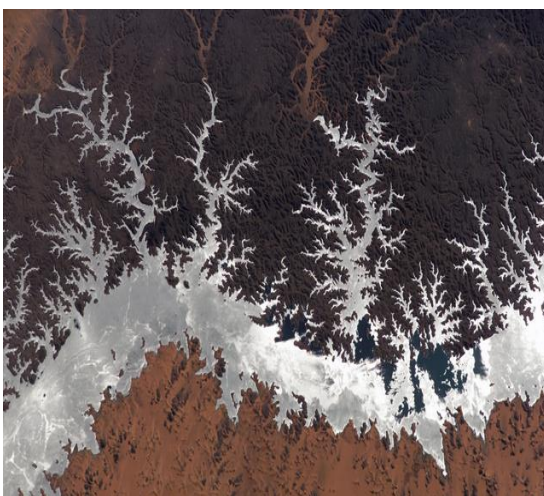
Imatge 78: Floc de neu



Imatge 79: Costa del Regne Unit



Imatge 80: Delta del riu Lena, Sibèria



Imatge 81: Llac Nasser, Egipte



Imatge 82: Parc Nacional de Doñana



Imatge 83: Un tro



Imatge 84: Fulla de falguera



Imatge 84: Fotografia feta des del Google Earth, a Canadà



Imatge 85: Núvol

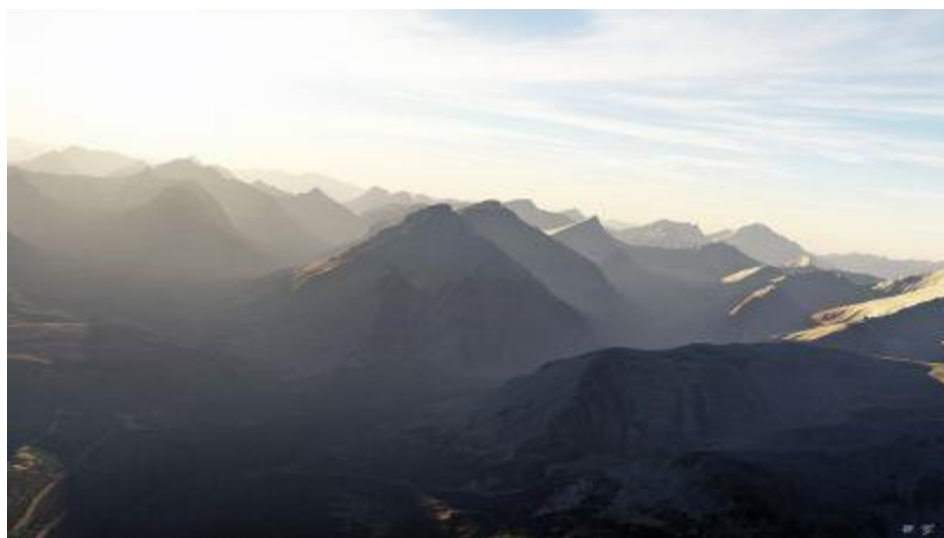
Paisatges virtuals creats a partir de fractals



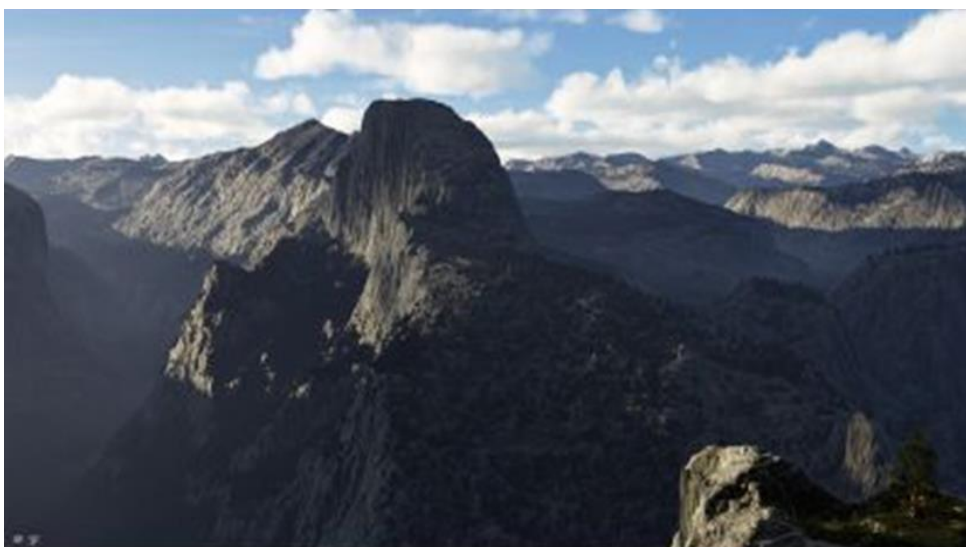
Imatge 86: Paisatge virtual



Imatge 87: Paisatge virtual



Imatge 88: Paisatge virtual



Imatge 89: Paisatge virtual



6.- Conclusió

Un cop he acabat aquest treball, m'adono que la previsió que tenia d'aquest treball no era la que realment ha sigut. Pensava que seria un treball dur, difícil, que costés d'entendre. Però no ha sigut així.

M'ha sorprès gratament, ja que ha sigut molt entretingut de fer, i cada cop que avançava, feia que tingués més ganes de saber sobre el tema. I aquesta ha sigut una de les claus per la qual m'ha agradat tant. Tal i com vaig dir en la introducció, no està gaire relacionat amb el meu futur (enginyeria química), però tot i així, m'ha servit molt, perquè m'ha fet conèixer un món totalment nou, del qual només n'havia sentit a través del meu professor de matemàtiques.

I té una cosa encara millor, que és que no solament he satisfet la curiositat que tenia, sinó que ha fet que sigui més gran, i que vulgui indagar més en aquesta part de les matemàtiques.

He resolt tots els dubtes que m'havia plantejat abans de començar el treball, al fer la introducció. Els ha anat sabent resoldre a mesura que anava avançant, però també me'n sorgeixen de nous. Per exemple, quines noves aplicacions poden tenir? Com poden afectar a les tecnologies? Es descobriran nous tipus de fractals, o noves corbes?

Només hi ha una cosa que no m'agrada d'aquest tema: el desconeixement de la gent sobre aquesta fascinant geometria, que és més propera a ells del que es pensen.



7.- Bibliografía i bibliografía web

Bibliografía

- BINIMELIS, M^a Isabel (2010). *Una nueva manera de ver el mundo*. Barcelona: RBA

Bibliografía web

- *Algunes aplicacions dels fractals en la medicina*. (Article en línia) [15-7-14] Disponible en: <http://www.mat.uab.es/dpt/Varis/material/fractal.pdf>
- *Viquipèdia*. (Article en línia) [18-10-14] Disponible en: <http://ca.wikipedia.org/wiki/Portada>
- *Geometrías no euclidianas: breve historia de una gran revolución intelectual*. (Article en línia) [25-7-14] Disponible en: <http://www.centroedumatematica.com/arui/libros/Geometrias%20No%20euclidianas.pdf>
- *Euclídes*. (Article en línia) [27-7-14] Disponible en: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euclides.htm>
- *Geometria analítica: O plano cartesiano*. (Article en línia) [2-8-14] Disponible en: <http://pensevestibular.com.br/videos/o-plano-cartesiano>
- *Geometría proyectiva*. (Article en línia). [7-8-14] Disponible en: <http://hmate19.blogspot.com.es/2013/10/geometria-proyectiva.html>
- *Glosario de matemáticos*. (Article en línia) [8-8-14] Disponible en: <http://revmat.webs.ull.es/geometria/inicio/glosario.html>
- *Carl Friedrich Gauss (1777-1855): El príncipe de los matemáticos*. (Article en línia) [15-8-14] Disponible en: <http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/html/sigloxix/Carl%20Friedrich%20Gauss.htm>
- *János Bolyai*. (Article en línia) [21-8-14] Disponible en: <http://matematica.unibocconi.it/autore/j%C3%A1nos-bolyai>
- *Geometría de Riemann*. (Article en línia) [25-8-14] Disponible en: <http://www.matematicasyfilosofiaenlaula.info/Epistemologia%202009/Geometria%20de%20Riemann.pdf>



- *Felix Klein's Erlangen Program.* (Article en línea) [13-9-14] Disponible en:
<http://math.ucr.edu/home/baez/erlangen/>
- *La magia de Escher: efecto Droste / Escher.* (Article en línea) [20-9-14]
Disponible en: <https://euclides59.wordpress.com/2012/10/05/la-magia-de-escher-efecto-drosteescher/>
- *Geometría hiperbólica: Disco de Poincaré.* (Article en línea) [25-9-14]
Disponible en:
<http://rastergraphics.wordpress.com/2012/06/27/geometria-hiperbolica-disco-de-poncare/>
- *Fractales Clásicos.* (Article en línea) [24-10-14] Disponible en:
<http://fralbe.com/2010/09/20/fractales-clasicos-la-curva-de-peano/>
- *Introducción.* (Article en línea) [1-11-14] Disponible en:
http://www.alfonsogonzalez.es/curiosidades_matematicas/fractales/fractales.html#introduccion
- *Curvas de relleno.* (Article en línea) [7-11-14] Disponible en:
<http://sabia.tic.udc.es/gc/Contenidos%20adicionales/trabajos/Imagenyvideo/fractales/curvasrelleno.htm>
- *El Conjunto de Cantor.* (Article en línea) [15-11-14] Disponible en:
<http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/1.html>
- *Fractales [introducción].* (Article en línea) [22-11-14] Disponible en:
<http://fralbe.com/2010/09/14/1225/>
- *Geometría fractal.* (Article de línea) [8-12-14] Disponible en:
<http://hmate19.blogspot.com.es/2013/10/geometria-fractal.html>
- *Fractales y caos.* (Article en línea) [13-12-14] Disponible en:
<http://www.fractals.8m.com/caos.htm#go>
- *La curva del manjar blanco.* (Article en línea) [20-12-14] Disponible en:
<https://matesmates.wordpress.com/category/cine/>
- *Música fractal: el sonido del caos.* (Article en línea) [29-12-14] Disponible en:
<http://www.sectormatematica.cl/fractales/musicaenelcaos.pdf>
- *Exploring fractals.* (Article en línea) [3-1-15] Disponible en:
<http://classes.yale.edu/Fractals/Software/Software.html>



- *Mandelbrot. Fractals.* (Article en línea) [7-1-14] Disponible en:
<http://visualizingmath.tumblr.com/post/99767804666/nanozen-mandelbrot-fractals>