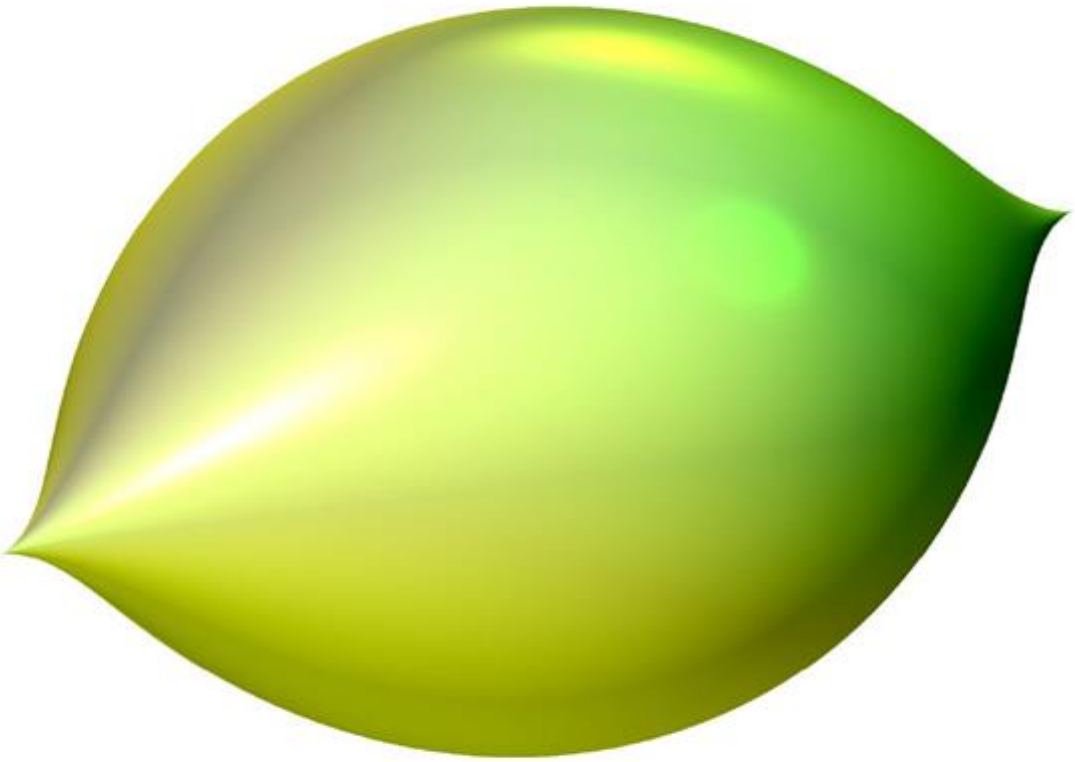
Dε 1a fóπmulα a 1a fΩrmα



Zitrus $x^2+z^2 = y^3(1-y)^3$

“Les matemàtiques posseeixen no només la veritat, sinó certa bellesa suprema. Una bellesa freda i austera, com la de l’escultura”.

Bertrand Russell

“Les matemàtiques són la música de la raó”.

James Joseph Sylvester

“L’àlgebra és molt generosa, sempre ens diu més del que li preguntem”

D’Alembert

“La Geometria és l’art de pensar bé, i dibuixar malament”

Jules Henri Poincarè

“Aquell qui menysprea la geometria d’Euclides és com l’home que, en tornar de terres llunyanes, menysprea casa seva”

Henry George Forder

“L’estudi profund de la natura és la font més fèrtil de descobriments matemàtics”

Jean-Baptiste-Joseph Fourier

“Com és possible que la matemàtica, un producte del pensament humà independent de l’experiència, s’adapti tant admirablement als objectes de la realitat?”

Albert Einstein

AGRAÏMENTS

Vull agrair a totes aquelles persones que m'han ajudat a fer possible el treball.

En primer lloc a la Sra. Maria Alberich, la qual des de l'UPC, m'ha servit de gran ajuda, en primer lloc perquè sense ella segurament no hagués descobert IMAGINARY i no estaria fent aquest treball, i en segon lloc, perquè m'ha servit de gran ajuda en la realització, sobretot, de la part més teòrica.

En segon lloc, al meu tutor de treball de recerca, Sr. Jordi Miralpeix, per el seu constant suport i seguiment, el qual m'ha ajudat en el disseny del treball, i sobretot en formular la idea de la part pràctica i a perfeccionar-la.

També vull agrair l'ajut de la meva professora de matemàtiques, per ensenyar-me part dels conceptes matemàtics que fins ara m'eren desconeguts, i que eren essencials per a l'elaboració de la part teòrica.

A tots ells, moltes gràcies.

ÍNDEX

1. Introducció 4

1.1. Justificació 4

1.2. Expectatives 5

1.3. Estructura 5

1.4. Metodologia 6

2. Contextualització del treball 7

3. Aplicacions informàtiques 8

3.1. El GeoGebra 8

3.2. El SURFER 9

3.3. Google Sites 10

4. Diccionari entre geometria i àlgebra 11

4.1. Introducció al problema de buscar relacions entre fórmules i formes 11

4.2. Equacions amb una variable: Igualtat f(x)=0 11

4.2.1. Definició 11

4.2.2. Elements de l'equació 11

4.2.3. Forma gràfica del conjunt de solucions d'una equació 12

4.2.4. Tipus d'equacions d'una variable 12

4.3. Equacions amb dues variables la forma y=f(x) 18

4.3.1. Definició de monomi i polinomi 18

4.3.2. Funcions polinòmiques. Representació gràfica 18

4.4. Equacions amb dues variables de grau 2. Còniques 25

4.4.1. Introducció 25

4.4.2. Lloc geomètrics 25

4.4.3. Generatives 25

4.4.4. Degeneratives 35

4.4.5. Equació general de segon grau amb dues variables 36

4.5. Equacions amb dues variables de qualsevol grau 37

4.5.1. Factorització 37

4.5.2. Igualtat entre corbes 38

4.5.3. Relació entre el grau del polinomi i el nombre de punts amb seccions amb una recta 38

4.5.4.Corbes importants en la història de la matemàtica de dues variables i de grau més gran que dos 38

4.6. Equacions de tres variables: superfícies a l'espai 41

4.6.1. Introducció 41

4.6.2. Superfícies a l'espai 51

5. Simetria 58

5.1. Concepte 58

5.2. Tipus de simetries 58

5.2.1. Simetria central 58

5.2.2. Simetria axial 59

5.2.3. Simetria especular 59

6. Singularitats 62

6.1. Introducció 62

6.2. Funcions del tipus y=f(x). Funcions reals d'una variable real 62

6.2.1. Definició de límit d'una funció en un punt 62

6.2.2. Límits laterals 63

6.2.3. Definició de funció contínua en un punt 63

6.2.4. Definició de la derivada d'una funció en un punt 64

6.3. Funcions de tipus f(x, y) 72

6.3.1. Definició de límit d'una funció f(x, y) en un punt (x_0, y_0) 72

6.3.2. Definició de funció contínua en un punt (x_0, y_0) 73

6.3.3. Definició de derivada parcial en el punt (x_0, y_0) 73

6.4. Funcions del tipus f(x, y, z). Singularitats 74

7. Història del models de superfícies algebraiques 83

7.1. Els models geomètrics alemanys del segle XIX 83

7.2. Col·lecció dels models geomètrics "GARCÍA GALDEANO" Universitat de Saragossa 85

7.2.1. Zoel García Galdeano (1846-1924) 85

8. Influència dels models de superfícies algebraiques en els artistes contemporanis 86

9. Part pràctica 89

10. Conclusions 96

11. Fonts d'informació 98

11.1. Bibliografia 98

11.2. Webgrafia 98

Annexos:

Annex 1: Esdeveniments de l'Imaginary

Annex 2: El GeoGebra (ampliació)

Annex 3: Demostració de les singularitats

1.- INTRODUCCIÓ

1.1 Justificació

El tema del treball, la relació entre les fórmules i les formes, és molt complex i, sobretot, molt extens. De fet, aquest mateix tema es podria haver encarat de moltes formes diferents.

Primer vull explicar perquè he decidit fer un treball matemàtic. El fet és que, ja des de ben petit, quan veia qualsevol figura geomètrica en les parets o el terra començava a jugar amb la meva imaginació. Més endavant vaig començar a entrar ("realment") en el impressionant món de les matemàtiques, i a mesura que anava descobrint-lo, em meravellava més. Alguns temes per els quals desenvolupo un gust especial dins d'aquest immens món, són les fractals o la proporció àuria (entre altres), ja que et mostren la directa relació entre les matemàtiques i el món físic. A part d'aquestes també podria destacar el meu gust per les probabilitats i l'atzar. En realitat, no podria dir un perquè em delecta aquest gran món de les matemàtiques (potser que siguin la meva manera d'entendre i desxifrar l'intricat món on vivim), però si que ja sabia des d'un primer moment com l'encararia.

Tot i tenir molt clar que el meu treball de recerca estaria relacionat amb les matemàtiques, no tenia gens clar el tema. Bé, he de dir que aquest tema me'l va presentar la meva professora de matemàtiques, en realitat va preguntar a tota la classe si algú volia fer el treball de recerca sobre això, però jo vaig ser l'únic interessat. Ràpidament, vaig començar a buscar més i més informació sobre el SURFER i IMAGINARY, i així vaig descobrir que aquest era el meu tema de treball de recerca ideal. A mida que m'anava endinsant més en aquest món, més agradava i, més creixien les meves ganes de posar-me a "treballar" (no sé si se li podria dir treballar, ja que tot i que ho volia fer el més bé possible, ho feia com un passatemps). A més, aquest tema em serviria d'ajuda en el meus estudis universitaris, ja que tocava tant la informàtica com les matemàtiques.

Si miro enrere, veig que no vaig ser gaire conscient sobre el gran repte que suposava fer aquest treball de recerca, ja que requeria uns coneixements de matemàtiques i informàtica (aquests últims sobretot per a la creació de Geogebres)

que no tenia. Aquesta acció inconscient va tenir la seva part positiva, ja que la por que em podia produir no va ser cap problema. Això fa que una gran part de l'esforç fet que es mostri directament, tant l'emprat aprenent conceptes matemàtics força complexos (per saber realment què estava fent) com l'emprat estant moltes hores davant el Geogebra o el Surfer per desxifrar una petita part dels ocults mecanismes que els fan funcionar.

1.2 Expectatives

Respecte a les meves expectatives, es van anar esclarint a mesura que avançava amb el treball, cosa que resulta lògic si es té en compte que estava tractant un tema que m'era molt desconegut. Només sabia que tenia ganes d'arribar fins al límit de les meves possibilitats i no m'importava, ni l'esforç ni el temps que requerís. Al cap i a la fi tant si arribava més o menys lluny com sinó, hauria fet el real propòsit del treball de recerca, aprendre per tu mateix. Com es pot apreciar al principi estava molt motivat, i el què és més important, en vaig estar durant tota la resta del treball (amb alts i baixos, lògicament). Ara que ho miro fredament, el principal objectiu del treball, un del pocs que vaig tenir clar ja des del principi, era, com diu el mateix títol, trobar la relació entre l'espai (formes) i les matemàtiques, aquest era l'objectiu principal però no era l'únic, també volia conèixer i donar a conèixer el fantàstic projecte Imaginary, veure una part menys metòdica de les matemàtiques (una part que s'acosta més a la realitat) i, com el projecte Imaginary en general, donar una alternativa a l'ensenyança de les matemàtiques fent que la gent pugui interactuar amb les figures.

1.3 Estructura

El meu treball s'estructura en dos grans blocs, un de més teòric i l'altre de més pràctic. El bloc teòric va ser el què vaig fer primer ja que els coneixement obtinguts en aquest podrien ser utilitzats per fer el segon bloc, el més pràctic. També cal dir que, tot hi que les dues parts m'han portat, més o menys, les mateixes hores de

treball, la part més difícil per a mi ha estat la segona, no tant el dur-la a terme, sinó el pensar que és el què volia fer.

La primera part ha estat molt gradual, és a dir, he començat explicant conceptes molt elementals, i d'aquests he anat creant un camí cap a d'altres de més complicats, de fet, els últims són el que realment m'interessarien en un futur per a la part pràctica. Així doncs, he començat explicant conceptes bàsics com les equacions amb una i dues variables, les funcions polinòmiques, les còniques, equacions de dues i tres variables de qualsevol grau fins arribar a les superfícies a l'espai que és el que dibuixa el programa SURFER. També he treballat el concepte de simetria i finalment per arribar al concepte de singularitat he hagut de partir del concepte de límit, de derivada d'una variable i vàries variables. També he parlat una mica de la història de les superfícies algebraiques així com la seva relació amb l'art contemporani, tot i que el concepte d'art el treballo més a la part pràctica.

En la segona part he volgut remarcar el concepte en què es basa el meu treball de recerca, per tant podríem dir que he arribat a fer art conceptual, ja que relaciono, la fórmula (que és el què es veurà) i la forma a la qual representarà.

1.4 Metodologia

Per complir els objectius proposats, la metodologia que he emprat s'ha basat en la recerca d'informació en diferents llibres i pàgines web, així com seleccionar-la de la forma que m'ha semblat més adient, a part d'una gran ajuda dels meus tutors per aportar-me idees i corregir-me el treball. Per a la primera part del treball vaig consultar diversos llibres de matemàtiques de 1r i 2n de batxillerat, i sobretot cap al final, vaig fer una recerca important a Internet. Totes les fonts d'informació que he fet servir es troben a la bibliografia. En la part més pràctica, em vaig valdre de l'ajuda del meu tutor per idear-la i, basant-me en els coneixement obtinguts durant tot el treball, he pogut elaborar les figures.

El treball el presento de dues formes: en format paper i en format web (google sites), el podeu trobar a l'adreça: https://sites.google.com/a/inspuig-reig.cat/tdr-defi/ ja que en format web és més fàcil interactuar amb els diferents vídeos i applets que he posat al treball.

2.- CONTEXTUALITZACIÓ DEL TREBALL

El meu treball de recerca l'he fet basat en la relació que hi ha entre la fórmula i la forma.

Cada vegada més s'intenta apropar les matemàtiques a la gent i veure que aquestes es troben en tots els àmbits. Així doncs l'any 2008 d'acord amb aquesta manera de pensar, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Institut d'investigació de matemàtiques que es troba a la Selva Negra d'Alemanya) va fer una exposició anomenada IMAGINARY on hi havia figures elaborades amb un programa informàtic (SURFER), on posant una determinada fórmula es pot elaborar una figura. Aquesta exposició ha recorregut més de 80 ciutats en tot el món. Degut a aquest gran èxit i el creixement de la comunitat s'ha portat a terme la creació d'una plataforma (www.imaginary.org).

El portal espanyol és elaborat per "La Real Sociedad Matemàtica Española".

L' IMAGINARY de l'any 2008 ha anat canviant i ara és una plataforma dedicada la matemàtica oberta i interactiva. Els seus continguts es poden utilitzar tant en escoles, museus, exposicions, tallers, xerrades, activitats de premsa... i consisteixen en programes interactius i galeries d'imatges. El seu principal objectiu és que la comunitat pugui aportar idees. La idea principal és que els mòduls es creïn dins de la comunitat i les exposicions de forma independent. Pel que fa als esdeveniments se n'ha fet molts, per veure'ls consultar l'annex 1.

Els programes informàtics són l'element principal de la plataforma, són visualment atractius i altament interactius i permeten explorar i crear matemàtica des de l'ordinador.

3.- APLICACIONS INFORMÀTIQUES

3.1 El GeoGebra

El GeoGebra és un programari lliure i interactiu, que combina geometria, àlgebra i càlcul. Ha estat desenvolupat per Markus Hohenwarter, de la Universitat de Salzburg, com a recurs educatiu per a l'Educació Primària, Secundària i Batxillerat. Com a programari educatiu ha rebut diversos premis d'àmbit internacional. De seguida, la seva aplicació es va estendre per tot el món, a través de la web www.geogebra.org L'any 2007, davant la manca de preparació del món docent de les noves tecnologies i en el GeoGebra en particular, es va crear l'International Institute per fomentar la formació de docents i al mateix temps millorar les prestacions del software provocant intercanvis d'opinions entre els propis docents. Aquesta ha estat una de les grans virtuts del projecte, deixar que tothom se'l faci seu, aconseguint així nombrosos col·laboradors incondicionals, la qual cosa ha permès que la seva difusió i millora hagi estat molt ràpida. En aquest sentit, han tingut l'encert de traduir-lo a més de 50 llengües, entre elles la catalana.

La versió catalana ha estat feta per Jaume Bartrolí, Pep Bujosa, Josep Lluís Canadilla i Antoni Gomà entre altres.

Per una banda, GeoGebra és un sistema de geometria dinàmica. Permet fer construccions tant amb punts, vectors, segments, rectes, còniques, com amb funcions que després es poden modificar dinàmicament.

Per altra banda, es poden entrar directament equacions i coordenades. Així, el GeoGebra té la potència de fer servir variables relacionades amb nombres, vectors i punts; permet calcular derivades i integrals de funcions i ofereix un repertori de comandaments propis de l'anàlisi matemàtica per identificar punts singulars d'una funció i arrels.

Aquestes dues perspectives caracteritzen el GeoGebra: la relació entre les expressions a la finestra algebraica es corresponen amb els objectes a la finestra gràfica, al full de càlcul... i a l'inrevés.

A més a cada versió, s'hi van incloent novetats, primer va ser el full de càlcul que està relacionat amb ambdues finestres, després una segona finestra gràfica, un

calculador de probabilitat, o bé la incorporació del calculador algebraic simbòlic, incorporada des de la versió 4.2, i per últim la finestra de programació amb Phyton [1] i la geometria 3D, ambdues previstes per la versió 5 del GeoGebra. Els applets que he elaborat en el meu treball he fet servir la versió 4.4, que és la que hi ha actualment.

Per poder veure correctament les diferents aplicacions fetes amb el GeoGebra, és imprescindible tenir instal.lat a l'ordinador el programari necessari de Java, que es troba a l'adreça http://www.java.com/es/ i també cal tenir descarregat el GeoGebra que es troba a la web http://www.geogebra.org.

Els applets que elaborat els he posat al GeogebraTube[2].

Per veure més informació sobre el funcionament del Geogebra, així com el recull d'applets que he fet i l'explicació de com ho he fet consultar l'annex 2.

3.2 SURFER

SURFER és un programa informàtic el seu nom prové de la paraula anglesa *surface,* que en català significa superfície. La seva nova versió és una extensió basada en Java (la versió actual funciona amb Java 6) del programa SURFER2008 creat per l'exhibició IMAGINARY per celebrar l'any de les matemàtiques d'Alemanya. Aquesta exhibició forma part del mundialment conegut Mathematiches Forschungsinstitut Oberwolfach situat a la Selva Negra alemanya. On cada setmana es celebren reunions sobre investigacions relacionades amb les matemàtiques. Aquestes reunions serveixen per intercanviar coneixements de matemàtics de tot el món.

El programa és independent de la plataforma que s'utilitza i s'executa en els sistemes operatius de Windows, Linux o MAC i s'està millorant i ampliant contínuament degut a que s'utilitza en les diverses exposicions IMAGINARY que es

[1] **Programació amb Phyton**: És un llenguatge de programació d'alt nivell, que té estructures que permet fer programes més entenedors.

[2] **GeogebraTube**: Canal web que hi ha a la xarxa per compartir coneixements, en aquest cas applets de GeoGebra.

celebren en tot el món. Aquest programa es pot descarregar gratuïtament des del lloc web **http://www.imaginary.org/es/program/surfer.** .

De forma matemàtica, el programa visualitza la geometria algebraica a temps real. Les superfícies que es mostren són les que estan donades per una equació polinòmica en les variables x, y, z igualada a zero. Tots els punts que resolen l'equació es representen, i formen la superfície. El programa inclou una gran galeria de mostres amb explicacions i un tutorial. Està disponible en varis idiomes, incloent l'alemany, l'espanyol, rus, serbi i portuguès.

El més interessant del programa SURFER és que no és necessari entendre les matemàtiques (geometria algebraica), per poder experimentar-lo, però si per crear obres d'art úniques ja sigui en imatges o animacions.

3.3 Google Sites

Google Sites és un producte de Google que permet crear pàgines web d'una manera molt senzilla i sobre tot, de manera visual. A més les podem tenir en un lloc gratuït. L´únic requisit per poder utilitzar Google Sites és tenir un compte de Google.

Per començar a crear una pàgina haurem d'anar a l'adreça a http://sites.google.com.

Crear una pàgina amb Google Sites és molt senzill, simplement hem de clicar sobre Create New Site i una guia de pas a pas ens portarà per les diferents opcions.

Algunes coses que podem fer amb Google Sites són:

- Utilització de plantilles web (familiar, d'esports, ...).
- Edició visual molt bona.
- Capacitat d'editar el codi HTML.
- Possibilitat d'incloure vídeos de YouTube.
- Possibilitat d'insertar documents de Google drive.
- Integració senzilla amb Google Maps.

(Entre altes)

A l'adreça web https://sites.google.com/site/webscolaborativas/ si troba un tutorial on es veu tot el que es pot fer amb Google Sites.

4.- DICCIONARI ENTRE GEOMETRIA I ÀLGEBRA

4.1 Introducció al problema de buscar relacions entre fórmules i formes

Les fórmules que utilitzarem per fer l'estudi seran sempre polinomis en una, dues, o tres variables amb coeficients sobre els reals.

Les fórmules les classificarem segons el número de variables (1, 2 o 3), pel seu grau (que vindrà donat pel grau del monomi més gran), per la forma dels monomis que hi apareixen i pel valor dels coeficients.

Començarem l'estudi segons el nombre de variables, i dins d'aquest, estudiarem que passa segons el grau.

4.2 Equacions amb una variable: Igualtat f(x)=0

4.2.1 Definició d'equació

Una equació és una igualtat algèbrica[3] que només es compleix per a certs valors (un nombre finit) de la lletra (incògnita) que apareix en els seus membres.

Quan una equació l'expressem de la forma f(x)=0, on f(x) és un polinomi rep el nom **d'equació polinòmica o algebraica**. Així doncs en general una equació algebraica de grau n serà de la forma: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$.

4.2.2 Elements

En les equacions[4] distingim diversos elements:

- **Incògnita**: Variable, normalment designada per la lletra x, que busquem.
- **Membre**: És cadascuna de les dues expressions algebraiques separades pel signe "=".
- **Terme**: Cadascun dels sumands que componen els membres de l'equació.

[3] Igualtat algebraica: Igualtat en què les dues entitats estan formades per nombres i lletres relacionades per signes d'operacions aritmètiques.

[4] Exemple equació: 2x+4=3x+8

- **Grau**: És el major dels exponents de les incògnites, una vegada realitzades totes les operacions (reducció de termes semblants). Es representa amb la n.
- **Solucions**: són els valors numèric (nombres reals) de la incògnita que satisfan la igualtat algèbrica. El fet de trobar aquests valors s'anomena **resoldre-la**.

4.2.3 Forma gràfica del conjunt de solucions d'una equació

Podem dir que la forma gràfica de les solucions d'una equació d'una incògnita f(x)=0, ve donada per un conjunt de punts que són solució d'aquesta equació. Els punts gràficament són els punts de tall amb l'eix x de la funció de dues variables y=f(x). El grau ens donarà el nombre màxim de solucions que podem obtenir (resultat que es coneix com a Teorema Fonamental de l'Àlgebra).

Així en el conjunt dels nombres reals una equació de 1r grau tindrà com a màxim una solució, una de 2n grau com a màxim dues solucions i en general una de grau n un màxim de n solucions.

4.2.4 Tipus d'equacions d'una variable

Equació de primer grau

Una equació és de primer grau amb una incògnita si es pot expressar en la forma $ax + b = 0$, amb $a\ i\ b$ nombres real.

Cal dir que en aquesta equació:

- Si $a = b = 0$, l'equació té infinites solucions, perquè 0. $x + 0 = 0$, és cert per qualsevol valor de x. La seva forma gràfica és tot l'eix x.
- Si a=0 i b≠0, l'equació no té solució, perquè 0. X+b=0, d'aquí deduïm que b=0 cosa que no pot ser. Aquí no tindríem res gràficament.
- Si a≠0 i b≠0, l'equació té una única solució: ax+b=0 →ax=-b →x=$\frac{-b}{a}$. La seva forma gràfica serà aquest punt sobre l'eix x.

Equació de segon grau

Una equació és de segon grau amb una incògnita, si es pot expressar en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, amb $a, b\ i\ c$ com a nombres reals i $a\ \neq 0$.

Quan alguns dels coeficients b o c, o tots dos, són zero, l'equació s'anomena incompleta. Si tots els coeficients són diferents de zero, s'anomena completa.

Resolució d'equacions incompletes

Per trobar les solucions d'una equació incompleta, distingim tres casos que es poden presentar.

a) Si $b = c = 0$, l'equació que queda és $ax^2 = 0$, per resoldre-la s'aïlla la x:

$$ax^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{0}{a} = 0 \rightarrow x = 0$$

b) Si $c = 0$, l'equació que queda és $ax^2 + bx = 0$. Per resoldre-la, s'extreu factor comú x en el primer membre, i l'equació queda com un producte igualat a zero. Perquè el producte sigui zero un dels factors ha de ser zero.

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \qquad x = 0\ i\ x = \frac{-b}{a}$$

c) Si $b = 0$, l'equació que queda és $ax^2 + c = 0$. Es desenvolupa i queda, $ax^2 = -c\ \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a}$.

Si quan substituïm els valors de a i c al radicand[5] resulta que $\frac{-c}{a}$ és negatiu, l'equació no té solució en els nombres reals.

Resolució d'equacions completes

Les solucions de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$. Amb a, b i c diferents de zero, venen donades per la fórmula següent:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

[5] Radicand: terme que hi ha dins del radical. $\sqrt[4]{7}$ ←

Nombre de solucions

L' expressió: $b^2 - 4ac$, que apareix com a radicand en la fórmula de les solucions de l'equació de segon grau, s'anomena discriminant i se simbolitza amb la lletra grega, Δ.

El nombre de solucions d'una equació de segon grau depèn del signe del discriminant:

- Si Δ > 0, hi ha dues solucions diferents, la gràfica tallarà en dos punts l'eix x.
- Si Δ = 0, hi ha dues solucions iguals, la gràfica tallarà en un punt l'eix x i a més coincideix amb el vèrtex de la funció (més endavant es podrà veure en un applet).
- Si Δ < 0, no hi ha cap solució real, la gràfica no tallarà en cap punt l'eix x.

Cal dir però que si, en el últim cas, enlloc de treballar en el conjunt dels nombres reals treballem en el conjunt dels complexos, sí que tindrà dues solucions. D'acord amb el **teorema fonamental de l'àlgebra**, que diu que tot polinomi de grau n (n > 0 i natural) amb coeficients reals, té, com a molt, n arrels en els reals i exactament n arrels en els complexos.

Introducció als nombres complexos

Els nombres complexos apareixen davant la impossibilitat, en els nombres reals, de calcular arrels d'índex parell de nombres negatius.

Així, obtenim els nombres complexos afegint als nombres reals un nombre imaginari i, que definim com $i = \sqrt{-1}$, amb la finalitat de poder donar una solució en problemes on els nombres reals no arriben.

Els nombres complexos són de la forma $a + bi$, on a i b són nombres reals i i rep el nom d'unitat imaginària, a és la part real i b és la part imaginària del nombre complex.

- Si la part real és zero, és a dir, $a = 0$, el nombre complex és de la forma bi. Es coneix amb el nom d'imaginari pur.
- Si la part imaginària és zero, és a dir, $b = 0$, el nombre complex és redueix, evidentment, a un nombre real. És a dir, els nombres reals estan inclosos en els nombres complexos.

Així doncs si el discriminant és negatiu per resoldre l'equació de segon grau posarem:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a} i \qquad x_2 = \frac{-b}{2a} - (b^2 - 4ac)2ai$$

I donarà dues arrels complexes.

Resolució d'equacions factoritzades

Diem que una equació de segon grau està factoritzada si és un producte de factors igualats a zero. L'escrivim $(x - a_1)(x - a_2) = 0$. Per resoldre aquest tipus d'equacions igualem cada factor a zero, així faríem:

$$x - a_1 = 0 \qquad x = a_1 \qquad x - a_2 = 0 \qquad x = a_2$$

Equacions biquadrades

Una equació amb una incògnita és biquadrada si es pot expressar en la forma; $ax^4 + bx^2 + c = 0$, amb $a, b\ i\ c$ pertanyents als nombres reals, i $a \neq 0$.

Per resoldre una equació biquadrada es fa el canvi: $y = x^2$, de manera que: $x^4 = (x^2)^2 = y$. Si substituïm a l'equació donada, resulta: $ay^2 + by + c = 0$.

Quan resolem aquesta equació de segon grau s'obtenen les solucions de y. A continuació, es troben els valors possibles de la incògnita inicial x fent el canvi de variable: $x^2 = y$.

Equacions de grau més gran que 2

Per resoldre equacions de qualsevol grau amb solucions enteres i racionals, factoritzarem el polinomi amb l'ajuda de la Regla de Ruffini, en factors de primer i segon grau, després igualarem cada factor a zero i resoldrem les equacions de primer i segon grau resultants.

Regla de Ruffini

Polinomi amb terme independent : $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

- El primer pas a seguir serà trobar els divisors del terme independent: $Div(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$
- Per trobar la primera arrel provarem amb aquests enters (si al substituir ens dona zero, el nombre en qüestió serà una arrel).

  $x = 1,\ P(1) = 1^4 - 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0$ (és arrel)
- Quan ja hem trobat una arrel, introduïm l'algoritme de Ruffini.

	1	-1	-7	1	6
1		1	0	-7	-6
	1	0	-7	-6	0

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1)(x^3 - 7x - 6)$$

- Continuem buscant d'entre els divisors del terme independent (tingueu en compte que podria passar que la mateixa arrel sortís repetida) del polinomi quocient.

	1	-1	-7	1	6
1		1	0	-7	-6
	1	0	-7	-6	0
-1		-1	1	6	
	1	-1	-6	0	

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x - 6)$$

- I continuem buscant ...

	1	-1	-7	1	6
1		1	0	-7	-6
	1	0	-7	-6	0
-1		-1	1	6	

	1	-1	-6	0
-2		-2	6	
	1	-3	0	
3		3		
	1	0		

- Al final l'equació obtinguda és: $P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$, i per tant, les arrels són: 1, -1, -2 i 3.

Polinomi sense terme independent com: $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x$

En el cas de que no hi hagi terme independent és treu factor comú de x elevat al menor exponent. Després només cal seguir el procediment anterior.

Equacions que no es resolen amb la Regla de Ruffini

Quan resolem equacions factoritzant, **el teorema fonamental de l'àlgebra** ens diu que sobre els complexos un polinomi de grau n és descomposa en n factors lineals i per tant defineix n punts complexos i sobre els reals tot polinomi és descomposa en factors lineals i quadràtics. Aquest teorema ens diu les arrels que hi ha però no com trobar-les, un dels mètodes, per exemple, pot ser el gràfic, però n´hi ha més. Veure aquests mètodes però no és objecte del nostre treball. Per veure la relació entre la forma i la formula ho farem amb els següents applets.

Applet 1. https://www.geogebratube.org/student/m113853

En aquest applet es veu un geogebra on hi ha la paràbola $f(x)=ax^2+bx+c$ i es veu que si el discriminant és zero hi ha una solució, més gran que zero dues i més petit que

zero cap. Això ho veiem en què la paràbola talla en un punt, en dos o en cap l'eix de les x. També s'hi veu que si a=0, aleshores la paràbola es converteix en una recta.

Applet 2. https://www.geogebratube.org/student/m130881

En aquest applet de geogebra es veu una equació de grau >3 factoritzada, i es comprova quines són les arrels. S'hi pot apreciar com varia la forma de gràfica de la funció en variar les multiplicitats de les arrels i el signe de la funció.

4.3 Equacions amb dues variables de la forma de funcions polinòmiques y=f(x)

4.3.1 Definició de monomi i polinomi

Un **monomi** està format per un nombre (coeficient) i una o més lletres (part literal). Per exemple: $-4x^4$, $5xy^5$

Dos monomis direm que són semblants quan tenen la mateixa part literal. El grau del monomi és la suma del exponents de les variables.

Un **polinomi** és una expressió algebraica formada per la suma o la resta de dos o més **monomis**, aquests seran els **termes** del polinomi.

- El **grau d'un polinomi** és el del terme de grau més alt.
- El **terme independent** és el monomi sense part literal.

  Per exemple, al polinomi $P(x,y) = 2x^4 - 5xy + 9$, hi hauria 3 termes, el grau seria 4 i el terme independent seria 9.

4.3.2 Funcions polinòmiques. Representació gràfica

Funció real de variable real

Una funció real de variable real és una aplicació $f{:}A \rightarrow \mathbf{R}$[6] on A és un conjunt de nombres reals que anomenem domini de f. Acostumarem a representar per x un element genèric de A i per $f(x)$ la seva imatge per l'aplicació $f{:}A \rightarrow \mathrm{R}$

$$x \rightarrow f(x)$$

[6] **R**: conjunt dels nombres reals

Gràfica d'una funció

La gràfica d'una funció és el lloc geomètric del punts del pla, les coordenades del qual compleixen l'equació y = *f*(x).

Funció polinòmica

La funció polinòmica és una funció real de variable real tal que cada x li fa correspondre $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, és a dir:

$$f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

Vegem a continuació, casos particulars de funcions polinòmiques i les seves gràfiques.

Funció polinòmica de grau zero

Una funció polinòmica de grau zero és una funció que cada valor de x li fa correspondre el nombre *a*, és a dir: $f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \rightarrow a$$

on $a \in \mathbf{R}$ és fix, i que anotarem per *f*(x) = *a* o y = *a*.

El gràfic d'aquesta funció és una recta paral·lela a l'eix d'abscisses, tal com és veu a la següent figura:

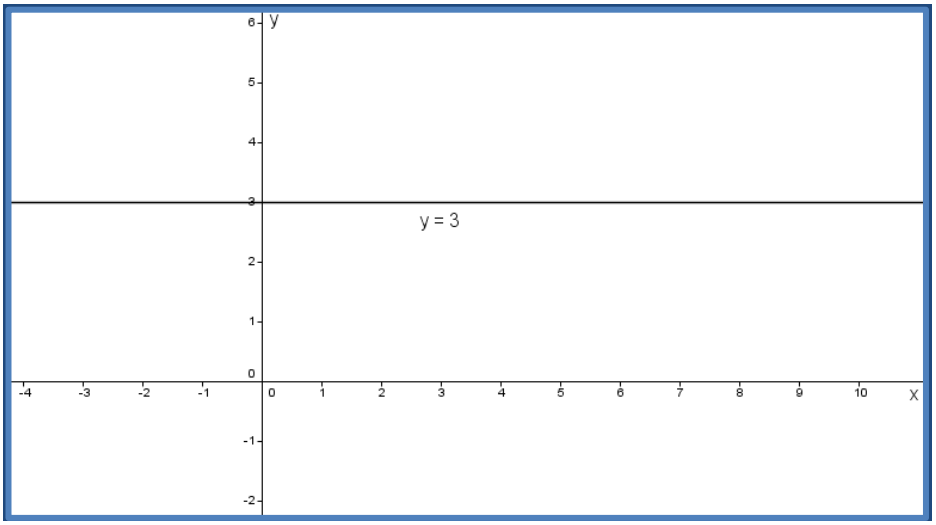


Figura 1. Funció polinómica de grau zero

Font: Elaboració pròpia

Per veure la relació entre la fórmula i la forma cal veure el següent applet.

Applet 3. https://www.geogebratube.org/student/m110644

En aquest applet de geogebra es pot observar com varia el gràfic de la recta segons el valor del paràmetre *a.*

Funció polinòmica de 1r grau

Una funció polinòmica de primer grau és una funció que cada valor de x li fa correspondre $ax + b$, és a dir:

$$f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$
$$x \rightarrow a\,x + b$$

On $a, b \in \mathbf{R}$ són fixos i $a \neq 0$, ja que si a fos nul·la no seria de primer grau sinó una funció constant, i que anotarem per $f(x) = a\,x + b$ o $y = a\,x + b$.

El gràfic d'aquesta funció és una recta on a és el seu pendent, si $a>0$, la funció és creixent[7], si $a<0$, la funció és decreixent[8]. I b és l'ordenada en l'origen (punt de tall amb l'eix y). En el cas que $b = 0$, la recta passa pel origen de coordenades.

Hem de tenir clar que el pendent d'una recta és l'increment de l'ordenada (y), quan l'abscissa (x) s' incrementa en una unitat.

En la següent figura, observem una recta creixent, i una de decreixent:

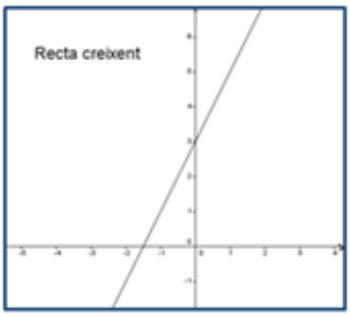


Figura 2.

Font: Elaboració pròpia

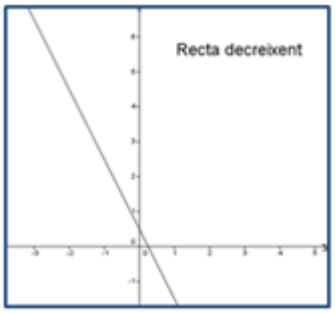


Figura 3

Font: Elaboració pròpia

[7]Creixent : si $x_1 \leq x_2$ aleshores $f(x_1) \leq f(x_2)$

[8] Decreixent: si $x_1 \leq x_2$ aleshores $f(x_1) \geq f(x_2)$

Per veure la relació entre la fórmula i la forma cal veure el següent applet.

Applet 4: **https://www.geogebratube.org/student/m112165**

En aquest applet de geogebra es pot observar com varia la recta en funció dels paràmetres *a* i b i el concepte de pendent.

Funció polinòmica de 2n grau

Una funció polinòmica de segon grau és una funció que cada valor de x li fa correspondre $ax^2 + bx + c$, és a dir:

$$f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \rightarrow ax^2 + bx + c$$

On $a,b,c \in \mathbf{R}$ són fixos i $a \neq 0$, ja que si *a* fos nul·la no seria de 2n grau sinó de 1r grau, i que anotarem per $f(x) = ax^2 + bx + c$ o $y = ax^2 + bx + c$.

El gràfic d'aquesta funció és una paràbola, els elements essencials de la qual són l'eix de simetria, el vèrtex i les branques.

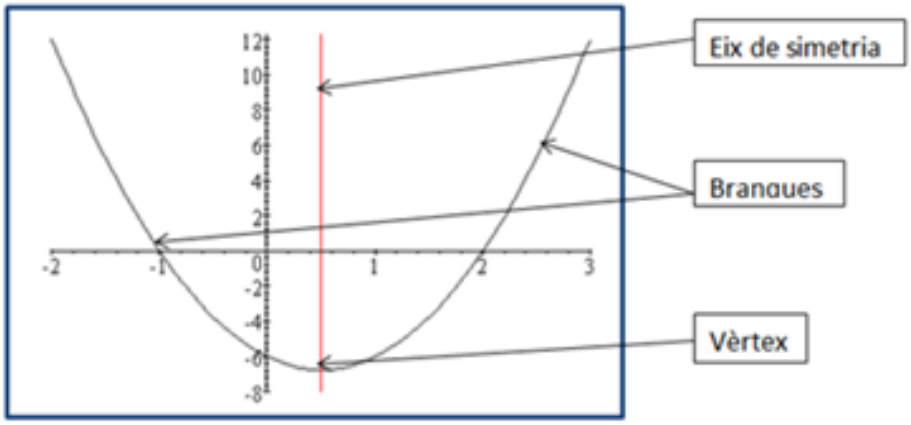


Figura 4: Paràbola

Font: Elaboració pròpia

Si una funció quadràtica té per expressió $f(x) = ax^2 + bx + c$,

l'eix de simetria és la recta $x = \frac{-b}{2a}$,

el vèrtex és el punt $(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c)$;

les branques de la paràbola es dirigeixen cap amunt si $a > 0$, i cap avall si $a < 0$.

Punts de talls amb els eixos:

- amb l'eix X: els punts la x dels quals resol l'equació $ax^2 + bx + c = 0$. Poden ser:
  - dues: si $b^2 - 4ac > 0$.
  - un: si $b^2 - 4ac = 0$.
  - cap: si $b^2 - 4ac < 0$.
- amb l'eix Y: $(0, c)$

Creixement:

- si $a > 0$, decreixent en l'interval $(-\infty , \frac{-b}{2a})$, creixent en l'interval $(\frac{-b}{2a} , +\infty)$.
- si $a < 0$, creixent en l'interval $(-\infty , \frac{-b}{2a})$, decreixent en l'interval $(\frac{-b}{2a} , +\infty)$.

A la pràctica, per representar bé una paràbola, seguirem els següents passos tal com veiem en el següent exemple, $f(x) = x^2 -4x + 3$:

1. Buscarem el vèrtex amb la fòrmula, $x = \frac{-b}{2a}$. Seguint l'exemple, $x = \frac{4}{2} = 2$. Per buscar la y, substituirem a la fórmula, és a dir, $f(2) = 2^2 -4 \cdot 2 + 3 = -1$. Amb això sabem que la gràfica passarà pel punt, V = (2 , -1)
2. Buscarem el punt de tall de la paràbola amb els eixos de coordenades:
   a. Eix X: Per fer-ho, hem d'igualar l'equació de la paràbola a zero, $x^2 -4x + 3 = 0$. Després, hem de resoldre l'equació que en deriva,

   $$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} ; x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \end{array}$$

   Així doncs, els punt de tall amb l'eix X són: (3 , 0); (1 , 0)

   b. Eix Y: Per fer-ho, hem de substituir la x per zero, $f(0) = 0^2 -4 \cdot 0 + 3 = 3$. Així doncs, els punt de tall amb l'eix y serà: (0 , 3)
3. Donarem uns quants valors a la x, per així trobar la y. Perquè la paràbola ens quedi ben dibuixada, cal donar valor a ambdues bandes del vèrtex, i com més valors donem, més exacte serà la nostra paràbola.

X	2	3	1	0	-1	4	5
y	-1	0	0	3	8	3	8

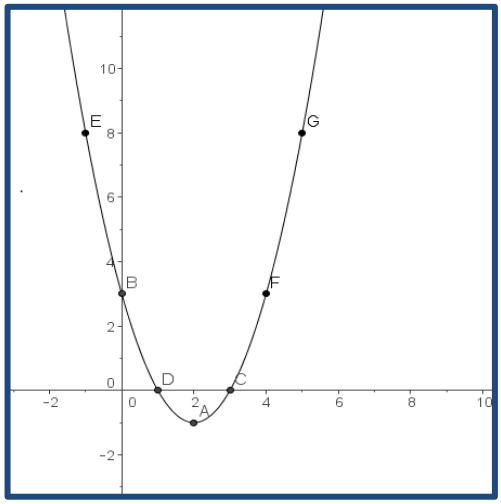


Figura 5. Paràbola

Font: Elaboració pròpia

Per veure la relació entre la forma i la fórmula d'una funció de 2n grau observa els següents applets.

Applet 5 https://www.geogebratube.org/student/m113853

En aquest applet de geogebra es pot observar com varia la paràbola segons els valors dels paràmetres *a, b, c*.

Funció polinòmica de grau n

És una funció que cada valor de x li fa correspondre $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, és a dir:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \rightarrow a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

on $n \in N \cup \{0\}$ i $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1, a_0 \in R$, $a_n \neq 0$ si $n \neq 0$.

Aquesta funció té les següents característiques:

- El seu domini és R, això vol dir que sempre és possible de calcular la imatge de qualsevol nombre real.
- Totes són contínues (les podem dibuixar sense aixecar el llapis del paper).

- Per a valors molt grans o molt petits, la imatge de la funció és molt semblant a la imatge del seu terme dominant[9].

En la gràfica d'una funció polinòmica es poden diferenciar dos elements: les branques i la part central; també els màxims i els mínims relatius[10], i els punts de tall amb els eixos:

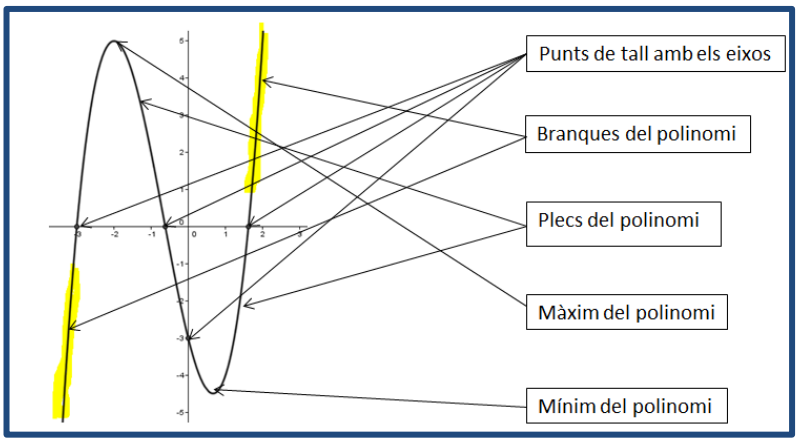


Figura 6. Funció polinòmica
Font: Elaboració pròpia

La branca de la dreta es dirigeix cap amunt quan el coeficient de grau màxim és positiu, i cap avall quan és negatiu.

La branca de l'esquerra es dirigeix cap avall quan el polinomi és de grau parell i el coeficient de grau màxim és negatiu, o bé quan el polinomi és de grau senar i el coeficient de grau màxim és positiu. En cas contrari, l'extrem de l'esquerra es dirigeix cap amunt.

Per veure la relació entre la forma i la fórmula d'una funció de grau n grau observa els següents applets.

Applet 6: **https://www.geogebratube.org/student/m126752**:

En aquest applet de geogebra es pot observar les diferents gràfiques que adopten les funcions segons el seu grau, així com els seus punts de tall i extrems relatius.

Applet 7:https://www.geogebratube.org/student/m127359

En aquest applet de geogebra es pot veure la relació entre la gràfica d'una funció i el seu monomi de grau més gran.

[9] Terme dominant: terme de grau més gran.

[10] Màxims i mínims relatius: es calculen fent la primera derivada igualada a zero.Aquest concepte ja es troba explicat més endavant en la part de derivades apartat 6.2.4.

4.4 Equacions amb dues variables de grau 2. Còniques

4.4.1 Introducció

Reben el nom de **seccions còniques** el conjunt de les diferents figures que s´obtenen en tallar una superfície cònica amb un pla que no passi pel vèrtex.

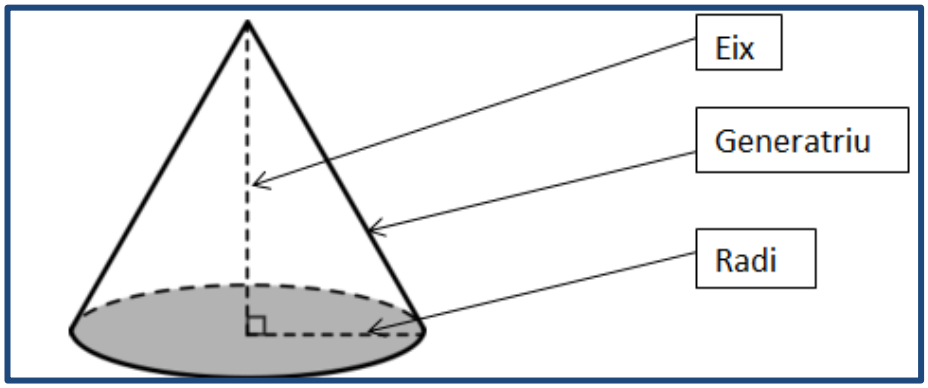


Figura 7. Con
Font: http://es.clipartlogo.com

La inclinació del pla respecte de la superfície cònica dóna lloc a **la circumferència, l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola** (generatives) o **a un punt, a dues rectes secants i a dues rectes paral·leles i superposades** (degeneratives).

4.4.2 Llocs geomètrics

Es denomina **lloc geomètric** al conjunt de punts del pla que satisfan una propietat determinada i que són els únics punts que la compleixen.

4.4.3 Generatives

- **La circumferència** es forma quan el pla és perpendicular a l'eix del con.
- **L'el·lipse** es forma quan el pla talla totes les generatrius del con.
- **La hipèrbola** es forma quan el pla és paral·lel a dues generatrius del con, per exemple si és paral·lel a l'eix del con.
- **La paràbola** es forma quan el pla és paral·lel a una única generatriu del con.

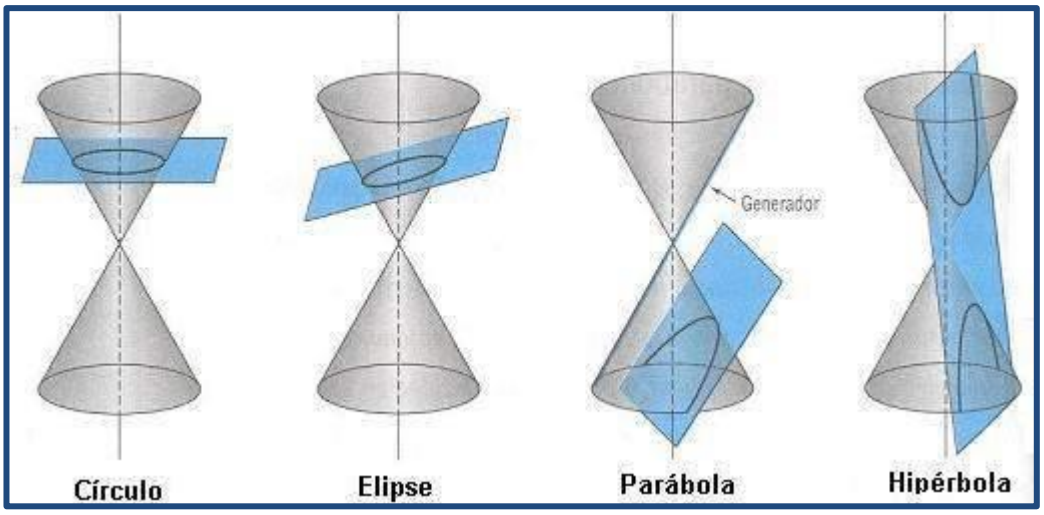


Figura 8. Còniques

Font: http://historiesdelaciencia.bloc.cat

Circumferència

Concepte

Entenem per **circumferència** al lloc geomètric dels punts del pla que estan a una distància fixa, anomenada *radi*, d'un punt fix, que en diem *centre*.

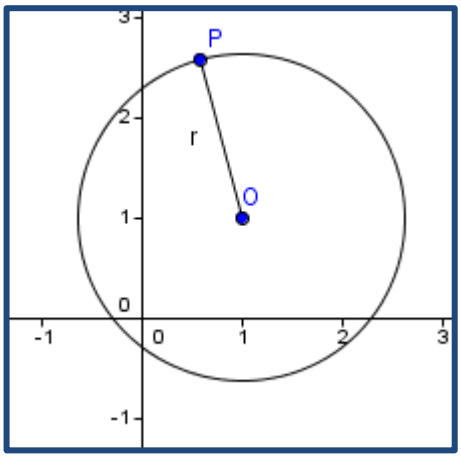


Figura 9.Circumferència

Font. Elaboració pròpia

Equació de la circumferència

Considerem ***C*** la circumferència de centre **O** = (a, b) i de radi ***r***.

Un punt P(x, y) és de la circumferència ↔ (x, y) ∈ ***C*** ↔ d(P, 0) = ***r*** ↔$(x - a)^2 + (y - b)^2$

$= r^2$ (equació reduïda de la circumferència)

Desenvolupant els quadrats tenim que:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2;$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Si anomenem: m = -2a, n = -2b i $p = a^2 + b^2 - r^2$

Obtindrem: $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ (equació general de la circumferència)

Per veure la relació entre l'equació de la circumferència i la seva forma observa els següents applets.

Applet 8: https://www.geogebratube.org/student/m128419

En aquest applet de geogebra es pot observar l'equació reduïda de la circumferència, segons el centre i el radi.

Applet 9: **https://www.geogebratube.org/student/m129275**

En aquest applet de geogebra es pot observar l'equació general de la circumferència, segons el centre i el radi.

El·lipse

Concepte

L'el·lipse és el lloc geomètric dels punts del pla la suma de distàncies dels quals a dos punts fixos, anomenats focus, és constant. Aquesta suma constant de distàncies s'acostuma a representar per 2a. És a dir, PF + PF' = 2a.

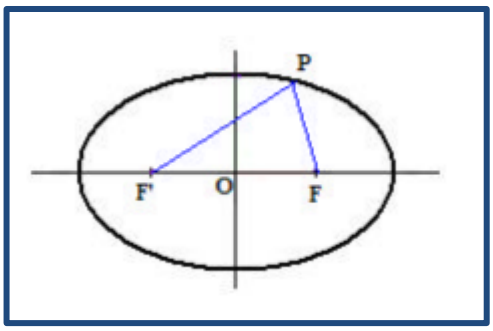


Figura 10. El·lipse

Font: http://www.jaumesc.cat/arxius/primer/coniques.pdf

Elements característics

En l'el·lipse centrada en els eixos de coordenades hi definim els elements següents:

- **Focus:** punts fixos F i F'.
- **Distància focal:** és la distància entre els dos focus F' i F, i es designa per 2c.
- **Vèrtexs:** són els punts d'intersecció de la cònica amb els eixos de coordenades x (que anomenem A, A') i y (que anomenem B, B').
- **Eix major:** segment que va del vèrtex A al vèrtex A'. Té longitud 2a.

- **Eix menor:** segment que va del vèrtex B al vèrtex B'. Té longitud 2b.
- **Centre:** és el punt d'intersecció dels eixos.
- **Excentricitat:** està representada per la lletra *e* i és el quocient entre la distància focal i la longitud de l'eix major. Com que c < a, l'excentricitat *e* és un nombre comprès entre 0 i 1 (0<e<1).

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

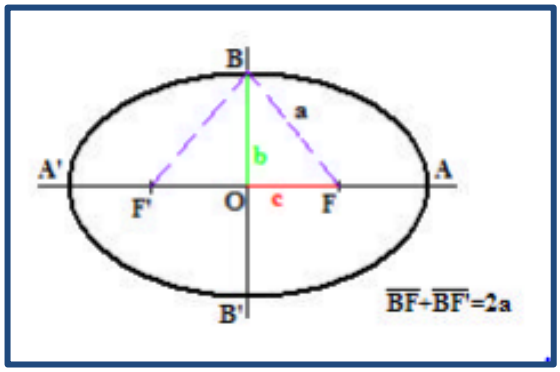


Figura 11. El·lipse

Font: http://www.jaumesc.cat/arxius/primer/coniques.pdf

Observa que si:

- BF'+BF=2a → BF'=BF=a
- L'eix menor BB'=2b → OB'=OB=b
- La distància focal F'F=2c → OF'=OF=c

Com que a, b i c formen un triangle rectangle, es pot establir la relació següent: $a^2=b^2+c^2$

Equació reduïda de l'el·lipse

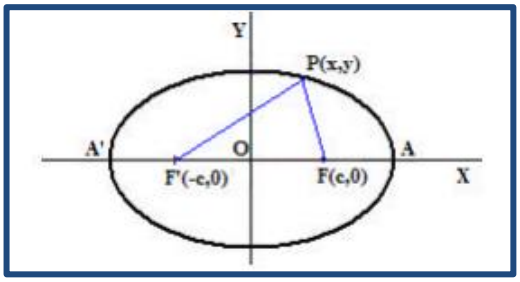


Figura 12. El·lipse

Font: http://www.jaumesc.cat/arxius/primer/coniques.pdf

Treballarem amb l'el·lipse centrada en els eixos de coordenades.

Eix d'abscisses

Si l'eix focal està situat sobre l'eix d'abscisses, les coordenades del focus són F'(-c,0), i F(c, 0).

Donat P(x,y), un punt qualsevol de l'el·lipse, per definició: PF' + PF = 2a

Aplicant-hi la fórmula de la distància entre dos punts, les longituds dels segments es poden expressar de la forma següent:

$$d(P,F') = \overrightarrow{PF'} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad d(P,F) = \overrightarrow{PF} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Substituïm i ens queda:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevem al quadrat els dos membres d'aquesta igualtat:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Simplifiquem i aïllem el radical:

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevem al quadrat:

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 - a^2c^2$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Aplicant-hi la relació $a^2 = b^2 + c^2$, tenim:

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

Dividint la igualtat per a^2b^2, resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(l'equació reduïda de l'el·lipse)

Eix d'ordenades

Si l'eix focal està situat sobre l'eix de les ordenades, les coordenades dels focus són: F(0,c) i F'(0, -c).

Llavors l'equació reduïda de l'el·lipse és:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

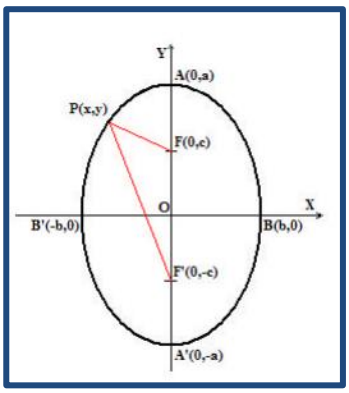


Figura 13. El·lipse
Font: http://www.jaumesc.catArxius/primer/coniques.pdf

Per veure la relació entre l'equació de l'el.lipse i la seva forma observa el següent applet.

Applet 10:https://www.geogebratube.org/student/m129440

En aquest applet de geogebra es poden observar diferents el·lipses segons els paràmetres a i b, i amb tots els seus elements.

Hipèrbola

Concepte

La hipèrbola és el lloc geomètric dels punts del pla que compleixen la condició que la diferència de les seves distancies a dos punts fixos, anomenats focus, és constant. Aquesta distància és 2a. És a dir, PF – PF' = 2a.

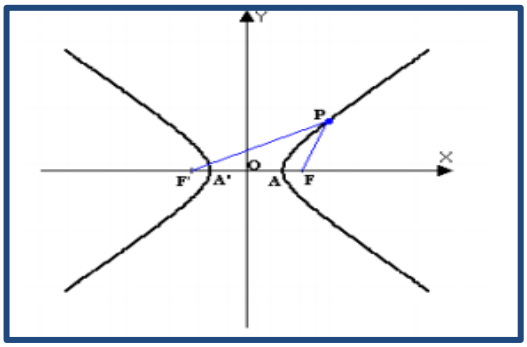


Figura 14. Hipèrbola.
Font: http://www.jaumesc.cat/arxius/primer/coniques.pdf

Elements característics

En la hipèrbola centrada en els eixos de coordenades hi definim els elements següents:

- **Focus:** punts fixos F i F'.
- **Distància focal:** és la distància entre els dos focus F' i F, i es designa per 2c.
- **Vèrtexs:** per un banda tenim A i A' que són els punts d'intersecció de la hipèrbola amb l'eix x i per l'altra B i B' que són els punts d'intersecció de l'eix imaginari amb la circumferència de centre el vèrtex A o A' i radi c.
- **Eix real:** segment que va del vèrtex A al vèrtex A'. Té longitud l 2a.
- **Eix imaginari**: segment que va del vèrtex B al vèrtex B'. Té longitud 2b.
- **Centre:** és el punt d'intersecció dels eixos.
- **Asímptotes:** Si pels vèrtexs A', i A dibuixem les perpendiculars a l'eix de les abscisses i pels vèrtexs B(b,0) i B'(-b,0), les perpendiculars a l'eix de les ordenades, s'obté un rectangle que té les dimensions 2a i 2b. Les diagonals d'aquest rectangle són les rectes que passen per l'origen de coordenades i pels punts (a, b) i (a, -b), respectivament. Les seves equacions són:

$$y = \frac{b}{a}x \qquad\qquad y = \frac{-b}{a}x$$

  Aquestes rectes reben el nom **d'asímptotes de la hipèrbola**.
- **Excentricitat:** està representada per la lletra *e* i és el quocient entre la distància focal i la longitud del eix major. Com que c > a, l'excentricitat *e* és un nombre més gran que 1 (e>1).

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Observa que si:

- BA'+BA=2c → BA'=BA=c
- L'eix menor BB'=2b → OB'=OB=b
- L'eix major A'A=2a → OA'=OA=a

Com que a, b i c formen un triangle rectangle, es pot establir la relació següent: $c^2=a^2+b^2$

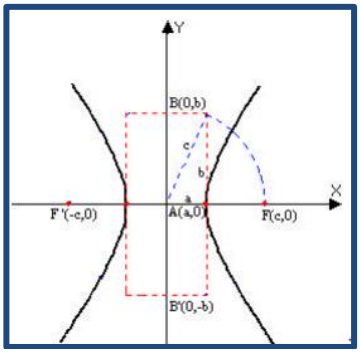


Figura 15. Hipèrbola
Font:
http://www.jaumesc.cat/arxius

Equació reduïda de la hipèrbola

Treballarem amb la hipèrbola centrada en els eixos de coordenades.

Eix d'abscisses

Donats els punt: P(x,y), i els focus: F'(-c,0) i F(c,0), diem per definició que PF' – PF = 2a

Aplicant-hi la fórmula de la distància entre dos punts, les longituds dels segments es poden expressar de la forma següent:

$$d(P,F') = \overrightarrow{PF'} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad d(P,F) = \overrightarrow{PF} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Substituïm i ens queda:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevem al quadrat els dos membres d'aquesta igualtat:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Simplifiquem i aïllem el radical:

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4cx \rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -a^2 + cx$$

Elevem al quadrat:

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 - a^2c^2º$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Aplicant-hi la relació $b^2 = c^2 - a^2$, tenim:

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

Dividint la igualtat per a^2b^2, resulta:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (l'equació reduïda de la hipèrbola)

Eix d'ordenades

Si l'eix focal està situat sobre l'eix de les ordenades, les coordenades dels focus són: F(0,c) i F'(0, -c).

Llavors l'equació reduïda de la hipèrbola és:

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Per veure la relació entre l'equació de lla hipèrbola i la seva forma observa el següent applet.

Applet 11: **https://www.geogebratube.org/student/m129569**

En aquest applet de geogebra es poden observar diferents hipèrboles segons els paràmetres a i b, i amb tots els seus elements.

Paràbola

Concepte

La paràbola es el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten d'un punt fix, anomenat focus, i d'una recta fixa anomenada directriu. Denotarem per F al focus i per r a la directriu.

Elements característics

En la paràbola centrada en els eixos de coordenades hi definim els elements següents:

- **Focus:** punt fix F.
- **Eix de simetria:** és la recta perpendicular a la directriu que passa pel focus.
- **Vèrtex:** són els punts d'intersecció de la paràbola amb el seu eix de simetria.
- **Paràmetre:** és la distància p del focus a la recta directriu.
- **Radi vector:** donat un punt P de la paràbola, el segment PF rep el nom de radi vector.

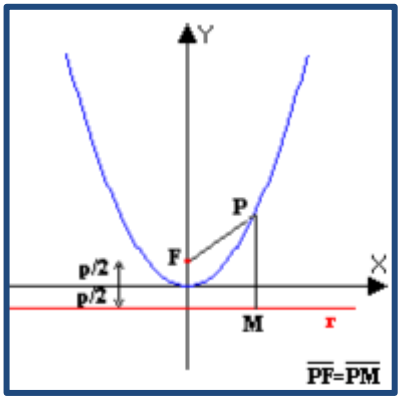


Figura 16.Paràbola

Font. http://www.jaumesc.cat/arxius/primer/coniques.pdf

Equació reduïda de la paràbola

Treballarem amb la paràbola centrada en els eixos de coordenades.

Eix d'abscisses

Si la paràbola està situat a sobre de l'eix d'abscisses, les coordenades del focus són $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ i l'equació de la recta directriu és r: x = $-\frac{p}{2}$.

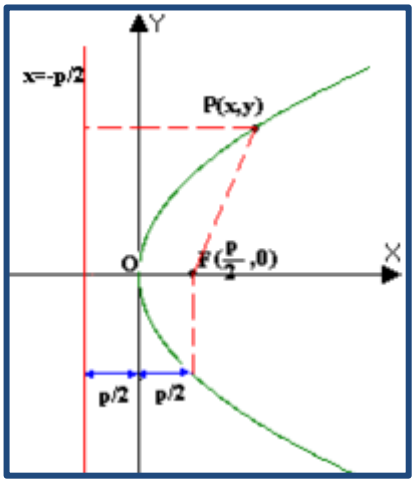


Figura 17.Paràbola

Font. http://www.jaumesc.cat/arxius/primer/coniques.pdf

Donat P(x, y), un punt qualsevol de la paràbola, per definició de paràbola:

$$d(P,r) = d(P,F)$$

Com que:

$$d(P,r) = \frac{\left|x + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \qquad d(P,F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Ens queda: $\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Elevem al quadrat i ens dona: $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$

Simplifiquem i obtenim: $y^2 = 2px$

(equació reduïda de la paràbola)

Eix d'ordenades

Si l'eix està situat sobre l'eix d'ordenades, les coordenades del focus són F$\left(0,\frac{p}{2}\right)$i l'equació de la recta directriu r: y= $-\frac{p}{2}$.

Llavors l'equació reduïda de la paràbola és: $x^2 = 2py$

4.4.4 Degeneratives

Tot i que normalment, l'equació general de segon grau[11] representa còniques generatives, com poden ser la paràbola o l'el·lipse, hi ha casos especials que donen lloc a les còniques degenerades, com poden ser:

- **Un punt:** És el cas en què el pla secant interseca a totes les generatrius (com en el cas de l'el·lipse), amb la particularitat que ho fa, justament en el vèrtex del con. El punt obtingut d'aquesta secció és anomenat el·lipse degenerada.
- **La recta doble:** Quan el pla secant és paral·lel a una única generatriu (com en el cas de la paràbola), i conté al vèrtex del con, també conté la recta generatriu, amb la qual cosa la intersecció entre el con i el pla secant és precisament la recta generatriu. Se li coneix com una paràbola degenerada.
- **Rectes secants:** És el cas anomenat hipèrbola degenerada i correspon al cas en què el pla secant és paral·lel a dos generatrius, amb la particularitat que la intersecció inclou al vèrtex i per tant inclou les dues generatrius paral·leles al pla.

Els gràfics següents identifiquen els tres casos:

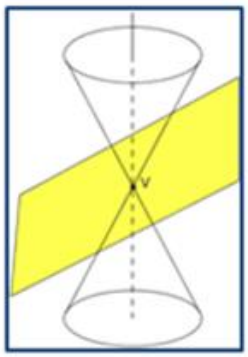


Figura 18.El.lipse degenerada

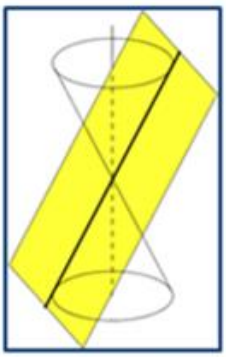


Figura 19: Parábola degenerada

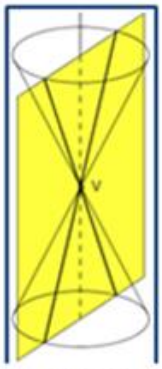


Figura 20.Hipèrbola degenerada

Font: http://sitios.usac.edu.gt/seccionesconicas/ecuaciones_segundo_grado.html

[11] Equació general de segon grau: $ax^2 + bxy + cy^2 + dy + ey + f = 0$

4.4.5 Equació general de segon grau amb dues variables

L'equació general de segon grau amb dues variables és:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dy + ey + f = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són les anomenades **corbes còniques**. Les gràfiques de totes les equacions de segon grau en dues variables són corbes còniques, encara que de vegades es tracti de còniques degenerades com poden ser un parell de rectes, una sola recta, un punt o res.

Criteris per identificar a la cònica que es representa

a) Si en l'equació general de segon grau, el coeficient b=0, l'equació resultant serà: $ax^2 + cy^2 + dy + ey + f = 0$. Aquesta representa un lloc geomètric que sempre és una cònica (si no és degenerada):
   - Si $a = 0$ o $c = 0$, serà **una paràbola**.
   - Si $a\ i\ c$ tenen el mateix signe, serà **una el·lipse**.
   - Si $a = c$ serà **una circumferència**.
   - Si $a\ i\ c$ tenen signes contraris, serà **una hipèrbola**.
   - $d\ i\ e$ indiquen el centre de la cònica (si n'hi ha) està fora de l'origen de coordenades, si $d = 0$ el centre està sobre l'eix y, si $e = 0$ el centre està sobre l'eix x.
   - f (terme independent) indica que la cònica no passa per l'origen, si $f = 0$ sí que passa per l'origen.
   - Els eixos d'aquestes còniques seran paral·lels als eixos de coordenades x, y.

b) En l'equació general de segon grau, els coeficients dels termes de segon grau $a, b\ i\ c$ ens permeten identificar el tipus de cònica que és (també en el cas degenerat). Això ho fan gràcies a l'anàlisi del discriminant (o invariant), $b^2 - 4ac$:
   - Si $b^2 - 4ac = 0$, serà una paràbola (o com en el cas degenerat, dues rectes paral·leles o coincidents).

- Si $b^2 - 4ac < 0$, serà una el·lipse (o com en el cas degenerat, un punt).
- Si $b^2 - 4ac > 0$, serà una hipèrbola (o com en el cas degenerat, dues sectes secants).
- De la mateix manera que en la a), el coeficients $d\ i\ e$ indiquen que el centre de curvatura (si n'hi ha) està fora de l'origen, si $D = 0$ el centre està sobre l'eix y, si $E = 0$ el centre està sobre l'eix x.
- El terme independent f indica que la corba no passa per l'origen, si $f = 0$ sí que passa per l'origen.
- Els eixos d'aquestes còniques seran oblics als eixos de coordenades x, y.

Per veure com l'equació general de segon grau es va transformant en tot tipus de còniques, fes moure els paràmetres del següent applet.

Applet 12: https://tube.geogebra.org/student/m127941

En aquest applet de geogebra es pot observar com segons els valors dels paràmetres a, b, c, d, e i f dóna una circumferència, una el·lipse, una paràbola o una hipèrbola. Observa també el valor del discriminant i l'excentricitat.

4.5 Equacions amb dues variables de qualsevol grau

En aquest apartat veurem què passa amb les gràfiques de les funcions quan fem operacions entre elles i també veurem algunes funcions importants dins la història de les matemàtiques.

4.5.1 Factorització

Si F: $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k = 0$ $\leftrightarrow$ Unió de corbes, on $f_1 = 0; f_2 = 0; \ldots f_k = 0$, són k funcions implícites[12].

Per veure que si tenim k funcions factoritzades, la seva gràfica ens dóna la unió de corbes clica el següent applet de geogebra.

Applet 13: https://www.geogebratube.org/student/m135447

[12] Funció implícita: Funció en què una expressió entre les variables està igualada a zero.

4.5.2 Igualtat entre dues corbes

Si $f = 0 = g \leftrightarrow$ Nova corba que passa pels punts de tall entre les dues corbes inicials.

En el següent applet es pot veure que si tenim dues corbes implícites i les igualem ens dóna una altra funció, que passa pels punts de tall de les dues corbes inicials.

Applet 14:https://www.geogebratube.org/student/m132107

4.5.3 Relació entre el grau del polinomi i el nombre de punts amb seccions amb una recta

El grau del polinomi ens dóna la fita del nombre de punts obtinguts en seccionar la corba amb una recta qualsevol.

Demostració:

Sigui f(x,y)= 0 un polinomi de grau n i sigui y=ax+b una recta, si substituïm la recta a la funció obtenim un polinomi en una variable de grau n. Aquest polinomi segons el teorema fonamental de l'àlgebra té n solucions en els complexos i n solucions com a màxim en els reals, que es corresponen amb el punts de tall de la recta i la corba f(x,y)=0.

En el següent applet de geogebra es pot observar aquesta demostració.

Applet 15: https://www.geogebratube.org/student/m134413

4.5.4 Corbes importants en la història de la matemàtica de dues variables i de grau més gran que dos

Equació general de tercer grau amb dues variables

L'equació general de tercer grau amb dues variables és:

$$\boldsymbol{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0}$$

On $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ són constants, de manera que almenys un de a, b, c i d és diferent de zero i x i y són variables.

Corbes cúbiques amb nom propi

Corbes cúbiques estudiades per Newton

Un dels matemàtics que va estudiar les corbes cúbiques va ser Newton, en va trobar 72 espècies diferents i va reduir l'equació general cúbica a un dels quatre tipus més simples fent un canvi de coordenades adequat. Aquests quatre tipus són:

a) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

b) $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (paràbola de Descartes o trident de Newton)

c) $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$

d) $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$

En el següent applet de geogebra es pot observar com van variant els gràfics d'aquestes funcions segons els valors dels diferents paràmetres.

Applet 16: https://www.geogebratube.org/student/m137200

La corba el·líptica

L'equació de la forma $y^2 = x^3 - px - q$ és d'una corba el·líptica. Ha estat utilitzada per provar l'últim teorema de Fermat[13], en la factorització de nombres enters i en criptografia[14].

En el següent applet de geogebra es pot observar aquesta corba.

Applet 17: https://www.geogebratube.org/student/m137196

Altres corbes interessants

a) La bruixa de Maria Agnesi

b) El cissoide de Diocles

c) Corba de Fermat

d) El foli de Descartes

En els següents applets de geogebra es poden observar cadascuna d'aquestes corbes.

Applet 18: Bruixa de Maria Agnesi.

https://www.geogebratube.org/student/m137170

[13] **Fermat**: Matemàtic del segle XVII, conegut per un famós teorema que duu el seu nom, va contribuir en anàlisi matemàtic i en probabilitat. I és el pare de la teoria de nombres.

[14] **Criptografia:** tècniques de codificació de missatges inintel·ligibles per a receptors no autoritzats.

Applet 19: Cissoide de Diocles.

https://www.geogebratube.org/student/m137174

Applet 20: Corba de Fermat.

https://www.geogebratube.org/student/m137193

Applet 21: Foli de Descartes

https://www.geogebratube.org/student/m137198

Equació general de quart grau amb dues variables

L'equació general de quart grau amb dues variables és:

$$ax^4 + by^4 + cx^3y + dx^2y^2 + exy^3 + fx^3 + gy^3 + hx^2y + ixy^2 + jx^2 + ky^2 + lxy + mx + ny + p = 0$$

on $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n$ i p són constants, de manera que almenys un de a, b, c, d i e és diferent de zero i x i y són variables.

Corbes quàrtiques amb nom propi

a) Concoide de Nicomenedes
b) Lemniscata de Geromo
c) Corba de Macheroni
d) Oval de Descartes
e) Corba deltoide

En els següents applets de geogebra es poden observar cadasquna d'aquestes corbes.

Applet 22: Concoide de Nicomedes.

http://www.geogebratube.org/student/m322479

Applet 23: Lemniscata de Geromo.

https://www.geogebratube.org/student/m137199

Applet 24. Corba de Macheroni.

https://www.geogebratube.org/student/m137189

Applet 25. Oval de Descartes.

https://www.geogebratube.org/student/m132128

Applet 26. Corba deltoide.

https://www.geogebratube.org/student/m137190

4.6. Equacions de tres variables: superfícies a l'espai

4.6.1 Introducció

Determinació d'un punt a l'espai

Imaginem que volem penjar un llum en un punt determinat d'una habitació i ens preguntem com ho farem. La resposta es troba en els nombres (x, y, z). Si es tria una cantonada de l'habitació, x i y es troben mesurant la distància a les dues parets perpendiculars elegides prèviament i el tercer número z correspon a l'altura des del terra. Així introduïm l'espai de coordenades tridimensional que serà el nostre sistema de referència: un punt que representa l'origen i tres rectes perpendiculars, anomenades eixos, que es tallen en aquest punt. D'aquesta manera cada terna (x, y, z) determina l'únic punt de l'espai que està a una alçada z i la seva projecció sobre el pla del terra xy (la seva ombra) és el punt (x, y, 0) tal i com mostra la figura:

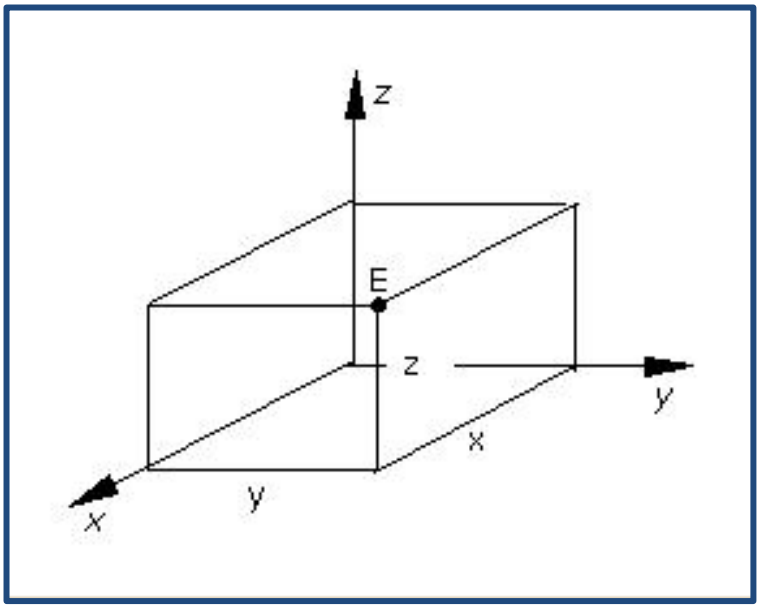


Figura 21: Eixos de coordenades a l'espai

Font: http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=133271

Les coordenades del punt E de la figura són (x, y, z). Els plans xy, xz i yz divideixen l'espai en vuit regions anomenades octants. Els signes de les coordenades els veiem a la figura següent:

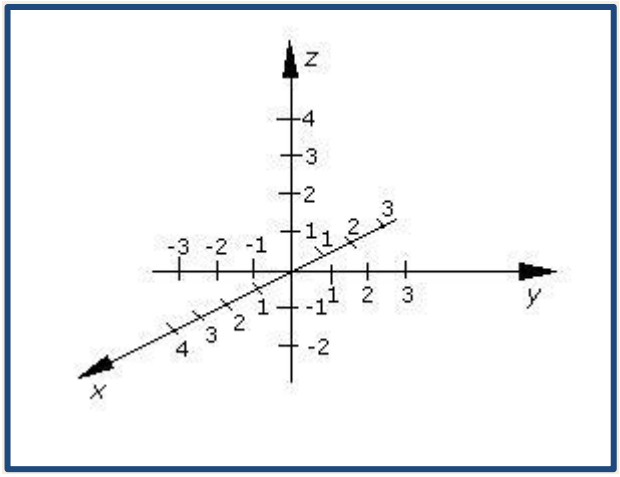


Figura 22: Eixos de coordenades a l'espai

Font: http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=133271

Per representar un punt (x, y, z) en R^3 podem primer dibuixar la seva projecció sobre el pla xy, aquest punt és (x, y, 0) i després podem pujar o baixar z unitats, segons el signe de z.

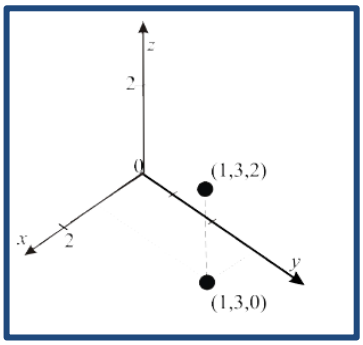


Figura 23: Projecció d'un punt sobre un pla

Font: http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=133271

Un altre mètode per representar punts a l'espai és dibuixant un paral·lelogram, aquest mètode va molt bé sobretot quan hi ha coordenades negatives. Aquest mètode consisteix en dibuixar un paral·lelogram amb un vèrtex a l'origen i el vèrtex oposat és el punt P. Les longituds de les arestes d'aquest paral·lelogram venen donades pel valor absolut de les coordenades.

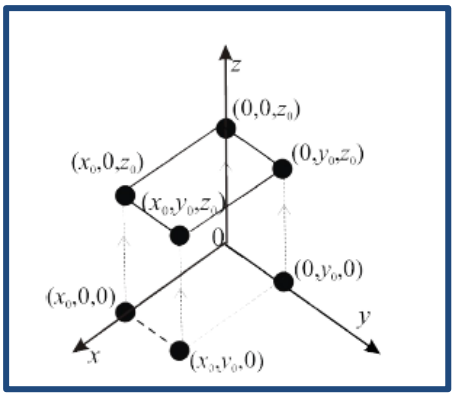


Figura 24: Eixos de coordenades a l'espai

Font:

http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/servicio_docente/2009/texto21/espacio.pdf

Si vols veure un vídeo on es veu com es representen els punts en un sistema tridimensional clica a la següent adreça:

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/videoclips2bach/algebra2.html

Equacions dels eixos i dels plans que els contenen

Tot i que més endavant a partir d'un tractament vectorial trobarem les equacions cartesianes de rectes i plans a l'espai, podem ja veure quines són les equacions del eixos de coordenades i dels plans que els contenen.

Equacions eix x, els punts d'aquest són de la forma (a, 0, 0) on a∈ R , per tant ha de complir les equacions $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Equacions eix y, els punts d'aquest són de la forma (0, b, 0) on b∈ R , per tant ha de complir les equacions $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Equacions eix z, els punts d'aquest són de la forma (0, 0, c) on c∈ R , per tant ha de complir les equacions $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Cal observar que les equacions de les rectes a l'espai venen donades per dues equacions cartesianes, on cadascuna correspon a un pla de l'espai. La recta s'expressa així com la intersecció d'aquests dos plans, és a dir, com els punts solució del sistema de les dues equacions dels dos plans.

Equació del pla xy: els punts d'aquest pla són del tipus (a, b,0), per tant han de complir l'equació **z = 0**.

De la mateixa manera tindrem.

Equació del pla xz: **y=0**

Equació del pla zy: **x=0**

Cal observar que l'equació del pla ve donat per una equació cartesiana.

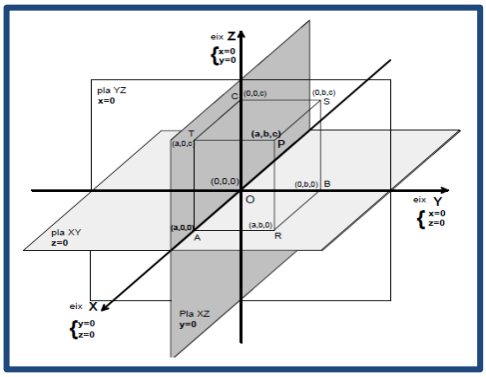


Figura 25: Plans x=0, y=0 i z=0.

Font: http://www.xtec.cat/iesarquitecteraspall/

Determinació d'un vector a l'espai

Un **vector** és un segment orientat, en el qual podem diferenciar-ne cinc parts:

- **Punt d'aplicació o origen**: És el punt on comença el vector.
- **Extrem**: És el punt on finalitza el vector.
- **Mòdul**: És la longitud del vector.
- **Direcció**: És la recta sobre la qual està situat el vector.
- **Sentit**: És el sentit que indica la punta de la fletxa del vector.

Hi ha dos **tipus de vectors**:

- **Vectors fixos**: Són aquells que no es poden desplaçar de cap manera, ja que acostumen a representar magnituds vectorials de les quals el punt d'aplicació és rellevant.
- **Vectors lliures**: Són aquells que es poden desplaçar lliurament , ja que no importa el punt d'aplicació.

Obtenció de les components d'un vector

Donats dos punts A=(a_1, a_2, a_3) i B=(b_1, b_2, b_3) , és defineix el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ com el camí rectilini en la direcció dels eixos per anar de A a B, és a dir:

$$\vec{v} = (v_1, v_2 , v_3) = \overrightarrow{AB} = B - A = (b_1, b_2 , b_3)-(a_1, a_2 , a_3)$$

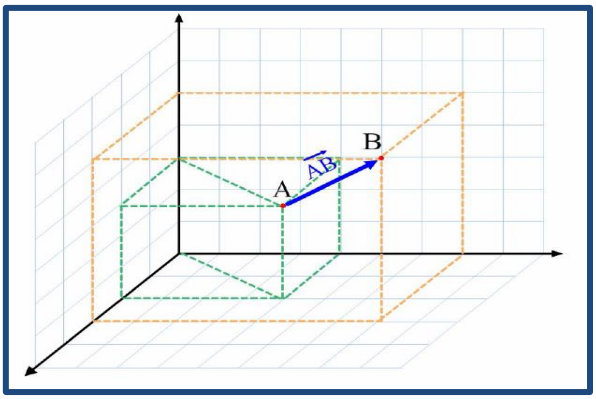


Figura 26: Representació gràfica de vectors

Font: http://www.textos-online.com/images/pdf/2tecnoGeometria3D.pdf

Determinació d'una recta a l'espai

Definició

La recta és un conjunt geomètric format per infinits punts alineats. Es pot definir amb un punt i un vector o a partir de dos punts (amb els dos punts determinem el vector).

La recta que passa pel punt punts A=(a_1, a_2, a_3) i té com a vector director $\vec{u}$

r[A; $\vec{u}$]=$\{X \in R^3 / \overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u}\}$

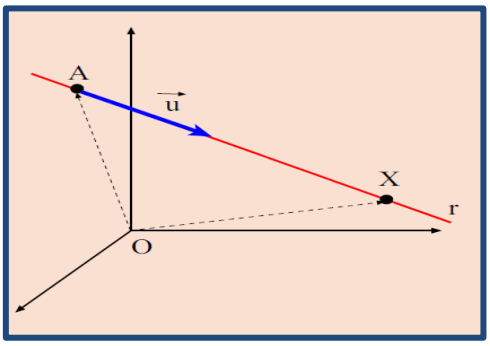


Figura 27: Eixos de coordenades a l'espai

Font:http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_2/rectasC2.pdf

Equacions de la recta

Equació vectorial $(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(u_1,u_2,u_3)$

$$[A;\vec{u}] = \{X \in R^3 / \overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u}\} \rightarrow \overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} \rightarrow X - A = \lambda\vec{u} \rightarrow X = A + \lambda\vec{u} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(u_1,u_2,u_3)$$

Equació paramètrica: $\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases}$

$$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(u_1,u_2,u_3) \rightarrow (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$$

$$\rightarrow$$

$$\rightarrow (x,y,z) = (a_1 + \lambda u_1, a_2 + \lambda u_2, a_3 + \lambda u_3) \rightarrow \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases}$$

Equació contínua: $\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3}$

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - a_1 = \lambda u_1 \\ y - a_2 = \lambda u_2 \\ z - a_3 = \lambda u_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x - a_1}{u_1} = \lambda \\ \frac{y - a_2}{u_2} = \lambda \\ \frac{z - a_3}{u_3} = \lambda \end{cases} \rightarrow \frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}$$

Equació general implícita: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}$$

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} \rightarrow (x - a_1)u_2 = (y - a_2)u_1 \rightarrow (xu_2 - a_1u_2) = (yu_1 - a_2u_1) \rightarrow$$

$$= xu_2 - yu_1 - a_1u_2 + a_2u_1 = 0 \rightarrow A_1x + B_1y + D_1 = 0$$

$$\frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3} \rightarrow (y - a_2)u_3 = (z - a_3)u_2 \rightarrow (yu_3 - a_2u_3) = (zu_2 - a_3u_2) \rightarrow$$

$$= yu_3 - zu_2 - a_2u_3 + a_3u_2 = 0 \rightarrow B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Determinació d'un pla a l'espai

Definició

Els plans són infinits i es poden definir mitjançant un punt i dos vectors directors, o tres punts que no pertanyin a la mateixa recta.

El pla que passa pel punt $A = (a_1, a_2, a_3)$ i té com a vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, es defineix com el conjunt de punts de l'espai que:

$$\pi[A; \vec{u}, \vec{v}] = \{X \in R^3 / \overrightarrow{AX} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\}$$

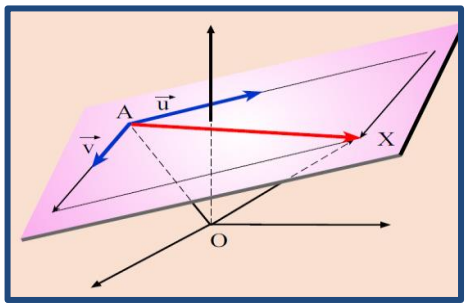


Figura 28: Representació gràfica d'un pla

Font:http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_2/rectasC2.pdf

Equacions del pla

Equació vectorial: $(x, y, z) = (a_{1,} a_{2,} a_3) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3)$

Un punt $X = (x, y, z)$ pertany al pla si:

$$\overrightarrow{AX} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \rightarrow X - A = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \rightarrow X = A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x, y, z) = (a_{1,} a_{2,} a_3) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3)$$

Equació paramètrica: $\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{a}_1 + \alpha\mathrm{u}_1 + \beta v_1 \\ \mathrm{y} = \mathrm{a}_2 + \alpha\mathrm{u}_2 + \beta v_2 \\ \mathrm{z} = \mathrm{a}_3 + \alpha\mathrm{u}_3 + \beta v_3 \end{cases}$

Si agafem l'equació vectorial i fem les operacions:

$$(x, y, z) = (a_{1,} a_{2,} a_3) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3)$$

$$(x, y, z) = (a_{1,} a_{2,} a_3) + (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) + (\beta v_1, \beta v_2, \beta v_3)$$

$$(x, y, z) = (a_1 + \alpha u_1 + \beta v_1, a_2 + \alpha u_2 + \beta v_2, a_3 + \alpha u_3 + \beta v_3)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = a_1 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = a_2 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = a_3 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}$$

Equació general: $Ax + By + Cz + D = 0$

Agafem la forma paramètrica i la manipulem per transformar-la en un sistema d'equacions

$$\begin{cases} x - a_1 = \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y - a_2 = \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z - a_3 = \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} u_1 & v_1 & x - a_1 \\ u_2 & v_2 & y - a_2 \\ u_3 & v_3 & z - a_3 \end{array}\right)$$

De la seva forma matricial veiem que la matriu ampliada podria tenir rang 3, i la matriu sense ampliar rang 2. Perquè sigui un sistema compatible indeterminat, els dos rangs han de ser iguals, i per això és necessari que el determinant de la matriu ampliada sigui zero i els dos vectors directors linealment independents:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - a_1 \\ u_2 & v_2 & y - a_2 \\ u_3 & v_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

després de calcular el determinant obtindrem: $Ax + By + Cz + D = 0$

El vector (A, B, C) s'anomena vector normal del pla i geomètricament és perpendicular al pla.

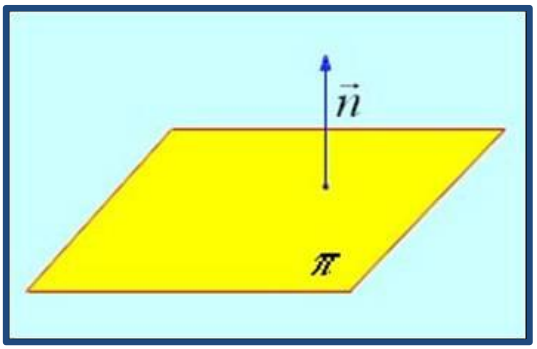


Figura 29: Vector normal del pla

Font: https://www.google.es/search?q=vector+normal+del+pla&safe

Un cop deduïda l'equació general del pla, a partir d'ara només treballarem amb aquesta equació ja que és la que farem servir en el programa SURFER.

Posicions en l'espai dels plans

Posició relativa entre dos plans

Siguin $\pi_1\colon\ A_1x + B_1\,y + C_2\,z + D_1 = 0$ i $\pi_2\colon\ A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2 = 0$

a) Si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ els plans estan superposats

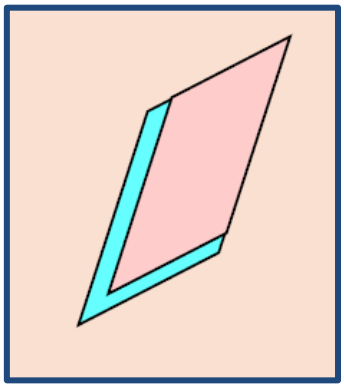


Figura 30: Plans superposats

Font: http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_2/rectasC2.pdf

b) Si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ els plans són paral·lels

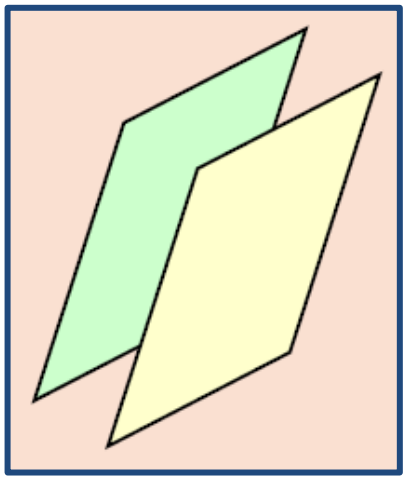


Figura 31: Plans paral·lels

Font: http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_2/rectasC2.pdf

c) Si $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ els plans es tallen en una recta. Si al tallar-se ho fan amb un angle de 90º els plans seran entre ells perpendiculars.

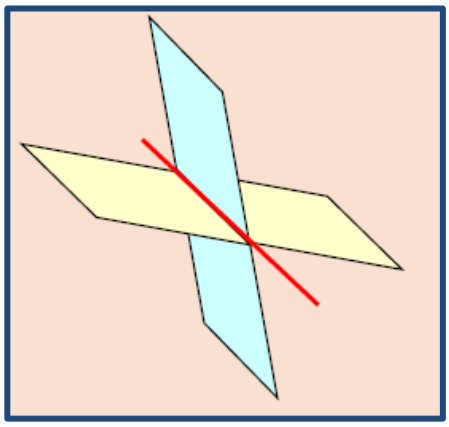


Figura 32: Plans secants
Font: http://personales.unican.es/gonzal

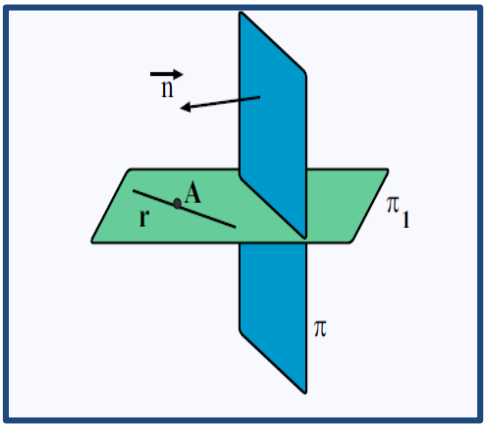
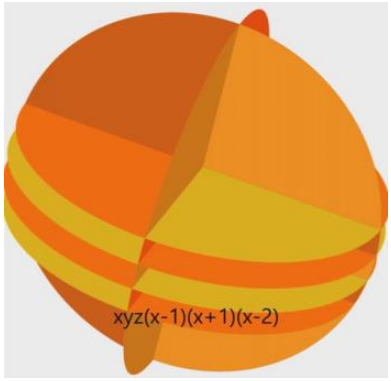
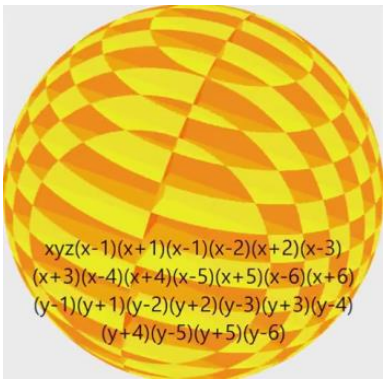


Figura 33: Plans perpendiculars
Font: http://personales.unican.es/gonzal

En els següents vídeos es poden veure imatges de la unió de plans. Les diferents imatges han estat elaborades amb el programa SURFER.

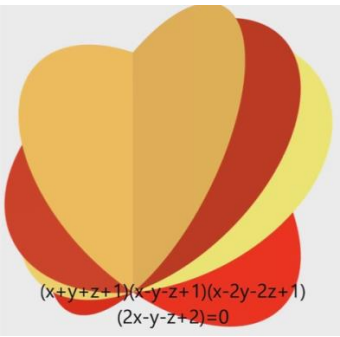
Vídeo 1. https://www.youtube.com/watch?v=Zo25PApNV-g





En aquest vídeo es veu com es forma una determinada figura a través de la unió de diferents plans (plans que contenen els eixos de coordenades, plans paral·lels i plans que es tallen).

Vídeo 2. https://www.youtube.com/watch?v=fpxJcSQGFfQ



En aquest vídeo es veu com es forma una determinada figura a través de la unió de diferents plans que es tallen en una recta.

4.6.2 Superfícies a l'espai

Definició

Les superfícies són llocs geomètrics de punts de l'espai. Les coordenades dels seus punts són solució d'una equació que s'anomena l'equació implícita de la superfície. Així per exemple:

a) L'esfera de centre l'origen 0 i radi 1 és el lloc geomètric dels punts de l'espai que disten 1 de 0. L'equació implícita és $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
b) $Ax + By + Cz + D = 0$ és l'equació implícita d'un pla.
c) El cilindre d'eix l'eix OZ i radi 1 té l'equació implícita $x^2 + y^2 = 1$.

Representació gràfica

De la mateixa manera que les funcions d'una variable $y = f(x)$ es poden representar en el pla mitjançant una gràfica, que és una corba, una funció de dues variables:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to z = f(x, y)$$

es pot representar a l'espai fent correspondre a cada punt (a, b) del pla $z = 0$ la seva imatge $c = f(a, b)$. La gràfica de f és una superfície.

Un mètode útil per a representar gràficament aquest tipus de funció és mitjançant les corbes de nivell.

Corbes de nivell

Una corba de nivell de la superfície S donada per l'equació $z = f(x, y)$ és la corba obtinguda com a intersecció d'aquesta superfície amb un pla $z = c\ (constant)$, sempre que c pertanyi a la imatge de f. Les corbes de nivell de S corresponen als punts (x, y) del domini de f que tenen la mateixa alçària c. Generalment, les corbes de nivell es representen al pla XY. I per tant no són res més que la secció horitzontal al fer tallar el pla horitzontal $z = c$ amb la funció $f(x, y)$. Les **seccions** amb els plans paral·lels als plans de coordenades, tant si són horitzontals (comentades aquí) com verticals (comentades més avall) serveixen per entendre millor el gràfic d'una determinada superfície algebraica. També cal dir que el fet de tenir la funció expressada $z = f(x, y)$ fa que sigui més fàcil de representar la superfície.

Exemple de representació gràfica d'una funció a partir de les corbes de nivell

Donada la funció $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, per trobar les seves corbes de nivell cal estudiar el conjunt $z_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = c\}$, les corbes de nivell són circumferències centrades a l'origen de coordenades de radi $\sqrt{c}$.

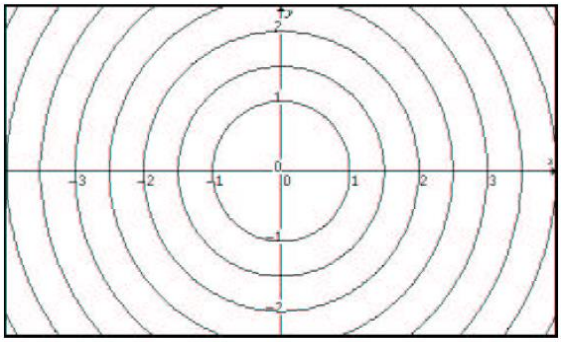


Figura 34: Circumferències centrades a l'origen.

Font: http://www2.uah.es/fsegundo/calcTeleco/esquemas%20140-FuncionesDosVariables.pdf

Si cada corba de nivell la pugem a l'altura $z = c$ obtenim aquesta figura:

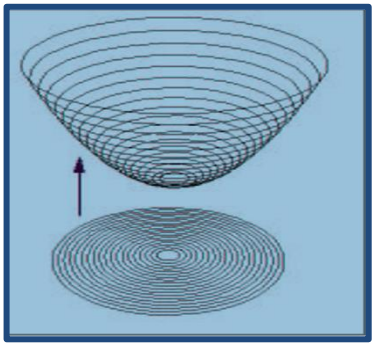


Figura 35.Corbes de nivell
Font. http://www2.uah.es/fsegundo/calcTeleco/esquemas/140-FuncionesDosVariables.pdf

Les corbes de nivell són molt utilitzades en diferents camps:

- En els mapes meteorològics:
  - Isòbares: corbes de nivell amb la mateixa pressió atmosfèrica.
  - Isotermes: corbes de nivell amb la mateixa temperatura.
- En Física, les corbes equipotencials: corbes amb el mateix potencial elèctric.
- En els mapes topogràfics: les corbes de nivell representen els punts de la superfície terrestre que estan a la mateixa altura sobre el nivell del mar.

Seccions amb plans verticals

L'estudi de les corbes de nivell d'una funció f es pot completar mitjançant l'estudi de les seccions verticals paral·leles als dos plans de coordenades verticals: el pla xz que té per equació $y = 0$ i el pla yz que té per equació $x = 0$.

Exemple

Estudiarem les corbes de nivell de la funció $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Per estudiar les corbes de nivell plantegem l'equació $\sqrt{x^2 + y^2} = c$. I descobrim que les corbes de nivell són circumferències de radi c quan $c > 0$ i no hi ha corbes de nivell per $c < 0$. Això significa que el conjunt de corbes de nivell coincideix amb les corbes de nivell de la funció $f(x, y) = x^2 + y^2$, però això no significa que les dues gràfiques siguin iguals. De fet la mateixa circumferència correspon a diferents valors de c en cadascun dels casos. La diferència entre les dues gràfiques es posa de manifest si

s'estudien els seus talls amb el pla vertical $x = 0$, en el cas de la funció $f(x, y) = x^2 + y^2$, si substituïm la $x = 0$ obtenim $f(0, y) = y^2$ que representa una paràbola en el pla yz.

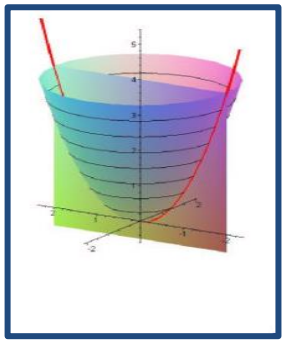


Figura 36: Paràbola a l'espai.
Font: http://www2.uah.es/fsegundo/calcTeleco/esquemas/140-FuncionesDosVariables.pdf

Si substituïm x=0 a la funció $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, ens queda $g(0, y) = \sqrt{y^2} = |y|$, el perfil d'aquesta gràfica és:

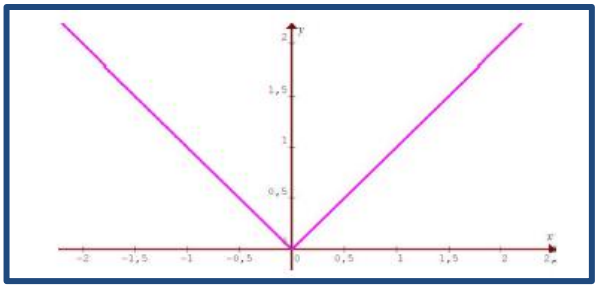


Figura 37: Funció valor absolut.
Font. http://www2.uah.es/fsegundo/calcTeleco/esquemas/140-FuncionesDosVariables.pdf

Si combinem aquesta informació amb les corbes de nivell tenim que la gràfica de la funció g és un con invertit amb el vèrtex a l'origen de coordenades:

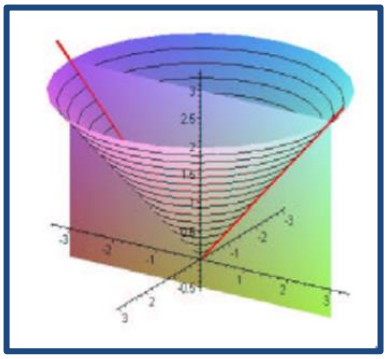


Figura 38. Con invertit.
Font. http://www2.uah.es/fsegundo/calcTeleco/esquemas/140-FuncionesDosVariables.pdf

Exemples de superfícies

1. <u>De tipus cilíndric</u>

Donada una corba C en un pla i una recta L no continguda en aquest pla, el conjunt de rectes paral·leles a L que tallen C formen una superfície S anomenada de tipus cilíndric. Les rectes s'anomenen generatrius de S, i C rep el nom de corba generatriu. L'equació d'aquesta superfície és del tipus $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

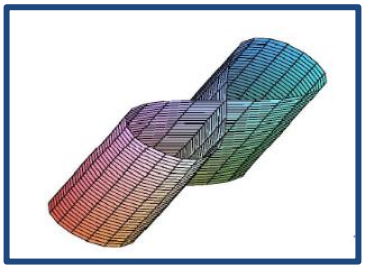


Figura 39: Superfície algebraica de tipus cilíndric.

Font: http://ocw.upc.edu/sites/default/files/materials/15015480/tema2_superficies-5235.pdf

2. <u>De tipus cònic</u>

Donada una corba C en el pla i un punt P no contingut en aquest pla, el conjunt de rectes que passen per P i tallen C formen una superfície S anomenada de tipus cònic. Les rectes s'anomenen generatrius de S, C es diu la corba generatriu i el punt P rep el nom de vèrtex.

L'equació d'aquesta superfície és del tipus $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

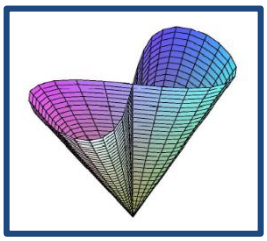


Figura 40: Superfície algebraica de tipus cònic.

Font: http://ocw.upc.edu/sites/default/files/materials/15015480/tema2_superficies-5235.pdf

3. <u>Les quàdriques</u>

Les quàdriques són equivalents en superfícies a les còniques en corbes. La seva equació implícita és polinòmica de segon grau.

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0.$$

Es pot demostrar que hi ha 16 tipus de quàdriques. Les més interessants són les 9 no degenerades[15] que, situades adequadament respecte dels eixos, tenen les següents formes i equacions implícites.

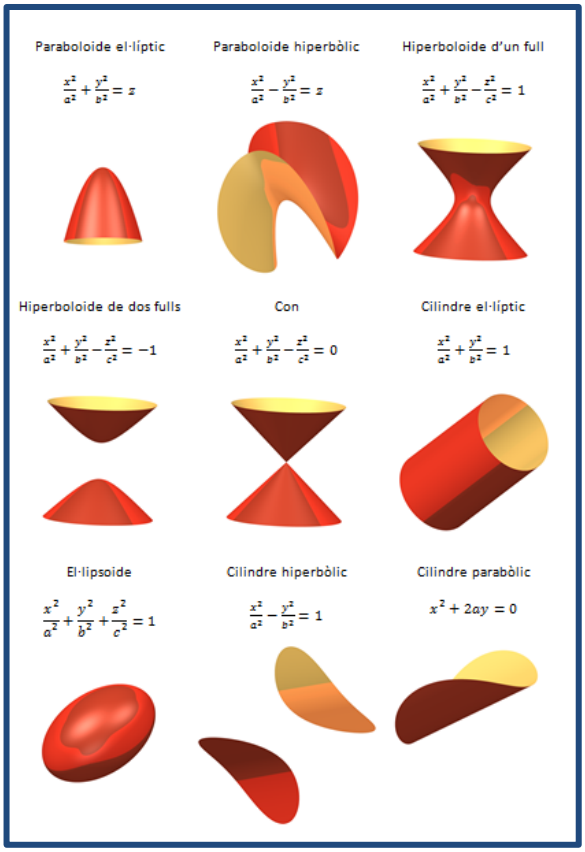


Figura 41: Quàdriques

Font: Elaboració pròpia

Una superfície peculiar ve donada per la funció $z = x^3 - 3xy^2$ rep el nom de cadira o sella.

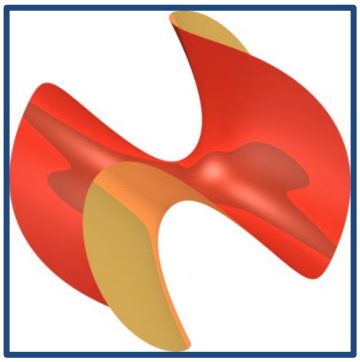


Figura 42: Punt de sella

Font: Elaboració pròpia

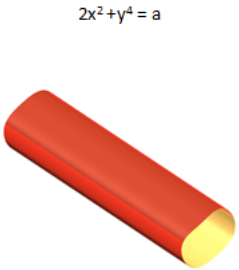
[15] **No degenerades:** Equacions que la seva fórmula no descomposa com a producte de dos polinomis de grau 1, és a dir, que la seva forma no està formada per la unió de dos plans.

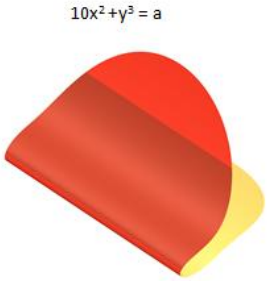
En els següents vídeos es pot veure com van variant les formes a mesura que es variant la fórmula.

Les diferents imatges han estat elaborades amb el programa SURFER.

Vídeo 3. https://www.youtube.com/watch?v=XXadxADp0IA

Vídeo 4. https://www.youtube.com/watch?v=nsXKEC507XA





.

5.- SIMETRIA

5.1 Concepte

La simetria és una transformació de la figura que la deixa invariant.

5.2 Tipus de simetria

5.2.1 Simetria central

La simetria central és una transformació que compleix les següents condicions:

- Cada punt i el seu punt transformat estan a la mateixa distància d'un punt anomenat centre de simetria.
- Per cada punt, podem traçar una recta que contingui el punt, el seu punt transformat i el centre de la simetria.

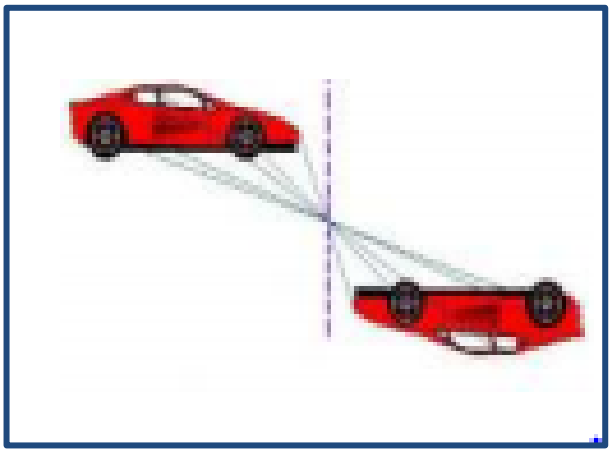


Figura 43: Simetria central
Font: https://www.dropbox.com/s/pte6m3juyo6hzzq/ simetriesv3.docx

En el següent applet de geogebra es pot veure com es forma una simetria central.

Applet 27: Simetria central

https://www.geogebratube.org/student/m143253

5.2.2 Simetria axial

La simetria axial és una transformació respecte un eix de simetria, que compleix:

- Cada punt i el seu punt transformat estan a la mateixa distància de l'eix de simetria.
- Per cada punt, la recta formada pel punt i el seu punt transformat és perpendicular a l'eix de simetria.

D'una altra més col·loquial diem que una figura plana té simetria axial quan es pot doblegar per la meitat i les dues meitats coincideixen exactament. La línia de plec s'anomena eix de simetria. Per exemple, la papallona és simètrica respecte de l'eix puntejat.

Figura 44: Simetria axial

Font: https://www.dropbox.com/s/962atllsj4fst7z/4-3i4ESO.pdf

En el següent applet de geogebra es pot veure com es forma una simetria axiall.

Applet 28: Simetria axial

https://www.geogebratube.org/student/m143248

5.2.3 Simetria especular

La simetria especular és una transformació respecte un pla de simetria, que compleix:

- Cada punt i el seu punt transformat estan a la mateixa distància del pla de simetria.

- Per cada punt, la recta formada pel punt i el seu punt transformat és perpendicular a l'eix de simetria. D'una manera més col.loquial una figura tridimensional té simetria especular quan es pot tallar en dues parts de tal manera que una és el reflex de l'altra en un mirall. El mirall és anomenat pla de simetria. Per exemple, si talles una poma per la meitat i la col·loques davant un mirall, tornes a tenir la poma sencera.

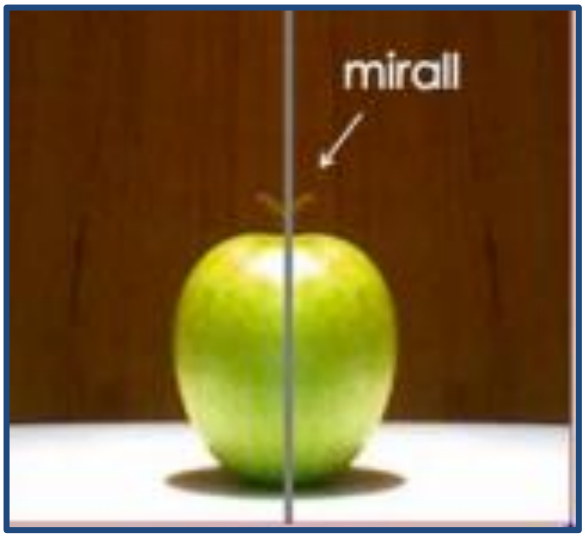


Figura 45. Simetria especular

Font:https://www.dropbox.com/s/962atllsj4fst7z/4-3i4ESO.pdf

Simetria a les equacions

Si l'equació no s'altera quan reemplacem x, y z per:	La superfície té:
-x, y, z	Simetria especular respecte el pla YZ
x,-y, z	Simetria especular respecte el pla XZ
x, y, -z	Simetria especular respecte el pla XY
-x, -y, z	Simetria axial respecte l'eix Z
-x, y,-z	Simetria axial respecte l'eix Y
x,-y,-z	Simetria axial respecte l'eix X
-x,-y,-z	Simetria central respecte l'origen

Exemple

Equació de Dullo; $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2+y^2$, podem veure si la superfície és simètrica respecte al pla YZ agafant el punt $(-x, y, z)$ i substituint a l'equació.

$((-x)^2+y^2+z^2)^2 = (-x)^2+y^2$, elevem al quadrat $(-x)^2 = x^2$ i obtenim la mateixa equació que teníem al principi. Per tant aquesta figura té simetria especular respecte el pla YZ. Si miréssim les altres simetries veuríem que també les té.

Figura 46: Simetria especular

Font: https://www.dropbox.com/s/pte6m3juyo6hzzq/Quadernets

En el següent vídeo es poden observar diferents tipus de simetries.

Vídeo 5. https://www.youtube.com/watch?v=ClY37xqF_J4I

6.- SINGULARITATS

6.1 Introducció

Per poder entendre les singularitats de les superfícies algebraiques, abans hem d'explicar uns quants conceptes matemàtics. Aquest són necessaris per arribar a la derivació de funcions implícites polinòmiques així com a les seves derivades parcials.

6.2 Funcions del tipus y=f(x). Funcions reals d'una variable real

6.2.1 Definició de límit d'una funció en un punt

Donada una funció $f(x)$ i un punt $x = a$, diem que el límit de $f(x)$ quan x s'apropa a "a" és L, i s'expressa com: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

És a dir , quan donat $\varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0$ tal que sempre que:

$$|x - a| \leq \delta \rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

Aquesta formulació matemàtica expressa que si x està pròxima a "a", llavors la seva imatge $f(x)$ està pròxima a $f(x)$.

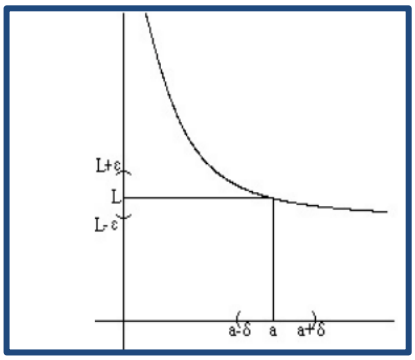


Figura 47: Concepte de límit
Font: http://sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T09.pdf

6.2.2 Límits laterals

A la pràctica és necessari definir els límits laterals.

Definició límit lateral per la dreta

És defineix el límit lateral per la dreta i s'expressa $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, com el límit al que s'apropa $f(x)$ quan x s'apropa a "a" i pren valors més grans que a.

Definició límit lateral per l'esquerra

És defineix el límit lateral per l'esquerra i s'expressa $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, com el límit al que s'apropa $f(x)$ quan x s'apropa a "a" i pren valors més petits que a.

Propietat

Perquè una funció $f(x)$ tingui límit, és necessari que existeixen els límits laterals i coincideixin, és a dir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

En el següent applet es pot observar el concepte de límit.

Applet 29: Concepte de límit

https://www.geogebratube.org/student/m151355

6.2.3 Definició de funció contínua en un punt

La idea intuïtiva de funció contínua en un punt és ben senzilla. Una funció contínua és aquella que podem dibuixar sense aixecar el llapis del paper.

Definició matemàtica

Una funció f(x) és contínua en $x = a$ si :

Donat $\varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0$ tal que sempre que: $|x - a| \leq \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Dit d'una altra manera: si ens apropem al punt "a", després, les imatges de"a" s'apropen a les imatges de $f(a)$.

Propietat

Perquè una funció sigui contínua en un punt és necessari i suficient que:

a) Existeixi el valor de la funció en el punt, $f(a)$.

b) Existeixin els límits laterals, siguin finits i iguals a $f(a)$, és a dir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

En el següent applet es pot observar el concepte de funció contínua en un punt.

Applet 30: Concepte de funció continua en un punt

https://www.geogebratube.org/student/m151360

6.2.4 Definició de derivada d'una funció en un punt

Taxa de variació mitjana

Considerem una funció $y = f(x)$ i considerem dos punts pròxims sobre l'eix d'abscisses "a" i "$a + h$", essent "h" un nombre real que correspon a l'increment de x (Δx).

S'anomena **taxa de variació (T.V.)** de la funció en l'interval $[a, a + h]$, i és representa per **Δy** a la diferència de les ordenades corresponents als punts d'abscisses "a" i "$a + h$".

$$\Delta y = [f(a + h) - f(a)].$$

S'anomena **taxa de variació mitjana (T.V.M.)** en l'interval $[a, a + h]$, i és representa per $\frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta \mathbf{x}}$, al quocient entre la taxa de variació i l'amplitud de l'interval considerat sobre l'eix d'abscisses, h o Δx, això és:

$$TVM[a, a + h] = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Interpretació geomètrica

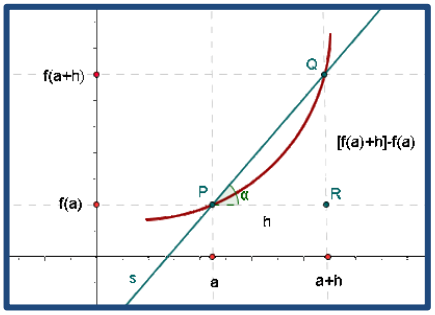


Figura 48: Concepte de taxa mitjana de variació

Font: http://www.euroschool.lu/.../CONCEPTO%20DE%20DERIVADA%20EN%20

L'expressió anterior coincideix amb el pendent de la recta secant a la funció $f(x)$, que passa pels punts d'abscisses a i $a+h$.

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ja que en triangle PQR resulta que:

$$tg\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En el següent applet es pot observar el concepte de taxa de variació mitjana.

Applet 31: Concepte de taxa de variació mitjana

https://www.geogebratube.org/student/m150966

Concepte de derivada en un punt

La derivada de la funció $f(x)$ en el punt $x = a$, és el valor del límit, si existeix, de la TVM quan l'increment de la variable tendeix a zero.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

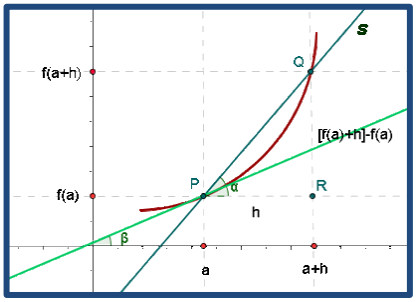


Figura 49: Concepte de derivada en un punt

Font: www.euroschool.lu/.../CONCEPTO%20DE%20DERIVADA%20EN%20

Interpretació geomètrica

La derivada d'una funció en un punt x_0, $f'(x_0)$, geomètricament és el pendent de la tangent a la gràfica de la funció en el punt $(x_0, f(x_0))$. O sigui: $m = f'(x_0)$,

En el següent applet es pot observar que la derivada en un punt és el pendent de la recta tangent en aquest punt.

Applet 32: Interpretació geomètrica f'(a)

https://www.geogebratube.org/student/m151347

Funció derivada

La funció derivada d'una funció $f(x)$ és una funció que associa a cada nombre real la seva derivada, si existeix**.** La designem per $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En el següent applet es pot observar el concepte de funció derivada.

Applet 33: Concepte de funció derivada

https://www.geogebratube.org/student/m150916

Derivades laterals

Derivada per l'esquerra

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada per la dreta

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Una funció és derivable en un punt, si i només si, és derivable per l'esquerra i per la dreta en aquest punt i les seves derivades laterals coincideixen.

Regles de derivació

Funció derivada del producte d'un nombre per una funció

La derivada de la funció producte d'un nombre per una funció és igual al nombre per la derivada de la funció.

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'(x)$$

Demostració:

$$(c \cdot f)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(c \cdot f)(x+h) - (c \cdot f)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot (f(x+h) - f(x))}{h} =$$

$$c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

Funció derivada de la suma (diferència) de funcions

La derivada de la funció suma (o diferència) és la suma (o diferència) de les funcions derivades.

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Demostració:

La demostració la farem només per las suma ja que la de la diferència es faria igual canviant el més pel menys.

$$(f+g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Funció derivada del producte de dues funcions

La funció derivada del producte de dues funcions és la funció que resulta en multiplicar la derivada de la primera funció per la segona sense derivar i sumar-li el producte de la derivada de la segona funció per la primera funció sense derivar.

$$(f \cdot g)(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Demostració:

$$(f.g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-\big(f(x).g(x)\big)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)+f(x).g(x+h)-f(x).g(x)-f(x).g(x+h)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x+h)+f(x).g(x+h)-f(x).g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\big(f(x+h)-f(x)\big)+f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h} =$$

$$g(x).f'(x)+f(x).g'(x) = f'(x).g(x)+g'(x).f(x)$$

Funció derivada del quocient funcions

La funció derivada del quocient de dues funcions és igual a la derivada del numerador pel denominador sense derivar, menys la derivada del denominador pel numerador sense derivar dividit, tot, pel quadrat del denominador.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x).\ g(x)-g'(x).f(x)}{(g(x))^2}$$

Demostració:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{\big(g(x)\big)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x))}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)\cdot g(x)-f(x)\cdot\big(g(x+h)-g(x)\big)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)\cdot g(x)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot\big(g(x+h)-g(x)\big)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h} =$$

$$\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

Derivada de la funció polinòmica

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Per fer la demostració aplicarem el binomi de Newton.

- Binomi de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n . b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}. b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n =$$

$$a^n + n\, a^{n-1}. b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n$$

- Nombres combinatoris:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!. m!}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Demostració:

$$F(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^n + n\, x^{n-1}. h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\, h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(n\, x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1})}{h} = n \cdot x^{n-1}$$

Regla de la cadena

La regla de la cadena serveix per derivar funcions compostes.

Si tenim dues funcions $f(x)$ i $g(x)$, la funció que fa correspondre a cada valor x de la variable independent la imatge $g(f(x))$ s'anomena funció composta i es representa per $(gof)(x)$.

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

Derivada d'una funció implícita

Recordem que una funció implícita és una funció que té per equació $f(x, y) = 0$.

Per derivar-la podríem aïllar la y i fer-ho com sempre, però en la majoria de casos no és possible aïllar la y. Una manera fàcil de derivar en aquests casos és derivar

l'equació directament aplicant la regla de la cadena per a $y = f(x)$ i després aïllarem y'.

Exemple:

Si tenim l'equació $x^2 + y^2 = 1$ i la derivem ens queda:

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \qquad\qquad y = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

Aplicacions derivada d'una funció en un punt

Creixement i decreixent d'una funció

Si $f(x)$ és derivable en el punt a i $f'(a) > 0$ la funció és creixent en aquest entorn.

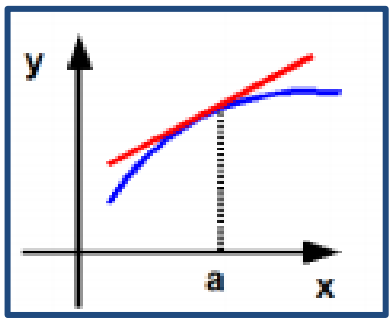


Figura 50: Funció creixent

Font: http://lallimonadenewton.files.wordpress.com/%202013/07/manual_mates_2nbatx5.pdf

Si $f(x)$ és derivable en el punt a i $f'(a) < 0$ la funció és decreixent en aquest entorn.

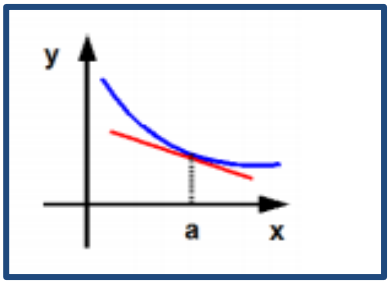


Figura 51: Funció decreixent

Font: http://lallimonadenewton.files.wordpress.com/%202013/07/manual_mates_2nbatx5.pdf

Recordem que la derivada d'un funció en un punt és el pendent de la recta tangent i per tant és positiu quan la funció és creixent i negatiu quan és decreixent.

Punts singulars. Màxims i mínims locals o relatius

Direm que una funció derivable presenta un punt singular en un punt $x = a$ si $f'(a) = 0$. En aquest punt la funció pot presentar una màxim o mínim local, i tal com es veu en el dibuix el pendent de la recta tangent és nul.

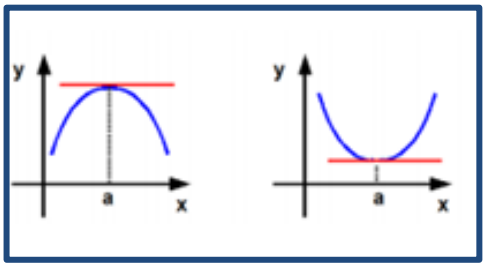


Figura 52: Màxim local. Mínim local.

Font: http://lallimonadenewton.files.wordpress.com/%202013/07/manual_mates_2nbatx5.pdf

Ara bé, això es tracta d'una condició necessària, però no suficient ja que hi ha funcions que $f'(a) = 0$ i en punt $x = a$ no hi ha cap punt singular. Un criteri que podem fer servir per esbrinar si un punt singular és un màxim o un mínim relatiu , és el criteri de la primera derivada:

- Si tenim una funció $f(x)$ tal que en $x = a$ la derivada s'anul.la $f'(a) = 0$ i un entorn de a , de manera que per els valors x d'aquest entorn:
  - Si per $x < a, f'(x) > 0$ i si per $x > a, f'(x) < 0$, aleshores la funció $f(x)$ assoleix un màxim relatiu en $x = a$.
  - Si per $x < a, f'(x) < 0$ i si per $x > a, f'(x) > 0$, aleshores la funció $f(x)$ assoleix un mínim relatiu en $x = a$.

En el següent applet es pot observar la relació entre la primera derivada en un punt amb el creixement o decreixement i amb els extrems relatius de la funció.

Applet 34: Relació entre f'(a) amb la monotonia i els extrems relatius

https://www.geogebratube.org/student/m151377

6.3 Funcions del tipus f(x,y)

6.3.1 Definició de límit d'una funció f(x, y) en un punt (x_0, y_0)

Direm que el límit d'una funció $f(x,y)$ quan (x,y) tendeix a (x_0,y_0) és L si per a qualsevol $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que per a tots els punts (x,y) tals que si $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ aleshores $|f(x,y)-L| < \varepsilon$.

La notació usual és:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Una manera senzilla de trobar el "possible candidat" a límit d'una funció $f(x,y)$ quan (x,y) tendeix a (x_0,y_0) consisteix en calcular els límits iterats: calcular en primer lloc el límit de la funció $f(x,y)$ quan y tendeix a y_0 i després el de $f(x_0,y_0)$ quan x tendeix a x_0 i viceversa. És a dir:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \qquad i \qquad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{z\to z_0} f(x,y)\right)$$

Cal remarcar que aquest procediment no ens garanteix que el límit de la funció existeixi, però en el cas d'existir si que coincideix amb el valor que obtenim en les dues expressions. Així, el càlcul del límit d'una funció de diverses variables es redueix al càlcul de "diversos" límits de funcions d'una variable.

La importància del camí pel qual ens aproximem a un punt queda palesa en el següent exemple.

<u>Exemple:</u>

Calcula el límit de la funció:

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \; en \; (0,0)$$

En primer lloc calculem el límits iterats:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{y^2} = 0$$

Si ens aproximem al punt $(0,0)$ amb rectes, és a dir, amb punts de la forma (x,mx) on $m \in R$.

$$\mathrm{Lim}_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m\,x^3}{x^4+m^2\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2}=0$$

Ara bé, si ens aproximem al llarg de la paràbola (x, x^2) aleshores

$$\lim_{(x,,x^2)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$$

Per tant, no existeix el límit de la funció en el punt $(0,0)$.

6.3.2 Definició de funció contínua en un punt (x_0, y_0)

Direm que la funció $f(x,y)$ és contínua en (x_0, y_0) si:

a) F està definida en (x_0, y_0).

b) Existeix $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

c) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

Una funció és contínua si ho és en tots els punts del seu domini.

Les funcions polinòmiques que són les funcions que estudiem en aquest treball són contínues en tot el seu domini.

6.3.3 Definició de derivada parcial en el punt (x_0,y_0)

Sigui $f: R^2 \to R$. La derivada parcial de f respecte de x en el punt (x_0, y_0) es defineix com:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

I la derivada parcial de f respecte a y en el punt (x_0, y_0) com

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

Les derivades parcials d'una funció de diverses variables s'obtenen al deixar constants totes les variables independents menys una i fer la derivada respecte d'aquesta.

Exemple: Calcula les derivades parcials de: $f(x,y) = 3y^3 + 2y^3 + 10$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 4x \qquad\qquad \frac{\delta f}{\delta y} = 9y^2$$

6.4 Funcions del tipus f(x,y,z). Singularitats.

Tot el que hem dit per les funcions de dues variables és vàlid per tres variables, lògicament afegint-hi la variable z.

Ara que ja tenim els conceptes matemàtics previs per poder entendre les singularitats, parlarem tot seguit d'elles.

Els punts singulars –o singularitats– s'identifiquen de forma visual, perquè la superfície no és llisa ni suau com, per exemple, una punxa o un plec.

La punxa de l'esquerra de la superfície Tu i Jo és una singularitat, però la muntanya llisa de la dreta és un punt regular.

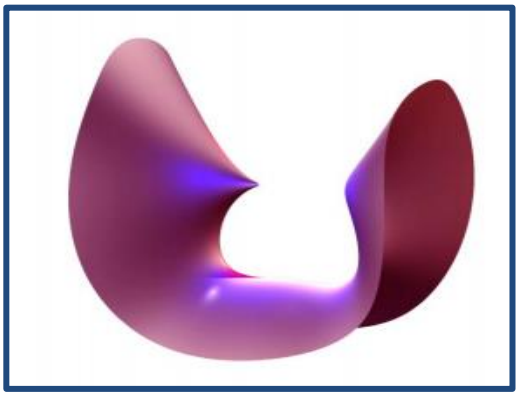


Figura 53: Superficie algebraica. Vis a Vis
Font: https://www.dropbox.com/s/03aogky.pdf

Moltes vegades és possible reconèixer les singularitats en una superfície observant-la amb cura.

Però, què passa quan no podem tocar ni veure la superfícies. Com podem trobar les seves singularitats?

Les singularitats es defineixen com tots aquells punts de la superfície que anul·len les derivades parcials de la seva equació.

Aquest mètode permet trobar les singularitats amb paper i bolígraf, sense ni tan sols tenir a prop la superfície, únicament mitjançant la seva equació.

Exemple:

La llimona té per equació $x^2 + z^2 = y^3 (1-y)^3$

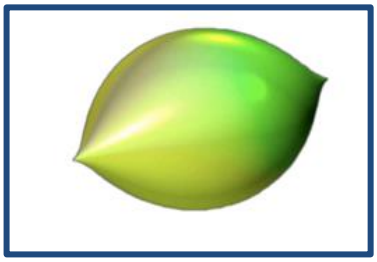


Figura 54: Superficie algebraica. Llimona

Font: https://www.dropbox.com/s/03aogkyk5aaw2ux%20/6-2nbtx.pdf

Si derivem la funció $f(x,y,z) = x^2 - y^3(1-y)^3 + z^2$ amb relació les variables x, y i z obtenim i igualem a zero obtenim:

$$\frac{\delta f(x,y,z)}{\delta x} = 2x = 0$$

$$\frac{\delta f(x,y,z)}{\delta y} = -3y^2(1-y)^3 - 3(1-y)^2(-1)y^3 = 0$$

$$\frac{\delta f(x,y,z)}{\delta z} = 2z = 0$$

i resolem el sistema d'equacions;

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -3y^2(1-y)^3 - 3(1-y)^2(-1)y^3 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

Si reduïm els termes obtenim;

$$\begin{cases} x = 0 \\ -3y^2(1-y)^3 - 3(1-y)^2(-1)y^3 = -3y^2(1 - y^3 - 3y + 3y^2) + 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

A continuació posaré uns quants exemples de figures que presenten singularitats i ho demostraré. Les demostracions les trobareu a l'annex.

Figura 1. Baldufa: $\mathbf{x^2 + y^2 = z^3(1 - z)}$

Si mirem aquesta figura veiem que té una singularitat, en concretament en el punt $(0, 0, 0)$.

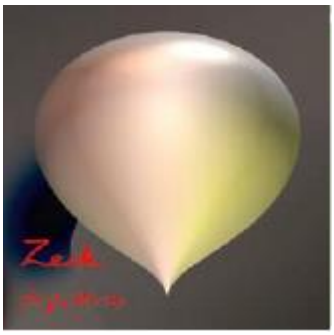


Figura 55: Superfície algebraica . Baldufa.

Font: http://imaginary.org/sites/default/files/rsme-imaginary_catalogue_es.pdf

Figura 2. Sofà: $\boldsymbol{x^2 + y^3 + z^5 = 0}$

En aquesta figura la singularitat es troba en el plec del sofà, concretament en el punt $(0,0,0)$.

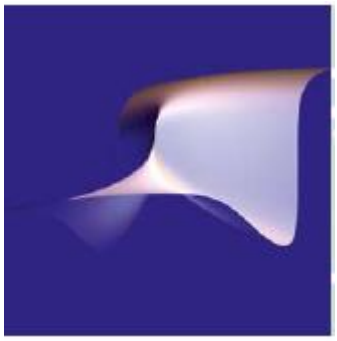


Figura 56: Superfície algebraica . Sofà.

Font: http://imaginary.org/sites/default/files/rsme-imaginary_catalogue_es.pdf

En el següent vídeo es poden observar aquests plecs.

Vídeo 6:https://www.youtube.com/watch?v=3HaFR5TesEI

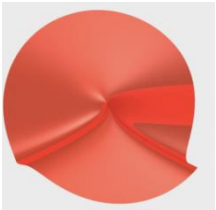


Figura 3. Calypso (Calipso). Equació: $x^2 + y^2z - z^2 = 0$

En aquesta figura la singularitat es troba en el punt de contacte de la part que té forma de con amb la part de baix, concretament en el punt (0,0,0). Les singularitats són inestables i delicades, petites modificacions en l'equació transformen la superfície radicalment. Aquesta inestabilitat és l'essència de las seva bellesa.

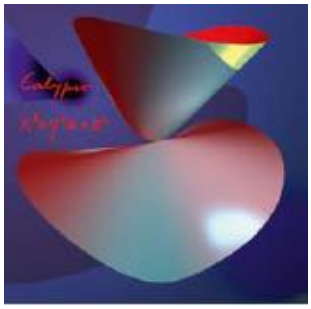
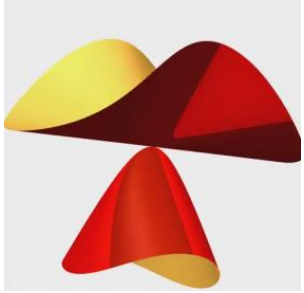


Figura 57: Superfície algebraica. Calipso.

Font: http://imaginary.org/sites/default/files/rsme-imaginary_catalogue_es.pdf

En el següent vídeo pots observar més bé la singularitat de Calipso.

Vídeo 7. https://www.youtube.com/watch?v=jquqxMFtH3Q



En el vídeo següent pot visualitzar com petites modificacions en la fórmula canvien molt la forma de la figura.

Vídeo 8. https://www.youtube.com/watch?v=PzXnzpXwAKk

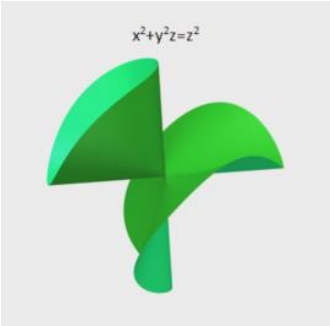


Figura 4. Ding-dong (llàgrima). Equació: $x^2 + y^2 + z^3 - z^2 = 0$

En aquesta figura la singularitat es troba en la punxa de la part que té forma de con, concretament en el punt $(0,0,0)$.

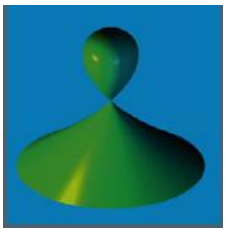
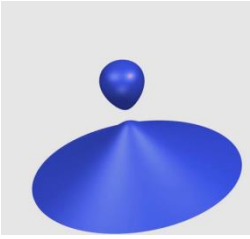


Figura 58: Superfície algebraica. Llàgrima

Font: http://imaginary.org/sites/default/files/rsme-imaginary_catalogue_es.pdf

En el següent vídeo es pot veure que si afegim paràmetres a l'equació, és a dir, $x^2 + y^2 + z^3 - z^2 + 0.1a = 0$ i modificant-los de manera contínua, es crea una seqüència d'imatges en què es pot veure com es crea una gota, com és va acostant a la posició límit i, finalment com es desprèn.

Vídeo 9. https://www.youtube.com/watch?v=CcVphyIh15o



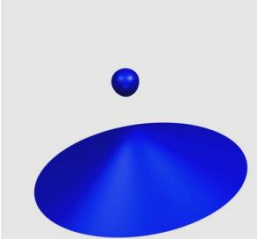


Figura 5. Vis à Vis (Tu i Jo). Equació:$x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4 = 0$

En aquesta figura la singularitat es troba en la punxa de la part esquerra, concretament en el punt $(0,0,0)$.

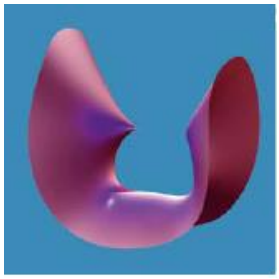


Figura 59: Superfície algebraica. Tu i jo

Font: http://imaginary.org/sites/default/files/rsme-imaginary_catalogue_es.pdf

Aquesta figura serveix per mostrar què és una singularitat, el pic de l'esquerra ho és entre que el tossal llis de l'esquerra no ho és.

Figura 6. Doble con. Equació: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

En aquesta figura la singularitat es troba en el punt $(0,0,0)$.

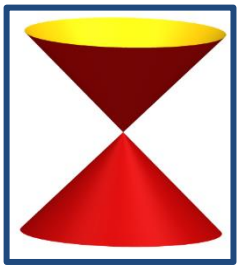


Figura 60: Superfície algebraica. Doble con.

Font: Elaboració pròpia amb el programa SURFER

Agafem aquesta equació i li afegim un paràmetre a: $x^2 + y^2 - z^2 + a = 0$ veiem que només presenta aquesta singularitat per $a = 0$, per altres valors diferents la figura ja no presenta aquesta punxa. Veure el vídeo següent.

Vídeo 10. https://www.youtube.com/watch?v=IQHIuuSiCBU

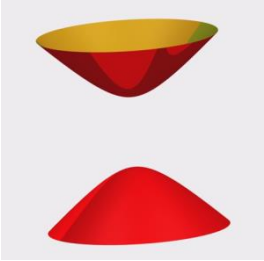


Figura 7. Helix (Hèlix). Equació: $6x^2 - 2x^4 - y^2z^2 = 0$

En aquesta figura les singularitats es troben en els punts $(0,0,0)$; $(0,0,z)$, eix z és un plec; $(0,y,0)$, eix y és un plec.

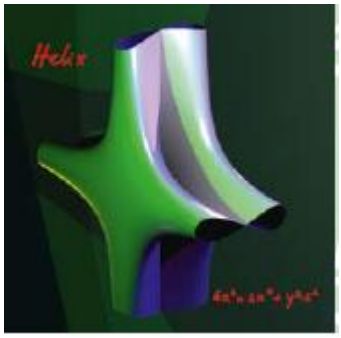
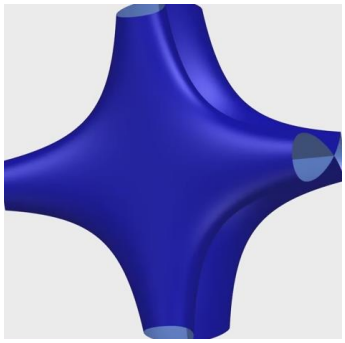


Figura 61: Superfície algebraica. Hèlix

Font: http://imaginary.org/sites/default/files/rsme-imaginary_catalogue_es.pdf

Si vols veure bé els plecs i el punt visualitza aquest vídeo

Vídeo 11 https://www.youtube.com/watch?v=Zq7Ef4wZf0s



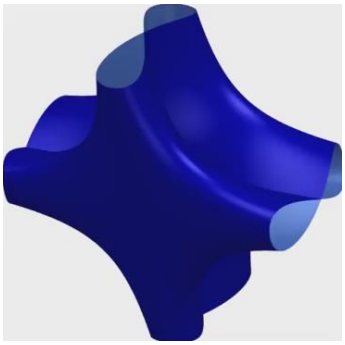


Figura 8. Cub. Equació: Equació: $\boldsymbol{x^6 + y^6 + z^6 - 1 = 0}$

Aquesta figura no té singularitats.

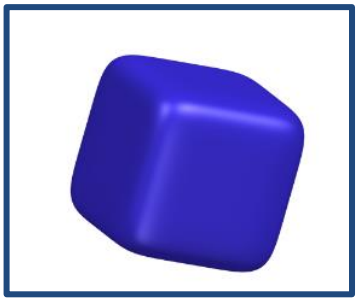


Figura 62: Superfície algebraica. Cub.

Font: Elaboració pròpia amb el programa SURFER

Figura 9. Cel i infern. Equació: $\boldsymbol{x^2 - y^2 z^2 = 0}$

En aquesta figura les singularitats es troben en els punts $(0,0,0)$; $(0,0,z)$, eix z és un plec; $(0,y,0)$, eix y és un plec.

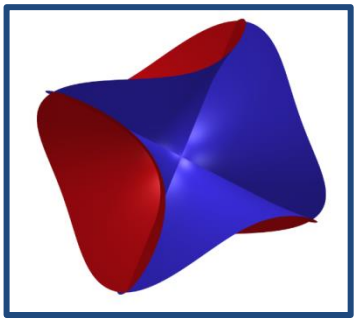


Figura 63: Superfície algebraica. "Cel i infern".

Font: Elaboració pròpia amb el programa SURFER

Figura 10. Kolibri (Colibri). Equació: $z^3 - y^2z^2 = x^2$

En aquesta equació hi trobem una singularitat en el punt $(0,0,0)$.

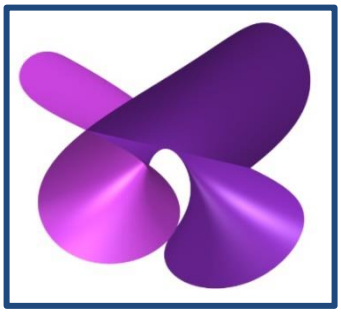


Figura 64: Superfície algebraica. Colibrí.

Font: Elaboració pròpia amb el programa SURFER

Figura 11. Distel: $x^2 + y^2 + z^2 + (x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2) = 1$

Aquesta imatge s'anomena espurna, però en realitat s'assembla a la imatge d'un virus vist pel microscopi electrònic.

Els virus utilitzen les seves punxes com si fossin claus per a entrar en les cèl•lules, on es poden dividir i créixer.

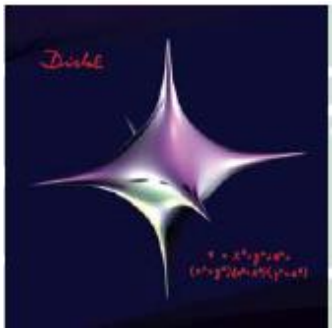


Figura 65: Superfície algebraica. Distel

Font: http://imaginary.org/sites/default/files/rsme-imaginary_catalogue_es.pdf

Aquestes punxes a simple vista semblen singularitats però quan fas els càlculs amb les derivades parcials dóna que la figura no té singularitats. Segurament aquestes punxes no són tals. Veure la demostració a l'annex.

Per finalitzar l'apartat de singularitats podem veure:

Figura 12: Òctica de Chmutov

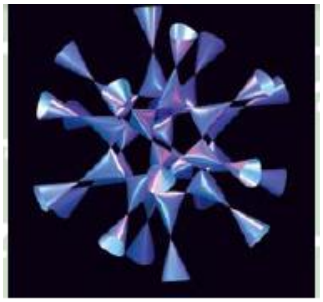


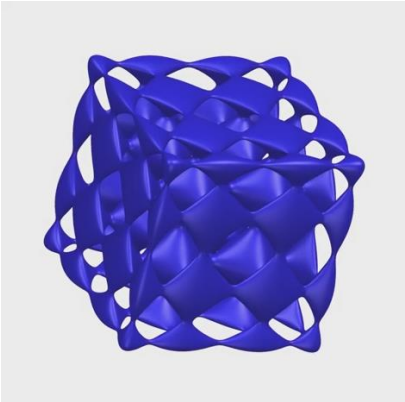
Figura 66: Superfície algebraica. Sèxtica de Barth

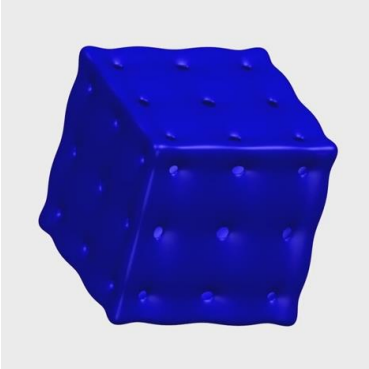
Font: http://imaginary.org/sites/default/files/rsme-imaginary_catalogue_es.pdf

L'òctica de Chumtov es caracteritza per la seva simetria i perquè té moltes singularitats

En el següent vídeo pots veure com va canviant la forma d'aquesta figura conforme anem modificant alguns paràmetres.

Vídeo 12. https://www.youtube.com/watch?v=QD2lz_RMTK8





7.- HISTÒRIA DELS MODELS DE SUPERFÍCIES ALGEBRAIQUES

7.1. Els models geomètrics alemanys del segle XIX

Professors i investigadors en l'àmbit de la didàctica han buscat constantment maneres de millorar l'ensenyament de les matemàtiques. Investigacions fetes a Anglaterra, Xina, Japó i els Estats Units recolzen la idea que l'ensenyament de les matemàtiques i la comprensió dels alumnes és més efectiva si s'utilitza material manipulatiu.

L'ús de models matemàtics concrets i instruments dinàmics era comú a Europa durant els segles XVII i XVIII , però hi va haver un nou impuls el segle XIX. Trobem un exemple, entre d'altres, a les escoles politècniques de Alemanya durant la segona meitat del segle XIX, on es van construir models de matemàtics per facilitar la visualització d'objectes geomètrics i de la física, de superfícies i corbes algebraiques.

El període de construcció de models a Alemanya va començar al voltant de 1870, quan Ludwig Brill, germà del matemàtic Alexander von Brill[16], va començar a vendre còpies d'alguns models matemàtics.

Molts d'aquests models originals van ser construïts en l'Institut de Matemàtiques de la Reial Universitat Tècnica de Munich sota la direcció de Felix Klein[17] i d' Alexander von Brill. Els dos eren professors de matemàtiques i feien que els seus alumnes dissenyessin i construïssin els seus propis models. Fèlix Klein els utilitzava quan impartia les seves classes i deia que li servien per a "reduir ..... la dificultat de l'estudi de les matemàtiques.. i l'excessiva abstracció de la formació universitària ".

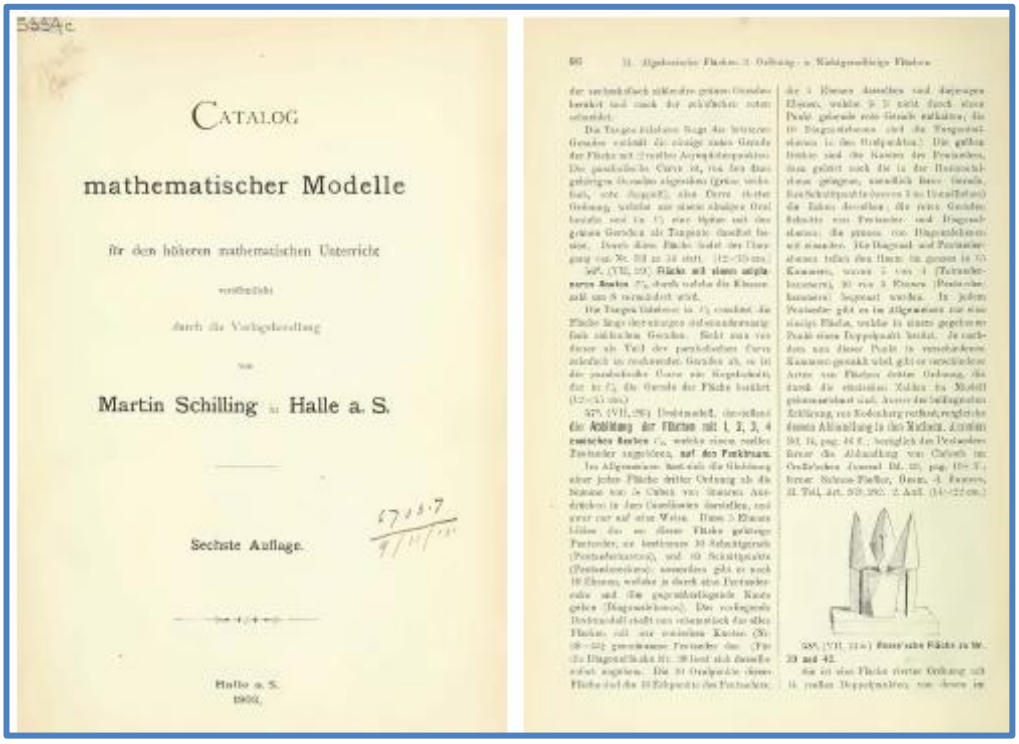
[16] **Alexander von Brill:** Matemàtic alemany nascut l'any 1842, va treballar molt la geometria algebraica, la teoria sobre corbes algebraiques i la matemàtica aplicada a la física

[17] **Félix Klein:** Matemàtic alemany nascut l'any 1849, va treballar molt la geometria, les funcions modulars i les superfícies algebraiques, de fet hi ha una superfície d'una sola cara que porta el seu nom (ampolla de Klein). Va ser el fundador de la gran enciclopèdia de les matemàtiques i un dels impulsors de la renovació de l'ensenyament de les matemàtiques a secundària, pensava que la matemàtica s'havia d'explicar amb exemples aplicats a la realitat. També va ser un impulsor de trobades de grups científics, això va fer que la ciutat alemanya de Gotinga es transformés en un important centre de desenvolupament matemàtic de tot Europa.

Per exemple, la sèrie VII de la col·lecció Schilling conté alguns models de superfícies cúbiques amb singularitats aïllades, presentats per l'estudiant de F. Klein, Carl Rodenberg, juntament amb la seva tesi l'any 1878. Els 18 models de la sèrie III van ser dissenyats per R. Diesel, estudiant de A. Brill. Els models tenien una finalitat didàctica.

L'any 1880 es va fundar una empresa amb el nom de L. Brill per a la producció de models, que es va establir a Darmstadt, i es va traslladar a Halle a. D. Saale el 1899 amb el nom de Martin Schilling.

L'any 1902 Martin Schilling havia produït 23 sèries de models i el seu catàleg de 1903 conté 29 sèries amb gairebé 300 models i mecanismes. Aquests models representen conceptes de geometria diferencial, superfícies algebraiques i instruments d'objectes físics. És el primer catàleg considerat com una publicació científica perquè conté una segona part que proporciona dades matemàtiques de cada peça.



Pàgines del catàleg de Shilling
Font: http://www.unizar.es

En el catàleg de 1911 hi ha 40 sèries de 400 models i aparells. També aquest catàleg conté una segona part on els models apareixen amb una breu explicació matemàtica i algunes vegades acompanyats d'un dibuix.

7.2. Col·lecció dels models geomètrics "GARCÍA GALDEANO" Universitat de Saragossa

7.2.1 Zoel García Galdeano (1846-1924)

Zoel García Galdeano va ser professor de la Facultat de Ciències de la Universitat de Saragossa el 1918. A més de guanyar i ocupar les càtedres de Geometria Analítica i càlcul Infinitesimal va escriure prop de 200 treballs, de caràcter didàctic i divulgatiu, i diversos tractats de matemàtiques; també va participar en els dos primers congressos internacionals de matemàtiques. Va fundar "El Progreso Matemático" , primera revista matemàtica espanyola i va ser el primer president de al Real Sociedad Española de Matemáticas de 1916 a 1922. Va adquirir quaranta models dels models matemàtics que es distribuïen per la companyia de Martin Schilling.

L'any 2011, el Vicerectorat de Projecció Cultural i Social de la Universitat de Saragossa va inventariar i va encarregar la neteja de la col.lecció de Garcia Galdeano a L'Escuela Superior de Conservación i Restauración de Bienes Culturales de Aragón, amb seu a Osca.

Col·lecció dels models de Saragosa

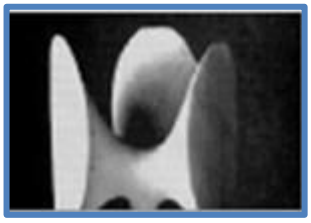
Font: http://www.unizar.es

8.- INFLUÈNCIA DELS MODELS DE SUPERFÍCIES ALGEBRAIQUES EN ELS ARTISTES CONTEMPORANIS

A continuació posaré alguns exemples on es veu la influència que han tingut les superfícies algebraiques en alguns artistes a l'hora de fer les seves obres.

- Clebsch[18] (1871) i F. Klein (1873) van estudiar una superfície cúbica que conté 27 rectes reals. Es coneix com superfície de Clebsch i és el primer model d'aquesta sèrie. Una de les possibles equacions en R^3 és $x^3+y^3+z^3+1-(x+y+z+1)^3=0$.

  Clebsch va manar l'any 1872 construir un model d'escaiola d'aquesta superfície (figura de l'esquerra). L'any 2005 l'escultor **C. Ramírez**[19] va construir un model d'aquesta superfície per la Universitat de Groningen (figura de la dreta), per tant aquí veiem com un escultor actual aprofita una superfície algebraica per fer-ne una escultura.



Cúbica de Clesch, model de 1872

Font: http://www.unizar.es

Escultura de C. Ramírez

Font: http://www.unizar.es

- En algunes de les obres de l'escultor **Andreu Alfaro**[20] l'efecte estètic s'aconsegueix amb un grapat de barres metàl·liques, col·locades de tal manera que, vistes en conjunt, suggereixen una superfície suaument corbada. Aquestes superfícies que es poden construir com a unió de línies rectes es coneixen com

[18] **Clebsch:** Matemàtic del segle XIX que va fer importants contribucions a la geometria algebraica.

[19] **C. Ramírez:** Escultor que va néixer l'any 1968 a la província de Murcia, ha fet escultures de diferent material com pedra natural, pedra artificial, escaiola, bronze… L'any 2002 va començar a utilitzar les matemàtiques com a eina per realitzar les seves obres, l'any 2005 va realitzar la superfície de Clebsch.

[20] **Andreu Alfaro**: Escultor valencià que va néixer l'any 1929 i va morir l'any 2012, i tot i que l'art li interessava molt no s´hi va dedicar completament fins als 44 anys. A la dècada dels anys 60 experimenta amb elements metàl·lics i als 80 amb filferro i marbre.

a superfícies reglades, i han despertat, des de fa molt, l'interès dels matemàtics i dels arquitectes, perquè és una construcció relativament senzilla que permet d'obtenir una gran varietat de formes geomètriques. Un exemple el podem veure en la següent escultura; Alfaro ha construït la superfície d'un paraboloide hiperbòlic, també coneguda com a sella de muntar.

Autor Manuel Alfaro, Escultura situada a l'avinguda d'Aragó a València

Font: 45830-47854-1-pdf

- L'obra de **Naum Gabo**[21] es caracteritza per una constant investigació espaial portada a terme de forma científica, s'interessa pels tipus materials industrials, en especial els transparents, que li permeten construir superfícies reglades i desenvolupables, elements que materialitzen equacions tridimensionals i exploren l'espai entès amb en seu sentit metafísic. Busca la forma al marge de la massa, cultiva les formes buidades abans que els volums tancats.

Cap nº 2 (1916)

Font: http://www.biografiasyvidas.com/

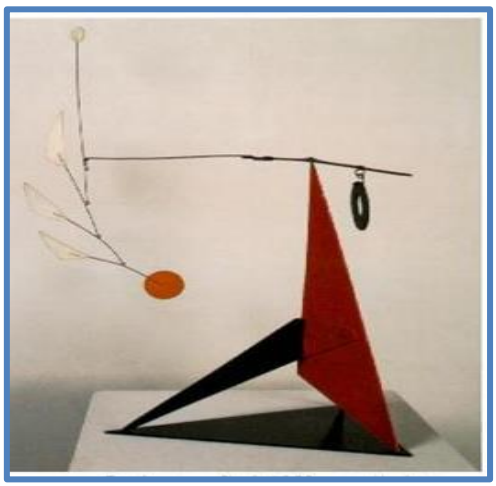
Projecció a l'espai

Font: http://sites.google.com/artsartistesk

[21] **Naum Gabo:** Escultor del segle XX nascut a Russia va ser el pioner del constructivisme (moviment artístic que va sorgir a Rússia després de la revolució d'octubre de 1917 i defensava un art a favor de la revolució i del poble, accepta tota mena de materials i tècniques industrials), utilitzava materials com el vidre, el plàstic i el metall i va crear un sentit de moviment espaial en la seva obra.

- **Alexander Calder**[22]**,** va inventar l'escultura mòbil per al disseny de la qual estava preparat gràcies als seus estudis d'enginyeria. Els seus objectes lliures recolzats o fets amb làmines de metall es mouen quasi sempre amb els mínims corrents d'aire.

Sense títol, 1973.Alumini pintat Performing



Seal, 1950, metall pintat

Font: https://sites.google.com/site/artsartistes/3-pintura-del-segle-xix

Juga amb les línies rectes , corbes i formes abstractes. Combina les diagonals de la base amb les inclinades i corbes de filferros i plaques. Admet múltiples punts de vista i et convida a envoltar-lo i veure el seu moviment des de diferents angles. Les superfícies són component llises, molt punxegudes a les vores i crea un joc d'ombres que projecta al seu entorn. El resultat són figures que juguen amb diferents perspectives, expressives i molt dinàmiques, ja que introdueixen el moviment real, gràcies a l'acció de l'aire que mou les plaques. Els acabats són polits, sense relleus i s'integra amb l'entorn: un espai amb corrents d'aire. Trenca amb les escultures estàtiques, arrelades al terra, ja que les d' ell incorporen el moviment real. Si observem les figures podem dir que cada làmina de metall podria ésser una superfícies algebraica.

[22] **Alexander Calder,** artista contemporani que va néixer l'any 1898 a Nova York i va morir l'any 1976, és conegut per ser el creador dels "mobiles", un tipus d'escultures que es mouen gràcies a l'acció d'un motor o per l'acció dels corrents d'aire.

9.- PART PRÀCTICA

Per fer la part pràctica em vaig basar en el què era la idea central del treball, la relació entre la fórmula i la forma, i crec que la composició que he fet, exemplifica molt bé aquest concepte.

Aquest projecte consisteix en construir una sèrie de formes relacionades amb la natura (arbres, flors, fulles, ...) a partir de fórmules i amb això, crear una instal·lació.

Dit això, vaig trobar interessant manifestar l'essència del treball on ens porta a un treball més conceptual quan parlem d'art contemporani.

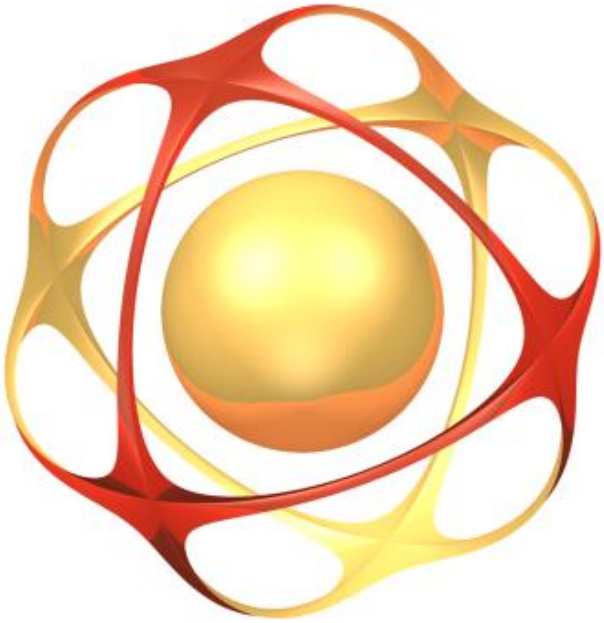
Així que vaig començar a crear, cercar, modificar, provar, ... figures per tal que s'avinguessin al nostre espai de treball, un espai físic d'uns 50 m^2 ple de gespa (lloc que ens va semblar idoni) a part, aquest constava d'un esplèndid mur a darrera on penjar l'explicació, per tal de que tots aquell qui ho vegin sense haver-se llegit el treball, puguin entendre el concepte. Un cop creades les figures, seran col·locades perquè semblin un jardí però en lloc de posar les formes visuals, posaré les fórmules.

Per tant, tindrem un jardí ple de fórmules i creat per fórmules. L'espectador, en aquest cas, veurà l'espai on sorgeixen cartells del terra amb fórmules escrites i de diferents dimensions. Cop ja he dit anteriorment, ens aprofitarem d'un mur que hi ha a darrera per explicar-l'hi a l'espectador el què realment representen les fórmules i inclús una recreació de les imatges que es volen representar.

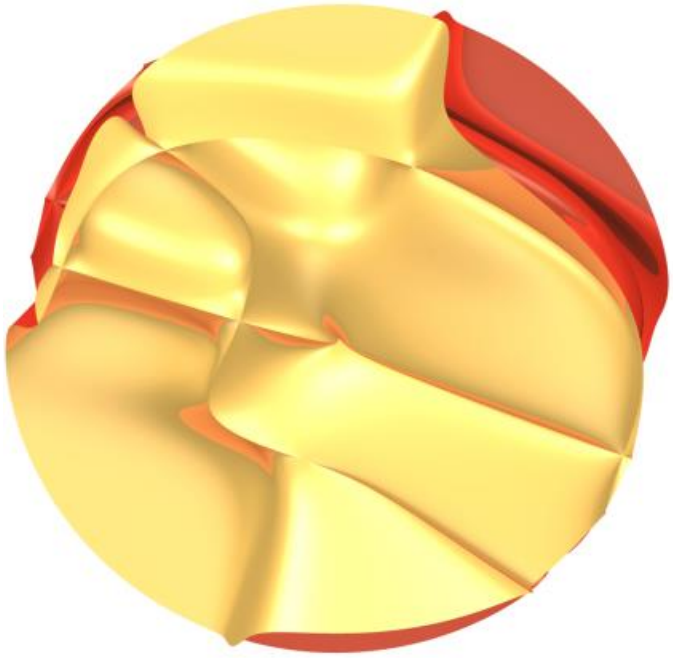
Aquest concepte no va sortir del no res, sinó que jo i el meu tutor vàrem estar parlant, al principi, de fer unes figures creades per a mi, però sense relació, o anar més enllà i donar a conèixer realment el concepte del treball a partir d'una manifestació artística.

A continuació es pot observar alguna d'aquestes fórmules amb la seva respectiva figura que podríem posar en la instal·lació abans esmentada.

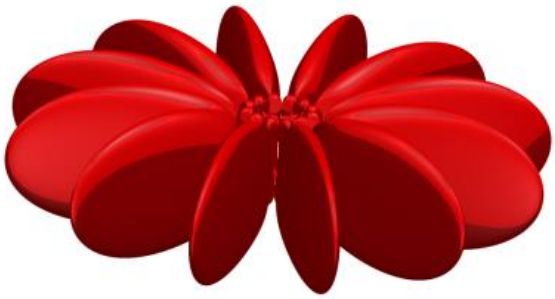
1. $((x^2+y^2+z^2-9)^3-(x^2\cdot y^2\cdot z^2))\cdot(x^2+y^2+z^2-2)=0$



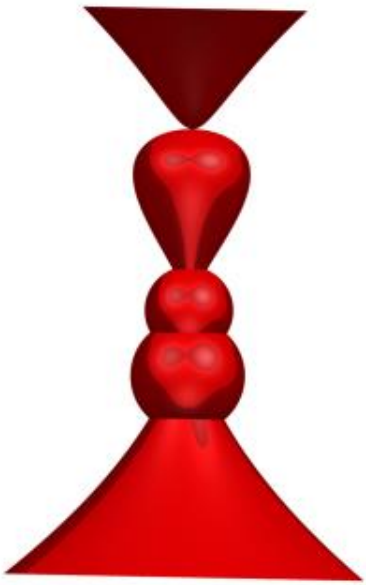
2. $(2\,x^2-y^{10}+z^2)^3\ +(y^3+x^7+z^3)^2\ \cdot(x^2\,y^3\,z^3)\cdot(x^3+y^2+z^2-9)^2=0$



3. $(x^2+y^2+z^2-3)^6 + \left(\left(x+\sqrt{3}\,y\right)^2 - 3\right)\cdot\left(\left(x-\sqrt{3}y\right)^2 - 3\right)\cdot$
$((2x)^2 - 3)\cdot\left(\left(y+\sqrt{3}\,x\right)^2 - y^3\right)\cdot\left(\left(y-\sqrt{3}\;x\right)^2 - 3\right)\cdot$
$(2y^2-3) = 0$



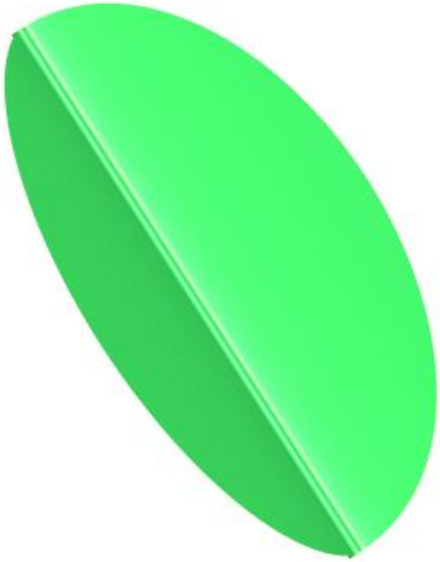
4. $\left(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2-\mathrm{z}^3\cdot(1-\mathrm{z})\right)\cdot\left(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+0.126z^3(1-z)\right)\cdot$
$(x^2+y^2+z^2-0.06)\cdot(x^2+y^2+(z+0.36)^2-0.1) = 0$



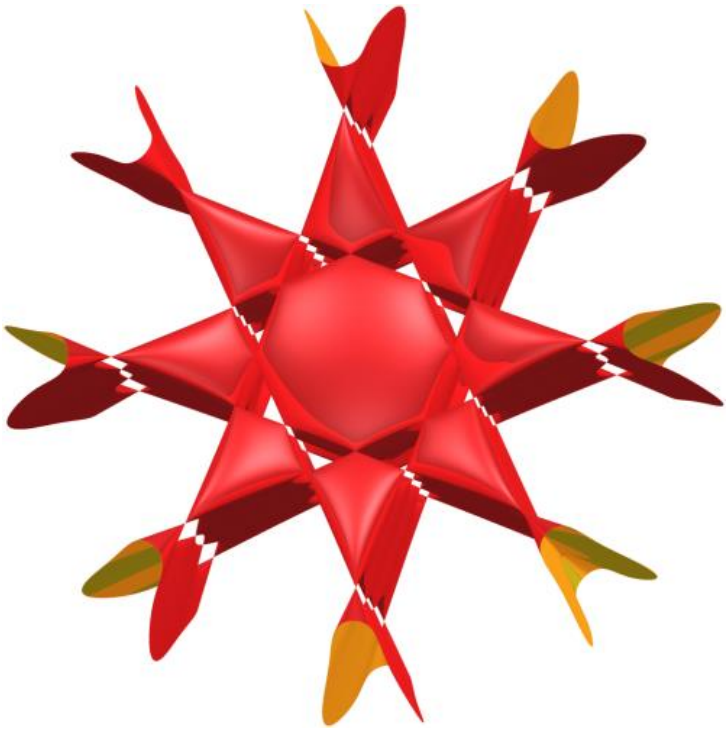
5. $(2x^2 - y^{10} + z^3)^3 + (y^3 + x^7 + z^3)^2 \cdot (x^2y^3z^3) \cdot (x^3 + y^2 + z^2 - 9)^2 = 0$

6. $\left((2x^2 + y^2)^3 - 12ax^2y^2 \cdot (cz^2 + 1)\right) \cdot \left((x^2 + y^2 + (z + b)^2 - 0.1088)^2 - (x^2 - 2y^2) \cdot (y^2 - 2(z + b)^2) \cdot ((z + b)^2 - 2x^2)\right) \cdot (x^2 + y^2 + (z + b)^2 - 0.1) = 0\,; on\ a = 0.5\,, b = 0.3\ i\ c = 0.7$

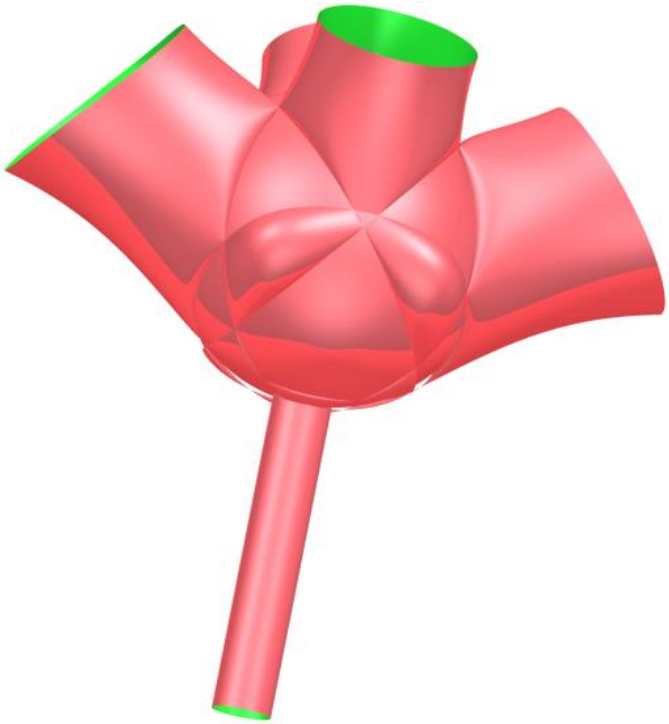
7. $(x^2 + y^2 - 5) \cdot (x^2 + y^3 - 5) = 0$



8. $a\frac{-1+\sqrt{2}}{4}(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)z^2 + \frac{2-7\sqrt{2}}{8} - z^4 + \left(0.5 + \sqrt{2}\right)z^2 - \left(\frac{1-12\sqrt{2}}{16}\right)^2 - \prod_{i=0}^{7}\left(cos\left(\frac{i\pi}{4}x\right) + sin\left(\frac{i\pi}{4}(y - 1)\right)\right) = 0\,; on\ a = 0.5$

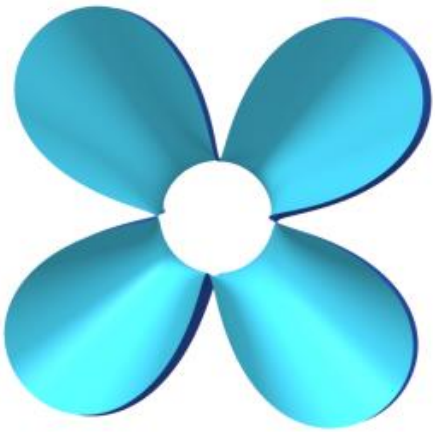


9. $\left(0.51\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 x^2 - y^2\right)\left(0.51\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 y^2 - z^2\right)\left(0.51\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 (z - b)^2 - x^2\right) - \left(1 + 0.102\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(x^2 + y^2 + (z-b)^2 - 1)^2(x^2 + y^2 + (z-b)^2 - 0.95)(x^2 + y^2 - a) = 0$; on a=0.6 i b=0.8.

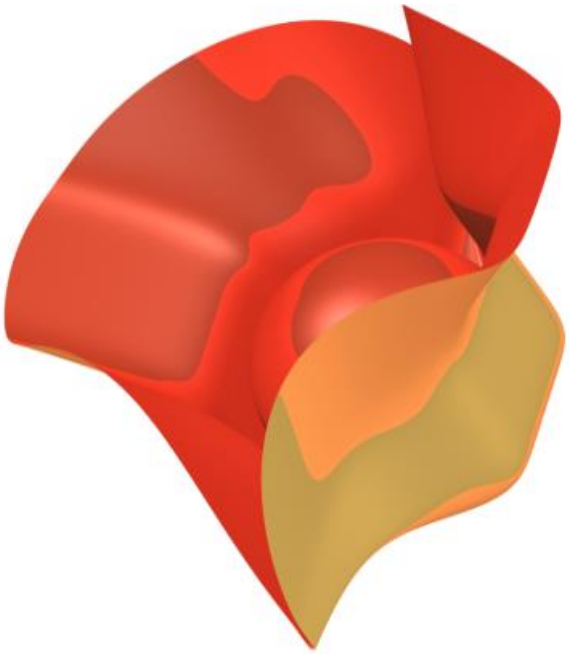


10. $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2(7z^2 + 1) = 0$

11. $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2z^2 + 2x\,y\,z - 1 = 0$



12. $(y^5 + z^2 - z^4 - x^8z^4) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$



10.- CONCLUSIONS

En definitiva, a l'acabar aquest treball m'emporto una experiència molt satisfactòria. Aquesta combinació entre les matemàtiques i els programes SURFER i Geogebra ha estat tant genial com divertida. Recordo que quan feia 1r o 2n d'ESO i veia els gegants treball de recerca d'alumnes més grans pensava: "Jo no podré fer un treball tan llarg" (innocent), i ara que miro enrere crec que el temps que passava treballant no era gens pesat, ja que m'apassionava el què estava fent (tot i que hi havia cert moments d'arreglar el format o de fer quadrar les imatges que quasi suava sang).

Però sense dubte, quan m'ho passava més bé era quan em situava davant d'un problema sorgit en la creació d'applets i el resolia només valent-me del meu intel·lecte, aquest moment de màxima felicitat i d'una pujada astronòmica de l'ego es pot comparar en poques sensacions de la vida, quan jugava amb els intricats mecanismes que regulaven el funcionament d'ambdós programes i donava voltes i voltes fins a arribar a una solució, quan passaven hores i hores fins no trobar una solució apta per a mi mateix. Aquella alternança entre l'eufòria i la desesperació, entre l'alegria i la depressió, produïdes pel moment en el qual semblava que quadrava tot, però pocs moments després veies que era tot el contrari.

El conjunt del treball m'ha ajudat a comprendre conceptes no sols matemàtics, sinó també altres com què significa l'art conceptual (molt a "*grosso modo*"), m'ha ajudat a obrir la ment i explorar altres mons que o m'eren totalment desconeguts, o era massa escèptic com per veure'ls amb la seva plenitud. M'ha ajudat també a esclarir el meu futur, alhora que em posa en un conflicte, entre la carrera de matemàtiques o la d'enginyeria informàtica. Ara encara no ha arribat l'hora de decidir-ho però sé que quan ho faci no serà gens fàcil.

M'ha ensenyat que per a cada problema que resolem a les matemàtiques, se'n formulen molts més i que a mida que avances, les matemàtiques es van ramificant però regint-se sempre per una mateixa llei, la lògica.

Crec que l'actitud que he mostrat durant el treball ha sigut positiva, encara sabent que em queda molt camí per recórrer, estic content de que, gràcies al meu entusiasme, dedicació i ambició hagi superat els obstacles i hagi arribat molt més

lluny del què esperava. Potser he sigut una mica il·lús i m'he encarat a molts problemes que ara no sé si sabria resoldre però, en definitiva, això m'ha fet arribar encara més lluny.

Sens dubte, ha estat una experiència satisfactòria que repetiria sense pensar-ho.

11.- FONTS D'INFORMACIÓ

11.1 Bibliografia

HURTADO Ferran, PUIG Jordi i BRICHS Albert. Curs de matemàtiques 1. Barcelona: Edicions Serpa,1979. ISBN 84-85347-05-6.

Matemàtiques, volum 1.Barcelona: Editorial Grup Promotor Santillana, Projecte La casa del saber, 2011. ISBN 978-84-79189-840-5 .

ANZOLA M. I VIZMANOS J.R. Matemàtiques. Barcelona:Editorial Cruïlla,2002. ISBN 84-661-0347-3.

GONZALO Santi i JURADO Damià. Matemàtiques 1. Barcelona: Editorial Castellnou,2008. ISBN 978- 84-9804-507-9

BUJOSA J.M, CAÑADILLA J.L., FARGAS M i FONT V., Matemàtiques 2. Barcelona: Editorial Castellnou,2003. ISBN 84-8287-948-0.

11.2 Webgrafia

Viquipèdia. L'enciclopèdia lliure. Disponible a:< http://ca.wikipedia.org/wiki>

Diccionari entre geometria i àlgebra

Manual de surfer. Disponible a:
<https://www.dropbox.com/s/g531uxcrb9yre9b/Manual_Surfer.pdf>

Imaginary-guia didàctica-zaragoza. Disponible a:
<https://www.dropbox.com/s/nl692hrym92klsv/imaginary-guia-didactica-zaragoza_pp11-17.pdf >

Polinomis

PDF. McGrawHill. Polinomis. [Consulta: 15 d'abril de 2014]. Disponible a: <http://www.McGraw-Hill.es/bcv/guide/capitulo/8448181417.pdf.>.

Còniques

Ministerio de educación cultura y deporte. Proyecto Descartes. [Consulta: 30 de juny de 2014]. Disponible a: <http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Conicas/Ecuacion_segundo_grado.htm>.

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. Murcia. [Consulta: 30 de juny de 2014]. Disponible a: < http://www.dmae.upct.es/~pepemar/conicas/general/ec2grado.html>.

Universidad de San Carlos de Guatemala. [Consulta: 25 de juny de 2014]. Disponible a: <http://sitios.usac.edu.gt/seccionesconicas/ecuaciones_segundo_grado.html>.

Jaumesc .[Consulta: 20 de juny de 2014]. Disponible a: <http://www.jaumesc.cat/arxius/primer/coniques.pdf>

Equacions de dues variables de qualsevol grau

Ministerio de educación cultura y deporte. Proyecto Descartes. [Consulta: 10 de juliol de 2014].Disponible a: <http://recursostic.educacion.es/eda/web/eda2010/descartes/materiales/>.

Instituto Nacional de Tecnologias Educativas y de formación del Profesorado. > [Consulta: 03 de juliol de 2014]. Disponible a: <http://ficus.pntic.mec.es/~igas0008/Nombre/Propio/pag15.htm>.

Instituto Nacional de Tecnologias Educativas y de formación del Profesorado. [Consulta: 15 de juliol de 2014]. Disponible a: <http://alerce.pntic.mec.es/jjir0003/WEB%20MATEMATICAS/MATEMATICAS/OPOSICIONES/GEOMETRIA/CURVAS%20MARAVILLOSAS/index.htm>.

Equacions amb tres variables. Superfícies a l'espai
Recursos educatives interactives. EducarChile._[Consulta: 15 de juliol de 2014]. Disponible a: <http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=133271 >

PROYECTO MATEX. [Consulta: 25/07/2014]. Disponible a: http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_2/rectasC2.pdf >

CRISTIAN OBIOL PARDO. Manual de matemàtiques 2n BAT[Consulta: 26 de juliol de 2014]. Disponible a: <http://lallimonadenewton.files.wordpress.com/2013/07/manual_matebatx5.pdf>

IES ARQUITECTE RASPALL. Departament de mates. Geometria a l'espai. [Consulta: 27 de juliol de 2014] . Disponible a: <http://www.xtec.cat/iesarquitecteraspall/dep_mates/fitxerseinesmates/GeometriaEspai.pdf>.

Geometria 3D. [Consulta: 27 de juliol de 2014]. Disponible a: http://www.textos-online.com/images/pdf/2tecnoGeometria3D.pdf

Superfícies urvas. Ruben Dario Morelli. Departamento de representación. Facultad de ciencias exactas, ingenieria y agrimensura. Universidad del Rosario. [Consulta: 30 de juliol de 2014]. Disponible a: <www.fceia.unr.edu.ar/dibujo/cilindro-cono-esfera.pps>

Newton's Investigation of Cubic Curves - Jeffrey Nunemacher, 1993.pdf.[Consulta 23 de juliol de 2014]. Disponible a: <https://www.dropbox.com/s/kdn0jayhy5euq98/Newton's%20Investigation%20of%20Cubic%20Curves%20-%20Jeffrey%20Nunemacher%2C%201993.pdf>

Simetries

ImaginaryBCN.Quadernet d'acompanyament. Simetria i coordenades.[Consulta 1 d'agost de 2014]. Disponible a: <https://www.dropbox.com/s/962atllsj4fst7z/4-3i4ESO.pdf>

ImaginaryBCN.Quadernet d'acompanyament. Llegir simet4ries a les equacions. [Consulta 2 d'agost de 2014].Disponible a: <https://www.dropbox.com/s/pte6m3juyo6hzzq/Quadernets_Imaginary-simetriesv3.docx>

Límits i derivades

EUROSCHOOL.[Consulta:10 d'agost de 2014].Disponible a: <www.euroschool.lu/.../CONCEPTO%20DE%20DERIVADA%20EN%20>.

Derivades parcials

Universitat Politècnica de Catalunya Barcelona.[Consulta:13 d'agost de 2014.Disponible a: <http://ocw.upc.edu/sites/default/files/materials/15015480/tema2_superficies-5235.pdf>.

Singularitats

RMSE. Imaginary.catalogue_es.catalogue Disponible a: https://www.dropbox.com/s/ovvanacwrimlx7p/rsme-imaginary_catalogue_es.pdf

ImaginaryBCN.Quadernet d'acompanyament. Equacions i singularitats.[Consulta 8 d'agost de 2014]. Disponible a: <https://www.dropbox.com/s/03aogkyk5aaw2ux/6-2nbtx.pdf>.

Influència superfícies i art

La Gaceta de la RSME, Vol. 15 (2012), Núm. 1, Págs. 187–204. [Consulta 30 d'octubre de 2014]. Dsponible a:
< http://www.unizar.es/matematicas/personales/bernues/ModelosZar.pdf>

Google Sites. Arts i artistes. [Consulta 3 de novembre de 2014].Disponible a:
< https://sites.google.com/site/artsartistes/3-pintura-del-segle-xix >.

MATEMATICALIA .Revista de divulgación matemàtica. Proyecto consolider ingenio mathematica 2010 . ISSN; 1699-770. Vol 3 , nos. 4-5 (oct.-dic. 2007). [Consulta: 6 de novembre de 2014]. Disponible a:
<http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=431&Itemid=255>.

Mètode núm. 37 . Monogràfics. Fons i forma. Matemàtiques en la creació artística actual.[Consulta 3 de novembre de 2014]. Disponibles a:
< http://revistes.iec.cat/index.php/Metode/article/viewFile/45830/45999>

Geogebra

Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. Ateneu. Materials i recursos per a la formació.[Consulta: de juny a novembre de 2014]. Disponible a:
<http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/cursos/curriculum/d55/index>

Passeig en geogebra en les matemàtiques de 4t d'ESO, Josep Fanés Manilse. [Consulta: 15 de juliol de 2014]. Disponible a:
<http://upcommons.upc.edu/pfc/bitstream/2099.1/20887/1/80535_Memora.pdf>

GEOGEBRA TUBE. Disponible a:
<https://www.geogebratube.org>

Surfer

IMAGINARY. Open mathematics. Disponible a:

www.imaginary.org

Google Sites

Manual de Google Sites. Disponible a:

< https://sites.google.com/site/webscolaborativas/home>