

**Aprenem matemàtiques amb
bombolles de sabó**

"La esencia de las matemáticas no es hacer
las cosas simples complicadas, sino
hacer las cosas complicadas simples "

-S.Gudder.

Índex

1	Resum, Resumen i Abstract	3
2	Introducció	5
3	Objectius	8
3.1	Objectius conceptuals	8
3.2	Objectius procedimentals	8
3.3	Objectius actitudinals	9
4	Metodologia	10
5	Figures geomètriques	13
5.1	Parts d'una figura geomètrica	14
5.1.1	Cares	14
5.1.2	Arestes	14
5.1.3	Vèrtexs	14
5.1.4	Angles	15
5.2	El tetràedre	15
5.3	El cub	15
5.4	L'octàedre	16
6	Components	17
6.1	Propietats dels líquids	17
6.1.1	Aigua	17
6.1.2	Glicerina	17
6.1.3	Sabó	18
7	Bombolla	19
7.1	Definició	19
7.2	Estructura	19
7.3	Física	21
7.3.1	Unió	21
7.3.2	Interferència i relació	21
7.4	Càrrega electrostàtica	22
7.4.1	Càrrega elèctrica (Q)	22
8	Tensió superficial	24

9 Distàncies mínimes	31
9.1 Punt de Fermat	31
9.2 Llei de Plateau	35
10 Figures en 2D:	36
10.1 Triangle	36
10.1.1 Demostració i comprovacions	38
10.2 Quadrat	50
10.2.1 Demostració	51
10.3 Hexàgon	52
10.3.1 Demostració	52
10.4 Figures en 3D:	53
10.4.1 Tetràedre	53
10.4.2 Cub	54
10.4.3 Octàedre	55
11 Problema de Steiner	56
12 Fonaments pràctics	59
12.1 Inspiració estructures	59
12.2 Materials	59
12.3 Construcció	62
12.4 Sessions realitzades	62
13 Pressupost	65
14 Conclusió	66
15 Agraïments	68
16 Bibliografia	69
16.1 Webs	69

1 Resum, Resumen i Abstract

- **Resum:** Mai no us imaginàrieu de què són capaces les bombolles. Encara que no ho sembli, aquestes estan relacionades amb molts conceptes físics, químics i matemàtics. Però tot i això, aquests conceptes no són gaire coneguts en l'àmbit de les bombolles. Primerament, trobem que per la seva naturalesa són capaces de formar la mínima superfície possible d'una figura ocupant el màxim de volum. Això és a causa de les propietats que tenen els líquids, com la tensió superficial. Aquesta tendeix a fer que les partícules s'atreguin entre elles, formant sempre el que hem comentat abans, la mínima superfície possible. Això vol dir que el seu recorregut sempre serà mínim, aquest es calcularà trobant el punt de Fermat, el qual és un punt on la suma de les distàncies totals dels vèrtexs d'un triangle fins aquest és mínim. Aquest punt ens ajudarà a resoldre el problema de Steiner; és a dir, a calcular la interconnexió més curta, i alhora més bona, per a un conjunt d'elements, per tal de facilitar el cost de la construcció de carreteres, per exemple. A més a més, els segments que intersequen en el punt de Fermat formen entre ells angles de 120° , tal com diu la llei de Plateau. Amb aquest treball el que volem és cridar l'atenció dels joves en el món de les matemàtiques. Creiem que una molt bona manera de fer-ho és mitjançant experiments que amaguen aquests conceptes d'una manera molt visual, pràctica i divertida.

Els nostres objectius en aquest treball han estat adquirir aquests nous coneixements entre d'altres, els quals anteriorment eren desconeguts per a nosaltres. A més a més, intentem arribar al públic d'una manera diferent i innovadora.

- **Resumen:** Nunca os imaginaría de que son capaces las burbujas. Aunque no lo parezca, estas están relacionadas con muchos conceptos físicos, químicos y matemáticos. Pero aun así, estos conceptos no son muy conocidos en el ámbito de las burbujas. Primeramente, encontramos que por su naturaleza son capaces de formar la mínima superficie posible de una figura ocupando el máximo volumen. Esto es debido a las propiedades que tienen los líquidos, como la tensión superficial. Esta tiende a hacer que las partículas se atraigan entre ellas, formando siempre lo comentado anteriormente, la mínima superficie posible. Esto significa que su recorrido siempre será mínimo, este se calculará hallando el punto de Fermat, el cual es un punto donde la suma de las distancias totales de los vértices de un triángulo hasta este es mínima. Este punto nos ayudará a resolver el problema de Steiner; es decir, calcular la interconexión más corta, y a la vez mejor, para un conjunto de elementos, a fin de facilitar el coste de la construcción de carreteras, por ejemplo. Además, los segmentos que intersecan en el punto de Fermat forman entre si ángulos de 120° , tal como dice la ley de Plateau.

Con este trabajo lo que queremos es llamar la atención de los jóvenes en el mundo de las matemáticas. Creemos que una muy buena manera de hacerlo es mediante experimentos que esconden estos conceptos de una manera muy visual, práctica y divertida.

Nuestros objetivos en este trabajo han sido adquirir estos nuevos conocimientos entre otros, los que anteriormente eran desconocidos para nosotros. Además, intentamos llegar al público de una manera diferente e innovadora.

- **Abstract:** You would never imagine what bubbles are capable of. Although it may not seem like it, these are related to many physical, chemical and mathematical concepts. But nowadays, these concepts are not well known in the field of bubbles. First, we find that by their nature they are able to form the minimum possible surface area of a figure occupying the maximum volume. This is due to the properties that liquids have, such as surface tension. This tends to make the particles attract each other, always forming what has been mentioned above, the minimum possible surface. This means that its route will always be minimal, this will be calculated by finding the Fermat point, which is a point where the sum of the total distances of the vertices of a triangle to it is minimal. This point will help us solve Steiner's problem; this consist in calculating the shortest, and at the same time, the best interconnection for a set of elements, in order to facilitate the cost of a road construction, for instance. In addition, segments that intersect at the Fermat point are used to form angles of 120° between them, as Plateau's law says.

What we want with this work is to attract the attention of young people in the world of mathematics. We believe that a very good way to do it is through experiments that hide these concepts in a very visual, practical and funny way.

Our objectives have been to acquire this new knowledge among others, which were previously unknown to us. In addition, we try to reach the public in a different and innovative way.

Capítol 2

2 Introducció

Som l'Alba de la Hoz, la Laura López i l'Aina Sánchez, tres alumnes de batxillerat de la modalitat tecnològica de l'escola Sant Gervasi, situada a Mollet del Vallès.

El novembre del 2018 és quan el nostre treball va començar, així que vàrem pensar idees per poder realitzar el nostre treball. Al principi de tot, teníem molt clar que el nostre treball consistiria a fer una mena de robot que pogués ajudar de diferents maneres a gent amb capacitats reduïdes. El temps passava però continuàvem sense cap idea que ens interessés. A conseqüència d'aquest fet, vam demanar ajuda al nostre tutor, en Pedro Román, qui ens va oferir un llistat de treballs de recerca sobre les matemàtiques.

En un primer instant, la idea de centrar el nostre treball al món de les matemàtiques no ens acabava de convèncer del tot, ja que no ens vàiem capaces d'assolir un treball així pel fet que no teníem suficients coneixements sobre aquest àmbit. Tot i això, la idea d'enfocar-ho als nens petits va fer que ens acabés d'agradar. Així doncs, vam acceptar el repte. El desenvolupament d'aquest treball ens ha permès familiaritzar-nos amb el món de les matemàtiques.

En el nostre treball hem volgut ensenyar la geometria de les matemàtiques d'una altra manera més divertida i màgica. Per a aconseguir això, hem utilitzat bombolles de sabó, ja que pensem que aquest objecte atrau a tota mena de persones, tant petits com adults. Volíem aplicar coneixements del nostre àmbit per aprendre i incorporar aspectes en aquest projecte que possiblement necessitarem en un futur. Desitjàvem, també, poder ensenyar nous coneixements als alumnes mitjançant medis que estan al nostre abast. Som conscients que els coneixements que li donarem a un nen no seran els mateixos que als d'un adult. Per això, vam haver de raonar per a quin grup d'edats volíem fer les nostres sessions, perquè, depenent de quina fos, ens enfrontaríem a diferents classes de coneixements. Vam pensar en començar fent sessions amb els més petits i més endavant anar augmentant el nivell del nostre treball fins allà on puguem arribar. Gràcies a aquestes bombolles podrem atreure l'atenció d'aquests i així aconseguir que mostrin més interès per aquesta matèria. El nostre propòsit final és poder adaptar aquest treball per a totes les edats com seria parvulari fins a batxillerat. Hem decidit fer-ho així, ja que les sessions pels més petits ens ajudaran a agafar la base del treball, a veure com podem realitzar una presentació dinàmica, i a aprendre dels errors comesos en aquestes sessions. Un cop els millorem i ja tinguem la base, seguirem fent sessions amb batxillerat, ja que és una edat propera a la nostra; d'aquesta manera, podrem veure més fàcilment si els coneixements que donem finalment són aptes i entesos. D'aquesta manera esperem aconseguir que tots ells s'endinsin més en aquest món divertit de les matemàtiques!

En un principi, ens vam adonar que no totes nosaltres compartíem els mateixos gustos i motivacions respecte al treball. Però més tard, posant sobre la taula diferents interessos i buscant punts en comú o semblances per poder combinar els diferents aspectes, vam pensar que la idea d'ensenyar les matemàtiques mitjançant bombolles de sabó abastaria tot el que realment ens agrada, des de l'àmbit matemàtic fins a l'ensenyament d'aquestes matemàtiques als alumnes. Tot i ser tecnòlogues, vam decidir enfocar el treball a l'ensenyament mitjançant una manera creativa i innovadora: les bombolles de sabó.

Una vegada escollit el projecte a realitzar, vam pensar en les fases que més endavant emprariem per dur a terme la nostra investigació.

Vam dividir el projecte en els següents apartats:

1. Recercar informació de llibres relacionats amb aquest tema, i posar-nos en contacte amb l'Anton Aubanell, un home molt endinsat en aquest món de les bombolles i el qual vam assistir a una conferència per veure si realment volíem realitzar aquest treball.

2. Dissenyar les diferents estructures geomètriques: cub, tetràedre i l'octàedre, en un programa anomenat "Autodesk fusion 360" per ser impreses més tard en 3D. Però més endavant ens vam adonar que econòmicament era millor construir-les amb l'ajuda dels treballadors de la fàbrica "Reicol, S.C.P." on es dediquen a fer instal·lacions metàl·liques inoxidables.

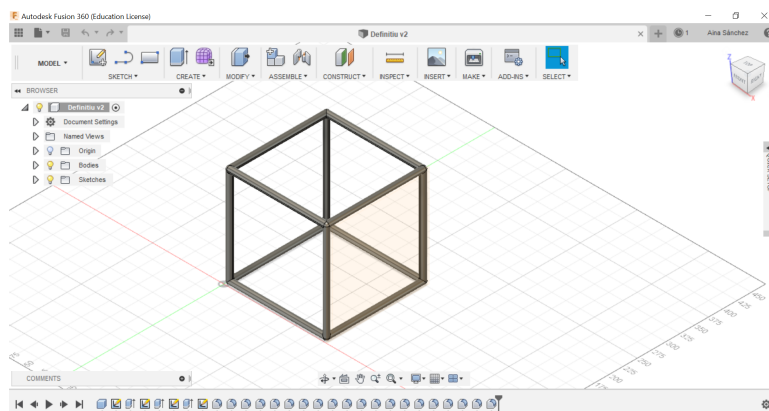


Figura 1: Disseny del cub amb el programa "Autodesk fusion 360."

3. Construir les diferents estructures de 2D realitzades amb metacrilat i cargols juntament amb les seves respectives rosques de 50mm de tal manera que fixessin les dues plaques deixant entre elles una distància de 3,5 cm. En total vam crear 3 dissenys; un en forma de quadrat, l'altre de triangle i, finalment, un hexàgon. Totes aquestes estructures van ser fetes gràcies a l'ajuda del taller *Félix Pozo*, una fusteria d'alumini.

4. Realitzar la barreja de sabó, glicerina i aigua tenint en compte els diferents càlculs amb els seus respectius percentatges de quantitat.

5. Preparar les diferents sessions per les diferents edats i dur-les a terme.

6. Realitzar els diferents càlculs matemàtics que aquestes bombolles amaguen; aprendre sobre la tensió superficial, la càrrega electroestàtica, les distàncies mínimes... i tot allò que se'ns presenti al llarg del nostre treball.

7. Redactar la memòria del treball.

8. Fer la presentació i preparació oral.

Per realitzar el nostre projecte haurem de plantejar-nos una sèrie de reptes que intentarem superar. També caldrà aprendre a utilitzar els diversos coneixements matemàtics, i fins i tot, físics i químics, que necessitarem aplicar al llarg del nostre projecte.

Capítol 3

3 Objectius

3.1 Objectius conceptuals

- Assolir els coneixements de la tensió superficial, de la càrrega electrostàtica i el punt de Fermat.
- Investigar i arribar a entendre el comportament de les bombolles en les diferents figures.
- Assolir els coneixements informàtics de *Geogebra* i de *ShareLatex*.
- Informar-nos de quins coneixements poden arribar a assolir els alumnes de diferents edats per posteriorment posar-ho en pràctica.
- Aprendre a gestionar els recursos del projecte, els diners invertits pels components necessaris.
- Arribar a assolir tots els càlculs que se'ns plantegen al llarg del treball.
- Informar-nos de la quantitat de sabó, aigua i glicerina necessària per a què la barreja sabonosa sigui factible.

3.2 Objectius procedimentals

- Demostrar i fotografiar en diferents estructures el punt de Fermat.
- Creació de figures geomètriques tridimensionals amb el programa "design" per posteriorment imprimir-les en la impressora 3D.
- Creació de figures geomètriques tridimensionals amb acer inoxidable.
- Creació de figures geomètriques amb filferro.
- Creació de les figures geomètriques en dues dimensions amb plaques de metacrilat
- Calcular els percentatges de cada element necessari per a crear la barreja sabonosa.
- Informar-nos de la llei de Plateau.
- Calcular les diferents comprovacions i demostracions dels angles de 120° .
- Informar-nos i crear un exemple del problema de Steiner amb la seva solució.

3.3 Objectius actitudinals

- Treballar com un equip que es complementa a l'hora de fer el treball fent que cada membre del grup faci una feina equitativa a la d'altres membres del grup, així com un equip cohesionat. Al mateix temps, ajudar-nos mútuament en el cas que tinguem problemes i/o dificultats.
- Mantenir constància a l'hora de treballar per tal d'acabar realitzant un bon treball de recerca.
- Arribar a escoltar les opinions dels membres del grup per a poder trobar la millor solució.
- Ser conscients dels diners invertits i gastats per després poder distribuir-los adequadament.
- Evitar qualsevol mena de disputa que es pugui crear.

Capítol 4

4 Metodologia

Al principi del projecte teníem clar que volíem orientar el nostre treball de recerca cap a noves formes d'aprenentatge, dintre de l'àrea matemàtica, que podrien ser útils pels estudiants, tot i que també hi trobem conceptes físics i químics.

Tot i això, desconexíem totes les matemàtiques que les bombolles ens podrien arribar a ensenyar; per aquest motiu, ens vam posar en contacte amb l'Anton Aubanell, Catedràtic de Matemàtiques i professor, ja jubilat, del departament de Matemàtica aplicada de la Universitat de Barcelona. A conseqüència d'aquesta jubilació, durant el pas dels anys, l'Anton s'ha centrat més amb la màgia matemàtica d'aquestes bombolles, aconseguint l'atracció i ganes d'aprendre de gent de diverses edats. Som conscients que sense l'ajuda de l'Anton aquest treball no hagués estat el mateix, ja que ens ha ajudat amb cada dubte que teníem sense cap inconvenient. És més, sempre ha posat una mostra d'interès cap a nosaltres.

Vam assistir a una conferència que va realitzar a l'institut Valerià Pujol de Premià de Dalt per informar-nos més sobre el tema i poder conèixer a l'Anton en persona i que ens pogués resoldre tots els dubtes que teníem. La seva energia i passió que ens va transmetre ens va despertar molta intriga al nostre interior, creant així unes ganes de seguir endavant amb el nostre treball.

A part d'aquesta imprescindible ajuda, vam recercar més informació a través d'internet i mitjançant diferents llibres, com per exemple: *Las pompas de jabón descubren la geometría*, *What is maths?*. (llibres recercats a la biblioteca de la Universitat de Barcelona). Aquests llibres van ajudar-nos a començar endinsar-nos en aquest món de les matemàtiques dins les bombolles de sabó.

El primer repte que vam voler assolir va ser dissenyar, crear i, finalment, imprimir les figures geomètriques amb la impressora 3D. Més tard, en imprimir una de les figures ens vam adonar que el material no seria el més adient, ja que el fet de treballar amb sabó i glicerina el plàstic acabaria fent-se malbé i, a més a més, el pressupost era bastant elevat. Seguidament, vam pensar en un altre material: l'acer inoxidable. Ens vam posar en contacte amb una empresa d'Argentona anomenada *Reicol* on vam construir totes les peces de 3D necessàries. Cal remarcar que aquesta vegada no ens va suposar cap pressupost.

El segon repte que vam assolir va ser dissenyar i crear les figures en 2D, procurant que el material fos, un cop més, inoxidable. Aquestes van ser possibles gràcies a l'ajuda del taller *Félix Pozo*, situat a Mollet del Vallès.

Una vegada teníem les figures acabades, vam posar-nos a la recerca d'un cubell on les nostres peces hi cabessin completament, ja que sinó no seria possible la creació de la bombolla. Un cop trobat, ens vam posar a fer càlculs per saber quants litres de cada líquid necessitàvem per establir una barreja útil i eficaç per realitzar les bombolles.

El següent repte seria aconseguir, amb les bombolles de sabó, crear les figures geomètriques i comprovar tots els conceptes que ens va explicar l'Anton. Com per exemple, que les bombolles formessin angles de 120° . Aquesta va ser la nostra primera recerca del treball. Aquest coneixement ens va fer arribar altres conceptes com la tensió superficial, el problema de Steiner i el punt de Fermat, principalment. El problema de Steiner ens va cridar molt l'atenció perquè és un concepte el qual s'aplica a la vida real i a més relaciona molts dels coneixements que hem establert. És per això que nosaltres també hem volgut aplicar-ho a l'actualitat creant el nostre propi projecte.

Un cop ja vam posar a prova totes aquestes figures i cada una d'elles feien el que ens esperàvem, vam preparar petites presentacions per diferenciar els nivells de dificultat que el nostre treball comportava i així veure si el nostre treball realment atreia l'interès dels estudiants cap a les matemàtiques. Aquestes presentacions, a part de tenir l'objectiu de l'aprenentatge dels alumnes de diferents edats, també ens van ajudar a millorar el nostre vocabulari dins d'aquest àmbit matemàtic, a agafar pràctica amb les diferents figures geomètriques i a aprendre conceptes que havíem de tenir en compte a l'hora de realitzar una presentació; els corrents d'aire, el temps...

Al llarg del treball hem descobert molts conceptes matemàtics que desconeixem i que primerament pensàvem que no seríem capaces d'assolir com el punt de Fermat, el problema de Steiner, la tensió superficial... A mesura que els anàvem descobrint, fèiem una recerca de cada d'un d'ells, sempre intentant buscar una relació amb les bombolles de sabó.

Un aspecte farragós del nostre treball ha estat l'àmbit de la fotografia. Se'ns ha arribat a fer molt difícil poder realitzar fotografies on s'apreciés clarament les pel·lícules de sabó sense que apareguessin reflexes que fessin complicat poder observar la bombolla amb claredat. L'aire també ha estat un punt al nostre contra per realitzar les fotografies i també per crear les nostres figures, ja que aquest ens ho impedia. Necessitàvem un lloc on no hi hagués corrents d'aire però alhora que hi hagués un llum natural però mantenir aquests dos conceptes és complicat. Un cop vam veure el nivell de dificultat d'aquest, vam decidir treballar a l'ombra, aconseguint així fer un joc de reflexos on es mostren les diferents figures geomètriques clarament.

D'altra banda, ha estat difícil aprendre la tècnica de com arribar a obtenir les diferents figures geomètriques, ja que depenen de com treguis aquestes figures de la barreja no s'aconsegueixen les diferents

formes. Principalment, aquest fet ens ha passat amb l'hexàgon i l'octaedre, mentre que les altres figures han funcionat correctament sense haver de realitzar cap tècnica de gir.

Els mètodes escollits per solucionar els nostres problemes són: la recerca de vídeos, buscar informació a internet, llibres i preguntar al nostre tutor de recerca, altres professors o companys.

Capítol 5

5 Figures geomètriques

**Polígon convex:* Un polígon convex és un polígon en el qual tots els angles interiors mesuren menys de 180° .

Tots els triangles són polígons convexos. Tots els polígons regulars són convexos.

Segons l'amplitud dels seus angles, un polígon pot ser: Convex, si tots els seus angles són menors que 180° . Còncav, si algun dels seus angles és major que 180° .

Les figures geomètriques que treballem són; el cub o hexàedre regular, el tetràedre i l'octàedre, les quals són políedres regulars. Les cares d'aquests són polígons regulars que s'uneixen amb cada vèrtex. Un cos geomètric és una figura que ocupa un espai, és a dir, que té un volum. Tenen tres dimensions: amplada, alçada i gruix. Aquests tres políedres regulars pertanyen al grup dels sòlids platònics, sòlids perfectes o políedres de Plató. Podem observar que els sòlids platònics posseeixen unes característiques, com per exemple, cada sòlid només conté un tipus de polígon com a cara. A part d'això, podem afirmar que en el pla tots els polígons que hi són regulars, també són convexos*.

Aquest grup de sòlids perfectes presenta un seguit de propietats especials que no presenten altres cossos geomètrics, les quals són les següents:

- Totes les seves cares són polígons regulars iguals.
- En tots els seus vèrtexs s'uneixen el mateix nombre de cares i d'arestes.
- Totes les arestes tenen la mateixa longitud.
- Tots els angles dièdres, és a dir, totes les parts delimitades per dos semiplans d'una aresta, són iguals.

5.1 Parts d'una figura geomètrica

5.1.1 Cares

Les cares són les regions que limiten el cos geomètric. Aquestes són tots els polígons que formen un poliedre. Cada cara pot tenir diverses formes o bé poden ser congruents, és a dir, iguals.

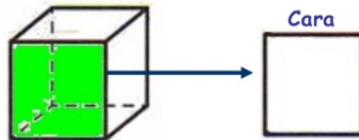


Figura 2: Cara d'un cub.

5.1.2 Arestes

Els costats de les cares són les arestes d'un poliedre. Les arestes són els segments que es formen quan s'uneixen dues cares. Hi ha la possibilitat de trobar un poliedre amb arestes de longitud constant, és a dir, iguals.

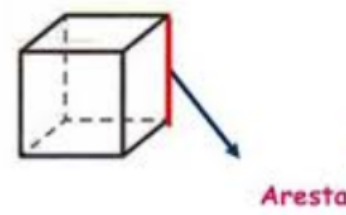


Figura 3: Aresta d'un cub

5.1.3 Vèrtexs

El vèrtex és el punt on es troben almenys tres cares. El nombre de cares a les quals pertany és igual al nombre d'arestes. Per exemple, si un vèrtex es troba amb tres cares, respectivament tindrà tres arestes.

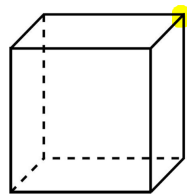


Figura 4: Vèrtex d'un cub

5.1.4 Angles

Un angle ve determinat per dos segments, aquests són els costats de l'angle. Un angle ve caracteritzat per l'obertura dels seus costats. Si l'obertura és petita, l'angle també ho serà. En canvi, si l'obertura és gran, l'angle ja no serà petit sinó que serà major.

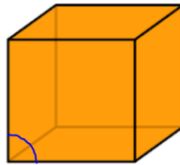


Figura 5: Angle d'un cub

5.2 El tetràedre

El tetràedre regular és un poliedre regular. Un sòlid tridimensional format per quatre cares, les quals s'uneixen mitjançant arestes i es troben cada tres cares en un mateix vèrtex.

Totes les cares d'aquest cos són iguals, per tant, cada cara del tetràedre està formada per triangles equilàters. Sabem que si les seves cares estan compostes per aquests tipus de triangles, els angles que formaran a l'interior seran de 60° . A part, aquesta figura consta de sis arestes i de quatre vèrtexs.

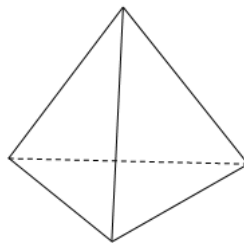


Figura 6: Tetràedre.

5.3 El cub

El cub o l'hexaedre regular és un poliedre, prisma quadrangular. Un sòlid tridimensional format per sis cares, les quals són perpendiculars entre si que s'uneixen per arestes i es troben amb un vèrtex cada tres cares. El cub també pot ser classificat com un paral·lelepípede, és a dir, és un cos tridimensional format per sis paral·lelograms.

Totes les cares d'aquest cos són de forma quadrada. Aquesta figura està formada per sis cares quadrades exactament iguals, això vol dir que cada cara del cub està formada per quatre costats iguals i que cada angle que està format a l'interior és de 90° . Un cub està format per 12 segments. Les 12 arestes del cub tenen la mateixa mida perquè totes les cares són iguals entre elles. L'hexaedre regular té 8 vèrtexs.

Les diagonals són segments que uneixen dos vèrtexs que no pertanyen a la mateixa cara. Per exemple, es pot crear una diagonal del vèrtex de la primera cara fins al vèrtex oposat. L'hexaedre regular conté 4 diagonals, les quals únicament tallen en un punt que anomenarem el centre de l'hexaedre. figura consta de sis arestes i de quatre vèrtexs.

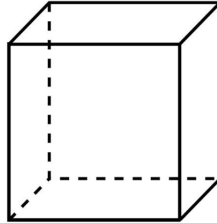


Figura 7: Cub.

5.4 L'octàedre

Un octàedre regular és un poliedre regular, un sòlid tridimensional format per vuit cares, les quals s'uneixen mitjançant arestes i es troben cada quatre cares en un mateix vèrtex. Totes aquestes són iguals, això implica que cada cara de l'octàedre està formada per triangles equilàters. Com ja sabem, aquests triangles formen angles al seu interior de 60° . A part, aquesta figura consta de sis vèrtexs i dotze arestes.

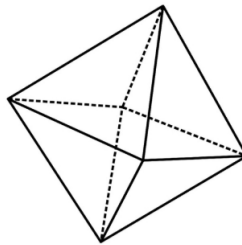


Figura 8: Octàedre.

Capítol 6

6 Components

Per tal de realitzar la nostra barreja, la qual portarà a terme les nostres bombolles de sabó, necessitarem un 65% d'aigua, un 25% de fairy i un 10% de glicerina.

Un cop sabem els percentatges, calculem quants litres de cada líquid necessitem en proporció als litres totals que hi caben al cubell.

Primerament vam fer els càlculs comptant que ompliríem el cubell fins al seu màxim, 16 litres, però una vegada fet, ens vam adonar que necessitàvem massa quantitat de cada líquid, per tant el pressupost ens sortia bastant elevat. Així doncs, ens vam posar en contacte amb l'Anton Aubanell perquè ens recomanés una quantitat de litres que ens sortís més econòmic. Una vegada ens va informar que ell omplia la seva galleda amb només deu litres, ens vam posar a calcular.

$$65\% \cdot \frac{10l}{100\%} = 6,5l$$

$$25\% \cdot \frac{10l}{100\%} = 2,5l$$

$$10\% \cdot \frac{10l}{100\%} = 1l$$

6.1 Propietats dels líquids

6.1.1 Aigua

L'aigua ha de ser, preferiblement, de l'aixeta, ja que té una duresa, gràcies als seus minerals, que la fa ideal perquè les bombolles siguin resistents a la grandària i no explotin en estirar-se.

6.1.2 Glicerina

La glicerina és un líquid compost de sucre i alcohol (el producte químic pur s'anomena glicerol, mentre que al producte comercial s'anomena glicerina) és un compost orgànic format per hidrogen, carboni i oxigen ($C_3H_8O_3$). És un líquid viscos, inodor i incolor, a més a més és hidrosoluble, de manera que es pot dissoldre en aigua. També és humectant, per tant manté i reté la pròpia humitat de la bombolla, fent que duri més aquesta.

La funció principal de la glicerina en el nostre treball és aconseguir, com hem dit anteriorment, que la bombolla sigui més resistent, aconseguint així que aguanti el màxim de temps possible.

6.1.3 Sabó

El sabó disminueix la tensió superficial fins a aproximadament un terç de la tensió superficial de l'aigua pura. El sabó no reforça les bombolles, sinó que les estabilitza mitjançant el mecanisme anomenat efecte Marangoni (és la transferència de massa en una interfase entre dos fluids a causa d'un gradient de tensió superficial). Aquest ajuda a formar la capa de la bombolla gràcies a les molècules tensioactives de la seva fórmula química. Aquestes molècules són els principals causants de les bombolles i la seva estructura. En estirar la pel·lícula de sabó, la concentració de sabó disminueix, el que fa que augmenti la tensió superficial. Així, el sabó reforça selectivament les parts més febles de la pompa i evita que s'estirin més. A més, aquest redueix l'evaporació fent que les bombolles durin més, encara que aquest efecte és relativament petit. Poden haver-hi diverses solucions minimalis i podrem saltar d'una a l'altra comunicant energia (movent, bufant, etc).

El sabó no només és útil per estabilitzar la bombolla, sinó que, a més a més, la fa més estètica donant-li brillantor.

Capítol 7

7 Bombolla

7.1 Definició

Una bombolla de sabó és una porció d'aire envoltada per una capa d'aigua amb un element tensioactiu (sabó o detergent). En funció de les condicions en les quals es formi, la bombolla pot adoptar diverses formes: esfèrica, ovalada, semiesfèrica, etc.

Una bombolla de sabó és una capa de líquid formada per dues pel·lícules molt primes de sabó i aigua que tanquen una certa quantitat d'aire a dins formant així la forma d'una esfera amb una superfície que és iridescent. La iridescència és un fenomen òptic caracteritzat per la propietat de certes superfícies que semblen canviar gradualment de color a mesura que varia l'angle des del qual s'observa la superfície. El termini de temps per a què una bombolla s'esvaeixi és molt curt, aquesta es pot esvair a causa de diferents factors. Una d'aquestes és perquè la bombolla s'ha posat en contacte amb una altra superfície. L'altra, en canvi, succeeix perquè les bombolles, a mesura que va passant el temps, es van ajustant a la tensió superficial fent així que no en totes les seves parts la bombolla tingui la mateixa grossor, el fet que hi hagi més concentració de tensió superficial en una part, farà que la làmina d'aquella part hi sigui cada vegada més petita fins que s'acabi produint així la seva pròpia ruptura.

7.2 Estructura

Una bombolla pot existir perquè la capa superficial d'un líquid té certa tensió superficial. Una bombolla feta només amb líquid pur, per exemple, no és estable i és per això que es necessita un tensioactiu dissolt.

Les pel·lícules d'una bombolla estan formades bàsicament per una fina capa d'aigua retinguda entre dues capes de molècules tensioactives, en aquest cas molècules de sabó. Les dues coses que permeten la formació d'aquests tipus d'estructures són les substàncies tensioactives i la tensió superficial.

En posar el sabó, les molècules del tensioactiu es col·loquen a la superfície interna i externa de la bombolla, amb els caps hidròfobes cap a l'aire, aquelles que repel·leixen l'aigua, i les hidròfiles cap a l'aigua, les quals són les que es troben atretes a aquesta.

En la següent imatge podem observar un exemple de com estan col·locades les molècules del tensioactiu i les molècules de l'aigua. Les molècules del sabó es divideixen en l'aigua en partícules de càrrega positiva (+) i en partícules de càrrega negativa (-). Les partícules de càrrega negativa consisteixen de caps hidròfiles i de cues hidròfobes.



Figura 9: Col·locació molècules del tensioactiu i de l'aigua.

Podríem pensar que a causa de la poca força d'unió entre ambdues molècules podria provocar que aquesta estructura es trenqués abans, però aquest no és el cas. Quan la paret de la bombolla s'estreny, queda menys aigua entre les capes fent que les hidròfiles es traslladin a altres parts on hi hagi més aigua. Com a conseqüència, això farà que la tensió superficial augmenti, en canvi, on hi ha més aigua ara també hi haurà més molècules de sabó fent que la tensió disminueixi. D'aquesta manera, el comportament del sabó afavoreix a aquesta estructura, ja que la fa fer més estable, la paret de la bombolla reforça les zones dèbils i debilita les fortes.

Però, perquè són rodones? Els líquids sempre tendeixen a reduir la seva superfície, això és a causa de la tensió superficial. Així doncs, si un volum de líquid es deixa lliure a l'aire, prendrà una forma tal que tingui la mínima superfície possible. Simplement succeeix perquè és la manera més senzilla, la forma esfèrica és aquella que requereix menys energia per a poder-se formar. És la figura geomètrica que té la menor superfície per a un volum donat.

Aquesta forma pot ser distorsionada visiblement pels corrents d'aire, i per descomptat, per una bufada. Quan un cos en caiguda ha arribat a la seva velocitat terminal, la força d'arrossegament que actua sobre ell és igual al seu pes, i com el pes d'una pompa és molt més petit amb relació a la seva grandària que el d'una gota de pluja, la seva forma es distorsiona molt menys.

7.3 Física

7.3.1 Unió

Quan dues bombolles s'uneixen s'apliquen uns principis físics, en els quals les bombolles realitzen la forma amb la menor àrea possible. La seva paret comuna es desplaçarà i integrarà amb la bombolla de major grandària; aquest fet només succeirà si les dues bombolles són més o menys de la mateixa grandària.

Si observem quan s'agrupen moltes bombolles, podrem veure que es col·loquen de manera que només tres parets s'uneixen en una mateixa línia separada per angles de 120° . La superfície d'unió és hexagonal, no corba, ja que si fossin corbes, deixarien molts espais lliures i, en canvi, en aplanar-se en forma d'hexàgon, tornen a tenir les formes més estables.



Figura 10: Unió de les bombolles.

7.3.2 Interferència i relació

Els colors que hi observem en una bombolla de sabó són a causa de la interferència entre la llum reflectida en cada una de les seves cares. Per a poder comprendre els colors que presenten les bombolles de sabó, primer haurem de saber alguns conceptes sobre la llum i la seva manera d'actuar sobre les pel·lícules de les bombolles. Gràcies a la teoria de Maxwell sabem que la llum és una ona electromagnètica. Actualment, hi podem trobar diferents tipus d'ones electromagnètiques, les unes de les altres es diferencien amb la longitud de l'ona, la qual és la distància que hi ha entre crestes consecutives. Aquestes longituds d'ones van dels 400nm als 700nm (nanòmetres = $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$).

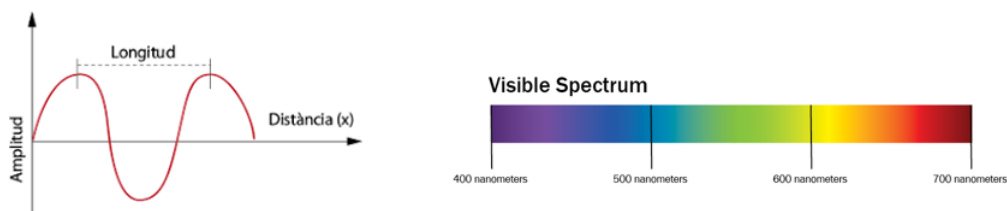


Figura 11: Espectre visible.

Parlant ja sobre la bombolla de sabó, recordem que aquesta està formada per dues pel·lícules i composta pel sabó i l'aigua. Una part de la llum que arriba a la bombolla és reflectida a la superfície exterior,

per altra banda, l'altra part es veu reflectida a la superfície interior. La llum reflectida total és la superposició de les dues ones, aquestes generen interferència, constructiva per alguns colors i destructiva per a altres, depenent de la grossor de les pel·lícules.

Si a l'hora de combinar-se les crestes de les ones coincideixen en posició, s'obindrà com a resultat una ona encara més gran i hi haurà llum. Aquest efecte s'anomena "interferència constructiva". Si pel contrari, una de les dues ones té els seus màxims coincidents amb els mínims de l'altra, en sumar-los es cancel·laran i no s'obindrà llum. Aquest efecte s'anomena "interferència destructiva". A la següent fotografia podem observar-ho gràficament:



Figura 12: Interferència constructiva i destructiva.

7.4 Càrrega electrostàtica

L'electroestàtica és una branca de la física que estudia els fenòmens produïts per distribucions de càrregues elèctriques. Tots els cossos tenen propietats elèctriques, aquestes propietats, es manifesten quan els cossos adquireixen càrrega elèctrica.

7.4.1 Càrrega elèctrica (Q)

Les càrregues són les encarregades dels efectes electroestàtics que es generen entre dos cossos diferents que la posseeixen.

La matèria d'aquests cossos està formada per partícules anomenades àtoms. Aquests àtoms són constituïts per la zona central, la qual anomenem nucli. Dins d'aquest nucli, podem trobar les partícules positives, els protons i també hi trobem les partícules neutres, els neutrons. A part d'això, també hi trobem electrons, aquests però no hi estan situats a la mateixa posició, sinó que es troben situats a les òrbites elèctriques, és a dir, al voltant del nucli.

En la majoria dels casos trobem que tots els cossos tenen electricitat neutra, és a dir, que la quantitat d'electrons i protons que presenta un cos, és la mateixa i per tant la seva càrrega és zero, $Q=0$. Però no sempre són neutres, a vegades trobem cossos que guanyen o perden electrons, quan hi succeeix aquest desequilibri, és quan es produeix l'electricitat elèctrica. Els cossos que hi guanyen electrons, tenen una desigualtat, ja que ara en el cos hi trobem més electrons que no pas protons, com que hi ha més electrons la càrrega serà negativa, Q^- . Al contrari, els cossos que hi perden electrons, tenen una desigualtat, ja que hi trobem més protons que no electrons, en aquest cas, com que hi trobem més protons, la càrrega serà positiva, Q^+ .

En els casos en els quals la càrrega no és neutra, hi trobem que actua la força elèctrica atractiva o la

força elèctrica repulsiva. La força elèctrica repulsiva actuarà només si les càrregues dels dos cossos són iguals, ja tinguin els dos una càrrega negativa o una positiva. En el cas de l'altra força, la força elèctrica atractiva, apareix només si els dos cossos tenen càrregues diferents, és a dir, que un cos tingui càrrega positiva i l'altra càrrega negativa. Gràcies a la llei de Coulomb, sabem que s'atrauen o es repel·leixen amb una força que és directament proporcional al producte de les seves càrregues i proporcional al quadrat de la distància que els separa.

La unitat de la càrrega elèctrica en el sistema internacional és Coulomb (C).



Figura 13: Forces repulsives i forces atractives.

A causa d'aquesta càrrega electroestàtica aconseguim que les bombolles quan interaccionen amb un objecte de llana, com seria un jersei, aquestes es rapelin. Quan freguem el jersei estem provocant que aquest tingui una càrrega negativa la qual fa repel·lir els electrons de les capes exteriors dels àtoms de la bombolla, ja que com hem dit abans, els electrons posseeixen una càrrega negativa i sabem que dues càrregues del mateix signe es rapelen. Per aquest motiu, reboten sobre el guant sense que exploti.



Figura 14: Electroestàtica entre la bombolla i el guant.

Capítol 8

8 Tensió superficial

Molts cops, els problemes de recorreguts màxims i mínims són difícils de resoldre. Però, és suficient una dissolució sabonosa per poder arribar a conèixer la superfície mínima de qualsevol figura. Plateau en el segle XIX, va resoldre i enunciar les lleis que regeixen el comportament de minimitzar esforços que utilitza la natura, ja que les lleis de la natura actuen de manera que minimitza longituds i superfícies. I com bé va dir en Pierre-Luís Moreau de Maupertuis el 1744, *La natura opera sempre amb la màxima economia*.

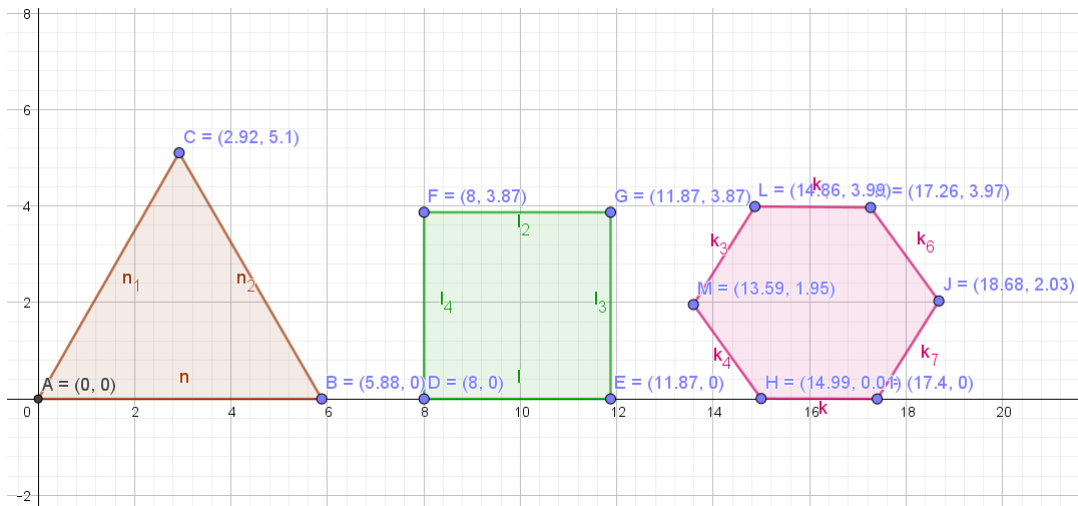
Això es pot veure reflectit en les abelles, ja que el seu objectiu és emmagatzemar la quantitat més gran de mel amb el mínim consum de la seva apreciada cera. Per això l'emmagatzemen en forma d'hexàgon, ja que és la forma plana que pren la natura i és la de major eficiència, perquè recobreix tot el pla i la seva superfície és la que té menys perímetre de totes elles.



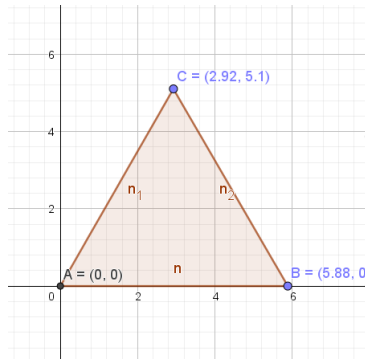
Figura 15: Lloc on les abelles emmagatzemen la mel.

A través de càlculs podem veure que de tres polígons regulars que recobreixen el pla, el que té el mínim perímetre, tot i que tots tres tenen més o menys la mateixa àrea, és l'hexàgon.

Càlcul de l'àrea i el perímetre del triangle, el quadrat i l'hexàgon regulars:



- Triangle:



Signi $A = (a_1, a_2) := (0, 0)$; $B = (b_1, b_2) := (5'88, 0)$; $C = (c_1, c_2) := (2'92, 5'1)$ els vèrtexs del triangle.

Signi el vector $\vec{n} = (n_1, n_2) = \vec{AB} = \vec{AC} = \vec{BC}$

Calculem aquest vector: $\vec{n} = \vec{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2) = (5'88 - 0, 0 - 0) = (5'88, 0)$

Calculem el seu mòdul: $n = |\vec{AB}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = \sqrt{5,88^2} = 5,88u.m$

- Calculem el perímetre: P_t

$P_t = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC} = \vec{AB} \cdot 3 = 5,88u.m. \cdot 3 = 17,64u.m.$

- Calculem l'àrea: A_t

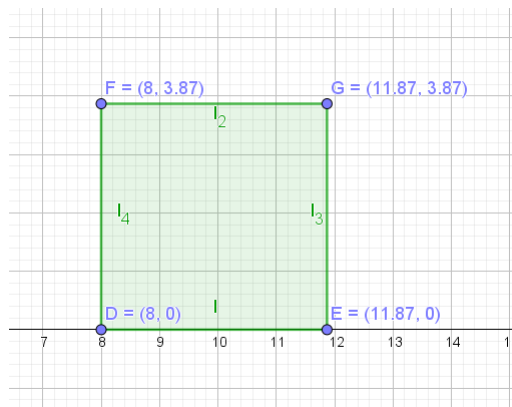
Calculem l'altura, h:

Com que el triangle és regular, tots els seus angles són de $\alpha = 60^\circ$, per tant,

$\sin\alpha = \frac{h}{AC} \Rightarrow h = \sin\alpha \cdot AC = \sin(60^\circ) \cdot 5,88u.m. = 5u.m.$

$A_t = \frac{\vec{AB} \cdot h}{2} = \frac{5,88u.m \cdot 5u.m}{2} \simeq 15u.m^2. (I)$

- Quadrat:



Signi $D = (d_1, d_2) := (8, 0)$; $E = (e_1, e_2) := (11'87, 0)$; $F = (f_1, f_2) := (8, 3'87)$; $G = (g_1, g_2) := (11'87, 3'87)$ els vèrtexs del quadrat.

Signi el vector $\vec{l} = (l_1, l_2) = \vec{DE} = \vec{EG} = \vec{FG} = \vec{FD}$

Calculem el vector: $\vec{l} = \vec{DE} = (e_1 - d_1, e_2 - d_2) = (11,87 - 8, 0 - 0) = (3'87, 0)$

Calculem el seu mòdul: $l = |\vec{DE}| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = \sqrt{3,87^2} = 3,87u.m$

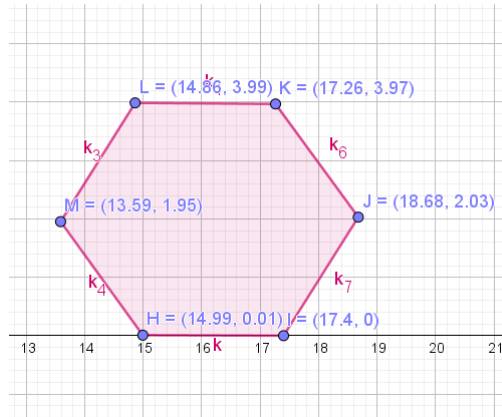
- Calculem el perímetre: P_q

$$P_q = \vec{DE} + \vec{EG} + \vec{FG} + \vec{FD} = \vec{DE} \cdot 4 = 3,87u.m. \cdot 4 = 15,48u.m$$

- Calculem l'àrea: \hat{A}_q

$$\hat{A}_q = \overline{DE^2} = 3,87^2 u.m. \simeq 15u.m^2$$

- **Hexàgon:**



Sigui $H = (h_1, h_2) := (14'99, 0); I = (i_1, i_2) := (17'4, 0); J = (j_1, j_2) := (18'68, 2'03); K = (k_1, k_2) := (17'26, 3'97); L = (l_1, l_2) := (14'86, 3'99); M = (m_1, m_2) := (13'59, 1'95)$ els vèrtexs de l'hexàgon

Sigui el vector $\vec{k} = (k_1, k_2) = \vec{HI} = \vec{IJ} = \vec{JK} = \vec{KL} = \vec{LM} = \vec{MH}$

Calculem el vector: $\vec{k} = \vec{HI} = (i_1 - h_1, i_2 - h_2) = (17'4 - 14'99, 0 - 0) = (2'41, 0)$

Calculem el seu mòdul: $k = |\vec{HI}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \sqrt{2,41^2} = 2,41u.m$

- Calculem el perímetre: P_h

$$P_h = \vec{HI} + \vec{IJ} + \vec{JK} + \vec{KL} + \vec{LM} + \vec{MH} = \vec{HI} \cdot 6 = 2,41u.m \cdot 6 = 14,46u.m$$

- Calculem l'àrea: \hat{A}_h

Calculem altura, h:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\frac{k}{2}} \Rightarrow h = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{k}{2} = \operatorname{tg}(60^\circ) \cdot \frac{2,41u.m}{2} = 2,07u.m$$

$$\hat{A}_h = \frac{\text{perímetre} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{14,46 \cdot 2,07}{2} \simeq 15u.m^2$$

Queda demostrat que l'hexàgon és el polígon regular que recobreix el pla amb el perímetre menor.

Per tant, les bombolles de sabó també són esfèriques, perquè segueixen la llei de la natura. És la forma més eficient, la que economitza sabó, és a dir la que donat un volum fixat és la que té la superfície mínima. Per aquest motiu, Plateau va escollir per fer-ne experiments amb elles. Una de les observacions que va fer i ha estat de gran importància per a les matemàtiques, és la següent: "si introduïm una estructura tancada en una dissolució sabonosa, sempre es formarà una pel·lícula de sabó, la superfície de la qual serà minimal".

Això és a causa del fet que les molècules dels líquids exerceixen entre elles unes forces d'atracció que es diuen forces de cohesió; aquestes forces són les que expliquen, la tensió superficial.

La tensió superficial és l'efecte físic que tenen els líquids; aquest fa que la superfície d'un líquid es comporti com una membrana elàstica. Gràcies a aquesta propietat, fa possible que la majoria dels líquids resisteixin una força externa, a causa de la naturalesa de les seves molècules. És a dir, quan un recipient es troba en repòs, formen una superfície gairebé plana que es pot deformar sense la necessitat de trencar-se, fent així que puguin suportar petits pesos i tensions. La superfície dels líquids mai no és horitzontal, sinó corba. Aquesta corba rep el nom de menisc. Alguns líquids, com l'aigua, tenen menisc còncav, i altres, com el mercuri, el tenen convex. Això passa a causa de l'atracció que senten les molècules dels líquids entre elles.

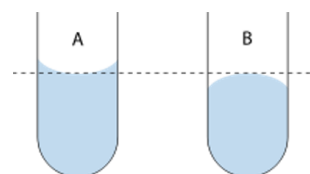


Figura 16: Representació del menisc que pot posseir l'aigua. L'A, representa el menisc còncav. La B, en canvi, representa el menisc convex.

Les forces de cohesió que hi ha entre les molècules són compartides amb altres que es troben al voltant d'aquestes. Aquelles que es troben a la superfície no tenen molècules del mateix element a sobre, per aquesta raó, aquestes exerceixen forces atractives més fortes sobre les molècules que tenen al voltant.

En una mostra d'aigua, per exemple, hi trobem dos tipus diferents de molècules, aquelles que es troben a l'interior i aquelles que es troben a la superfície. Totes aquestes tenen l'objectiu d'aferrar-se les unes a les altres, però hi ha un problema; les que es troben a la superfície, en canvi, tenen menys possibilitats d'aferrar-se a altres, ja que sobre elles no hi ha molècules del mateix element, d'aigua, sinó que es troba per exemple l'aire. Les molècules que es troben a l'interior són les que sentiran atracció per totes les altres molècules que les envolten en totes direccions, formant així "bons". D'altra banda, les que es troben a la superfície, compensen el fet que no es poden aferrar amb tantes establint enllaços encara més forts amb les que si es poden aferrar, això comporta la formació de la tensió superficial.

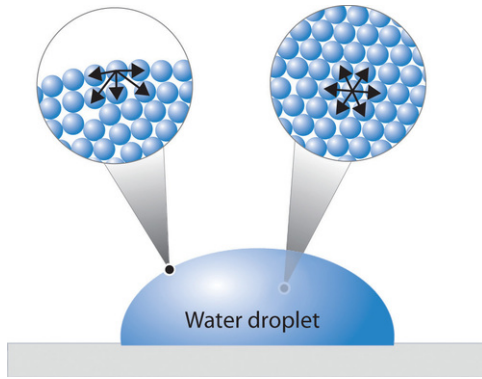


Figura 17: Comportament molècules a l'interior i a la superfície.

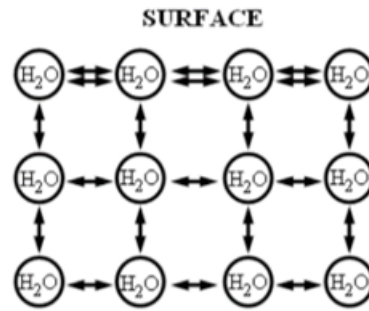


Figura 18: Molècules de la superfície exercint enllaços més forts

Les molècules que es troben a l'interior, a conseqüència d'estar atretes les unes amb les altres, causarà que no hi hagi cap mena d'experimentació d'alguna força neta de cohesió, ja que s'anul·len. Això comporta que les molècules es puguin moure lliurement.

Les molècules que es troben situades a la superfície del líquid, estan sotmeses per una força neta interior perquè no hi ha cap força atractiva que actuï des de dalt, des de l'exterior. Aquesta força fa que les molècules es contreguin i es resisteixin a trencar-se. Com hem comentat abans, gràcies a això, la superfície podrà suportar petites masses d'objectes, els quals tenen una densitat major a l'aigua. Les partícules del recipient exerceixen més força d'atracció sobre les partícules del líquid, serà còncau, però si les partícules del líquid exerceixen més força d'atracció sobre les del recipient, serà convex.

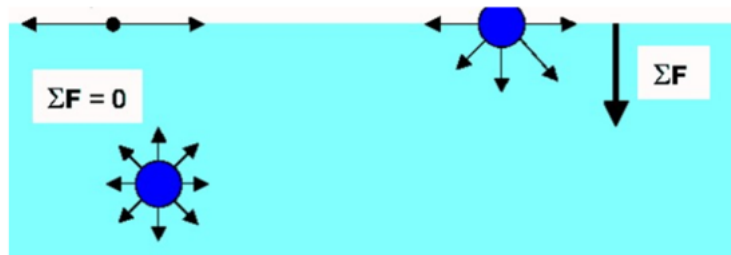


Figura 19: Forces d'atracció sobre les molècules.

Si ens fixem en les gotes d'aigua d'una aixeta, les seves formes són gairebé esfèriques, ja que les molècules que estan en la superfície que envolta la gota estan sotmeses a una atracció que tira cap a l'interior. Però en realitat no formen una esfera perfecta, ja que estan deformades pel seu propi pes i per la resistència de l'aire. Però si eliminem el pes de l'aigua, és a dir, en un entorn sense gravetat com el de l'espai, els líquids formarien aquestes esferes perfectes.

D'altra banda, com ja sabem, trobem que per fer una bombolla necessitem l'ajuda del sabó. Aquest sabó un dels efectes que té és la reducció de la capacitat elàstica de la superfície de l'aigua, és a dir, que redueix la tensió superficial, però no l'elimina del tot. És per això que és possible arribar a fer bombolles. (el responsable químic del sabó que provoca aquest fet és una molècula anomenada Surfactant, aquesta molècula és allargada, amb un extrem que és atret per l'aigua). No obstant això, l'efecte més important del sabó en les bombolles és que estableix la capa d'aigua per mantenir l'estructura de la bombolla més temps.

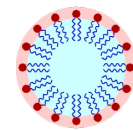
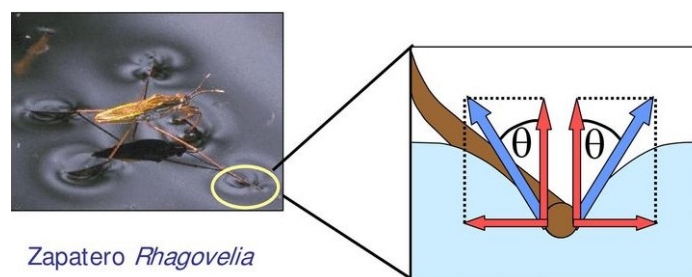


Figura 20: Molècula anomenada Surfactant.

Per veure com un tensioactiu redueix la capacitat elàstica de l'aigua, podem fer un experiment. En aquest s'agafen dos gots, un omplert d'aigua i un altre d'aigua i sabó. A continuació procedirem a afegir talc al recipient omplert d'aigua. En aquest observarem que el talc es queda a la superfície del líquid, no s'enfonsa. Això succeeix a causa de la seva densitat que és major que la de l'aigua. En canvi, si afegim talc a l'altre recipient, omplert de sabó i aigua, veiem que aquest s'enfonsaria. En el segon cas queda demostrat que el sabó redueix la tensió superficial del líquid, en aquest cas de l'aigua.

Un altre exemple seria que gràcies a la tensió superficial, explicada anteriorment, permet a alguns éssers vius com el Sabater desplaçar-se sobre l'aigua, ja que el seu pes és molt petit i a més perquè aquest insecte conté extrems hidròfobs a les seves potes, la funció d'aquests és repel·lir l'aigua. També hi trobem que hi ha certs escarabats del gènere *Stenus*, no només caminen sobre aquesta sinó que també són capaços de deixar anar un líquid que conté sabó. Això ho utilitzen com a estratègia per fugir dels seus depredadors, ja que com hem dit, el sabó disminueix la tensió superficial de l'aigua provocant així que l'animal que ve per darrere s'enfonsi.



Zapatero *Rhagovelia*

Figura 21: Exemple de la capacitat elàstica de l'aigua.

D'altra banda, gràcies al sabó i a la seva laminació podem observar quines seran les formes que donaran les superfícies mínimes, és a dir podem visualitzar que, submergint una estructura dins d'un cubell ple de sabó, la forma que obtindrem serà aquella que tingui una menor superfície.

Podem posar de manifest aquesta tendència mitjançant un petit però vistós experiment en el qual es

tensa un fil unit a una estructura de filferro:

Com observem a les dues primeres fotografies, en submergir l'estructura, obliguem que el fil que hi ha penjant pugi i s'ajusti a l'estructura, al perímetre del filferro, per així reduir la seva superfície. Si agafem el fil i el tirem cap a baix, fent que la seva superfície augmenti i a continuació ho deixem anar, el fil tornarà a tendir a la seva posició inicial, és a dir, a obtenir la mínima superfície.

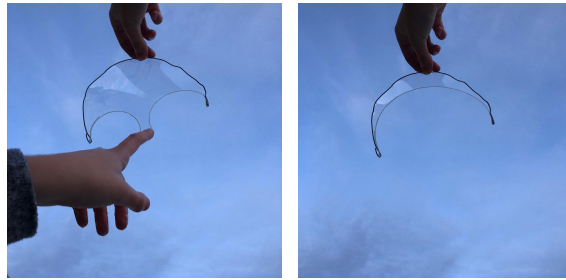


Figura 22: Exemple de tensió superficial 1.

En la segona demostració, ens centrem en les altres dues fotografies. Quan submergim l'estructura, la qual té una forma circular i en el seu interior un fil que forma un cercle, observem que el fil es queda flotant sobre la pel·lícula. En canvi, si fem explotar l'interior del cercle del fil, veurem que el cercle s'engrandeix, causant així que la pel·lícula de sabó que hi ha al seu voltant adopti la superfície mínima.



Figura 23: Exemple de tensió superficial 2.

Per tant, per efecte de la tensió superficial les superfícies que formarà l'aigua amb sabó sempre seran mínimes. Observem que hem passat d'una idea física a una idea matemàtica, el de trobar mínims. Però aquesta vegada sense fer derivades i problemes d'optimització, simplement submergint estructures dins del sabó.

Capítol 9

9 Distàncies mínimes

Els recorreguts mínims busquen aconseguir un camí entre dos vèrtexs o més en els quals la suma de les longituds dels segments que els formen sigui la mínima.

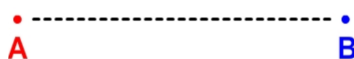


Figura 24: Segment rectilini.

Un segment rectilini és el trajecte més curt entre dos punts del pla. En canvi, anomenem línia ortodròmica aquella que ens mostra el trajecte més curt entre dos punts de la superfície d'una esfera; és l'arc de cercle màxim, menor de 180° , que els uneix.

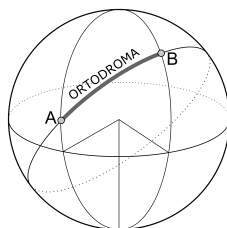


Figura 25: Línia ortodròmica.

9.1 Punt de Fermat

El punt de Fermat és aquell on la suma de les distàncies totals dels vèrtexs d'un triangle fins aquest és mínima. Aquest problema va ser plantejat per Pierre de Fermat a Evangelista Torricelli el qual ho va resoldre i la seva solució va ser publicada pel seu pupil a 1659.

Per tant, si volem saber quin és el recorregut mínim de les nostres figures fins als seus respectius vèrtexs cal trobar el seu punt de Fermat.

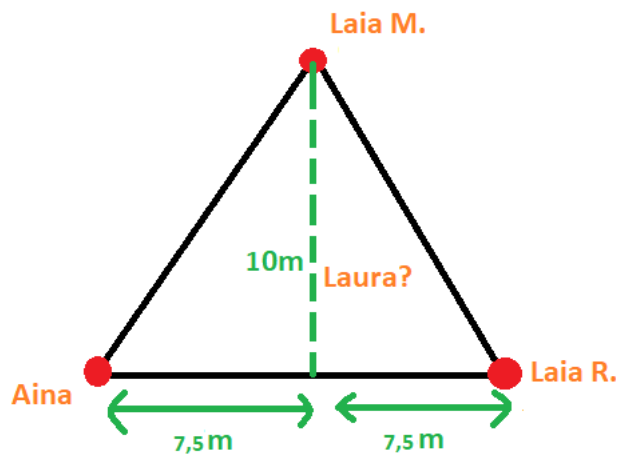
Els segments que uneixen el punt de Fermat amb els vèrtexs del triangle formen sempre entre si angles de 120° , on ho comprovarem a la pàgina 41.

-Plantejament d'un problema

L'entrenador del Júnior femení, en Toni Garcia, de l'escola Sant Gervasi, vol plantejar una millor defensa de la zona de tal manera que acabi reduint els espais al centre del camp, ja que juguen un partit molt important contra l'equip del Mollet del Vallès, i no els hi vol deixar fàcil.

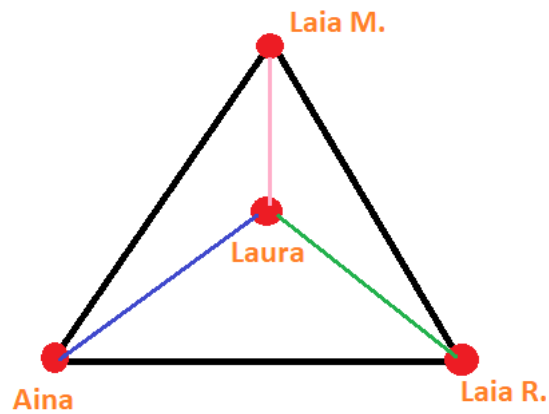
Per això vol posicionar a les seves jugadores de la següent manera:

Aina Sánchez defensarà la part esquerra del camp juntament amb la Laia Robert que defensarà la part dreta del camp, deixant una distància de 15 metres entre elles. Justament al mig d'elles dues, és a dir, a 7,5 metres de l'Aina i de la Laia Robert i alhora a 10 metres per darrere, estarà posicionada la jugadora Laia Miquel. Al centre hi jugarà Laura López.

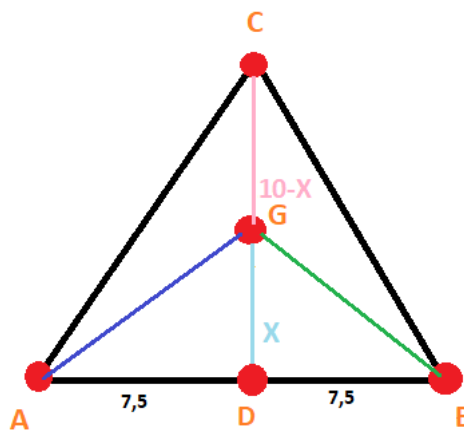


En Toni vol que la distància entre la Laura i les altres tres jugadores sigui mínima per tal de fer una millor pressió contra l'atac de l'equip contrari i cobrir millor l'espai del camp.

Per això, la posició exacta de la Laura serà aquella que la suma de les distàncies entre ella i les altres tres jugadores sigui mínima, per tant, ens reduïrem a estudiar el punt de Fermat.



Sigui Aina Sánchez (A), Laia Robert (B), Laia Miquel (C) i Laura López (G)
 Situem a la Laura (G) en un punt qualsevol de l'altura del triangle, és a dir, just per davant de la Laia Miquel (C).
 Considerarem tots els càlculs treballats expressats en metres (m).



Sabem que $\overline{CG} = 10 - X$ i que $\overline{AD} = \overline{BD} = 7,5$
 Per tant, segons el teorema de Pitàgores pel triangle rectangle $\triangle AGD$:
 $\overline{AG} = \sqrt{\overline{GD}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{X^2 + 7,5^2}$ i també sabem que $\overline{AG} = \overline{BG}$
 Amb aquestes dades calculem la funció $f(X)$ que ens calcula la suma dels tres segments en funció d'on situem a la Laura.

$$f(X) = \overline{CG} + \overline{BG} + \overline{AG} = (10 - X) + \sqrt{X^2 + 7,5^2} + \sqrt{X^2 + 7,5^2} = (10 - X) + 2 \cdot \sqrt{X^2 + 7,5^2}$$

Volem trobar X tal que $f(X)$ sigui mínima. Això serà quan la funció derivada d' X sigui igual a 0, és a dir, quan $f'(X) = 0$

$$\begin{aligned}
f(X) &= (10 - X) + 2 \cdot \sqrt{X^2 + 7,5^2} = (10 - X) + 2 \cdot (X^2 + 7,5^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(X) = \\
&= -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (X^2 + 7,5^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2X = -1 + (X^2 + 7,5^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2X = -1 + \frac{2X}{\sqrt{X^2 + 7,5^2}} = \frac{2X}{\sqrt{X^2 + 7,5^2}} - 1 \\
f'(X) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2X}{\sqrt{X^2 + 7,5^2}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2X}{\sqrt{X^2 + 7,5^2}} = 1 \Rightarrow 2X = \sqrt{X^2 + 7,5^2} \Rightarrow (2X)^2 = (\sqrt{X^2 + 7,5^2})^2 \Rightarrow \\
4X^2 &= X^2 + 7,5^2 \Rightarrow 4X^2 - X^2 = 56,25 \Rightarrow 3X^2 = 56,25 \Rightarrow X^2 = \frac{56}{3} \Rightarrow X = \pm \sqrt{\frac{56}{3}} = 4,32 \Rightarrow X = 4,32 \text{ m}
\end{aligned}$$

Sabem que és un mínim $\Leftrightarrow f''(4,32) > 0$

$$\begin{aligned}
f''(X) &= \frac{2 \cdot \sqrt{X^2 + 7,5^2} - 2X \cdot \frac{1}{2} \cdot (X^2 + 7,5^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2X}{\sqrt{(X^2 + 7,5^2)^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{X^2 + 7,5^2} - \frac{2X^2}{\sqrt{X^2 + 7,5^2}}}{X^2 + 7,5^2} = \frac{2 \cdot (\sqrt{X^2 + 7,5^2})^2 - 2X^2}{\sqrt{X^2 + 7,5^2} \cdot (X^2 + 7,5^2)} = \\
&= \frac{2 \cdot (X^2 + 7,5^2) - 2X^2}{\sqrt{X^2 + 7,5^2} \cdot (X^2 + 7,5^2)} = \frac{2 \cdot (X^2 + 7,5^2) - 2X^2}{(X^2 + 7,5^2) \cdot \sqrt{X^2 + 7,5^2}} = \frac{2 \cdot 7,5^2}{(X^2 + 7,5^2) \cdot \sqrt{X^2 + 7,5^2}}
\end{aligned}$$

$$f''(4,32) = \frac{2 \cdot 7,5^2}{(4,32^2 + 7,5^2) \cdot \sqrt{4,32^2 + 7,5^2}} = \frac{112,5}{74,91 \cdot \sqrt{74,91}} = \frac{112,5}{74,91 \cdot 8,66} = \frac{112,5}{648,72} = 0,17 > 0 \Rightarrow \text{mínim}$$

Per tant, per tal que la distància entre la Laura i les altres tres jugadores sigui mínimes, la Laura s'hauria de posicionar a 15 metres del costat de l'Aina i de la Laia Robert i a 4,32 metres cap enrere.

9.2 Llei de Plateau

Les lleis de Plateau descriuen la forma i configuració de pel·lícules de sabó. Aquestes són les següents:

- Les pel·lícules de sabó estan formades per superfícies suaus; és a dir, sense arrugues, de manera que siguin contínues.
- La curvatura mitjana d'una porció d'una pel·lícula de sabó és sempre constant en qualsevol punt de la mateixa porció de la pel·lícula de sabó.
- Tres pel·lícules de sabó s'intersequen al llarg d'una línia, formant un angle de 120° , anomenada Frontera de Plateau.
- Quatre d'aquestes «fronteres de Plateau» (totes formades per la intersecció de tres superfícies) intersequen en un punt, formant un angle de $\cos 109.47^\circ$ (angle tetraèdric).
- Les configuracions diferents de les lleis de Plateau són inestables i l'escuma ràpidament tendeixen a reordenar perquè s'ajustin a aquestes normes.

El fet que aquestes lleis es compleixen per a superfícies mínimes, va ser matemàticament provat per Jean Taylor, matemàtica americana que actualment és professora a la Universitat de Rutgers.

Les lleis enunciades per Plateau són les següents:

- Primera llei : *Si diverses làmines de sabó s'intersequen, ho fan de tres en tres al llarg d'una línia i formant entre si angles de 120° . Això passa amb les figures geomètriques del quadrat i del triangle, igual que amb les seves respectives figures en 3D, el cub i el tetràedre.*
- Segona llei : *Quatre de les línies, totes formades per la intersecció de tres superfícies, s'intersequen en un punt i l'angle format per cada parell d'elles és de $109^\circ 28'$.*
- Tercera llei : *Una pel·lícula de sabó que es pot moure lliurement sobre una superfície es creua amb ella formant un angle de 90° .*

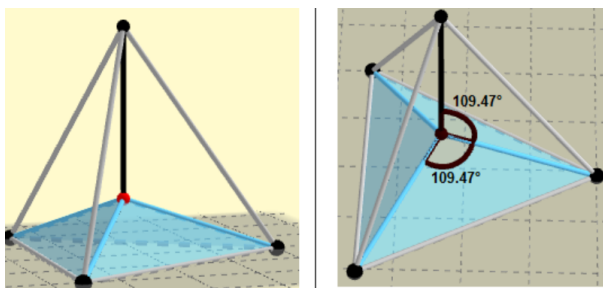


Figura 26: 2a llei de Plateau

Capítol 10

10 Figures en 2D:

10.1 Triangle

Disposem d'una placa en dues dimensions en la qual és representada una figura a través de tres claus metàl·lics, un triangle. En un principi, podríem pensar que en submergir la peça, es crearien pel·lícules sabonoses les quals representarien un triangle, però aquest no és el cas, hem de tenir en compte els conceptes explicats anteriorment; les molècules dels líquids tendeixen a ajuntar-se fent així que sempre es mostri la superfície mínima de la figura la qual posem dins la barreja sabonosa i per tant les tres pel·lícules que es formaran, crearan angles de 120° , com enuncia la 1a llei de Plateau.

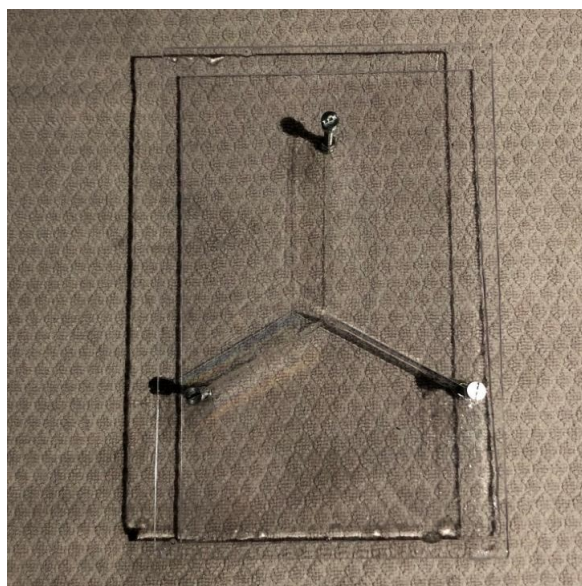


Figura 27: Localització del punt de Fermat del triangle.

El punt de Fermat d'aquesta figura el localitzem dibuixant triangles equilàters en cada un dels seus costats. Un cop els tenim, tracem una recta des de cada un dels nou vèrtexs de cada triangle fins al vèrtex oposat del triangle inicial. I observem que el punt on coincideixen totes les rectes és l'anomenat punt de Fermat. Quan ja tenim ubicat el punt, el recorregut mínim és la suma dels segments que uneixen els vèrtexs del triangle inicial amb el punt de Fermat. A més a més, podem veure que els angles formats en cada recta són de 120° , tal com enuncia la 1a llei de Plateau.

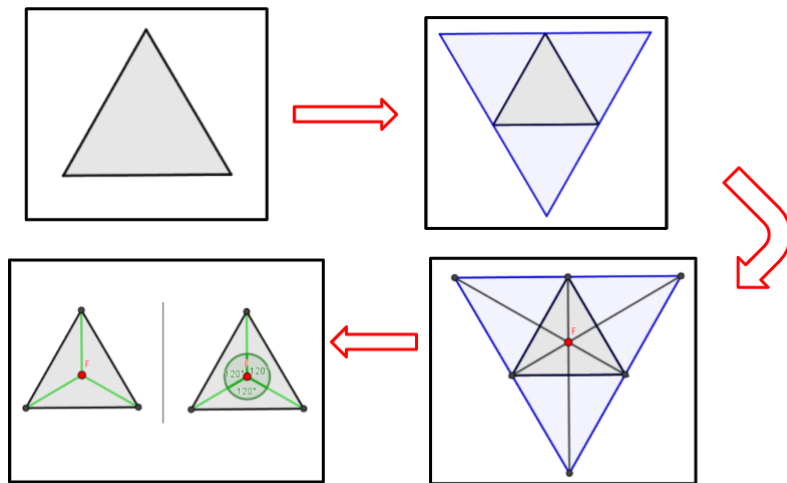


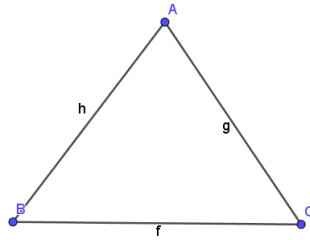
Figura 28: Possibilitats de superfície mínima del triangle.

És preferible no escollir un triangle obtusangle, si no el punt de Fermat quedarà a l'exterior de l'àrea del triangle.

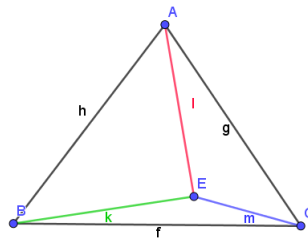
10.1.1 Demostració i comprovacions

- Demostració geomètrica del punt de Fermat.

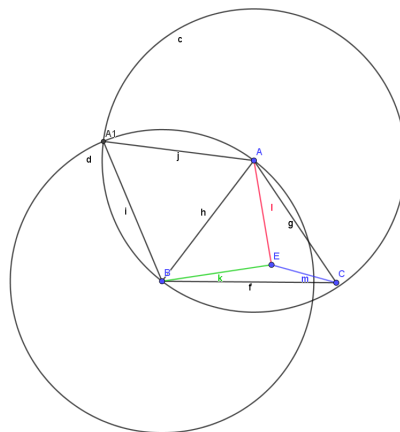
1) Primerament crearem el triangle. Per fer-ho col·locarem tres punts al pla, a l'hora d'escollir la seva posició hem de pensar com quedarà aquest triangle, ja que ara estem fent la demostració per a un triangle amb angles menors de 90° . Una vegada escollits els punts, els unim mitjançant segments.



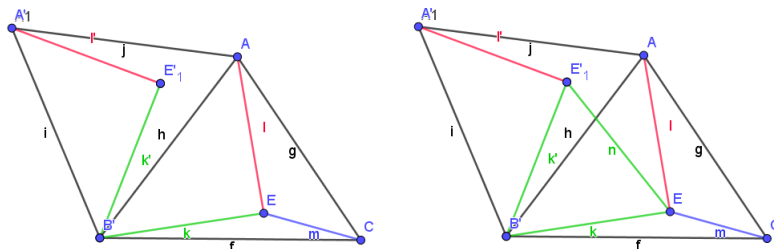
2) Ara, escollirem les coordenades d'un punt a l'atzar dins del triangle, anomenat E i farem que aquest punt estigui unit a través de segments amb els vèrtexs del triangle.



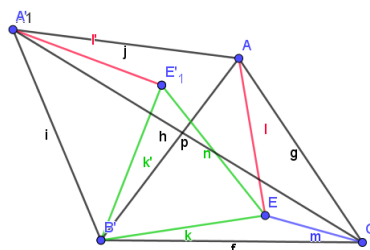
3) El següent pas serà crear un altre triangle al costat esquerre d'aquest. Creem dues circumferències que vagin de B a A i de A a B. Una vegada creades, veurem que les dues circumferències es tallen en un punt. Allà crearem un nou punt A' i l'unirem amb els punts de l'altre triangle A i B mitjançant segments.



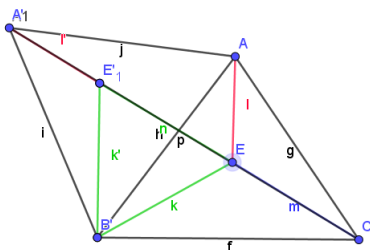
4) A continuació, rotarem el segment \overline{BE} 60° i observem que es podrà crear un triangle equilàter amb angles de 60° entre les dues figures. Per tant, crearem un altre segment per poder-ho tancar.



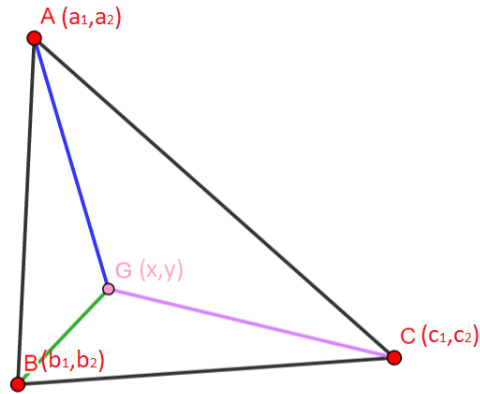
5) Una vegada fet això, crearem un segment que vagi d'un vèrtex d'un triangle a un vèrtex de l'altre triangle.



6) Com que volem que $\overline{A'E'} + \overline{E'E} + \overline{EC}$ sigui mínima, serà mínima $\Leftrightarrow A', E', E$ i C estan alineats $\Rightarrow E$ serà el punt de Fermat.



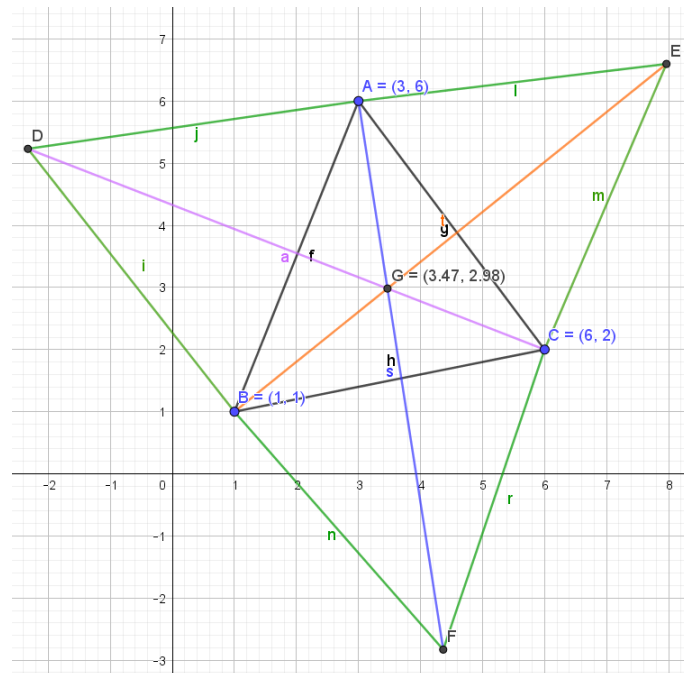
- Comprovació del recorregut mínim:



$$f(x,y) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} + \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2} + \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}$$

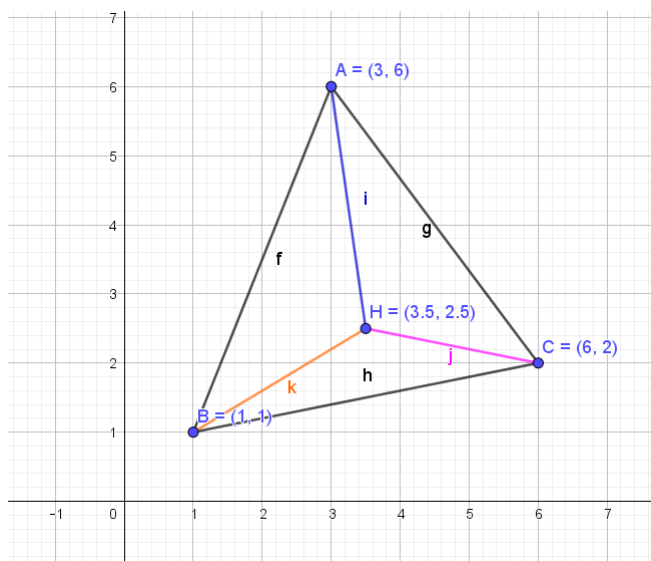
Si agafem les coordenades d'un punt a l'atzar i apliquem la fórmula, trobarem que la suma de les distàncies totals dels vèrtexs d'un triangle fins aquest serà major que si agafem les coordenades del punt de Fermat i calculem la seva distància.

Siguin $A = (a_1, a_2) := (3, 6)$; $B = (b_1, b_2) := (1, 1)$; $C = (c_1, c_2) := (6, 2)$ els vèrtexs del triangle i volem trobar el punt de Fermat:



Sigui $G = (g_1, g_2) := (3'47, 2'98)$ el punt de Fermat, calculem el recorregut mínim:

$$f(x,y) = \sqrt{(3'47 - 3)^2 + (2'98 - 6)^2} + \sqrt{(3'47 - 1)^2 + (2'98 - 1)^2} + \sqrt{(3'47 - 6)^2 + (2'98 - 2)^2} \simeq 8'93u.m$$



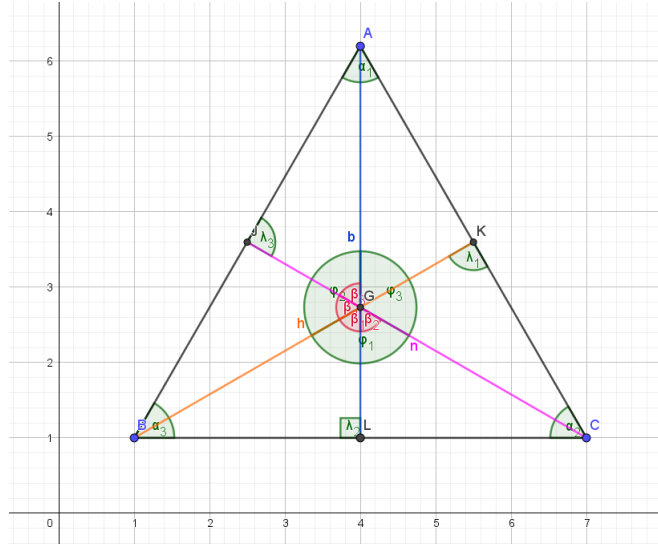
Sigui $H = (h_1, h_2) := (3'5, 2'5)$ les coordenades del punt escollit a l'atzar, calculem el recorregut mínim:

$$f(x,y) = \sqrt{(3'5 - 3)^2 + (2'5 - 6)^2} + \sqrt{(3'5 - 1)^2 + (2'5 - 1)^2} + \sqrt{(3'5 - 6)^2 + (2'5 - 2)^2} \simeq 9'00u.m.$$

Per tant, queda demostrat per aquest triangle que el punt de Fermat és un punt on la suma de les distàncies totals dels vèrtexs d'un triangle fins aquest és mínima.

• **Demostració dels angles de 120°:**

- **Triangle equilàter:**



**Mitjana*: La mitjana és la línia recta que uneix qualsevol vèrtex amb el punt mitjà del costat oposat al vèrtex.

Signin $A := (4,6'2)$; $B := (1,1)$; $C := (7,1)$ els vèrtexs del triangle equilàter.
 Signin $J := (2'5, 3'6)$; $L := (4,1)$; $K := (5'5, 3'6)$ les mitjanes* del triangle.
 Signi $G = (g_1, g_2) := (4, 2'7)$ el punt de Fermat.
 Signin $\lambda := 90^\circ$; $\alpha := 60^\circ$

Calculem els angles:

$$180^\circ = \frac{\alpha}{2} + \beta_1 + 90^\circ \Rightarrow \beta_1 = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - 90^\circ - \frac{60^\circ}{2} = \beta_1 = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ \Rightarrow \beta_1 = 60^\circ$$

$$180^\circ = \frac{\alpha}{2} + \beta_2 + 90^\circ \Rightarrow \beta_2 = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - 90^\circ - \frac{60^\circ}{2} = \beta_2 = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ \Rightarrow \beta_2 = 60^\circ$$

$$\varphi_1 = \beta_1 + \beta_2 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \varphi_1 = 120^\circ \text{ q.e.d}$$

$$180^\circ = \frac{\alpha}{2} + \beta_3 + 90^\circ \Rightarrow \beta_3 = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - 90^\circ - \frac{60^\circ}{2} = \beta_3 = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ \Rightarrow \beta_3 = 60^\circ$$

$$180^\circ = \frac{\alpha}{2} + \beta_4 + 90^\circ \Rightarrow \beta_4 = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - 90^\circ - \frac{60^\circ}{2} = \beta_4 = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ \Rightarrow \beta_4 = 60^\circ$$

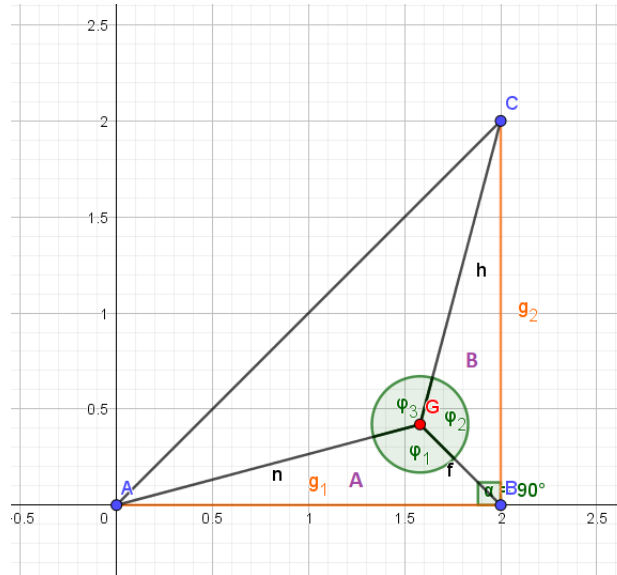
$$\varphi_2 = \beta_3 + \beta_4 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 120^\circ \text{ q.e.d}$$

Calculem φ_3 , sabent pels complementaris que:

$$360^\circ = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \Rightarrow \varphi_3 = 360^\circ - \varphi_1 - \varphi_2 = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ \Rightarrow \varphi_3 = 120^\circ$$

Per tant, queda demostrat que per aquest tipus de triangle $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 120^\circ$

- Triangle rectangle:



Siguin $A = (a_1, a_2) := (0, 0); B = (b_1, b_2) := (2, 0); C = (c_1, c_2) := (2, 2)$ els vèrtexs del triangle rectangle.

Sigui $G = (g_1, g_2) := (1'58, 0'42)$ el punt de Fermat.

- Calculem l'angle φ_1 :

Calculem els diferents vectors que formen el triangle A:

$$\vec{g}_1 = (g_{11}, g_{12}) = \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (2 - 0, 0 - 0) = (2, 0)$$

$$\vec{n} = (n_1, n_2) = \vec{AG} = (g_1 - a_1, g_2 - a_2) = (1'58 - 0, 0'42 - 0) = (1'58, 0'42)$$

$$\vec{f} = (f_1, f_2) = \vec{GB} = (b_1 - g_1, b_2 - g_2) = (2 - 1'58, 0 - 0'42) = (0'42, 0'42)$$

Calculem els seus mòduls:

$$g_1 = |\vec{AB}| = \sqrt{g_{11}^2 + g_{12}^2} = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2 \text{ u.m}$$

$$n = |\vec{AG}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = \sqrt{(1'58)^2 + (0'42)^2} \simeq 1'63 \text{ u.m}$$

$$f = |\vec{GB}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{(0'42)^2 + (0'42)^2} \simeq 0'6 \text{ u.m}$$

Apliquem el teorema del cosinus per el triangle A:

$$g_1^2 = f^2 + n^2 - 2 \cdot f \cdot n \cdot \cos\varphi_1 \Rightarrow g_1^2 - f^2 - n^2 = -2 \cdot f \cdot n \cdot \cos\varphi_1 \Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{g_1^2 - f^2 - n^2}{-2 \cdot f \cdot n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \arccos \frac{g_1^2 - f^2 - n^2}{-2 \cdot f \cdot n} \simeq \arccos \frac{2^2 - 0'6^2 - 1'63^2}{-2 \cdot 0'6 \cdot 1'63} = 120^\circ \Rightarrow \varphi_1 = 120^\circ \text{ q.e.d}$$

- Calculem l'angle φ_2 :

Calculem els diferents vectors que formen el triangle B:

$$\vec{g}_2 = (g_{21}, g_{22}) = \vec{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2) = (2 - 2, 2 - 0) = (0, 2)$$

$$\vec{h} = (h_1, h_2) = \vec{GC} = (c_1 - g_1, c_2 - g_2) = (2 - 1'58, 2 - 0'42) = (0'42, 1'58)$$

$$\vec{f} = (f_1, f_2) = \vec{GB} = (0'42, 0'42) \text{ (ja calculat)}$$

Calculem els seus mòduls:

$$g_2 = |\vec{BC}| = \sqrt{g_{21}^2 + g_{22}^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \text{ u.m}$$

$$h = |\vec{GC}| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \sqrt{0,42^2 + 1,58^2} \simeq 1'63 \text{ u.m}$$

$$f = |\vec{GB}| \simeq 0'6 \text{ u.m (ja calculat)}$$

Apliquem el teorema del cosinus per el triangle B:

$$g_2^2 = h^2 + f^2 - 2 \cdot h \cdot f \cdot \cos\varphi_2 \Rightarrow g_2^2 - h^2 - f^2 = -2 \cdot h \cdot f \cdot \cos\varphi_2 \Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{g_2^2 - h^2 - f^2}{-2 \cdot h \cdot f} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi_2 = \arccos \frac{g_2^2 - h^2 - f^2}{-2 \cdot h \cdot f} \simeq \arccos \frac{2^2 - 1'63^2 - 0'6^2}{-2 \cdot 1'63 \cdot 0'6} = 120^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 120^\circ$$

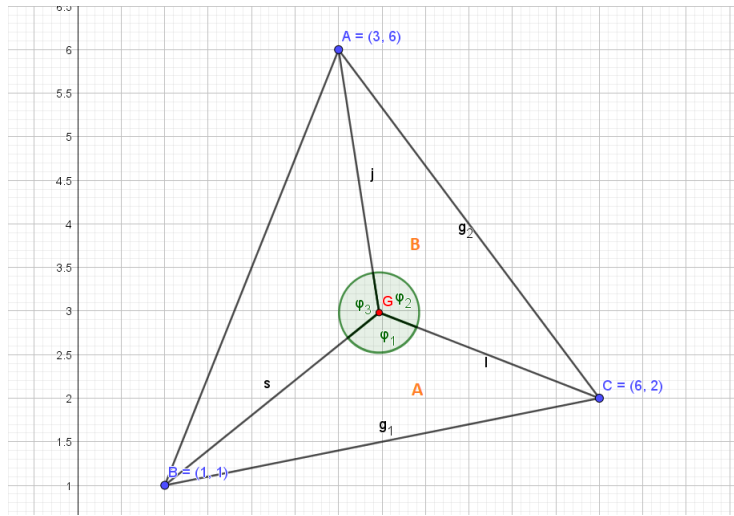
- Calculem l'angle φ_3 :

Sabem pels complementaris:

$$360^\circ = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \Rightarrow \varphi_3 = 360^\circ - \varphi_1 - \varphi_2 = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ \Rightarrow \varphi_3 = 120^\circ \text{ q.e.d}$$

Queda demostrat que per aquest tipus de triangles $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 120^\circ$.

- Triangle acutangle:



Siguin $A = (a_1, a_2) := (3, 6); B = (b_1, b_2) := (1, 1); C = (c_1, c_2) := (6, 2)$ els vèrtexs del triangle acutangle.

Sigui $G = (g_1, g_2) := (3'47, 2'98)$ el punt de Fermat.

- Calculem φ_1 :

Calculem els diferents vectors que formen el triangle A:

$$\vec{g}_1 = (g_{11}, g_{12}) = \vec{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2) = (6 - 1, 2 - 1) = (5, 1)$$

$$\vec{s} = (s_1, s_2) = \vec{BG} = (g_1 - b_1, g_2 - b_2) = (6 - 3'47, 2'98 - 1) = (2'47, 1'98)$$

$$\vec{l} = (l_1, l_2) = \vec{GC} = (c_1 - g_1, c_2 - g_2) = (6 - 3'47, 2 - 2'98) = (2'53, -0'98)$$

Calculem els seus mòduls:

$$g_1 = |\vec{BC}| = \sqrt{g_{11}^2 + g_{12}^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = 5 \text{ u.m}$$

$$s = |\vec{BG}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{2,47^2 + 1,98^2} \simeq 3'1 \text{ u.m}$$

$$l = |\vec{GC}| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = \sqrt{2,53^2 + (-0,98)^2} \simeq 2'7 \text{ u.m}$$

Apliquem el teorema del cosinus per el triangle A:

$$g_1^2 = s^2 + l^2 - 2 \cdot s \cdot l \cdot \cos\varphi_1 \Rightarrow g_1^2 - s^2 - l^2 = -2 \cdot s \cdot l \cdot \cos\varphi_1 \Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{g_1^2 - s^2 - l^2}{-2 \cdot s \cdot l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \arccos \frac{g_1^2 - s^2 - l^2}{-2 \cdot s \cdot l} \simeq \arccos \frac{5^2 - 3'1^2 - 2'7^2}{-2 \cdot 3'1 \cdot 2'7} = 120^\circ \Rightarrow \varphi_1 = 120^\circ \text{ q.e.d}$$

- Calculem l'angle φ_2 :

Calculem els diferents vectors que formen el triangle B:

$$\vec{g}_2 = (g_{21}, g_{22}) = \vec{CA} = (a_1 - c_1, a_2 - c_2) = (3 - 6, 6 - 2) = (-3, 4)$$

$$\vec{l} = (l_1, l_2) = \vec{GC} = (2'53, -0'98) \text{ (ja calculat)}$$

$$\vec{j} = (j_1, j_2) = \vec{GA} = (a_1 - g_1, a_2 - g_2) = (3 - 3'47, 6 - 2'98) = (-0'47, 3'02)$$

Calculem els seus mòduls:

$$g_2 = |\vec{CA}| = \sqrt{g_{21}^2 + g_{22}^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \text{ u.m}$$

$$l = |\vec{GC}| \simeq 2'71 \text{ u.m (ja calculat)}$$

$$j = |\vec{GA}| = \sqrt{j_1^2 + j_2^2} = \sqrt{(-0'47)^2 + (3'02)^2} \simeq 3'05 \text{ u.m}$$

Aplicuem el teorema del cosinus per el triangle B:

$$g_2^2 = l^2 + j^2 - 2 \cdot l \cdot j \cdot \cos\varphi_2 \Rightarrow g_2^2 - l^2 - j^2 = -2 \cdot l \cdot j \cdot \cos\varphi_2 \Rightarrow \cos\varphi_2 = \frac{g_2^2 - l^2 - j^2}{-2 \cdot l \cdot j} \Rightarrow \varphi_2 = \arccos \frac{g_2^2 - l^2 - j^2}{-2 \cdot l \cdot j} \simeq \arccos \frac{5^2 - 2'71^2 - 3'05^2}{-2 \cdot 2'71 \cdot 3'05} = 120^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 120^\circ \text{ q.e.d}$$

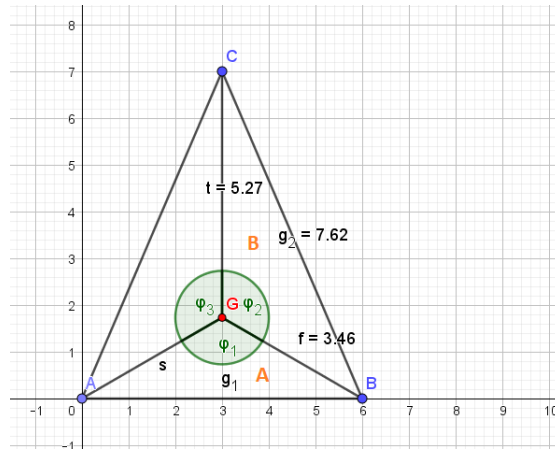
- Calculem l'angle φ_3 :

Sabem pels complementaris:

$$360^\circ = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \Rightarrow \varphi_3 = 360^\circ - \varphi_1 - \varphi_2 = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ \Rightarrow \varphi_3 = 120^\circ \text{ q.e.d}$$

Per tant, queda demostrat que per aquests tipus de triangles $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 120^\circ$.

- **Triangle isòsceles:**



Siuguin $A = (a_1, a_2) := (0, 0); B = (b_1, b_2) := (6, 0); C = (c_1, c_2) := (3, 7)$ els vèrtexs del triangle isòsceles.

Siugi $G = (g_1, g_2) := (3, 1'73)$ el punt de Fermat.

- Calculem φ_1 :

Calculem els diferents vectors que formen el triangle A:

$$\vec{g}_1 = (g_{11}, g_{12}) = \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (6 - 0, 0 - 0) = (6, 0)$$

$$\vec{f} = (f_1, f_2) = \vec{GB} = (b_1 - g_1, b_2 - g_2) = (6 - 3, 0 - 1'73) = (3, -1'73)$$

$$\vec{s} = (s_1, s_2) = \vec{AG} = (g_1 - a_1, g_2 - a_2) = (3 - 0, 1'73 - 0) = (3, 1'73)$$

Calculem els seus mòduls:

$$g_1 = |\vec{AB}| = \sqrt{g_{11}^2 + g_{12}^2} = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6 \text{ u.m}$$

$$f = |\vec{GB}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{3^2 + (-1'73)^2} \simeq 3'46 \text{ u.m}$$

$$s = |\vec{AG}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{3^2 + (1'73)^2} \simeq 3'46 \text{ u.m}$$

Apliquem el teorema del cosinus per el triangle A:

$$g_1^2 = f^2 + s^2 - 2 \cdot f \cdot s \cdot \cos\varphi_1 \Rightarrow g_1^2 - f^2 - s^2 = -2 \cdot f \cdot s \cdot \cos\varphi_1 \Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{g_1^2 - f^2 - s^2}{-2 \cdot f \cdot s} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_1 \simeq \arccos \frac{g_1^2 - f^2 - s^2}{-2 \cdot f \cdot s} = \arccos \frac{6^2 - 3'46^2 - 3'46^2}{-2 \cdot 3'46 \cdot 3'46} = 120^\circ \Rightarrow \varphi_1 = 120^\circ \text{ q.e.d}$$

- Calculem l'angle φ_2 :

Calculem els deferents vectors que formen el triangle B:

$$\vec{g}_2 = (g_{21}, g_{22}) = \vec{CB} = (b_1 - c_1, b_2 - c_2) = (6 - 3, 0 - 7) = (3, -7)$$

$$\vec{t} = (t_1, t_2) = \vec{GC} = (c_1 - g_1, c_2 - g_2) = (3 - 3, 7 - 1'73) = (0, 5'27)$$

$$\vec{f} = (f_1, f_2) = \vec{GB} = (3, -1'73) \text{ (ja calculat)}$$

Calculem els seus mòduls:

$$g_2 = |\vec{CB}| = \sqrt{g_{21}^2 + g_{22}^2} = \sqrt{3^2 + (-7)^2} \simeq 7'62 \text{ u.m}$$

$$t = |\vec{GC}| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} = \sqrt{0^2 + (5'27)^2} \simeq 5'27 \text{ u.m}$$

$$f = |\vec{GB}| \simeq 3'46 \text{ u.m (ja calculat)}$$

Apliquem el teorema del cosinus per el triangle B:

$$g_2^2 = t^2 + f^2 - 2 \cdot t \cdot f \cdot \cos\varphi_2 \Rightarrow g_2^2 - t^2 - f^2 = -2 \cdot t \cdot f \cdot \cos\varphi_2 \Rightarrow \cos\varphi_2 = \frac{g_2^2 - t^2 - f^2}{-2 \cdot t \cdot f} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_2 = \arccos \frac{g_2^2 - t^2 - f^2}{-2 \cdot t \cdot f} \simeq \arccos \frac{7'62^2 - 5'27^2 - 3'46^2}{-2 \cdot 5'27 \cdot 3'46} = 120^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 120^\circ \text{ q.e.d}$$

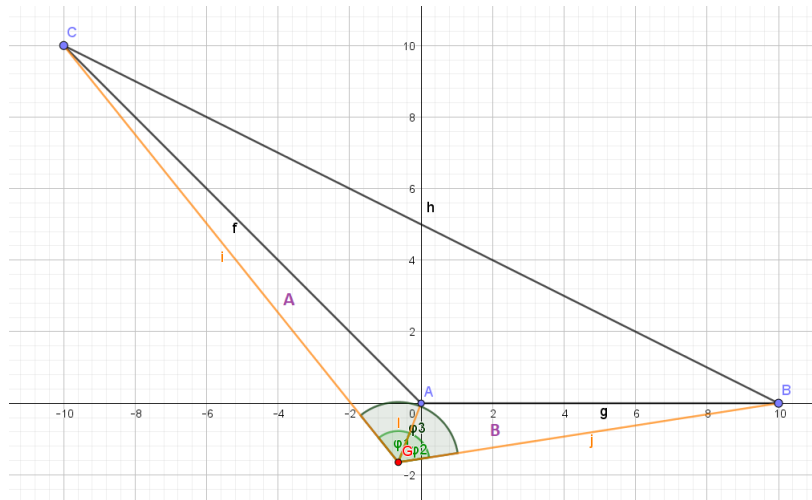
- Calculem l'angle φ_3 :

Sabem pels complementaris:

$$360^\circ = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \Rightarrow \varphi_3 = 360^\circ - \varphi_1 - \varphi_2 = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ \Rightarrow \varphi_3 = 120^\circ \text{ q.e.d}$$

Per tant, queda demostrat que per aquests tipus de triangles $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 120^\circ$.

- Triangle obtusangle:



Siuguin $A = (a_1, a_2) := (0, 0)$; $B = (b_1, b_2) := (10, 0)$; $C = (c_1, c_2) := (-10, 10)$ els vèrtexs del triangle obtús.

Siugi $G = (g_1, g_2) := (-0'64, -1'65)$ el punt de Fermat.

- Calculem φ_1 :

Calculem els diferents vectors que formen el triangle A:

$$\vec{i} = (i_1, i_2) = \vec{CG} = (g_1 - c_1, g_2 - c_2) = (-0'64 - (-10), -1'65 - 10) = (9'36, -11'65)$$

$$\vec{f} = (f_1, f_2) = \vec{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2) = (-10 - 0, 10 - 0) = (-10, 10)$$

$$\vec{l} = (l_1, l_2) = \vec{GA} = (a_1 - g_1, a_2 - g_2) = (0 - (-0'64), 0 - (-1'65)) = (0'64, 1'65)$$

Calculem els seus mòduls:

$$i = |\vec{CG}| = \sqrt{i_1^2 + i_2^2} = \sqrt{(9'36)^2 + (-11'65)^2} \simeq 14'94 \text{ u.m}$$

$$f = |\vec{AC}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{(-10)^2 + 10^2} \simeq 14'14 \text{ u.m}$$

$$l = |\vec{GA}| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = \sqrt{(0'64)^2 + (1'65)^2} \simeq 1'77 \text{ u.m}$$

Apliquem el teorema del cosinus per el triangle A:

$$f^2 = i^2 + l^2 - 2 \cdot i \cdot l \cdot \cos \varphi_1 \Rightarrow f^2 - i^2 - l^2 = -2 \cdot i \cdot l \cdot \cos \varphi_1 \Rightarrow \cos \varphi_1 = \frac{f^2 - i^2 - l^2}{-2 \cdot i \cdot l} \Rightarrow \varphi_1 = \arccos \frac{f^2 - i^2 - l^2}{-2 \cdot i \cdot l} \simeq \arccos \frac{14'14^2 - 14'94^2 - 1'77^2}{-2 \cdot 14'94 \cdot 1'77} = 60^\circ \Rightarrow \varphi_1 = 60^\circ \text{ q.e.d}$$

- Calculem l'angle φ_2 :

Calculem els diferents vectors que formen el triangle B:

$$\vec{l} = (l_1, l_2) = \vec{GA} = (0'64, 1'65) \text{ (ja calculat)}$$

$$\vec{j} = (j_1, j_2) = \vec{GB} = (b_1 - g_1, b_2 - g_2) = (10 - (-0'64), 0 - (-1'65)) = (10'64, 1'65)$$

$$\vec{g} = (g_1, g_2) = \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (10 - 0, 0 - 0) = (10, 0)$$

Calculem els seus mòduls:

$$l = |\vec{GA}| \simeq 1'777 \text{ u.m (ja calculat)}$$

$$j = |\vec{GB}| = \sqrt{j_1^2 + j_2^2} = \sqrt{(10'64)^2 + (1'65)^2} \simeq 10'777 \text{ u.m}$$

$$g = |\vec{AB}| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10 \text{ u.m}$$

Apliquem el teorema del cosinus per el triangle B:

$$g^2 = l^2 + j^2 - 2 \cdot l \cdot j \cdot \cos\varphi_2 \Rightarrow g^2 - l^2 - j^2 = -2 \cdot l \cdot j \cdot \cos\varphi_2 \Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{g^2 - l^2 - j^2}{-2 \cdot l \cdot j} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi_2 = \arccos \frac{g^2 - l^2 - j^2}{-2 \cdot l \cdot j} \simeq \arccos \frac{10^2 - 1'777^2 - 10'777^2}{-2 \cdot 1'777 \cdot 10'777} = 60^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 60^\circ \text{ q.e.d}$$

- Calculem l'angle φ_3 :

Sabem que:

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 \Rightarrow \varphi_3 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \varphi_3 = 120^\circ \text{ q.e.d}$$

10.2 Quadrat

Disposen d'un conjunt de plaques de metacrilat unides entre elles amb quatre claus metàl·lics que formen la forma d'un quadrat. Amb aquesta estructura, podríem pensar que en submergir aquesta podrien sortir les següents opcions.

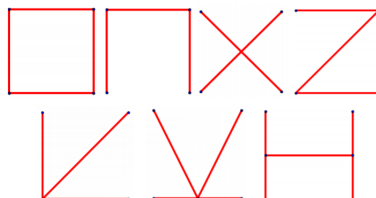


Figura 29: Possibilitats de superfície mínima del quadrat.

Doncs bé, cap d'elles és la correcta, ja que cap té el mínim recorregut possible. Observem que es formen 5 pel·lícules de sabó, les quals ens mostren la superfície mínima del quadrat. En aquest cas es torna a experimentar les lleis de Plateau, on els angles que es formen entre les pel·lícules tenen un valor de 120° i els angles que són formats per les arestes que hi coincideixen són de $109'47^\circ$.

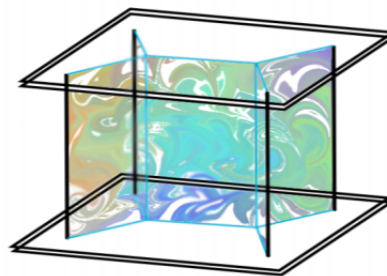
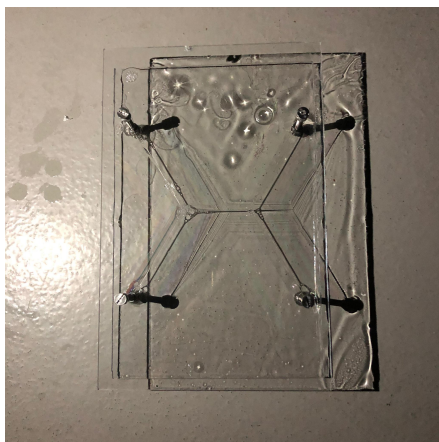


Figura 30: Superfície mínima del quadrat.

Aquesta vegada el que fem per a trobar aquest punt és localitzar el centre del quadrat, que és aquell on es tallen les seves diagonals. Seguidament dibuixem un triangle a l'interior unint dos vèrtexs d'aquest amb el punt que ens indica el centre del quadrat. Ara que tenim el triangle, trobem el punt de Fermat tal com hem explicat anteriorment. Un cop trobat un dels punts, fem el mateix en el costat oposat, que per simetria serà el mateix, però a la inversa. Ens adonem que una altra vegada els angles són de 120° .

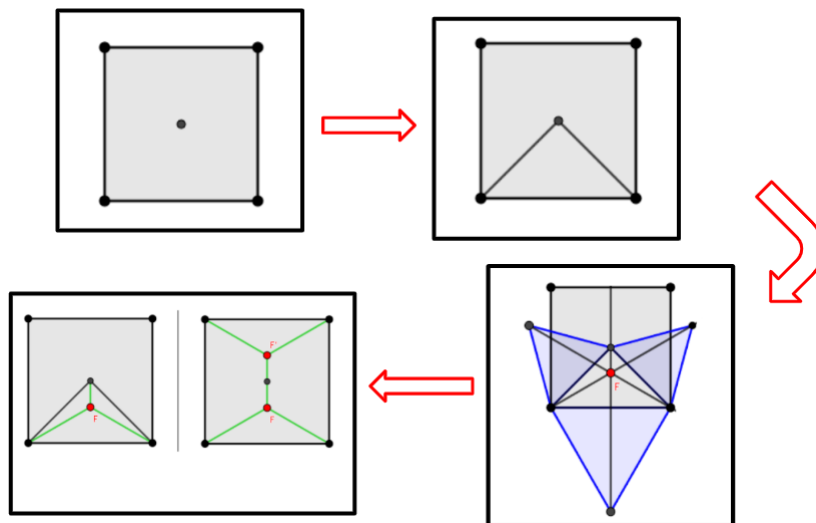


Figura 31: Localització dels punts de Fermat del quadrat.

10.2.1 Demostració

- Demostració dels angles de 120° :

Per tal de demostrar que les interseccions dels segments en els dos punts de Fermat formen angles de 120° , haurem d'agafar els dos triangles creats, i realitzar els mateixos passos que hem fet anteriorment a l'apartat del tetràedre, tenint sempre en compte de quin tipus de triangle es tracta.

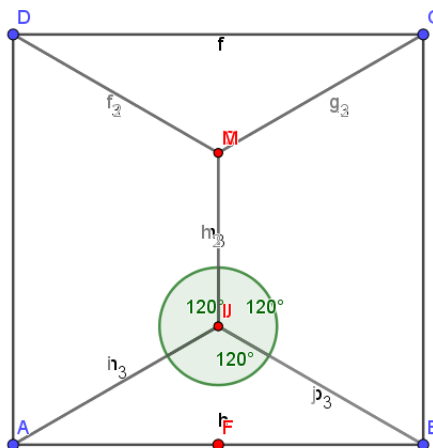


Figura 32: Angles de 120° del cub.

10.3 Hexàgon

En aquest cos geomètric observem que no es creen connexions de tres pel·lícules entre si com en els altres casos. La raó d'això és que els angles interns de l'hexàgon ja són de 120° i el recorregut mínim per als seus vèrtexs és simplement el mostrat. És per això que en aquest cas no existirà cap punt de Fermat. Com bé hem explicat abans, la figura que obtindrem quan fiquem les plaques de metacrilat unides per sis claus metàl·lics a la barreja sabonosa serà l'hexàgon. Però si extraïem l'aire de l'interior, aconseguirem una altra figura, la qual consta de dotze pel·lícules de sabó rectangulars, amb sis unions on s'ajunten tres pel·lícules formant un hexàgon.

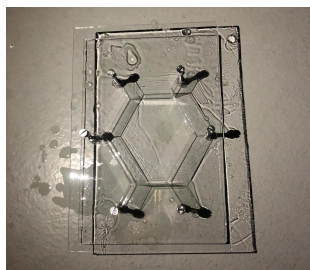


Figura 33: Forma que obtenim extraient l'aire de l'interior.

10.3.1 Demostració

- Demostració dels angles de 120° :

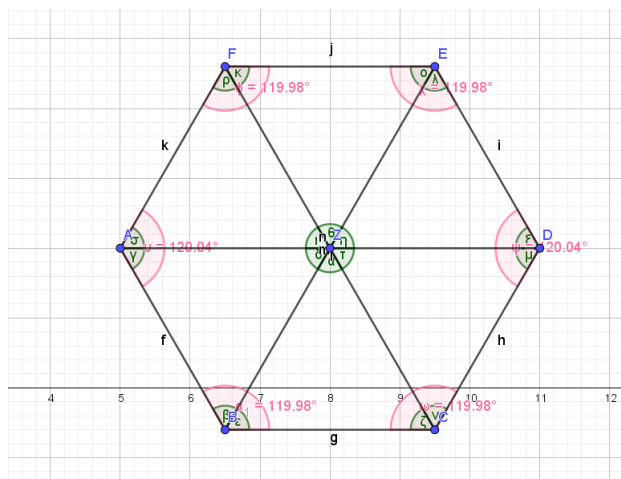


Figura 34: Angles de l'hexàgon regular.

Quan un hexàgon és regular, tots els seus costats són iguals, per tant, els angles que es formen en els seus vèrtexs són de 120° . Això ho podem calcular dividint aquesta figura en sis triangles, els quals observem que seran equilàters. Aquests formaran angles de 60° i la suma de dos d'ells és igual a 120° . Així queda demostrada la primera llei de Plateau.

10.4 Figures en 3D:

10.4.1 Tetràedre

Disposen d'una estructura tridimensional, un tetràedre. Quan submergim aquesta estructura es formen sis làmines triangulars, les quals es tallen en quatre arestes. Els angles diedres* entre les cares són de 120° i els angles entre les arestes que coincideixen en el baricentre* són de $109,28^\circ$ o $109,47^\circ$, tal com ens indiquen les lleis de Plateau.

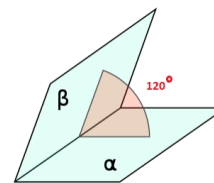


Figura 35: Angle diedre.



Figura 36: Superfície mínima del tetràedre.

Quan aquesta estructura és submergida es creen totes les sis làmines i, a més a més, bufem amb un objecte com per exemple una canyeta al seu interior, aconseguim la formació d'una figura tetraèdrica sostinguda per sis làmines de sabó, la qual té les cares lleugerament corbades. Això és a causa que les molècules tendeixen a ajuntar-se, com hem dit anteriorment, buscant aquesta forma esfèrica, però en aquest cas no ho aconseguen per culpa de les làmines que sostenen la figura.

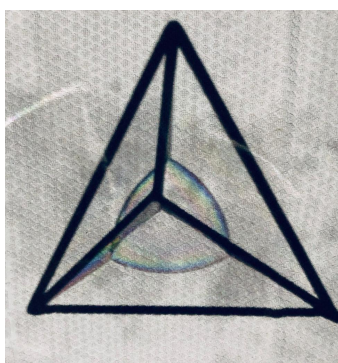


Figura 37: Projecció de la bombolla tetraèdrica que es crea bufant a l'interior.

**Baricentre*: El baricentre d'un triangle és el punt que es troba a la intersecció de les mitjanes d'un triangle.

**Angle diedre*: És cada una de les dues parts de l'espai delimitat per dos semiplans que parteixen d'una aresta comuna.

10.4.2 Cub

En el cas d'una estructura cúbica apareixerà una làmina plana i quadrada en el centre sostinguda per dotze làmines planes en forma de trapezi. Podem observar que en un mateix punt s'intersequen tres làmines de sabó, per tant, els seus angles formats per les cares, com diuen les lleis de Plateau, seran de 120° . En canvi, els angles que són formats per les arestes són de $109'47^\circ$, tal com hem explicat anteriorment.



Figura 38: Superfície mínima del cub.

Quan bufem amb una canyeta a l'interior de l'estructura, on es forma la làmina plana amb forma quadrada, es forma una figura tridimensional, un cub el qual té les cares lleugerament corbades, sostinguda per les dotze làmines de sabó.

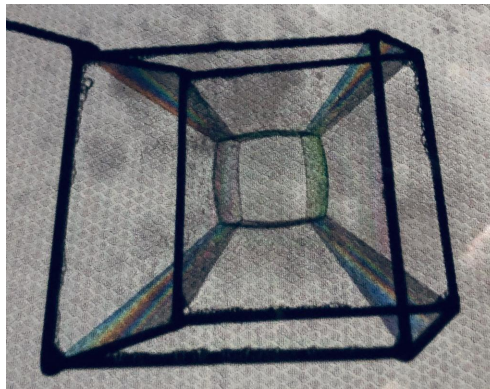


Figura 39: Projecció de la bombolla cúbica que es crea bufant a l'interior de l'estructura.

10.4.3 Octàedre

En aquest cas, hem de vigilar amb la qualitat del líquid i el moviment d'extracció, ja que poden obtenir-se diferents formes. Per a obtenir la que desitgem, una rosa dels vents tridimensional, cal bufar o moure l'estructura per tal d'aconseguir-la.



Figura 40: Superfície mínima de l'octàedre.

Una vegada les làmines s'hagin format correctament, bufarem al seu interior per tal d'obtenir la següent bombolla:



Figura 41: Projectió de la bombolla que es crea bufant a l'interior de l'estructura.

Capítol 11

11 Problema de Steiner

El problema de Steiner té aplicació en el disseny de circuits elèctrics i xarxes de telecomunicació (entre d'altres), per així poder establir una interconnexió més curta, i alhora més bona, per a un conjunt d'elements.

Normalment, quan s'utilitzen models matemàtics de situacions reals, els nodes ja estaran determinats i el problema consistirà a trobar les arestes. Si això és així, segurament es podran afegir altres nodes. Un exemple d'aquest cas consistiria a haver d'unir tres ciutats amb carreteres de tal manera que des d'una es pugui arribar directament a les altres dues. La primera solució en què sol pensar una persona és fer un triangle en el qual les ciutats siguin els vèrtexs. Aquesta solució és òptima si es vol anar d'una ciutat a l'altra amb la mínima distància possible, però si es vol construir el mínim de carreteres possibles per a la xarxa conjunta, aquesta solució no és la millor. En aquest cas, el millor és posar un altre node en el punt de Fermat del triangle que formen. Com ja hem explicat anteriorment, el punt de Fermat és el punt tal que la suma de les distàncies des de cada vèrtex fins a aquest punt és la mínima.

El problema dels arbres de Steiner és relativament complex per a conjunts de molts punts, i a més és tan sols una aproximació no gaire precisa. En canvi, les bombolles de sabó són capaces de trobar arbres de Steiner amb precisió donats diversos punts. És per això que quan submergim les plaques de 2D amb els punts en sabó, tal com prediuen les lleis de Plateau, tots els angles que es formen són de 120° . De la mateixa manera, també es compleixen les altres propietats dels arbres de Steiner.

Nosaltres hem volgut traslladar aquest problema a un àmbit diferent i alhora un àmbit real. Hem volgut construir una fàbrica d'*Abacus cooperativa* al mig del conjunt de tres botigues situades a Mollet del Vallès, Terrassa i Hospitalet de Llobregat.

Hem escollit aquesta empresa perquè hem vist que on se situa la fàbrica actualment és massa llunyà, en comparació on se situen la majoria de botigues d'*Abacus*. La fàbrica se situa a Igualada.

Així és com trobem les diferents botigues de l'*Abacus* situades en un mapa. El punt marcat és on es troba la fàbrica.



Aplicant el problema de Steiner en aquesta situació el que farem és traslladar aquesta fàbrica per tal de mantenir-la el més a prop possible entre les tres botigues escollides, d'aquesta manera podrem aconseguir que totes tres estiguin en la mínima distància respecte a la fàbrica i això farà que hi hagi menys cost per l'empresa a l'hora de traslladar els productes a les diferents botigues.

Com podem veure la fàbrica se situa a prop d'una d'aquestes botigues però molt allunyada respecte de totes les altres.

Hem decidit escollir aquestes tres botigues perquè són les que tenen més distància de separació entre elles. Totes les altres, exceptuant d'un parell, se situen entremig d'aquestes tres.

Per tal de realitzar el problema de Steiner, primerament buscarem el punt de Fermat entre aquestes botigues, el punt en el qual haurem de situar la nostra fàbrica per aconseguir el nostre objectiu. Un cop hem trobat el punt de Fermat busquem on se situarà en el mapa.



Observem que el punt quedarà situat a Barberà del Vallès. Al ser una ciutat no seria factible construir la fàbrica al mig de Barberà entre totes les vivendes i habitants per temes mediambientals. És per això

que hem volgut situar la nostra fàbrica més cap a l'est, on se situa un polígon industrial a 8 minuts en cotxe.





Figura 43: Peces finalitzades.

La següent estructura que vam construir va ser realitzada amb filferro i fil, ja que aquest material és fàcil de manipular, això ens va ajudar a formar diverses estructures les quals ens faciliten, visualment, l'aprenentatge de la tensió superficial, podent així veure com es comporta.

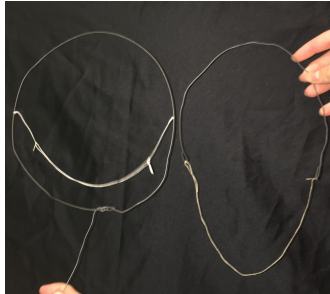


Figura 44: Estructures amb filferro.

I per últim, les estructures planes compostes per dues plaques de metacrilat per a cada conjunt. Aquestes estan unides per diversos cargols inoxidablels amb els quals formarem diferents figures en 2D, deixant entre elles una distància de 3,5 cm, aproximadament. Les figures que vam decidir crear van ser: el triangle, el quadrat i l'hexàgon, pels mateixos motius que hem dit anteriorment; són figures que es veu clarament la 1a llei de Plateau i això ens ajuda a facilitar l'aprenentatge en les nostres sessions. Per tal de crear aquestes, vam necessitar un total de 13 cargols i 39 rosques.



Figura 45: Plaques de metacrilat.

Finalment, per portar tot aquest material vam necessitar l'ajuda d'una caixa de plàstic i un carro.

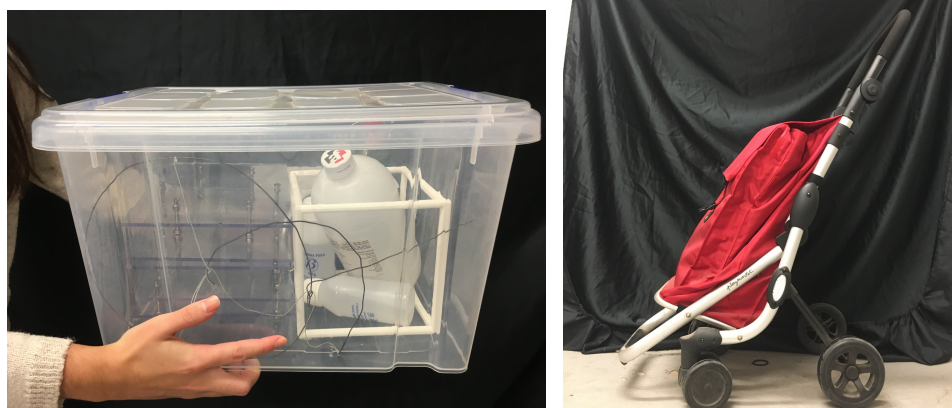


Figura 46: Material necessari per transportar i guardar tot el material.

12.3 Construcció

Primerament, per la construcció de les figures geomètriques vam pensar a dissenyar-les per imprimir-les en 3D posteriorment. Vam arribar a crear una, però tot i que aquesta funcionava adequadament, de seguida ens vam adonar que el material no seria l'adequat; a més a més el preu era bastant elevat.

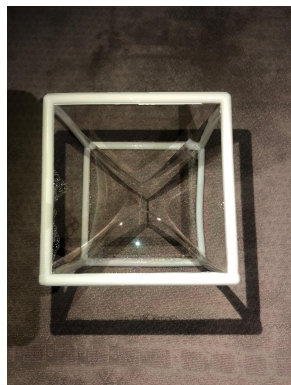


Figura 47: Construcció del cub en 3D.

Així doncs, vam buscar un altre recurs. Vam aprofitar un contacte que teníem per anar a l'empresa "Reicol, S.C.P" on ens van proporcionar el seu material i ens van ajudar a soldar per tal de poder portar a terme les diferents figures tridimensionals.

La creació de les estructures planes en 2D van ser possibles gràcies a l'empresa "Félix Pozo" on ens van ajudar a realitzar els talls i forats d'aquestes.

12.4 Sessions realitzades

Al llarg d'aquest treball hem hagut de dur a terme diverses sessions per poder-nos adonar de si el contingut que donàvem seria útil per tal que els nostres alumnes aprenguessin nous conceptes.

La nostra primera sessió va ser realitzada l'11 de juliol a l'escola. Una sessió enfocada per alumnes d'entre 7-10 anys. Aquesta va acabar amb molt d'èxit tot i que ens vam poder adonar d'alguns errors que havíem comès, fet que ens ajudaria a millorar-los per a les properes sessions. Els principals errors van ser el vocabulari emprat, alguns conceptes explicats massa complicats per a aquesta edat i la necessitat de millorar el material utilitzat; com per exemple, els guants de llana.



La segona sessió va ser realitzada el 28 d'octubre, altre cop, a l'escola. Aquesta sessió vam decidir enfocar-la als alumnes de l'ESO i batxillerat. Aquesta no va tenir gran èxit perquè la vam fer en un horari no gaire còmode pels alumnes. Tot i això, vam decidir realitzar-la per poder seguir millorant el vocabulari que empràvem i conceptes més pràctics. Ens vam adonar que altrament cometíem errors de vocabulari i que érem poc eficaces a l'hora de realitzar les diferents figures geomètriques. Aquest fet ens va fer adonar-nos que tot i que estàvem millorant les expressions que utilitzàvem per explicar els diferents conceptes, encara teníem una manca de pràctica construint les bombolles amb diferents formes geomètriques.

Abans de portar a terme aquestes sessions, vam haver de planificar què volíem ensenyar a les diferents edats. Vam acabar decidint que la teoria emprada per a cada edat seria la següent:

- Primària i Secundària:

1. Definició de cos geomètric.
2. Tipus de cossos geomètrics.
3. Explicació dels conceptes d'arestes, angles, vèrtexs i cares, mitjançant les figures geomètriques construïdes.
4. Explicació de la característica del sabó que sempre intenta tenir la menor superfície sense endinsar-nos en l'explicació de la tensió superficial.
5. Experiments on mostrem la tensió superficial, sense explicar-la, i la càrrega electrostàtica.

- ESO i Batxillerat:

1. Definició de cos geomètric.
2. Tipus de cossos geomètrics.
3. Recordatori del concepte d'aresta, angle, vèrtex i cara, mitjançant les figures geomètriques construïdes.
4. Punt de Fermat, mitjançant les figures 2D construïdes, ja que es veu més clarament aquest, tot i que en les figures de 3D passa exactament el mateix. També expliquem els recorreguts mínims que es formen amb elles.
5. Demostració d'aquest punt de Fermat mitjançant el *Geogebra*.
6. 1a llei de Plateau a mesura que veiem que en totes les figures es creen angles de 120° .
7. Fer el mateix procediment que hem fet amb les plaques de 2D, però ara amb les figures en 3D. Aprofitarem per explicar la tensió superficial.
8. Experiments on ensenyem i demostrem visualment aquesta tensió superficial i mostrem com existeix una càrrega electroestàtica entre un guant i la bombolla.

Capítol 13

13 Pressupost

El pressupost d'aquest treball no ha estat gaire elevat.

Objecte	Quantitat	Preu en euros
Impressió cub 3D	1	17,50
Glicerina	6 pots de 0,5l	14
Glicerina	2 pots d'1l	12,62
Plaques de metacrilat	2	11,98
Rosques	23	1,15
Sabó de marca blanca	3 d'1,5l	4,80
Sabó Fairy	1 d'1l	1,99
Cargols	2 paquets	8,58
Capsa	1	6,50

Taula 1: El pressupost final.

Cost total: 79,12 euros

Capítol 14

14 Conclusió

Al llarg del treball ens hem proposat un seguit d'objectius els quals hem complert majoritàriament amb èxit.

Quant a objectius conceptuals, hem sigut capaces d'assolir els coneixements sobre la tensió superficial i la càrrega electroestàtica mitjançant vistosos experiments. També, hem conegut que era el punt de Fermat gràcies a les diferents figures geomètriques que hem creat.

A més d'assolir tots aquests coneixements, mitjançant moltes recerques i experiments, vam ser capaces de trobar altres conceptes que podrien ser importants pel nostre treball com seria el problema de Steiner i la llei de Plateau.

Un altre objectiu que hem assolit ha estat la recerca i el fet de poder arribar a entendre el comportament de les bombolles de sabó en les diferents figures. Per poder realitzar aquestes bombolles hem hagut d'informar-nos de la quantitat de sabó, aigua i glicerina necessària per a què la barreja sabonosa sigui factible, la qual hem sabut gestionar molt bé.

També, hem aconseguit informar-nos de quins coneixements poden arribar a assolir els alumnes de diferents edats per posteriorment posar-ho en pràctica. Tot i que la sessió de l'ESO i Batxillerat no va tenir molt d'èxit, aquesta ens va ajudar a millorar aspectes de vocabulari emprat i aprendre a com preparar una bona presentació.

A més a més, hem assolit els coneixements informàtics de *Geogebra* i de *ShareLatex*.

Quant a objectius procedimentals, hem demostrat i fotografiat les diferents estructures del punt de Fermat satisfactòriament, tot i les dificultats que aquestes ens han comportat. Hem estat capaces de crear les diferents figures geomètriques: tridimensionals, dimensionals, els experiments amb filferro...

D'altra banda també hem assolit els càlculs dels percentatges de cada element necessari per a crear la barreja sabonosa, igual que les diferents comprovacions i demostracions dels angles de 120° , però prèviament vam haver d'informar-nos de la llei de Plateau la qual ens explica el motiu d'aquest.

Finalment, un cop vam assabentar-nos de l'existència del problema de Steiner, vam informar-nos d'aquest i hem estat capaces de crear el nostre propi exemple en un àmbit real i actual.

Quant a objectius actitudinals, hem treballat com un equip que es complementa a l'hora de fer el treball fent que cada membre del grup faci una feina equitativa a la d'altres membres del grup, així com un equip cohesionat. Al mateix temps, ajudar-nos mútuament en el cas que tinguem problemes i/o dificultats.

La constància ha estat un aspecte difícil a portar a terme a causa de la manca de temps, però tot i això pensem que no ha estat un inconvenient per tal de deixar de tirar endavant el treball.

D'altra banda, hem sabut arribar a escoltar les opinions dels membres del grup per poder trobar la millor solució. També, hem estat conscients dels diners invertits i gastats per després poder distribuir-los adequadament.

En conclusió, el nostre treball ha assolit amb èxit els objectius proposats, i, a més a més, hem anat més enllà d'aquests i hem après molts coneixements nous. Aconseguint així aquest treball final del qual estem satisfetes i sorpreses, ja que no ens esperàvem tot el que pot haver-hi darrere d'una simple bombolla de sabó. I vosaltres, us ho esperàveu?

15 Agraïments

Primerament, volíem agrair l'ajuda de "Reicol, S.C.P" on ens van proporcionar el seu material i ens van ajudar a soldar per tal de poder portar a terme les diferents figures tridimensionals i a "Félix Pozo" on ens van ajudar a realitzar els tall i forats de les estructures planes en 2D. També, volíem agrair a la Universitat de Barcelona per proporcionar-nos alguns dels seus llibres, com *What is maths?*.

Aquest treball ha estat possible gràcies a l'ajuda de l'Anton Aubanell, un catedràtic en matemàtiques, ara ja jubilat el qual és un expert en bombolles i a les matemàtiques que aquestes comporten. Som conscients que sense la seva ajuda aquest treball no s'hagués dut a terme; almenys no de la mateixa manera.

Seguidament, volíem donar les gràcies a l'institut Valerià Pujol de Premià de Dalt per deixar-nos assistir a la conferència realitzada per l'Anton, la qual ens va ajudar a poder mantenir un contacte més proper amb ell.

També ha estat possible l'elaboració d'aquest treball gràcies a tots els professors de l'escola, però, sobretot a l'ajuda del nostre tutor de treball en Pedro Román, el qual sense el seu acompanyament, primerament no haguéssim tingut l'oportunitat d'haver fet aquest treball. A més a més, ens ha ajudat mitjançant correccions i la seva capacitat per motivar-nos en aquest treball, els quals sense aquests no hauria estat possible seguir endavant. Gràcies Pedro per haver tingut tanta paciència amb nosaltres.

Seguidament, voldríem agrair als nostres amics i companys per ajudar-nos en petits dubtes i inconvenients que se'ns han format al llarg del treball.

Finalment, agrair a les nostres respectives famílies tot el que han fet per nosaltres; portar-nos a les entrevistes, ajudar-nos amb alguns dubtes, suportar totes les nostres pujades i baixades d'ànims, per fer-nos costat i donar-nos força i confiança per continuar endavant.

16 Bibliografia

16.1 Webs

https://imaginary.org/sites/default/files/superficies_minimas.pdf
<https://mon.uvic.cat/tlc/files/2013/04/anton-aubanell.pdf>
<http://www.redalyc.org/pdf/104/10402216.pdf>
<https://steemit.com/stem-espanol/@luiscd8a/tension-superficial>
<https://blocs.xtec.cat/proof/poliedres/>
<https://es.slideshare.net/jpicas/cossos-geomtrics-10159192>
<https://www.ugr.es/~pittau/FISBI0/t5.pdf>
<https://naukas.com/2017/07/07/pompas-de-jabon/> <http://tierrachunga.blogspot.com/2007/10/como-pompas-de-jabn-vida-y-milagros-de.html>
http://www.exploratorium.edu/ronh/bubbles/shape_of_bubbles.html
<https://www.overleaf.com/learn>
https://fme.upc.edu/ca/premi-poincare/edicions-anteriors/premi-poincare-2017/treballs-guanyadors-2017/tdr_eudoxio.pdf
<http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/92106/fichero/TFG-2106-MARTINEZ.pdf>
<https://www.slideshare.net/MonicaMae/problemes-doptimitzaci-amb-bombolles-de-sab-mnica-orp>
<https://www.youtube.com/watch?v=Uy-RUMaZ0c0>
https://www.usgs.gov/special-topic/water-science-school/science/surface-tension-and-water?qt-science_center_objects=0#qt-science_center_objects
<https://www.britannica.com/science/surface-tension>
<http://darktecnologia.blogspot.com/p/pompas-de-jabon.html>
<https://definicion.de/burbuja/>
https://www.lasexta.com/tecnologia-tecnoplora/ciencia/divulgacion/que-pompas-jabon-son-redondas_2016090857fb72140cf2a2e945b88332.html
https://www.google.com/search?q=mathematical+symbol+sharelatex&spell=1&sa=X&ved=0ahUKEwi9lsGgmPL1AhVlyhoKHU_9DtEQBQgrKAA&biw=1280&bih=610&safe=active&ssui=on