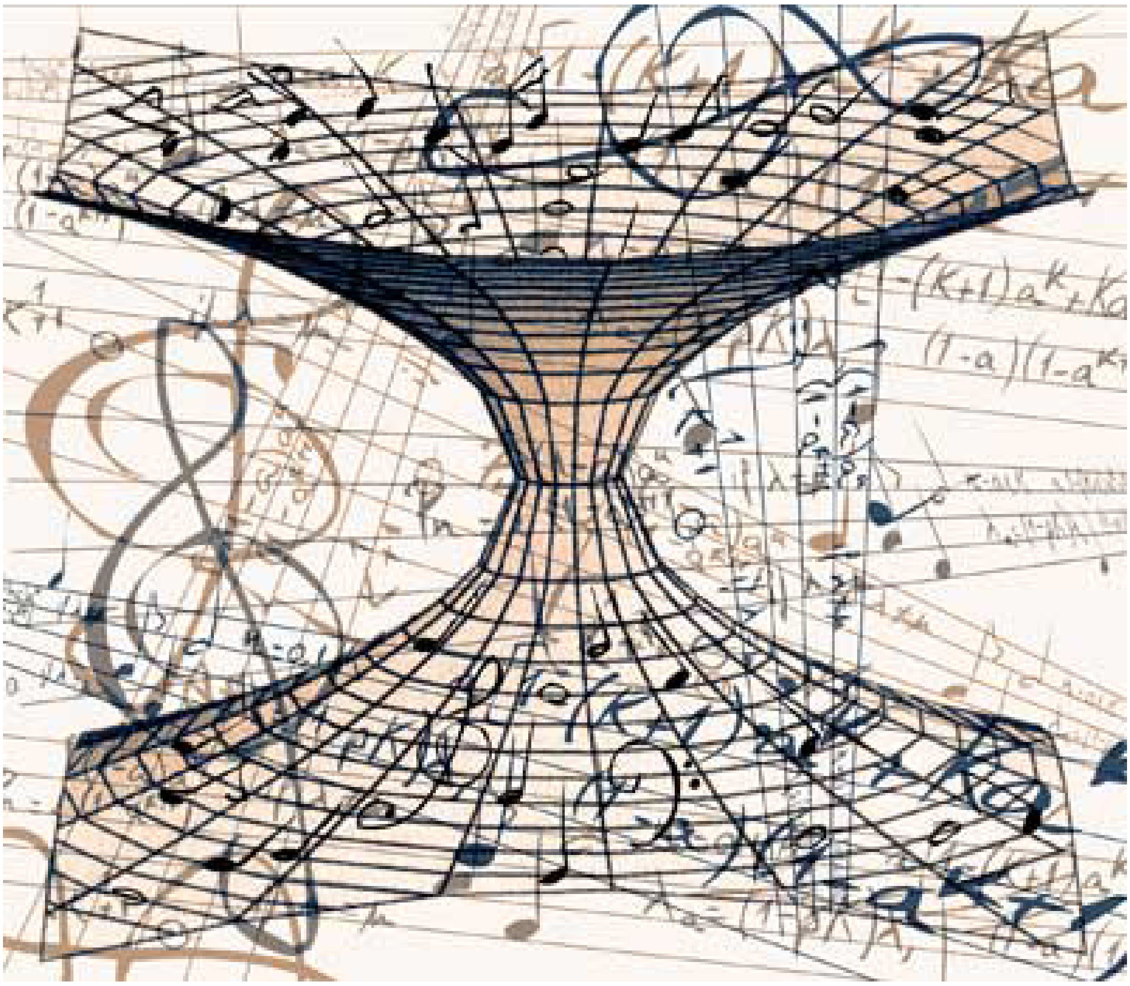
MÚSICA,
MATEMÀTIQUES
I FÍSICA



2n Batxillerat

Curs 2014-2015

Aquest treball no hagués estat possible sense tota la gent que m'ha ajudat.
A tots ells, els vull dedicar aquest treball i agrair l'ajuda que m'han proporcionat.

Índex

Part teòrica:

Part pràctica:

1. Introducció

En els darrers cursos de l'Educació Secundària Obligatòria (ESO), vaig començar a sentir parlar del TREBALL DE RECERCA. Ja, aleshores, començava a dir que el faria de la relació que hi ha entre las música i les matemàtiques. Principalment, per la meva passió per la música i l'afició per les matemàtiques i la física.

Tinc coneixements musicals de Grau mitjà i toco diversos instruments: la flauta travessera, el piano, el clarinet, instruments de percussió, la gralla i de manera autodidàctica, la guitarra.

Les matemàtiques i la música és un tema que sempre ha despertat la meva curiositat però a causa del curs acadèmic que estava cursant, no vaig relacionar-ho amb la física. Un cop va arribar el moment de posar-me a fer-lo, vaig creure que seria interessant afegir també part de física. Haig de dir que comptava amb persones que em podien ajudar, ja que el tema de la física, estudi d'aquest treball, es veu a segon de batxillerat i l'elecció del tema del treball de recerca s'havia de fer a primer.

L'objectiu del treball de recerca, és trobar una petita part de la relació entre les matemàtiques, la música i la física.

El treball consta, per tant, de dues parts. La part teòrica està formada per una introducció en la qual es parla d'alguns personatges importants relacionats amb el tema del títol del treball de recerca i les definicions de conceptes bàsics tant de la música, com de matemàtiques i de física, per tal que tothom que llegeixi aquest treball el pugui entendre sense necessitat de tenir coneixement d'aquestes matèries.

La part pràctica s'ha estructurat en dues parts. En la primera part, s'ha plantejat diverses qüestions relacionades amb la comprovació experimental de la relació de 2:1 que hi ha entre la mateixa nota en dues octaves consecutives i la relació de equifreqüència que hi ha entre les dotze notes de l'escala cromàtica. Per a realitzar aquest estudi, s'ha analitzat les notes tocades per a quatre instruments (la flauta travessera, el piano, el violí i la guitarra acústica) mitjançant un programa d'ordinador anomenat "Audacity i amb l'ajuda d'un full de càlcul, l' Excel.

En la segona part, s'han estudiat les transformacions geomètriques de la partitura de Clint Mansell "Together we will live forever", peça interpretada a piano, que s'adjunta en els annexos.

Durant el procés de realització del treball m'he trobat amb diferents inconvenients tècnics relacionats amb les gravacions i interpretació dels resultats. No obstant els inconvenients, ha estat interessant la realització d'aquest treball i ha estat satisfactori pel fet d'haver, finalment, conegut més sobre la relació d'aquestes ciències.

Abans de començar a realitzar el treball de recerca, no tenia una idea molt clara de l'abast de la relació entre la música, les matemàtiques i la física. Quan ja em van acceptar el tema i vaig començar a investigar i a informar-me, em vaig trobar que la relació que existeix entre elles és immensa, com diu Gioseffo Zarlino, compositor i teòric de la música del Renaixement: *"La música se ocupa de los números sonoros" ...*

2.Antecedents de la música, les matemàtiques i la física:

Al llarg de la història s'han conegut molts casos de científics, músics i matemàtics que han treballat la relació que existeix entre les matemàtiques i la música. En aquest punt es farà una breu pinzellada d'aquests personatges.

2.1. Leonardo de Pisa i successió de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1170-1250) més conegut com Fibonacci, va ser el matemàtic italià que va introduir i difondre per tot Europa el sistema de numeració aràbiga (que és la que utilitzem actualment), la notació posicional i el numero 0; però és conegut per ser l'autor i pensador de la successió de Fibonacci.

Aquesta successió va sorgir de la pregunta següent:
"Quantes parelles de conills haurà desprès d'un temps X?"
La resposta es basa en l'observació, en veure que el nombre de conills en una generació era igual a la suma de les parelles de conills que hi havia en les dues generacions anteriors. D'aquesta manera va néixer la successió de Fibonacci, que s'inicia amb el número 0 i 1 i a partir dels quals s'obtenen els altres per la suma del dos anteriors:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

$$\boxed{F(n) = F(n-1) + F(n-2)}$$

0+1 = 1; 1+1 = 2; 2+1 = 3; 3+2 = 5; 5+3 = 8; 5+8 = 13; 13+8 = 21

Les propietats de la successió són les que es presenten a continuació:

- Cada tres números hi ha un nombre parell: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...
- Cada cinc números hi ha un múltiple de 5: 1, 1, 2, 3, 5, 13, 21, 34, 55...
- La divisió de dos nombres consecutius de la successió donen com a límit el nombre d'or:

1/1 = 1; 2/1 = 2; 3/2 = 1'5; 5/3 = 1'666666; 8/5 = 1'6; 13/8 = 1'625

Amb el temps es va veure que la successió de Fibonacci està present en molts aspectes de la nostra vida, com ara les margarides que tenen 34, 55, 89 pètals; si es dibuixen espirals d'igual mida des del centre de la coliflor, surten 5; 5 són els braços que té l'estrella de mar i en el gira-sol el nombre d'espirals que podem dibuixar són 21, 34 o 55. A més, per exemple, la partitura analitzada a la part pràctica d'aquest treball presenta un nombre de 89 compassos; tal que apareix a la successió de Fibonacci. També s'observa que algunes notes es repeteixen cinc vegades i que entre repetició i repetició hi ha 13 i 21 notes de separació. Aquest aspecte no ha estat estudiat en aquest treball a causa de la necessitat d'acotar-ho.

2.2. Pitàgores

Pitàgores de Samos (582 aC - 496 aC), matemàtic i filòsof grec va construir un monocordi. Instrument d'una sola corda que acompanyava la melodia l'uníson.

L'objectiu que tenia Pitàgores amb el monocordi era investigar les relacions matemàtiques de la longitud d'una corda quan feia sonar diferents intervals d'aquesta mateixa nota. La corda es tensava i el pont lliscava per sobre de la corda, de manera que el podia fixar allà on ell volgués, fent la corda més llarga o més curta.

Jugant amb aquesta funció del monocordi d'allargar o escurçar la longitud de la corda va observar i treure diverses conclusions.

- En dividir la corda per la meitat, s'obté un interval d'una octava respecte a la nota original quan aquesta es deixava a l'aire i es feia sonar, ja que la freqüència de la nota es duplicava **2/1**.
- En dividir aquesta meitat de corda un altre cop per la seva meitat, s'obté una nota de dues octaves més aguda que la nota original. La seva freqüència es multiplica per quatre, es a dir: **4/1**.

- En moure el pont a la posició 9/12; 3/4 i fa sonar la corda, el so que es produeix es el de la **quarta**.
- En moure el pont a la posició 8/12; 2/3 fa sonar la corda, el so que es produeix es el de la **quinta**.
- En moure el pont a la posició 6/12; . fa sonar la corda, el so que es produeix es el d'una **octava**.

També va descobrir que el nombre de vibracions d'una corda és inversament proporcional a la seva llargada. És a dir, que una corda llarga produeix menys vibració que una corda curta. En conclusió, com més llarga sigui la corda més greu serà la nota, i com més curta, més aguda.

2.3. Wolfang Amadeus Mozart i el Joc dels Daus

Les obres de Mozart (1756–1791), han estat estudiades durant anys per matemàtics i musicòlegs i sempre han tingut un contacte directe amb les matemàtiques.

El nen prodigi uns anys abans de morir va inventar una manera de compondre valsos de 16 compassos mitjançant un senzill lloc de daus. El va titular "***Joc de daus musicals per escriure valsos amb l'ajuda de dos daus sense ser music ni saber res de composició K294".*** Amb això va escriure un gran nombre de valsos diferents de 16 compassos cadascun jugant amb l'atzar.

El mètode es va basar en què va escriure 176 compassos i els va enumerar de l'1 al 176. A continuació, va fer 16 grups d'11 compassos cadascun i els va apuntar en les següents taules:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Cada taula correspon a una de les dues parts del vals, la primera i la segona. Els nombres romans corresponen als 8 compassos que formen cadascuna de les dues parts i els números del 2 al 12 corresponen a la suma de les cares dels dos daus que tirava. Els llançava per definir quina figura s'havia de posar a cada compàs. Per exemple, si al veure què escriure al compàs 7, als daus sortia un 10, anava a la primera taula i mirava la columna VII i la fila 10, i així veia que el que corresponia era el compàs numero 62. Aquest compàs 62 havia estat prèviament escrit, igual que tots els altres, ja que la primera part del joc era la composició d'un vals de 176 compassos els quals després es desordenen. I llavors en tirar els daus els compassos s'anaven enganxant en l'ordre resultant de l'atzar.

Els valsos que es podrien compondré mitjançant aquest "joc" són 1116, i si cada vals durava de 30 segons, per escoltar-los tots es necessitarien més de 700 anys.

En el cas del músic i "matemàtic" Mozart, coneixia una part de la relació entre les matemàtiques i la música, i per això va fer que la funció principal del mètode fos fer música de qualitat en el menor temps possible.

2.4. Altres personatges

El filòsof grec Aristòtil (348 – 322 aC.) va ser un dels primers pensadors a teoritzar la natura del so, però els qui es consideren els pares de l'acústica són Marin Mersenne (1588 – 1648) i a Galileu Galilei (1564 – 1642) amb "Discursos Matemàtics sobre dues noves Ciències". També s'ha de destacar la figura important en aquest camp de la física d'Isaac Newton (1642 – 1727) amb el llibre *"Principia"* on va desenvolupar tota una teoria matemàtica sobre com es propaga el so i a Lord Rayleigh que va escriure un tractat sobre l'acústica anomenat *"Teoria del So".* Tots aquests i altres pensadors, matemàtics i físics van estudiar durant anys l'acústica, la branca física que estudia la producció, la transmissió i la recepció dels sons. Amb aquesta ciència podem quantificar l'energia, la variació en el temps, la freqüència del so i la seva localització.

3. Definicions i conceptes bàsics musicals:

A continuació es presenten definicions de termes musicals i una petita introducció al llenguatge musical amb l'objectiu que tothom pugui entendre aquest treball sense necessitat de saber de música.

3.1. Nota:

La nota és el so determinat per una vibració de freqüència constant.

3.2. Pentagrama

El pentagrama és el conjunt de cinc línies paral·leles i quatre espais que els músics utilitzen per escriure les notes musicals. A continuació podem observar un pentagrama amb clau de sol (el de dalt) i amb clau de fa (el de baix) (Figura 3.2.1).

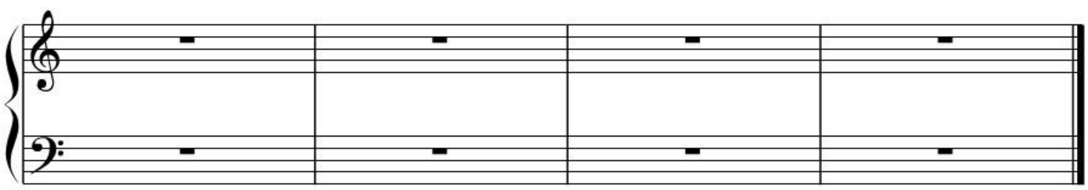


Figura 3.2.1.- Pentagrama amb clau de sol (el de dalt) i amb clau de fa (el de baix).

Les línies es numeren de baix a dalt. Les notes es poden situar entre dues línies, és a dir en l'espai, o a sobre d'una línia. Les notes que són fora del pentagrama s'escriuen en línies addicionals.

Abans d'utilitzar el pentagrama, es feia servir el tetragrama, que consistia en quatre línies paral·leles de color vermell i tres espais on s'escrivien les notes.

Les notes, llavors anomenades neumes (del grec antic pneuma = respiració), eren molt diferents de les actuals, ja que només indicaven l'altura i no el ritme. A continuació podem observar un model de tetragrama (Figura 3.2.2):

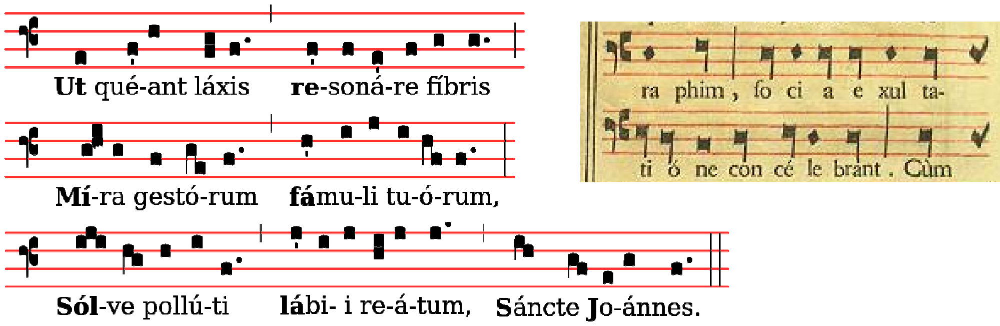


Figura 3.2.2.- Tetragrama.

3.3. Acord

Un acord és un grup de tres o més notes que sonen simultàniament.

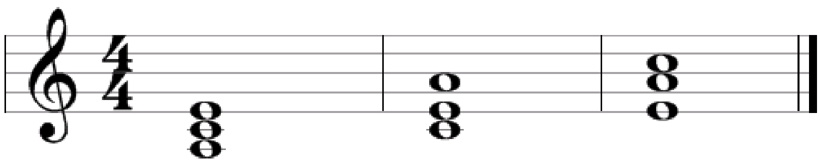


Figura 3.3.1.- Acord

3.4. Clau

La clau és el símbol que se situa al principi d'una partitura amb la funció d'associar les notes musicals amb les línies del pentagrama.

3.4.1. Clau de sol

La clau de Sol ens indica que la segona línia del pentagrama correspon a la nota sol.

Figura 3.4.1.1.- Clau sol.

3.4.2. Clau de fa

La clau de Fa ens indica que a la quarta línia s'escriu la nota Fa. La utilitzen instruments més aviat greus, com el contrabaix i el baix elèctric.

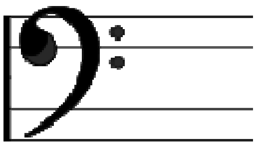


Figura 3.4.2.1.- Clau fa.

3.4.3. Clau de do

La clau de Do ens indica que a la quarta línia s’escriu la nota Do. La utilitzen instruments com la viola i el violoncel.

Figura 3.4.3.1.- Clau Do.

3.5. Octava

L’octava és l’ interval que separa dos sons les freqüències dels quals estan en relació de dos a un. Per exemple el la5 de 880 Hz és una octava més alt respecte del la4 de 440 Hz.

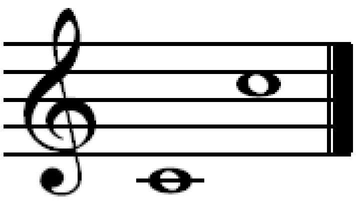


Figura 3.5.1.- Octava.

3.6. Escala

L'escala és una successió de sons ordenats tant de manera ascendent com de manera descendent, segons la seva freqüència.

3.6.1. L'escala de do major

L'escala de do major és l'escala "base", és a dir, la que no té cap so alterat, a partir de la qual en deriven les altres escales.

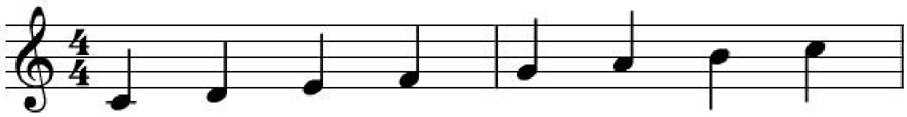


Figura 3.6.1.1.- Escala de do major.

Entre les notes d'aquesta escala existeix una relació mesurada en tons i semitons. A continuació es presenta l'esquema que resulta en aquesta escala en concret:

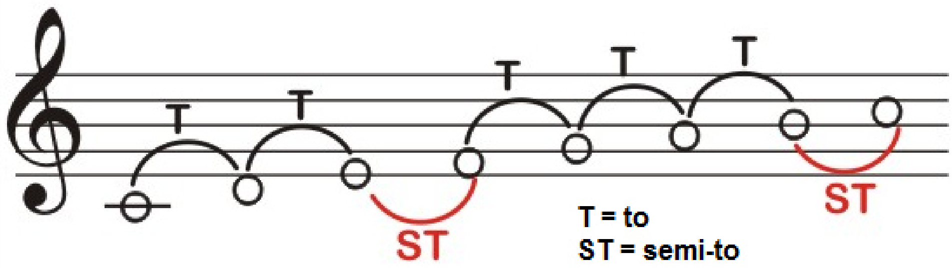


Figura 3.6.1.2.- Tons i semitons en l'escala.

Quant a l'origen del nom de les notes es deu a un poema del monjo Pau el Diacon anomenat "Ut queant laxis".

Text original en llatí	**Traducció**
Ut *queant laxis*	*Per tal que puguin*
Re*sonare fibris*	*Exaltar a ple pulmó*
Mi*ra gestorum*	*Les meravelles*
Fa*muli tuorum*	*Dels teus miracles*
Sol*ve polluti*	*Dissol els pecats*
La*bii reatum*	*De llavis impurs*
S*ancte* ***I****oannes*	*Sant Joan*

Figura 3.6.1.3.- Origen del nom de les notes.

Actualment, a part d'aquest sistema també es fa servir el xifrat americà que té com a finalitat escriure les notes de forma breu, amb una sola lletra de l'abecedari.

Do	*Re*	*Mi*	*Fa*	*Sol*	*La*	*Si*	*Do*
C	D	E	F	G	A	B	C

3.6.2. Escala cromàtica

A finals del segle XIX, i atès à l'ús cada vegada més freqüent de sostinguts i bemolls, la música occidental va començar a basar-se no en l'escala diatònica, sinó en la cromàtica: 12 notes en una octava, separades per un semitò: do, do#, re, re #, mi, fa, fa #, sol, sol #, la, la #, si (i do); o bé; re*b* , re, mi*b*; mi; fa; sol *b*; sol; la*b*; la; si*b* i si.

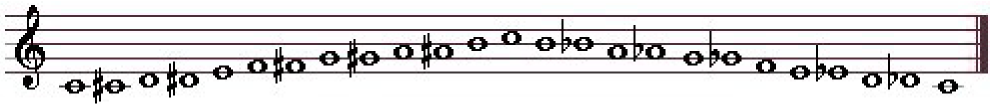


Figura 3.6.2.1.- Escala cromàtica.

3.7. Compàs

El compàs es representa gràficament amb línies verticals perpendiculars a les del pentagrama que reben el nom de línies divisòries o barres de compàs.

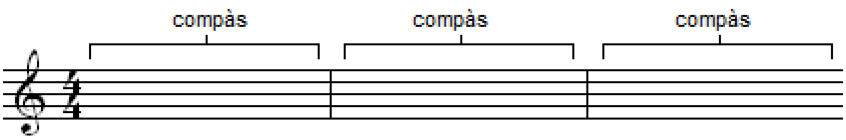


Figura 3.7.1.- Compàs.

3.7.1. Compàs d'una composició

El compàs s'indica amb dos números al principi d'una obra musical.

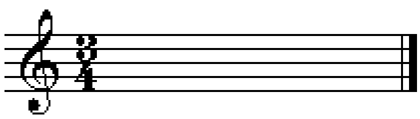


Figura 3.7.1.- Compàs d'una composició.

A la taula que es presenta a continuació, ens indica el temps que dura cada nota prenent com a unitat la rodona:

Xifra	Figura	Nom de la figura
1	𝅝	Rodona
2	𝅗𝅥	Blanca
4	♩	Negra
8	♪	Corxera
16	𝅘𝅥𝅯	Semicorxera
32	𝅘𝅥𝅰	Fusa

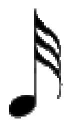
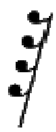
Taula 7.1.- Relació de durada de la nota i la seva representació.

Llavors, el compàs $\frac{3}{4}$ indica que en cada compàs hi ha 3 temps i que en cada temps hi cap una negra (per dir-ho d’alguna manera).

Hi ha símbols definits per indicar compassos concrets. Per exemple, el símbol 𝄴 s’utilitza per fer referència al compàs 4/4 i el símbol 𝄵 s’utilitza per fer referència al compàs 2/2.

3.8. Durada de les notes

A l’hora d’interpretar una melodia, era tan important saber la durada de la nota com el temps que un instrument o veu s’havia d’estar en silenci. D’aquesta necessitat va sorgir la creació de signes per indicar-ho. A continuació es presenta les diferents figures i les relacions d’equivalència temporal:

Nom	Signe	Silenci	Durada	Fracció
Rodona			4	1
Blanca			2	½
Negra			1	¼
Corxera			½	1/8
Semicorxera			¼	1/16
Fusa			1/16	1/32
Semifusa			1/32	1/64

Taula 8.1.- Relació de figures, silencis i d'equivalències temporals.

3.9. Alteracions

Signe que acompanya una nota augmentant o disminuint el seu so. El sostingut (primera imatge) fa que augmenti mig to la nota, el bemoll (segona imatge) fa que disminueixi mig to la nota i el becaire (tercera imatge) té la funció de anul·lar l'alteració (o el sostingut o el bemoll) aplicada en aquella nota. També existeixen dues alteracions que no són tan comunes: són el doble sostingut (quarta imatge), que fa que la nota s'apugi un to, i el doble bemoll (cinquena imatge), que fa que la nota s'abaixi un to sencer.

Figura 3.9.1.- Alteracions musicals.

3.10. Tonalitat

Sistema de sons que serveix de fonament a una composició musical. Ens indica les alteracions que apareixen en aquella peça o cançó. Per exemple, si una cançó està en Sol Major, implica que tots els "Fa" són sostinguts (augmentats mig to); i si la cançó està en tonalitat de Sib Major, implica que tots els "Si" i tots els "Mi" són bemolls (disminuïts mig to)

Figura 3.10.1.- Tonalitat musicals.

4.Definicions i conceptes bàsics matemàtics:

A continuació es presenten definicions de conceptes matemàtics per tal que es faci més fàcil la comprensió del treball:

3.1 Mitjana aritmètica

La mitjana aritmètica és el resultat de la suma de tots els valors dividit entre el nombre total de valors.

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots . x_{n-1} + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

3.1 Errors

Els errors són mesures que s'utilitzen per controlar els errors en els càlculs aproximats. Hi ha dos tipus d'errors:

4..1. Error absolut

Quan donem una mesura aproximada, cometem un error que consisteix en la diferència entre el valor exacte i el valor aproximat.

$$\textbf{Error absolut} = \left| \underset{\text{(valor real)}}{\textbf{valor exacte}} - \underset{\text{(valor del mesurament)}}{\textbf{valor aproximat}} \right|$$

4..2. Error relatiu

L'error relatiu és la relació entre l'error absolut i el valor real. Correspon al tant per u.

$$\textbf{Error relatiu} = \frac{\textbf{error absolut}}{\textbf{valor real}}$$

També es pot calcular l'error relatiu en % multiplicant el resultat per 100.

$$\text{Error relatiu} = \frac{\text{error absolut}}{\text{valor real}} \times 100$$

3.1 Raó aritmètica

La raó aritmètica és el quocient entre dos nombres.

$$\text{Raó} = \frac{\text{valor (X)}}{\text{valor (Y)}}$$

3.1 Factors de conversió.

Un factor de conversió és una operació matemàtica, és una fracció en la qual el numerador i el denominador són la mateixa mesura expressada en unitats diferents. És un mètode per fer ràpidament canvis d'unitats sense utilitzar la regla de tres. Per exemple, per passar de m/s a km/h els factors que s'utilitzarien són:

$$30\frac{\cancel{\text{cm}}}{\cancel{\text{s}}} \times \frac{1\ \cancel{\text{m}}}{100\ \cancel{\text{cm}}} \times \frac{1\ \text{km}}{1000\ \cancel{\text{m}}} \times \frac{60\ \cancel{\text{s}}}{1\ \cancel{\text{min}}} \times \frac{60\ \cancel{\text{min}}}{1\ \text{h}} = 1{,}08\ \text{km/h}$$

3.1 Funció sinusoïdal.

La funció sinusoïdal (o funció sinus) és una funció matemàtica periòdica que relaciona el catet oposat d'un angle i la hipotenusa del mateix triangle rectangle. Té un domini de: [1 , -1]; això indica que els valors del sinus estan compresos entre 1 i -1, ambdós inclosos. A mesura que l'angle augmenta de zero cap a 90º, el sinus pren valors que van de 0 fins a 1, a partir d'aquí, de 90º fins a 180º va de 1 fins a 0; de 180º a 270º pren valors de 0 fins a -1 i per a finalitzar i acabar la volta sencera, pren valors de -1 fins a 0 i tornem a repetir el període, tal com es mostra en la imatge (figura 4.5.1.)

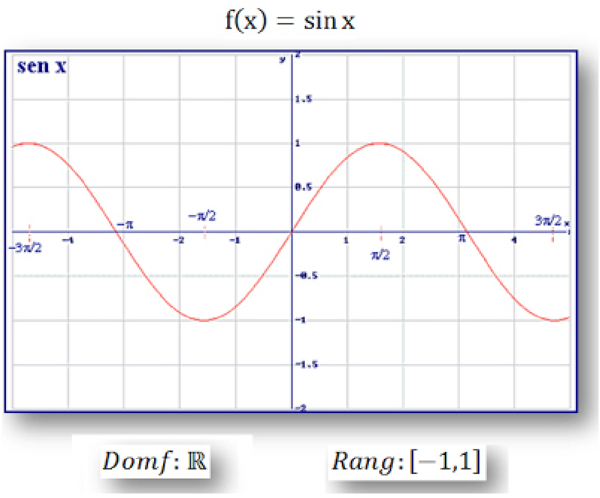


Figura 4.5.1.- Funció trigonomètrica.

La funció sinusoïdal és important en ciència, ja que està present en molts fets quotidians com per exemple el so, en el qual, la seva propagació a través de l'aire té lloc en forma d'ones sonores, representades per a funcions sinusoïdals. I això significa que, entenent el funcionament de la funció sinusoïdal, podem comprendre com funcionen, per exemple, les ones sonores. Amb aquest estudi es podem explicar fenòmens com el trencament d'una copa quan uns cantant d'òpera canta o com es va trencar el pont de Tacoma al poc de ser inaugurat, (figura 4.5.2.).

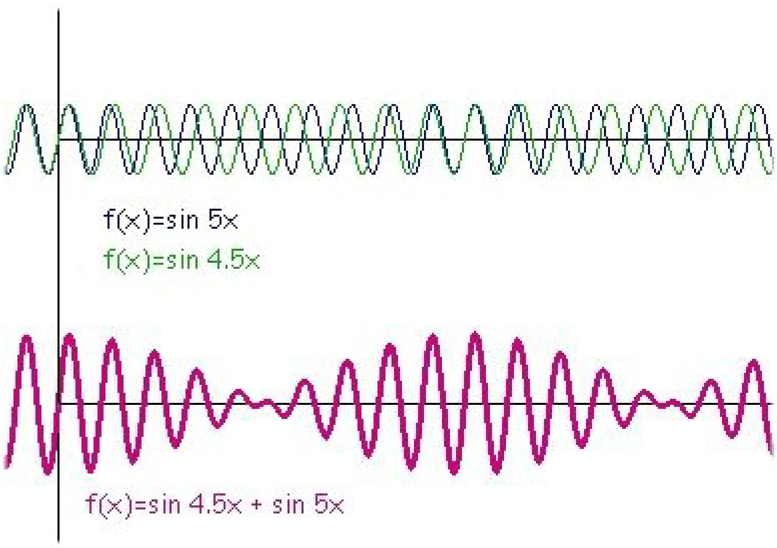


Figura 4.5.2.- Fluctuacions de l'amplitud produïdes per la superposició d' ondes

5. Definicions i conceptes bàsics físics:

5.1. El so

El so és la interpretació que fa el cervell humà de certes vibracions que arriben a pressionar el timpà. Aquests sons es produeixen per la vibració d'algun sistema (cordes, instruments, cordes vocals,...) que es transmet a través de les molècules que produeixen una sèrie de dilatacions i contraccions locals de l'aire, és a dir, variacions locals del volum de l'aire que es transmet longitudinalment a causa dels xocs entre molècules i la seva agitació tèrmica; per tant, podem considerar el so com una fluctuació local de la densitat de l'aire. Aquest fenomen pot representar-se amb una funció sinusoïdal (figura.-5.1).

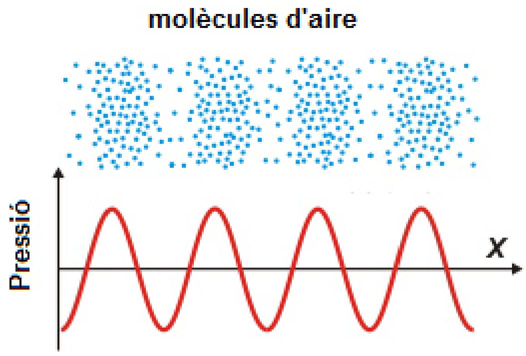


Figura 5.1.1.- Fluctuació local de la densitat de l'aire.

Així doncs, perquè el so existeixi, és necessari que hi hagi tres elements:

- L'emissor: és allò que vibra i provoca les ones sonores, per exemple un instrument musical, la veu....
- El medi transmissor: és el material que transmet les ones sonores, per exemple l'aire o l'aigua. Aquesta transmissió és longitudinal, és a dir, que la pertorbació és en el mateix sentit que la propagació de l'ona.
- El receptor: és qui rep les ones i, per tant, sent el so.

5.2. Qualitats del so

A continuació es presenten les principals qualitats o propietats del so:

5.2.1. Altura o to

L'altura o to és el que permet diferenciar entre sons greus i sons aguts. És deguda a la freqüència, és a dir, com més gran és la freqüència, el so és més agut i quan la freqüència és menor, més greu és el so (musicalment s'expressa mitjançant el pentagrama, les claus i les notes de l'escala).

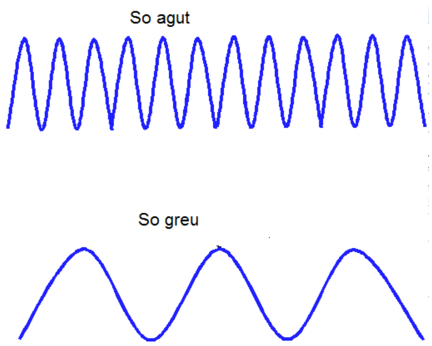


Figura 5.1.2.- Altura o to d'un so.

5.2.2. Durada

La durada és el temps que dura un so o un silenci. La durada pot ser llarga, curta, lenta o ràpida (musicalment es pot expressar mitjançant les figures, els silencis, els compassos, el tempo, etc.).

5.2.3. Intensitat o volum

La intensitat o volum és la l'amplitud d'ona de la vibració i depèn de l'energia utilitzada. Com més amplitud té, més fort és el so. Es mesura en Decibels (dB) (musicalment es pot expressar mitjançant símbols reguladors).

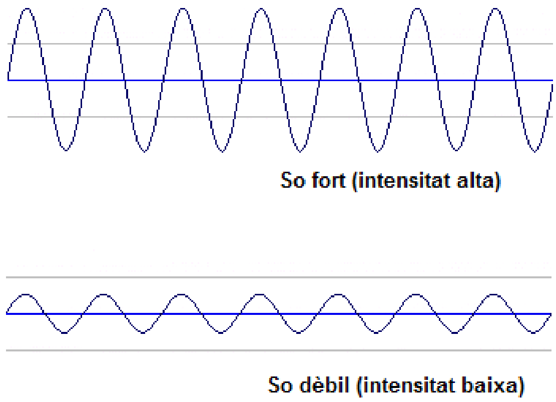


Figura 5.2.3.1- Intensitat o volum d'un so.

5.2.4. Timbre

El timbre és el que permet diferenciar les veus i els instruments. Una nota mateixa musical tocada en un violí, per exemple, no sona igual que tocada en un piano. Això és degut al fet que les seves ones no tenen una única forma sinusoïdal, sinó que es poden veure com a resultat de la suma de moltes ones sinusoïdals de diferents freqüències (harmònics).

5.3. Paràmetres característics d'una ona

Tot seguit es presenten els paràmetres característics d'una ona, representats en la figura següent:

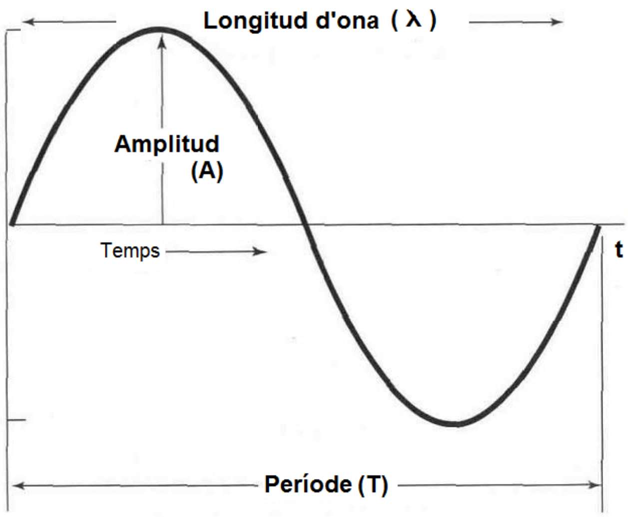


Figura 5.4.1- Paràmetres d'ona.

5.3.1. Període (T)

El període o període d'oscil·lació és el temps transcorregut entre dos punts equivalents de l'oscil·lació o cicle. Per tant, el període és la duració d'un cicle, o bé, en termes físics, seria el temps que triga un cicle que es repeteix a tornar a començar (Figura 5.4.1).

5.3.2. Freqüència (f)

La freqüència és el nombre d'oscil·lacions que una ona efectua en determinat interval de temps. El nombre de cicles per segon s'anomena hertz, que és en el sistema internacional la unitat de la freqüència. Des d'un enfocament musical, la freqüència es relaciona amb l'altura o to de la nota musical. Si la freqüència és més gran, més alt és el to d'una nota musical, i el so és més agut. La freqüència també es pot definir com la inversa del període, és a dir, 1 partit pel temps (segons):

$$F\,[Hz] = \frac{1}{T[s]}$$

Un cop definida la freqüència, podem dir que l'oïda d'una persona pot detectar sons de freqüències entre els 20 Hz i els 20.000 Hz i que pot diferenciar sons amb 1 Hz de diferència, podríem tenir una infinitat de notes en l'escala musical. Ara bé, d'aquest espectre sonor cal triar certes freqüències o tons amb què puguin disposar d'un conjunt de sons que permetin la construcció de les melodies. Així doncs, i amb molta sort, només podem sentir, a tot estirar, unes 10 octaves, amb dotze notes cadascuna.

Es pot definir un "etaló" com una nota estàndard (freqüència) de la qual podem derivar totes les altres notes. Per entendre com és la relació entre les notes musicals, es va establir per conveni una primera nota fonamental o estàndard com la nota central, amb una freqüència de 440 Hz, corresponent a la "La" quarta (La_4).

5.3.3. Amplitud (A)

L'amplitud és el grau de moviment de les molècules d'aire en una ona. Això, en termes musicals, és el que s'anomena intensitat. Com més gran és l'amplitud de l'ona, més intensament colpegen les molècules el timpà i més fort és el so que es percep, és a dir, el volum és major (Figura 5.4.1).

5.3.4. Longitud d'ona

La **longitud d'ona** és la magnitud física que indica la mida d'una ona, és a dir, la distància entre el principi i el final d'un cicle (ona). Es representa amb la lletra grega lambda (λ) (Figura 5.4.1).

5.4. La representació del so

5.4.1. Harmònics

L'ona d'una nota musical tocada per un instrument no és un so pur (ona sinusoïdal) , sinó que es pot veure com el resultat de la suma de moltes ones sinusoïdals de diferents freqüències (harmònics). En el camp de la física, s'utilitza la **síntesi per transformació ràpida de Fourier (FFT)** per descompondre l'ona resultant en la suma d'ones que la formen.

La freqüència que més es nota s'anomena freqüència fonamental**.** A partir d'aquesta, s'obtenen les anomenades harmòniques o sobretons (diferents modes de vibració), però sempre amb proporcions senzilles entre elles i múltiples de la primera. Per exemple, la primera harmònica podria ser el doble que la fonamental. Això, musicalment , significa que es troba una octava per sobre i físicament implica que la freqüència de vibració és el doble.

En la següent gràfica podem observar la descomposició d'una ona en moltes ones.

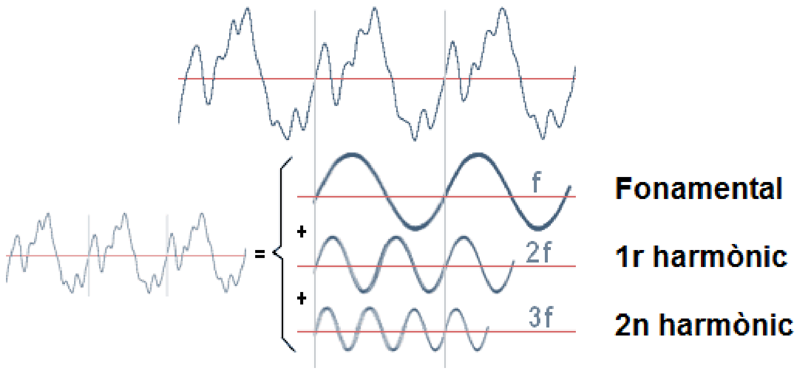


Figura 5.3.1.1- Freqüència fonamental i harmònics.

5.4.2. Perfils

En realitzar la gravació del so, el que s'observa a primera vista és el perfil o envolvent del so, és a dir, la forma que té. Aquest perfil correspon al desenvolupament temporal de l'emissió del so real. Per exemple a l'Audacity, com a resultat de la part pràctica del treball, es pot observar el perfil següent:

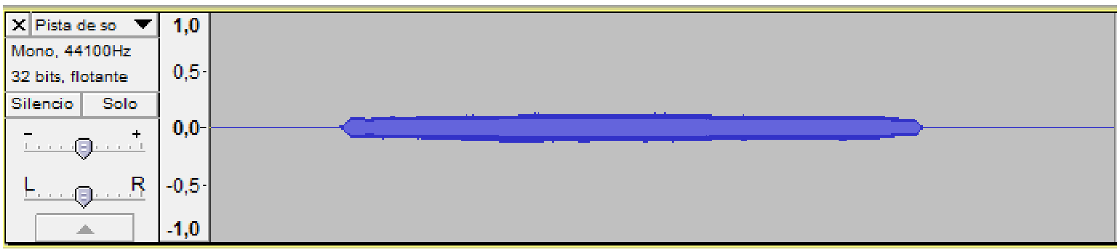


Figura 5.3.2.1- Desenvolupament temporal del so.

El so real emès presenta quatre fases o característiques:

- L'atac: va des que comença a sonar fins que el so adquireix la seva màxima amplitud.
- El decaïment: va des del punt màxim d'amplitud fins que s'estabilitza el so.
- El sosteniment: és el temps en què el so manté la seva amplitud constant.
- La relaxació: comprèn el temps que el so triga a anar disminuint fins a extingir-se.

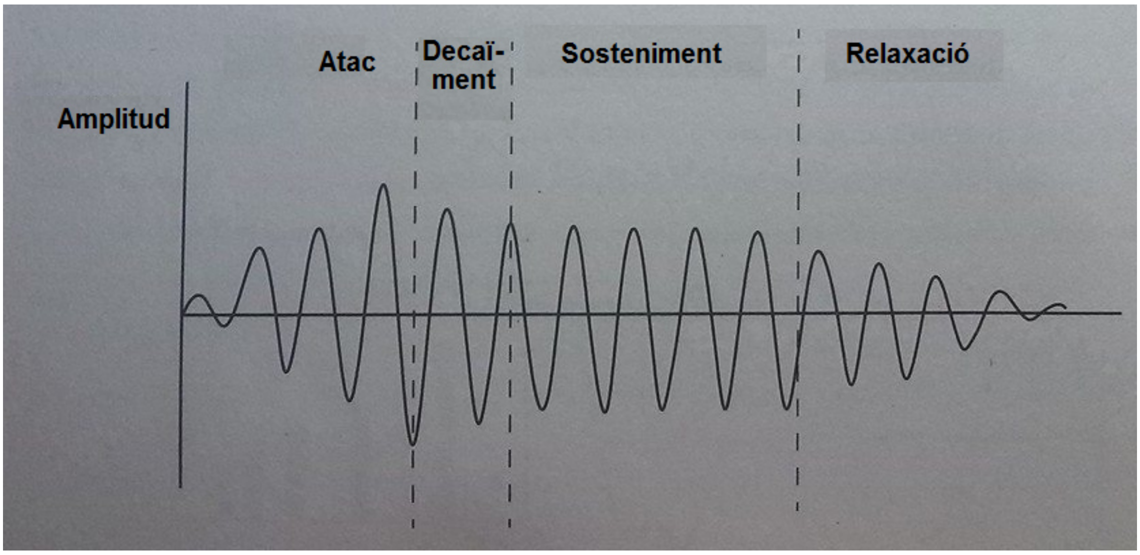


Figura 5.3.2.2- Desenvolupament temporal del so.

5.4.3. Ones produïdes pels instruments

Els instruments que s'utilitzaran a la part pràctica del treball són els següents: la flauta travessera, el violí, la guitarra acústica i el piano. Aquests instruments tenen formes diferents i diferents maneres de reproduir el so; i per tant, les ones produïdes. Per exemple, un "La" amb una flauta no sona igual que un "La" amb el piano.

En la flauta travessera, el so genera una ona que es produeix, simplificant molt, per un tub tancat, i en el violí, la guitarra acústica i el piano, es produeix per una corda vibrant.

Aquesta varietat en la producció del so caracteritza l'ona produïda i, per tant, el timbre de cada instrument a l'hora de tocar una nota determinada. Tot i això, la nostra oïda pot reconèixer la mateixa nota, és a dir el mateix to, encara que sigui tocada per diferents instruments.

5.4.3.1. <u>Ona produïda per un tub tancat</u>

La nota que s'escolta és determinada per la longitud del tub, és a dir, si el tub és més llarg, més greu serà la nota i com més curt, més aguda.
Un tub tancat amb una longitud concreta, només pot produir una nota que, com s'ha dit abans, no és un so pur, sinó que està formada per la suma d'harmònics.

Aquestes ones han de ser de tal forma que a la zona de màxima compressió de l'aire del tub (la part tancada) hi hagi un node (punt que es manté fix en un cos en moviment) i a la de mínima compressió (a la part oberta), un ventre. S'obtenen els harmònics senars.

Si es té un tub de llargada "L" amb una longitud d'ona "l", a una freqüència "f" i a la velocitat "v", es poden produir les següents ones:

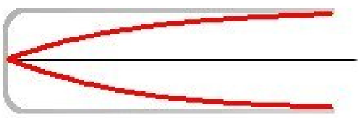
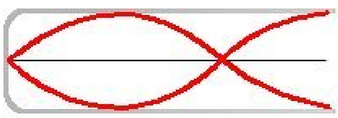
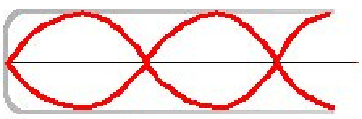
	El primer harmònic. La "l" és 4 vegades la del tub. La "f" és f = l / v	$l = 4 L$ $f_1 = l / v$
	Segon harmònic. La "l" és 4/3 de la del tub. La "f" és 3 vegades més gran que el primer harmònic.	$l = 4/3 L$ $f2 = 3 \cdot f1$
	Tercer harmònic. La "l" és 4/5 de la del tub. La "f" és 5 vegades més gran que la primera.	$l_3 = 4/5 L$ $f_3 = 5 \cdot f_1$

Figura 5.3.4.1- Harmònics generats en un tub tancat.

Per obtenir tots els harmònics, s'hauria de seguir dividint l'ona en parts. Si se sumen tots els harmònics, s'obté l'ona composta que és la que arriba a l'oïda. La freqüència del primer harmònic és la que determina l'alçada o to de la nota. Per això, la longitud d'ona és inversament proporcional a la freqüència i directament proporcional a la velocitat. ($v = l * f$).

Per exemple, amb la velocitat del so (340 m/s) i sabent la L (longitud del tub) podem saber quina és la freqüència de la nota.

$$f = \frac{340}{4 * L}$$

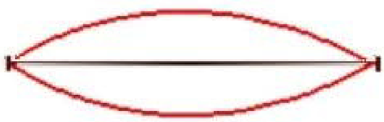
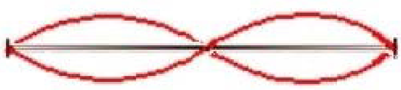
5.4.3.2. Ona produïda per una corda vibrant

Com hem vist, l'ona produïda per un tub tancat estava influenciada per la longitud del tub; en canvi, l'ona produïda per una corda vibrant està influenciada per altres factors que s'expliquen seguidament.

Aquesta ona ve determinada per la longitud de la corda (L), per la tensió (T), per la densitat (d) i la secció (S). Si es tracta d'una corda molt tensa i prima, la nota resultant serà aguda; i si la corda és gruixuda i poc tensada s'obtindrà una nota greu.
La freqüència es pot calcular amb la següent fórmula:

$$f = \frac{1}{2 \cdot L} \sqrt{\frac{T}{d \cdot S}}$$

A continuació es pot observar la relació gràfica entre la longitud de la corda (L), la freqüència(f) i la longitud d'oscil·lació d'una ona (l) que es produeixen quan vibra una ona.

	Primer harmònic. La longitud de l'ona és el doble que la longitud de la corda. La freqüència és f.	$l = 2L$ f_1
	Segon harmònic. Si es divideix la corda en dos, la longitud d'ona és igual a la longitud de la corda. La freqüència és el doble que la f_1.	$l_2 = L$ $f_2 = 2 \cdot f_1$

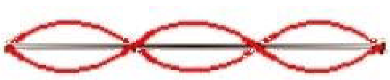
	Tercer harmònic. La longitud d'ona és 2/3 de la longitud de la corda. La freqüència és 3 vegades la f_1.	$l_3 = 2/3$ L $f_3 = 3 \cdot f_1$
	Quart harmònic. La longitud d'ona és ½ de la longitud de la corda. La seva freqüència és 4 vegades f_1.	$l_4 = ½$ L $f_4 = 4 \cdot f_1$

Figura 5.3.5.1- Harmònics generats en una corda polsada.

Per obtenir tots els harmònics s'hauria de anar repetint aquest procés.

6. Matemàtiques a les composicions musicals:

En aquest apartat veurem les matemàtiques que es poden trobar a les peces musicals, és a dir, a la melodia d'una cançó. Es podrà veure fins a quin punt influeixen les matemàtiques en la composició musical.

6.1. Influència de les matemàtiques a la melodia:

Depenent de quina partitura es tracti, es pot veure una clara influència matemàtica o no, però això no impedeix que n'hi hagi en tots els casos sempre.

La millor manera per aconseguir una composició amb una cohesió interna perfecta, és fer aparèixer seqüències repetides, ja que això provoca que, en sentir-les novament, sigui agradable per a l'oïda.

Les variacions utilitzades per aconseguir això es basen en la geometria.

6.2. Geometria a la melodia:

Les variacions musicals es troben relacionades amb 3 transformacions geomètriques bàsiques. A continuació es presentaran aquestes 3 transformacions, que tenen la característica que col·loquen una figura geomètrica en el pla i es conserva la forma, la mida i la forma original en plasmar-se al pentagrama. És a dir, es repetirà la melodia de forma idèntica, únicament canviant en el to (més agut o més greu).

6.3. Transformacions musicals geomètriques:

Els tres tipus de transformació que es presentaran són la translació, la reflexió i la inversió. Aquestes es troben en més del 80 % de les cançons, tant en obres de Bach, Mozart, etc, com en obres dels Beatles, Queen, etc.

6.3.1. Translació:

En les translacions, es repeteixen notes que formen triangles idèntics, tal com es presenta en la següent imatge:

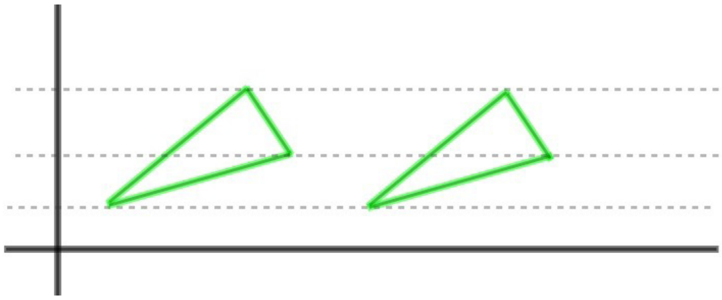


Figura 6.3.1.1- Representació esquemàtica d'una translació geomètrica.

Si als vèrtexs posem notes:

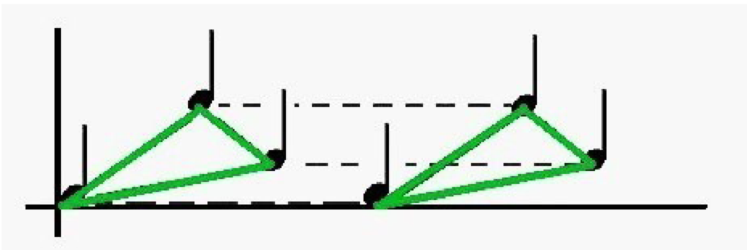
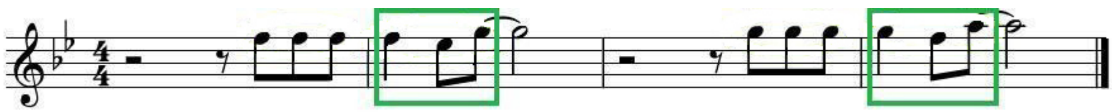


Figura 6.3.1.2- Translació geomètrica amb notes musicals.

Un exemple el podem trobar a la cançó "Song of my father d'Horace Silver".



Els rectangles verds indiquen la translació. A més a més podem observar que es tracta d'una translació amb una variació tonal (està un to més amunt).

6.3.2. Reflexió:

En la reflexió, el triangle de l'esquerra s'anomena "figura original" i el de la dreta és la "figura reflectida". La línia que es troba entre els dos triangles s'anomena eix de simetria o línia de reflexió i fa la funció de mirall, ja que un és el reflex de l'altre.

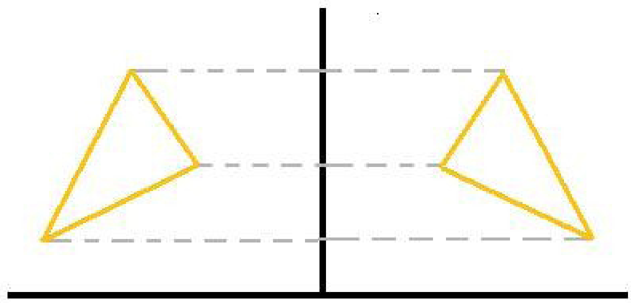


Figura 6.3.2.1- Representació esquemàtica d'una reflexió geomètrica

En música, aquest fenomen s'anomena retrògrad. A continuació es presenta un exemple:

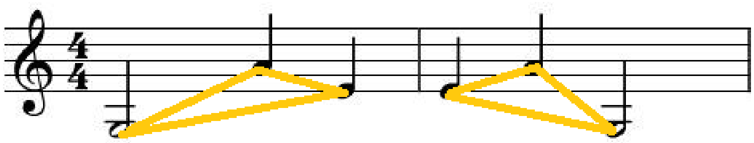


Figura 6.3.2.2- Reflexió geomètrica amb notes musicals.

6.3.3. Inversió:

En la inversió, al contrari que en la reflexió, l'eix de simetria es troba horitzontalment. En música, una mateixa frase musical es repeteix exactament però s'apuja un to o s'abaixa.

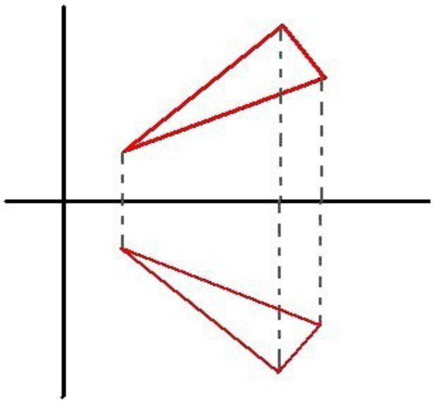


Figura 6.3.3.1- Representació esquemàtica d'una inversió geomètrica.

Un exemple d'inversió:

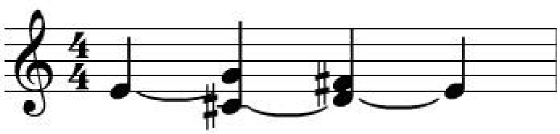
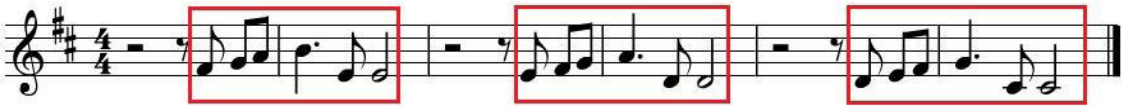


Figura 6.3.3.2- Inversió geomètrica amb notes musicals.

En aquesta il·lustració es veu com una veu es ramifica i després es torna a unir i acaba en el mateix punt que l'inicial. Això s'utilitza bàsicament per omplir amb més notes i així donar més color a la peça.

Un altre tipus d'inversió:



En aquest cas es pot veure clarament com l'estructura dels compassos és la mateixa l'única diferència són les notes.

7. Audacity:

És necessari explicar breument el funcionament del programa utilitzat en la part pràctica, ja que ha sigut l'eina utilitzada per realitzar l'anàlisi dels sons i les seves freqüències.

7.1. Què és?

El programa "Audacity" és un editor de so. Ens permet generar, analitzar i modificar sons. Es poden exportar els arxius de so realitzats o modificats.

7.2. Com funciona?

En obrir el programa ens trobem el que es veu en la següent imatge:

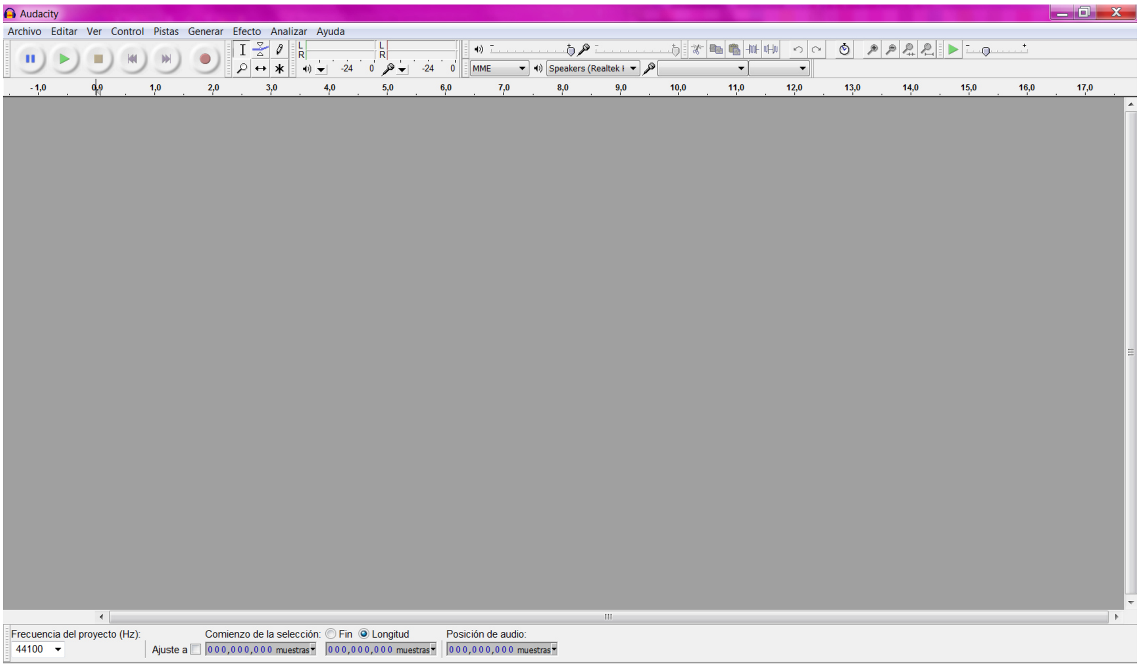
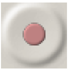
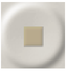
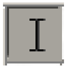


Figura 7.2.1.- Pantalla inicial programa Audacity

Els botons del control de reproducció són els típics de qualsevol reproductor de so. Si se situa el cursor a sobre de cada botó, apareixerà una petita descripció de la funció d'aquest.

Per dur a terme les principals funcions d'Audacity, es fan servir els botons següents:

-  Aquest botó serveix per començar a gravar.
-  Amb aquest botó es para de gravar.
-  Aquesta eina permet seleccionar el tros del so que vulguem. Es fa arrossegant el ratolí per sobre del tros que vulguem seleccionar.

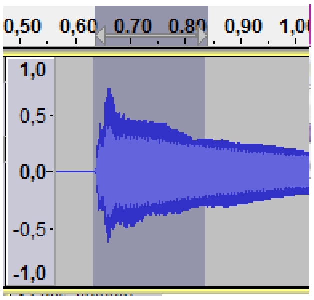
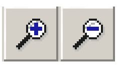


Figura 7.2.2.- Secció representativa de l'envolvent.

- **Zoom horitzontal.**  Es troba en el panell superior. La seva funció és ampliar o reduir el gràfic. Per exemple, en aplicar dues vegades el zoom horitzontal, el que s'observa és el següent:

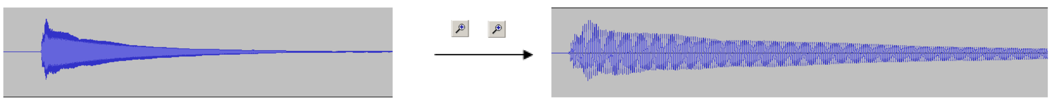


Figura 7.2.3.- Ampliació de l'envolvent en horitzontal.

- **Zoom vertical.** El zoom vertical s'utilitza situant el ratolí a sobre de l'eix d'ordenades de l'esquerra. Si es prem el botó dret del ratolí, s'aplica el zoom negatiu, és a dir, es redueix; i si es prem el botó esquerre del ratolí s'aplica el zoom positiu, és a dir, s'amplia verticalment. En aplicar tres zooms verticals, el que s'observa és el següent:

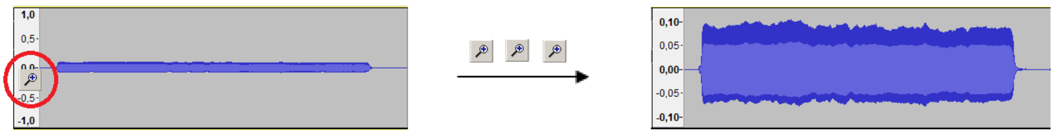


Figura 7.2.4.- Ampliació de l'envolvent en vertical.

- Si situem el ratolí a la part inferior del gràfic, apareix un senyal ( ) i serveix per augmentar o disminuir el gràfic verticalment.

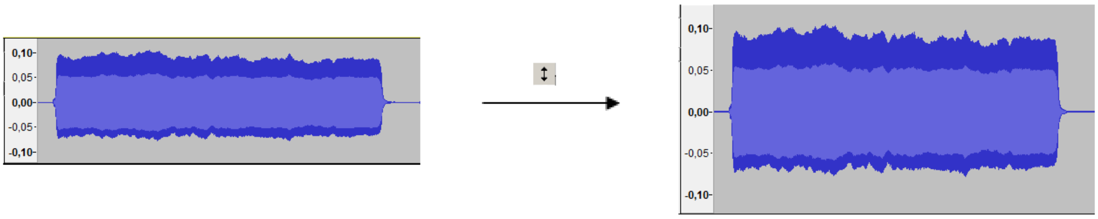


Figura 7.2.5.- Més ampliació de l'envolvent en vertical.

Combinant els zooms verticals i els horitzontals, podrem obtenir una bona visió de l'ona. Es pot observar en el següent exemple:

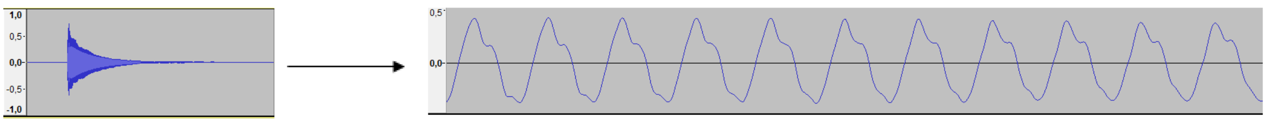


Figura 7.2.6.- Ampliació de l'envolvent en horitzontal. Forma de l'ona.

7.3. Com es pot mesurar el període?

Si es vol mesurar l'interval de temps que hi ha entre dos punts determinats del gràfic. Només cal seleccionar el tros de gràfic que hi ha entre aquests dos punts, en la part de sota apareixerà el temps inicial i l'interval de temps.

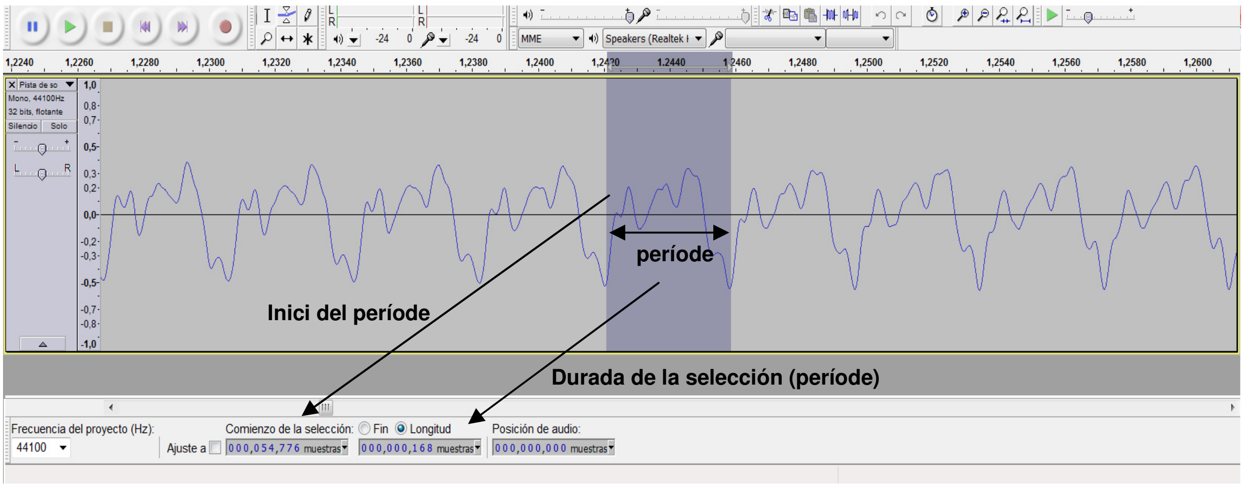


Figura 7.3.1.- Període de l'ona.

8.Estudi i anàlisi de les freqüències de l'escala cromàtica

En aquest primer apartat de la part pràctica del treball el que s'ha fet ha estat, com indica el títol, estudiar i analitzar les freqüències de l'escala cromàtica. A continuació, es presenta una breu explicació de com s'ha dut a terme aquesta part pràctica.

Després d'una sèrie d'inconvenients tècnics, l'enregistrament del so es va dur a terme a l'estudi de gravació de l'Escola de Música del poble. Les gravacions dels sons s'han fet de diferents instruments i s'ha realitzat un estudi dels seus perfils i la forma de les ones. Els instruments utilitzats han estat la flauta travessera, el piano, la guitarra acústica, i el violí. Els tres primers tocats per l'autora d'aquest treball i el darrer tocat per una col·laboradora. S'han triat aquests instruments per la seva disponibilitat, pel seu coneixement i perquè ofereixen varietat instrumental pel que fa al tipus d'instrument (de corda i de vent).

En primer lloc, el que s'ha realitzat és la gravació de les dotze notes de l'escala cromàtica per a cada instrument. S'han enregistrat tres vegades cada nota perquè, com en tota mesura, és convenient realitzar la mesura més d'un cop per tal d'obtenir un valor més proper possible al valor real. Tot i que per haver obtingut un millor resultat, hauria estat convenient haver-ho gravat més cops.

A partir de les gravacions, mitjançant el programa Audacity, s'ha pogut calcular les freqüències experimentals de cada nota. A continuació, s'ha fet la mitjana de les tres freqüències d'una mateixa nota, amb la qual cosa s'ha obtingut una única freqüència mitjana per a cada nota de l'escala cromàtica. Seguidament, s'ha calculat l'error de les freqüències de les tres vegades d'una mateixa nota respecte de la mitjana obtinguda. S'ha calculat també la longitud d'ona (paràmetre característic de les ones). Tots aquests càlculs han quedat recollits en unes taules que es poden veure més endavant.

També s'han comparat les freqüències experimentals, és a dir, les obtingudes a partir de les gràfiques i les freqüències teòriques tabulades, és a dir, les establertes el 1939 a l'Índex Acústic Científic.

Per últim, s'ha comprovat la suposició de relació entre octaves consecutives.

Tots els càlculs realitzats s'han dut a terme amb el programa "Microsoft office Excel".

Mitjançant el programa Audacity, s'ha pogut fer un estudi dels perfils dels sons resultants de les gravacions i de la forma de les ones. Aquests resultats es presenten a continuació.

8.1. Perfils i ones resultants

En primer lloc, s'han estudiat els perfils de totes les notes d'un mateix instrument. En aquest cas, per exemple, s'han agafat les gravacions de la Flauta travessera (Figura 8.1.1) i la resta de perfils dels diferents instruments i notes estan recollides a l'annex d'aquest treball.

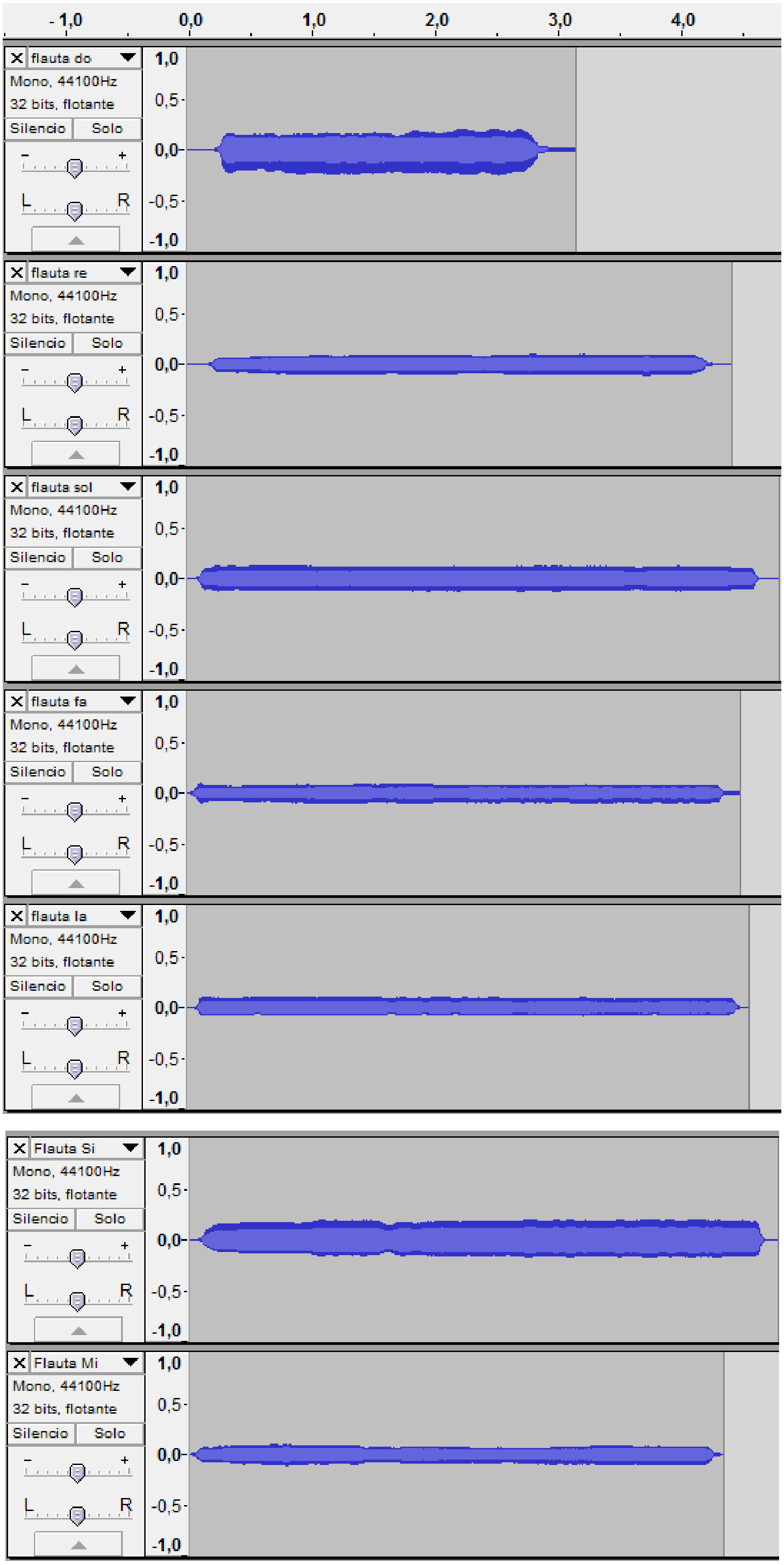


Figura 8.1.1.- Perfils de les notes de a la flauta travessera.

Com podem observar, totes les notes d'aquest instrument tenen la mateixa forma pel que fa al perfil. Igual que passa amb la flauta travessera, passa amb tots els altres instruments que s'han utilitzat en el treball. La resta de gravacions es poden trobar a l'annex.

Seguidament, es mostren els perfils de la mateixa nota (Do) però dels diferents instruments utilitzats (Figura 8.1.2).

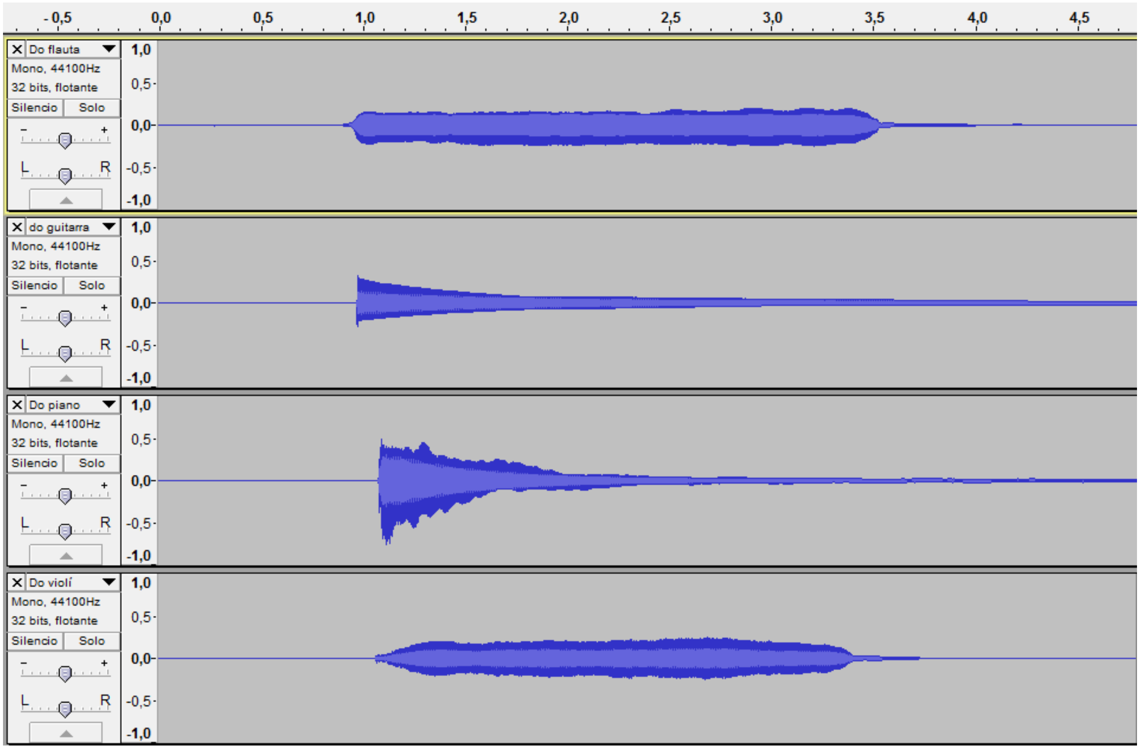


Figura 8.1.2.- Perfils de la nota Do per a tots els instruments.

Com podem observar, cada instrument té un perfil característic. El primer perfil correspon a la flauta travessera, el segon a la guitarra, el tercer al piano i l'últim al violí.

A continuació, analitzarem les fases del perfil per veure si tots ells presenten les característiques relacionades amb el desenvolupament temporal de l'emissió del so. Per veure-ho millor i més fàcilment, s'ha realitzat un gràfic representatiu a sota de cada perfil. S'ha agafat la nota "Do" de cada instrument (Figura 8.1.3):

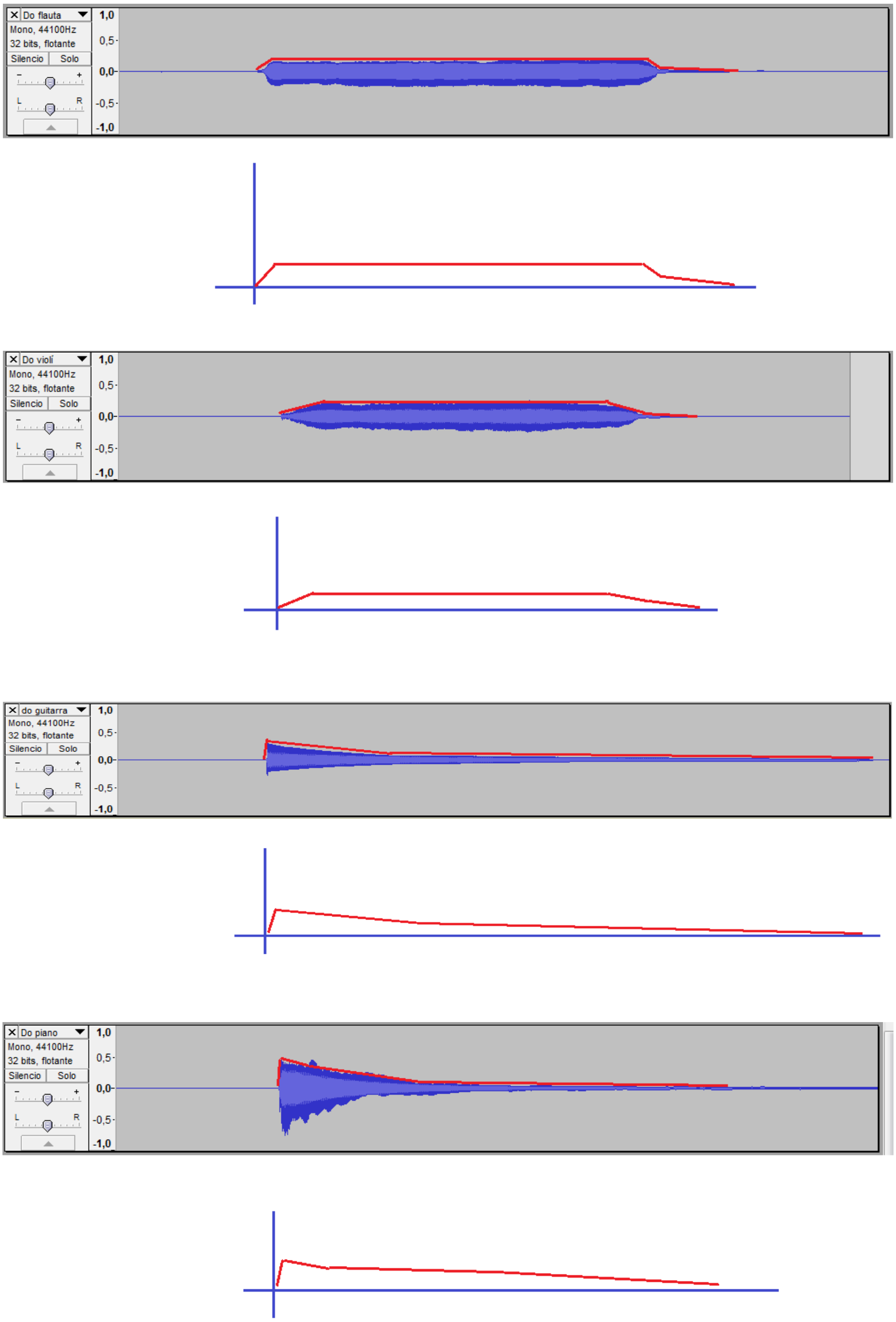


Figura 8.1.3.- Característiques de l'emissió temporal de la nota Do en els diferents instrument.

Com podem observar tots els perfils presenten les fases, explicades a la part teòrica, de l'emissió del so: l'atac, el decaïment, el sosteniment i la relaxació. Però en cada instrument cada fase dura un temps determinat.

Si mitjançant l'Audacity, ampliem els perfils podem observar la forma que presenta l'ona de cada gravació de cada una de les notes i de cada un dels instruments. Primer es presenten les ones de totes les notes d'un mateix instrument (Figura 8.1.4). Per exemple es mostren les notes del piano:

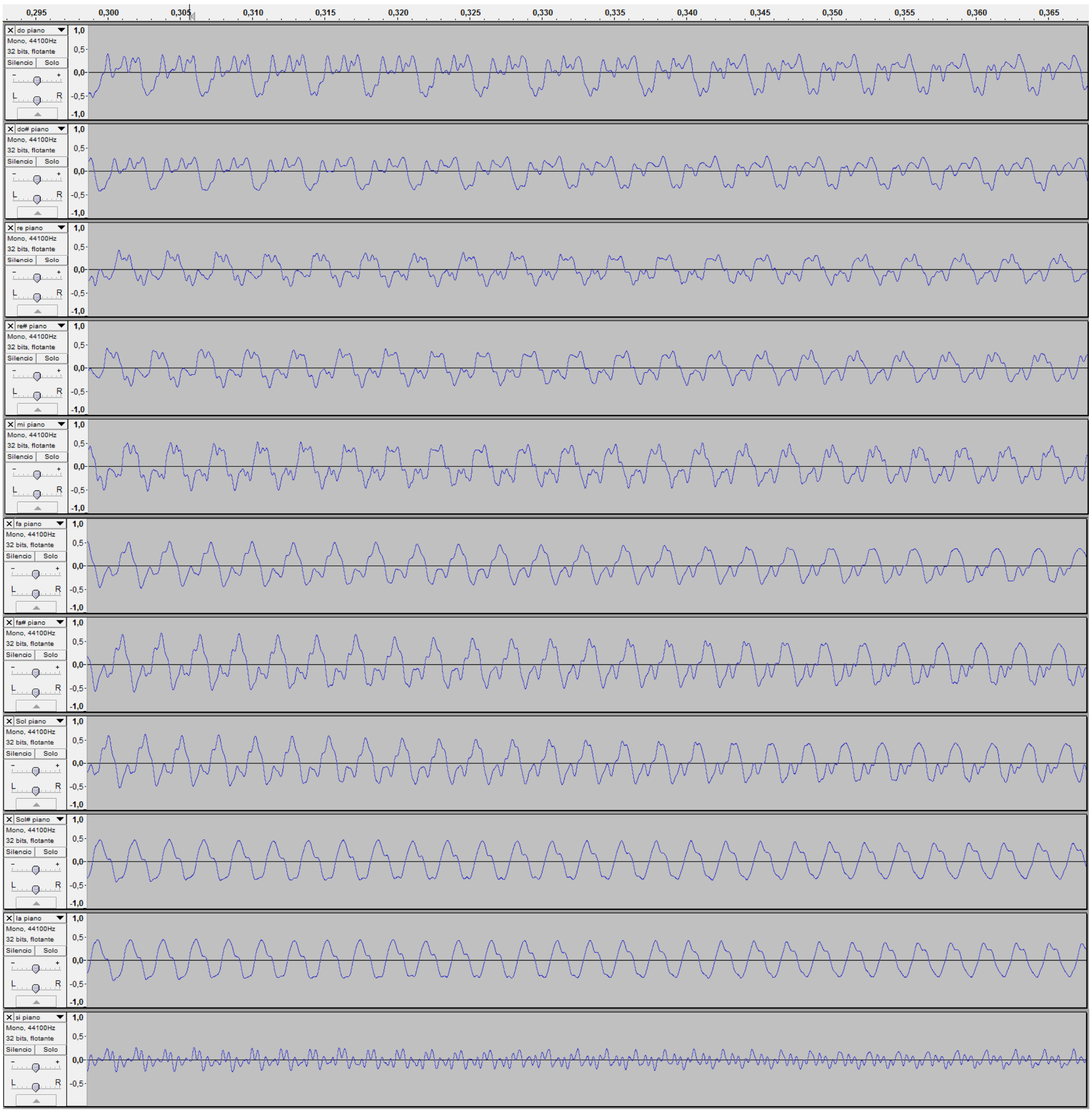


Figura 8.1.4.- Ampliació de les ones de les notes per al piano.

Com podem veure, totes les notes d'un mateix instrument més o menys tenen la mateixa forma pel que fa a l'ona. Això és degut al fet que la suma d'harmònics és característic de cada instrument.

Seguidament, es presenten les ones de la mateixa nota, en aquest cas la "Do", de tots els instruments (Figura 8.1.5):

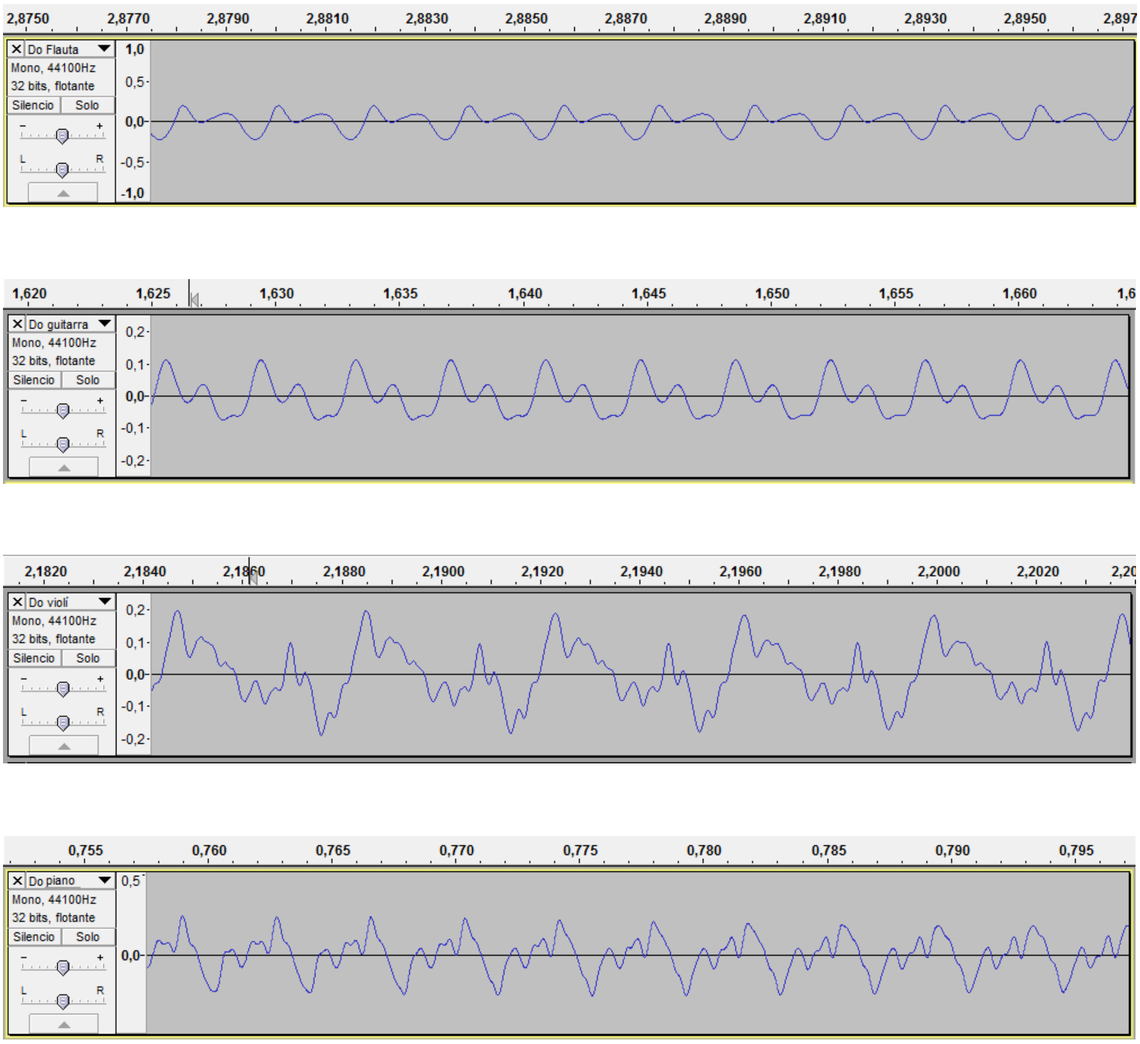


Figura 8.1.5.- Ampliació de la nota Do per als quatre instruments.

Com es pot observar, cada instrument presenta una ona característica, a causa de la suma dels diferents d'harmònics que presenta cada instrument. Això podria ser motiu d'un altre treball de recerca, ja que l'estudi d'aquestes gràfiques és complicat i laboriós, i no s'ha tractat en aquest treball de recerca.

8.2. Càlculs períodes, freqüències i longituds d'ona

En aquest punt, es realitzaran tots els càlculs numèrics i que es presenten en les taules on es recullen les dades i els valors obtinguts.

Per començar, s'ha mesurat el període de l'ona. Per prendre el valor experimental del període, s'havia d'utilitzar el perfil d'ona ampliat i observar correctament quina part de l'ona s'agafava per a comptabilitzar el període (Figura 8.2.1). A la part de sota de la finestra de l'audacity es podia fer la lectura del temps (en segons) allà on es marcava i, per diferència, s'obtenia el temps del període (figura 8.2.1).

En realitzar això, es va trobar un inconvenient, si es mesurava en segons, les xifres eren pràcticament iguals i no s'obtenien diferències en els valors, a causa que el període (en el nostre cas) és una fracció de temps molt petita. Buscant una solució, es va trobar que l'audacity ofereix altres unitats de presa de mesura que ens podien donar una millor resolució: la freqüència de mostreig.

La freqüència de mostreig utilitzada és de 44100 Hz. Això vol dir que en un segon s'han pres 44100 mostres. Per tant, 1 segon= 44100 mostres.

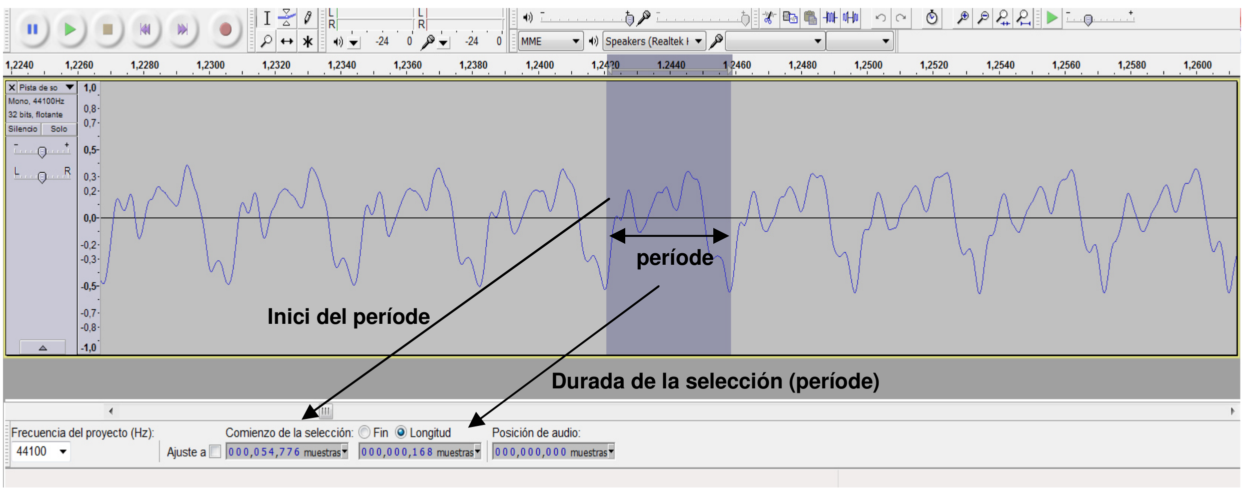


Figura 8.2.1.- Ampliació de l'ona d'una nota interpretada per al piano.

Un cop obtingut el valor del període en mostres (segona columna de la taula 8.2.1) s'havia de convertir a segons (tercera columna de la taula 8.2.1), segons el següent exemple, per a un període de 169 mostres:

$$169\,\cancel{mostres}\,\frac{1\ segon}{44100\ \cancel{mostres}} = 0{,}003832\ \mathbf{s}$$

Un cop obtingut el període, s'ha procedit al càlcul de les freqüències a partir de la inversa d'aquest temps (quarta columna de la taula 8.2.1). La fórmula utilitzada és:

$$F\,[Hz] = \frac{1}{T[s]}$$

Després s'ha calculat la mitjana de la freqüència (cinquena columna de la taula 8.2.1) de les tres vegades de cada nota. Això es calcula sumant els tres valors de cada freqüència i dividint-los entre el nombre de valors que correspon, evidentment a tres.

Seguidament s'ha calculat:

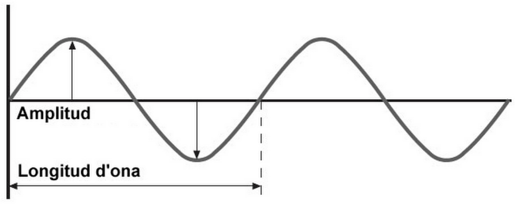
- L'error absolut (sisena columna de la taula 8.2.1): l'error de las freqüències experimentals respecte de la freqüència mitjana (error absolut= freqüència mitjana – freqüència experimental).

$$\textbf{Error absolut} = \left|\underset{\text{(valor real)}}{\textbf{valor exacte}} - \underset{\text{(valor del mesurament)}}{\textbf{valor aproximat}}\right|$$

- L'error relatiu (setena columna de la taula 8.2.1): és igual al valor més gran de l'error absolut dividit entre la mitjana i multiplicat per cent.

$$\textbf{Error relatiu} = \frac{\textbf{error absolut}}{\textbf{valor real}} \times 100$$

- Longitud d’ona (vuitena columna de la taula 8.2.1): és igual a tres-cents quaranta dividit entre la freqüència mitjana. En aquest cas, la “c” és igual a la velocitat del so, que és aproximadament 340 m/s a l’aire(v= freqüència).



$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

Figura 8.2.2.-Paràmetres d’ona.

Les taules que es presenten a continuació recullen els resultats de tots aquests càlculs. A causa de les dimensions de les taules, per a cada instrument s’han hagut de dividir per la meitat i posar-les en dues pàgines. La primera i darrera columna de la taula indica la nota motiu dels càlculs :

Taula 8.2.1.- Resultats de les mesures pel Violí

Nota	Mostres	Període (s)	Freqüència (Hz) Experimental	Mitjana (Hz)
Do	169	0,00383	260,9467	
Do	167	0,00379	264,0719	
Do	167	0,00379	264,0719	263,0302
Do #	156	0,00354	282,6923	
Do #	162	0,00367	272,2222	
Do #	160	0,00363	275,6250	276,8465
Re	151	0,00342	292,0530	
Re	151	0,00342	292,0530	
Re	150	0,00340	294,0000	292,7020
Re #	141	0,00320	312,7660	
Re #	142	0,00322	310,5634	
Re #	142	0,00322	310,5634	311,2976
Mi	132	0,00299	334,0909	
Mi	133	0,00302	331,5789	
Mi	132	0,00299	334,0909	333,2536
Fa	125	0,00283	352,8000	
Fa	127	0,00288	347,2441	
Fa	126	0,00286	350,0000	350,0147
Fa#	120	0,00272	367,5000	
Fa#	118	0,00268	373,7288	
Fa#	119	0,00270	370,5882	370,6057
Sol	112	0,00254	393,7500	
Sol	112	0,00254	393,7500	
Sol	113	0,00256	390,2655	392,5885
Sol #	107	0,00243	412,1495	
Sol #	110	0,00249	400,9091	
Sol #	108	0,00245	408,3333	407,1307
La	102	0,00231	432,3529	
La	101	0,00229	436,6337	
La	100	0,00227	441,0000	436,6622
La #	96	0,00218	459,3750	
La #	95	0,00215	464,2105	
La #	95	0,00215	464,2105	462,5987
Si	90	0,00204	490,0000	
Si	90	0,00204	490,0000	
Si	90	0,00204	490,0000	490,0000

Error absolut (Hz)	Error relatiu (%)	Freqüència(Hz) Teòrica	Longitud d'ona (m)	Nota
2,0834				Do
1,0417				Do
1,0417	0,3960	261.63	1,2926	Do
5,8458				Do #
4,6243				Do #
1,2215	2,1116	277.18	1,2281	Do #
0,6490				Re
0,6490				Re
1,2980	0,4435	293.66	1,1616	Re
1,4684				Re #
0,7342				Re #
0,7342	0,4717	311.13	1,0922	Re #
0,8373				Mi
1,6746				Mi
0,8373	0,5025	329.63	1,0202	Mi
2,7853				Fa
2,7706				Fa
0,0147	0,7958	349.23	0,9714	Fa
3,1057				Fa#
3,1231				Fa#
0,0174	0,8427	369.99	0,9174	Fa#
1,1615				Sol
1,1615				Sol
2,3230	0,5917	392.00	0,8660	Sol
5,0189				Sol #
6,2216				Sol #
1,2027	1,5281	415.30	0,8351	Sol #
4,3093				La
0,0285				La
4,3378	0,9934	440.00	0,7786	La
3,2237				La #
1,6118				La #
1,6118	0,6969	466.16	0,7350	La #
0,0000				Si
0,0000				Si
0,0000	0,0000	493.88	0,6939	Si

Taula 8.2.2.- Resultats de les mesures per la flauta travessera:

Nota	Mostres	Període (s)	Freqüència (Hz) Experimental	Mitjana (Hz)
Do	85	0,00193	518,8235	
Do	84	0,00190	525,0000	
Do	85	0,00193	518,8235	520,8824
Do #	79	0,00179	558,2278	
Do #	80	0,00181	551,2500	
Do #	79	0,00179	558,2278	555,9019
Re	75	0,00170	588,0000	
Re	75	0,00170	588,0000	
Re	75	0,00170	588,0000	588,0000
Re #	72	0,00163	612,5000	
Re #	72	0,00163	612,5000	
Re #	71	0,00161	621,1268	615,3756
Mi	67	0,00152	658,2090	
Mi	68	0,00154	648,5294	
Mi	67	0,00152	658,2090	654,9824
Fa	63	0,00143	700,0000	
Fa	63	0,00143	700,0000	
Fa	63	0,00143	700,0000	700,0000
Fa#	60	0,00136	735,0000	
Fa#	60	0,00136	735,0000	
Fa#	59	0,00134	747,4576	739,1525
Sol	56	0,00127	787,5000	
Sol	57	0,00129	773,6842	
Sol	57	0,00129	773,6842	778,2895
Sol #	53	0,00120	832,0755	
Sol #	54	0,00122	816,6667	
Sol #	53	0,00120	832,0755	826,9392
La	51	0,00116	864,7059	
La	50	0,00113	882,0000	
La	51	0,00116	864,7059	870,4706
La #	47	0,00107	938,2979	
La #	48	0,00109	918,7500	
La #	47	0,00107	938,2979	931,7819
Si	45	0,00102	980,0000	
Si	45	0,00102	980,0000	
Si	45	0,00102	980,0000	980,0000

Error absolut (Hz)	Error relatiu (%)	Freqüència(Hz) Teòrica	Longitud d'ona (m)	Nota
2,0588				Do
4,1176				Do
2,0588	0,7905	523,2500	0,6527	Do
2,3259				Do #
4,6519				Do #
2,3259	0,8368	554.37	0,6116	Do #
0,0000				Re
0,0000				Re
0,0000	0,0000	583,2300	0,5782	Re
2,8756				Re #
2,8756				Re #
5,7512	0,9346	622.25	0,5525	Re #
3,2265				Mi
6,4530				Mi
3,2265	0,9852	659.25	0,5191	Mi
0,0000				Fa
0,0000				Fa
0,0000	0,0000	698.46	0,4857	Fa
4,1525				Fa#
4,1525				Fa#
8,3051	1,1236	739.99	0,4600	Fa#
9,2105				Sol
4,6053				Sol
4,6053	1,1834	783.99	0,4369	Sol
5,1363				Sol #
10,2725				Sol #
5,1363	1,2422	830.61	0,4112	Sol #
5,7647				La
11,5294				La
5,7647	1,3245	880.00	0,3906	La
6,5160				La #
13,0319				La #
6,5160	1,3986	932.33	0,3649	La #
0,0000				Si
0,0000				Si
0,0000	0,0000	987.77	0,3469	Si

Taula 8.2.3.- Resultats de les mesures per la guitarra:

Nota	Mostres	Període (s)	Freqüència (Hz) Experimental	Mitjana (Hz)
Do	168	0,00381	262,5000	
Do	169	0,00383	260,9467	
Do	169	0,00383	260,9467	261,4645
Do #	159	0,00361	277,3585	
Do #	160	0,00363	275,6250	
Do #	159	0,00361	277,3585	276,7807
Re	150	0,00340	294,0000	
Re	149	0,00338	295,9732	
Re	151	0,00342	292,0530	294,0087
Re #	143	0,00324	308,3916	
Re #	142	0,00322	310,5634	
Re #	142	0,00322	310,5634	309,8395
Mi	134	0,00304	329,1045	
Mi	135	0,00306	326,6667	
Mi	135	0,00306	326,6667	327,4793
Fa	126	0,00286	350,0000	
Fa	126	0,00286	350,0000	
Fa	126	0,00286	350,0000	350,0000
Fa#	118	0,00268	373,7288	
Fa#	118	0,00268	373,7288	
Fa#	119	0,00270	370,5882	372,6820
Sol	113	0,00256	390,2655	
Sol	113	0,00256	390,2655	
Sol	114	0,00259	386,8421	389,1244
Sol #	106	0,00240	416,0377	
Sol #	105	0,00238	420,0000	
Sol #	107	0,00243	412,1495	416,0624
La	102	0,00231	432,3529	
La	101	0,00229	436,6337	
La	101	0,00229	436,6337	435,2068
La #	95	0,00215	464,2105	
La #	95	0,00215	464,2105	
La #	96	0,00218	459,3750	462,5987
Si	89	0,00202	495,5056	
Si	90	0,00204	490,0000	
Si	90	0,00204	490,0000	491,8352

Error absolut (Hz)	Error relatiu (%)	Freqüència(Hz) Teòrica	Longitud d'ona (m)	Nota
1,0355				Do
0,5178				Do
0,5178	0,3960	261.63	1,3004	Do
0,5778				Do #
1,1557				Do #
0,5778	0,4175	277.18	1,2284	Do #
0,0087				Re
1,9644				Re
1,9557	0,6682	293.66	1,1564	Re
1,4478				Re #
0,7239				Re #
0,7239	0,4673	311.13	1,0973	Re #
1,6252				Mi
0,8126				Mi
0,8126	0,4963	329.63	1,0382	Mi
0,0000				Fa
0,0000				Fa
0,0000	0,0000	349.23	0,9714	Fa
1,0469				Fa#
1,0469				Fa#
2,0937	0,5618	369.99	0,9123	Fa#
1,1411				Sol
1,1411				Sol
2,2823	0,5865	392.00	0,8738	Sol
0,0247				Sol #
3,9376				Sol #
3,9129	0,9464	415.30	0,8172	Sol #
2,8538				La
1,4269				La
1,4269	0,6557	440.00	0,7812	La
1,6118				La #
1,6118				La #
3,2237	0,6969	466.16	0,7350	La #
3,6704				Si
1,8352				Si
1,8352	0,7463	493.88	0,6913	Si

Taula 8.2.4.- Resultats de les mesures per al piano:

Nota	Mostres	Període (s)	Freqüència (Hz) Experimental	Mitjana (Hz)
Do	169	0,00383	260,9467	
Do	168	0,00381	262,5000	
Do	170	0,00385	259,4118	260,9528
Do #	160	0,00363	275,6250	
Do #	159	0,00361	277,3585	
Do #	158	0,00358	279,1139	277,3658
Re	152	0,00345	290,1316	
Re	150	0,00340	294,0000	
Re	151	0,00342	292,0530	292,0615
Re #	142	0,00322	310,5634	
Re #	143	0,00324	308,3916	
Re #	142	0,00322	310,5634	309,8395
Mi	134	0,00304	329,1045	
Mi	134	0,00304	329,1045	
Mi	134	0,00304	329,1045	329,1045
Fa	126	0,00286	350,0000	
Fa	128	0,00290	344,5313	
Fa	126	0,00286	350,0000	348,1771
Fa#	119	0,00270	370,5882	
Fa#	119	0,00270	370,5882	
Fa#	119	0,00270	370,5882	370,5882
Sol	112	0,00254	393,7500	
Sol	112	0,00254	393,7500	
Sol	112	0,00254	393,7500	393,7500
Sol #	107	0,00243	412,1495	
Sol #	107	0,00243	412,1495	
Sol #	106	0,00240	416,0377	413,4456
La	101	0,00229	436,6337	
La	100	0,00227	441,0000	
La	101	0,00229	436,6337	438,0891
La #	95	0,00215	464,2105	
La #	96	0,00218	459,3750	
La #	95	0,00215	464,2105	462,5987
Si	89	0,00202	495,5056	
Si	89	0,00202	495,5056	
Si	90	0,00204	490,0000	493,6704

Error absolut (Hz)	Error relatiu (%)	Freqüència(Hz) Teòrica	Longitud d'ona (m)	Nota
0,0061				Do
1,5472				Do
1,5411	0,5929	261,6300	1,3029	Do
1,7408				Do #
0,0073				Do #
1,7481	0,6303	277,1800	1,2258	Do #
1,9299				Re
1,9385				Re
0,0085	0,6637	293,6600	1,1641	Re
0,7239				Re #
1,4478				Re #
0,7239	0,4673	311,1300	1,0973	Re #
0,0000				Mi
0,0000				Mi
0,0000	0,0000	329,6300	1,0331	Mi
1,8229				Fa
3,6458				Fa
1,8229	1,0471	349,2300	0,9765	Fa
0,0000				Fa#
0,0000				Fa#
0,0000	0,0000	369,9900	0,9175	Fa#
0,0000				Sol
0,0000				Sol
0,0000	0,0000	392,0000	0,8635	Sol
1,2961				Sol #
1,2961				Sol #
2,5921	0,6270	415,3000	0,8224	Sol #
1,4554				La
2,9109				La
1,4554	0,6645	440,0000	0,7761	La
1,6118				La #
3,2237				La #
1,6118	0,6969	466,1600	0,7350	La #
1,8352				Si
1,8352				Si
3,6704	0,7435	493,8800	0,6887	Si

Observant les taules i els resultats que s'han obtingut, es poden treure diverses conclusions:

- A l'hora de l'enregistrament de les notes es notava que a mesura que es pujava en l'escala cromàtica el so era més agut.

- A mesura que es puja en l'escala cromàtica augmenta la freqüència, associada a la nostra percepció; es pot dir que l'altura i la freqüència són directament proporcionals, ja que com més altura té (és més aguda), major és la freqüència:

$$\nu_{Si} > \nu_{la\#} > \nu_{la} > \nu_{sol\#} > \nu_{sol} > \nu_{fa\#} > \nu_{fa} > \nu_{mi} > \nu_{re\#} > \nu_{re} > \nu_{do\#} > \nu_{do}$$

- A mesura que anem pujant en l'escala cromàtica disminueix la longitud d'ona. Es pot dir que aquesta i l'altura són inversament proporcionals, ja que com més altura té (és més agut), menor és la longitud d'ona.

$$\lambda_{Si} < \lambda_{la\#} < \lambda_{la} < \lambda_{sol\#} < \lambda_{sol} < \lambda_{fa\#} < \lambda_{fa} < \lambda_{mi} < \lambda_{re\#} < \lambda_{re} < \lambda_{do\#} < \lambda_{do}$$

S'arriba a la conclusió que la freqüència i la longitud d'ona són inversament proporcionals. Això es pot explicar, perquè la velocitat és constant en l'aire (cal recordar que el so és una ona mecànica, és a dir, necessita un medi material per a propagar-se), i per tant, si un valor augmenta, l'altre ha de disminuir per mantenir aquest valor constant de la velocitat:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{\lambda}{T} \\ f &= \frac{1}{T} \end{aligned}\right\} \quad v = \lambda * f$$

Finalment s'ha calculat l'error entre la freqüència teòrica tabulada i la freqüència experimental (la que ha resultat de les gravacions realitzades) i els resultats han estat recopilats en aquestes taules que es mostren a continuació:

Taula 8.2.5.- Càlculs d'errors en les mesures de les freqüències per al Violí:

Violí			
	Freqüència experimental (Hz)	Freqüència teòrica (Hz)	Error (%)
Do	263,0302	261,6300	0,5352
Do #	276,8465	277,1800	0,1203
Re	292,7020	293,6600	0,3262
Re #	311,2976	311,1300	0,0539
Mi	333,2536	329,6300	1,0993
Fa	350,0147	349,2300	0,2247
Fa#	370,6057	369,9900	0,1664
Sol	392,5885	392,0000	0,1501
Sol #	407,1307	415,3000	1,9671
La	436,6622	440,0000	0,7586
La #	462,5987	466,1600	0,7640
Si	490,0000	493,8800	0,7856

Taula 8.2.6.- Càlculs d'errors en les mesures de les freqüències per a la flauta:

Flauta			
	Freqüència experimental (Hz)	Freqüència teòrica (Hz)	Error (%)
Do	520,8824	523,2500	0,4525
Do #	555,9019	554,3700	0,2763
Re	588,0000	583,2300	0,8179
Re #	615,3756	622,2500	1,1048
Mi	654,9824	659,2500	0,6473
Fa	700,0000	698,4600	0,2205
Fa#	739,1525	739,9900	0,1132
Sol	778,2895	783,9900	0,7271
Sol #	826,9392	830,6100	0,4419
La	870,4706	880,0000	1,0829
La #	931,7819	932,3300	0,0588
Si	980,0000	987,7700	0,7866

Taula 8.2.7.- Càlculs d'errors en les mesures de les freqüències per a la guitarra:

Guitarra			
	Freqüència experimental (Hz)	Freqüència teòrica (Hz)	Error (%)
Do	261,4645	261,6300	0,0633
Do #	276,7807	277,1800	0,1441
Re	294,0087	293,6600	0,1187
Re #	309,8395	311,1300	0,4148
Mi	327,4793	329,6300	0,6525
Fa	350,0000	349,2300	0,2205
Fa#	372,6820	369,9900	0,7276
Sol	389,1244	392,0000	0,7336
Sol #	416,0624	415,3000	0,1836
La	435,2068	440,0000	1,0894
La #	462,5987	466,1600	0,7640
Si	491,8352	493,8800	0,4140

Taula 8.2.8.- Càlculs d'errors en les mesures de les freqüències per al piano:

Piano			
	Freqüència experimental (Hz)	Freqüència teòrica (Hz)	Error (%)
Do	260,9528	261,6300	0,2588
Do #	277,3658	277,1800	0,0670
Re	292,0615	293,6600	0,5443
Re #	309,8395	311,1300	0,4148
Mi	329,1045	329,6300	0,1594
Fa	348,1771	349,2300	0,3015
Fa#	370,5882	369,9900	0,1617
Sol	393,7500	392,0000	0,4464
Sol #	413,4456	415,3000	0,4465
La	438,0891	440,0000	0,4343
La #	462,5987	466,1600	0,7640
Si	493,6704	493,8800	0,0424

Com podem veure, el percentatge d'error és molt baix en tots els casos, En cap cas arriba a l'1%; això indica que l'error experimental de la mesura ha estat baix i la presa de valor molt precisa.

8.3. Determinació de la relació d'octava

En aquest apartat, el que s'ha fet és demostrar la relació d'octaves proposada en la part teòrica del treball, que era una relació de 2 entre dues octaves consecutives. Per fer això, s'ha agafat la freqüència experimental mitjana de cada nota; després, s'ha anat dividint una freqüència entre l'anterior, per exemple, a la primera fila (de la segona columna) es divideix la freqüència del Do# entre la del Do, i així successivament. Ara amb els valors de la segona columna, es procedeix a multiplicar tots els valor de tal manera que ens ha de quedar, per al violí, la següent relació:

$$\frac{\cancel{Do}\,\#}{Do\,(1)} * \frac{\cancel{Re}}{\cancel{Do}\,\#} * \frac{\cancel{Re}\,\#}{\cancel{Re}} * \frac{\cancel{Mi}}{\cancel{Re}\,\#} * \frac{\cancel{Fa}}{\cancel{Mi}} * \frac{\cancel{Fa}\,\#}{\cancel{Fa}} * \frac{\cancel{Sol}}{\cancel{Fa}\,\#} * \frac{\cancel{Sol}\,\#}{\cancel{Sol}} * \frac{\cancel{La}}{\cancel{Sol}\,\#} * \frac{\cancel{La}\,\#}{\cancel{La}} * \frac{\cancel{Si}}{\cancel{La}\,\#} * \frac{Do(2)}{\cancel{Si}} =$$

$$= \frac{Do(2)}{Do\,(1)} = 1{,}0525 * 1{,}0573 * 1{,}0635 * 1{,}0705 * 1{,}0503 * 1{,}0588 * 1{,}0593 * 1{,}0370 *$$

$$* 1{,}0725 * 1{,}0594 * 1{,}0592 * 1{,}0612 = 1{,}977$$

S'ha realitzat aquest mateix càlcul per a tots els instruments i els seus valors estan recollits a les taules que es mostraran tot seguit.

També s'ha calculat l'error absolut i relatiu recollits a la taula següent. Per obtenir el valor absolut, s'ha procedit de la següent manera: primer, s'ha calculat la mitjana de les relacions entre freqüències (columna tercera(fi+1/fi)) . En segon lloc, s'ha fet la diferència entre el valor de la columna (fi+1/fi) i el valor mitjà i s'ha posat a la quarta columna; s'hi poden observar els valor obtinguts (el valor màxim correspon al valor absolut, remarcat en color vermell a la quarta columna).

Per a l'obtenció de l'error relatiu, s'ha procedit com s'ha explicat en l'apartat anterior (quocient entre l'error absolut i el valor mitjà i s'ha multiplicat per 100).

Els resultats d'aquests càlculs es mostren en les següents taules:

Taula 8.3.1.- Càlculs d'errors i determinació de la relació d'una mateixa nota de dos octaves consecutives (violí):

Violí			
	Freqüència (Hz)	f_{i+1}/f_i	error absolut
Do	263,0302	1,0525	0,0060
Do #	276,8465	1,0573	0,0012
Re	292,7020	1,0635	0,0051
Re #	311,2976	1,0705	0,0121
Mi	333,2536	1,0503	0,0082
Fa	350,0147	1,0588	0,0004
Fa#	370,6057	1,0593	0,0008
Sol	392,5885	1,0370	0,0214
Sol #	407,1307	1,0725	0,0141
La	436,6622	1,0594	0,0009
La #	462,5987	1,0592	0,0008
Si	490,0000	1,0612	0,0027
	520,0000		
		Mitjana	1,0585
		Error absolut	0,0214
		Error relatiu	2,0252
		Relació octaves	**1,9770**

Taula 8.3.2.- Càlculs d'errors i determinació de la relació d'una mateixa nota de dos octaves consecutives (flauta):

Flauta			
	Freqüència (Hz)	f_{i+1}/f_i	error absolut
Do	520,8824	1,0672	0,0074
Do #	555,9019	1,0577	0,0021
Re	588,0000	1,0466	0,0133
Re #	615,3756	1,0644	0,0045
Mi	654,9824	1,0687	0,0089
Fa	700,0000	1,0559	0,0039
Fa#	739,1525	1,0529	0,0069
Sol	778,2895	1,0625	0,0027
Sol #	826,9392	1,0526	0,0072
La	870,4706	1,0704	0,0106
La #	931,7819	1,0517	0,0081
Si	980,0000	1,0673	0,0075
	1046,0000		
		Mitjana	1,0598
		Error absolut	0,0133
		Error relatiu	1,2541
		Relació octaves	**2,0081**

Taula 8.3.3.- Càlculs d'errors i determinació de la relació d'una mateixa nota de dos octaves consecutives (guitarra):

Guitarra			
	Freqüència (Hz)	f_{i+1}/f_i	error absolut
Do	261,4645	1,0586	0,0006
Do #	276,7807	1,0622	0,0031
Re	294,0087	1,0538	0,0053
Re #	309,8395	1,0569	0,0022
Mi	327,4793	1,0688	0,0096
Fa	350,0000	1,0648	0,0056
Fa#	372,6820	1,0441	0,0150
Sol	389,1244	1,0692	0,0101
Sol #	416,0624	1,0460	0,0132
La	435,2068	1,0629	0,0038
La #	462,5987	1,0632	0,0040
Si	491,8352	1,0593	0,0001
	521,0000		
		Mitjana	1,0592
		Error absolut	0,0150
		Error relatiu	1,4205
		Relació octaves	**1,9926**

Taula 8.3.4.- Càlculs d'errors i determinació de la relació d'una mateixa nota de dos octaves consecutives (piano):

Piano			
	Freqüència (Hz)	f_{i+1}/f_i	error absolut
Do	260,9528	1,0629	0,0036
Do #	277,3658	1,0530	0,0063
Re	292,0615	1,0609	0,0015
Re #	309,8395	1,0622	0,0029
Mi	329,1045	1,0580	0,0014
Fa	348,1771	1,0644	0,0050
Fa#	370,5882	1,0625	0,0032
Sol	393,7500	1,0500	0,0093
Sol #	413,4456	1,0596	0,0003
La	438,0891	1,0559	0,0034
La #	462,5987	1,0672	0,0078
Si	493,6704	1,0554	0,0040
	521,0000		
		Mitjana	1,0593
		Error absolut	0,0093
		Error relatiu	0,8779
		Relació octaves	**1,9965**

S’observa en les taules que les relacions entre les freqüències de dues notes consecutives (fi+1/fi) és pràcticament igual per a tots els instruments. Això es correspon, precisament, amb l’escala cromàtica. Recordem que l’escala cromàtica es va definir per a un octava amb dotze notes en intervals equidistant en les freqüències. També s’aprecia a les taules que l’error comès ha estat molt petit.

A més a més, observant aquestes taules, es pot dir que la relació d’octaves sí que es compleix, ja que el valor de la taula a “relació octaves” es veu és molt proper a 2. Aquest era un dels objectius plantejats a la part inicial del treball: comprovar experimentalment la relació 1:2 en la mateixa nota de dues octaves consecutives. A més a més, com en l’apartat anterior, l’error experimental no arriba a l’ 1%.

9.Anàlisi d'una partitura:

A continuació realitzarem l'anàlisi de la partitura "Together we will live forever" des d'un punt de vista matemàtic/musical.

9.1. Determinació de la tonalitat:

Com podem observar en la partitura, a l'armadura hi ha dos bemolls, el si i el mi. Això implica, com ja s'ha explicat a la part teòrica, que tots els "Si" i tots els "Mi" de la partitura són bemolls, és a dir, que estan disminuïts mig to.

Gràcies a l'armadura podem deduir a quina tonalitat es troba la partitura. En aquest cas la partitura està escrita en tonalitat de Sol menor. A continuació es mostra el primer pentagrama de la partitura analitzada:

Figura 9.1.1- Determinació de la tonalitat.

Una manera senzilla per identificar la tonalitat és:

- Primer, es mira l'armadura. En aquest cas s'observen els dos bemolls.
- Un cop se sap les alteracions que hi ha en l'armadura, es va a la taula presentada en la part teòrica:

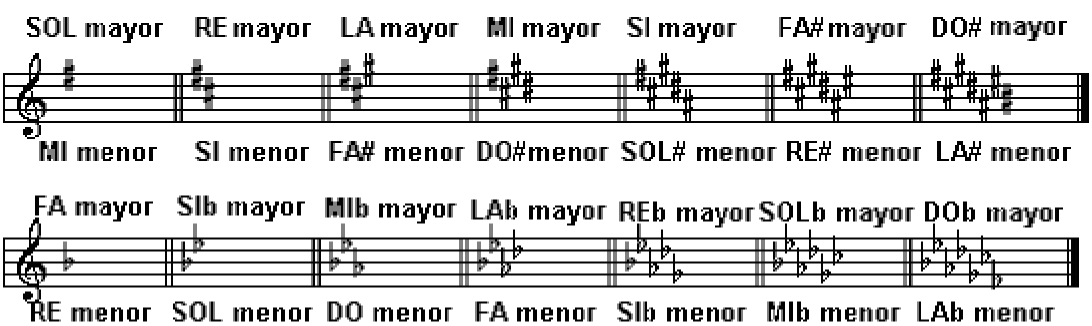


Figura 9.1.2-Alteracions

- Observem que els dos bemolls corresponen a les tonalitats de Sib major i Sol menor.
- Llavors, per descartar una de les dos, el que hem de fer és mirar la darrera nota de la partitura.

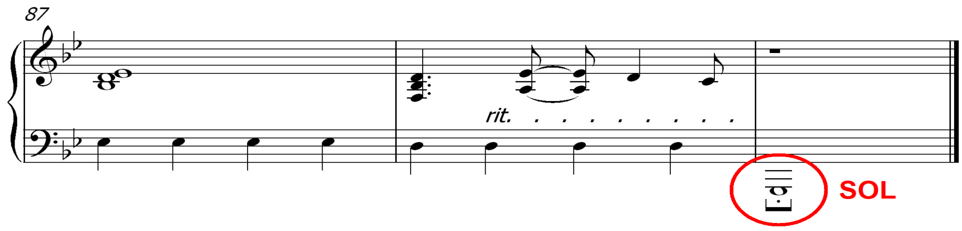


Figura 9.1.3-Última nota partitura

- En aquesta partitura, l'última nota és un "Sol". Llavors sabem que aquesta partitura està escrita en Sol menor.

En el llenguatge musical, la manera d'identificar la tonalitat es fa tal com s'ha explicat, però hi ha un petit detall que canvia. En comptes de mirar la taula de les tonalitats, es fa mentalment seguint una norma musical. Es mira el penúltim bemoll, i aquest és el que indica la tonalitat. Un cop s'ha identificat el penúltim bemoll (en aquest cas, és el Si) se sap que correspon a la tonalitat del Sib major. Però, també existeix la possibilitat que sigui menor. Per acabar de definir-la, es busca la nota que és una tercera més avall (en aquest cas es el Sol). Llavors per descartar quina és, com ja s'ha dit abans, es mira l'última nota de la partitura. Així es dedueix un altre cop que està en tonalitat de Solm.

9.2. Transformacions geomètriques:

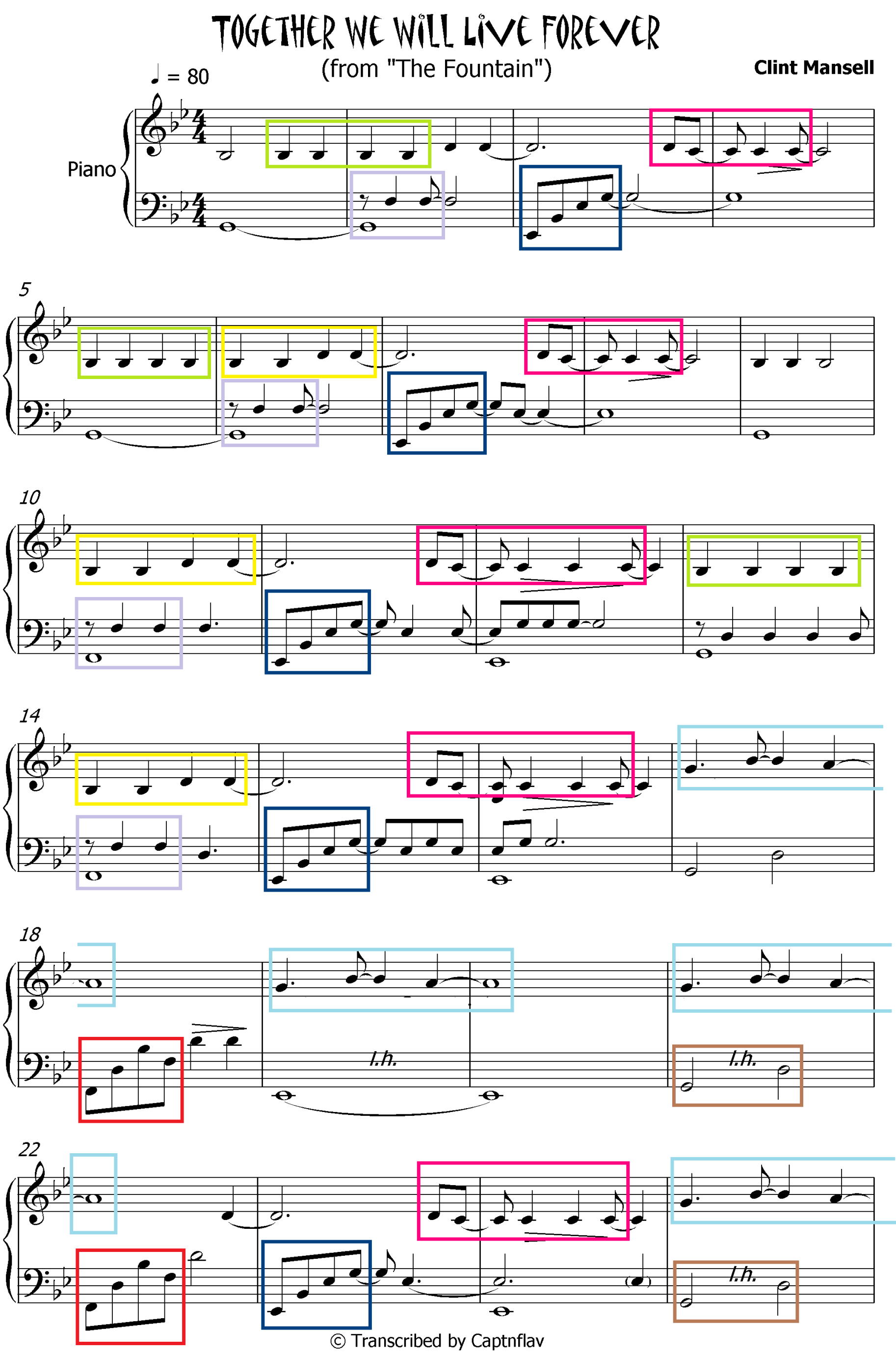
A continuació es mostren les diferents transformacions geomètriques que s'han esmentat a la part teòrica.

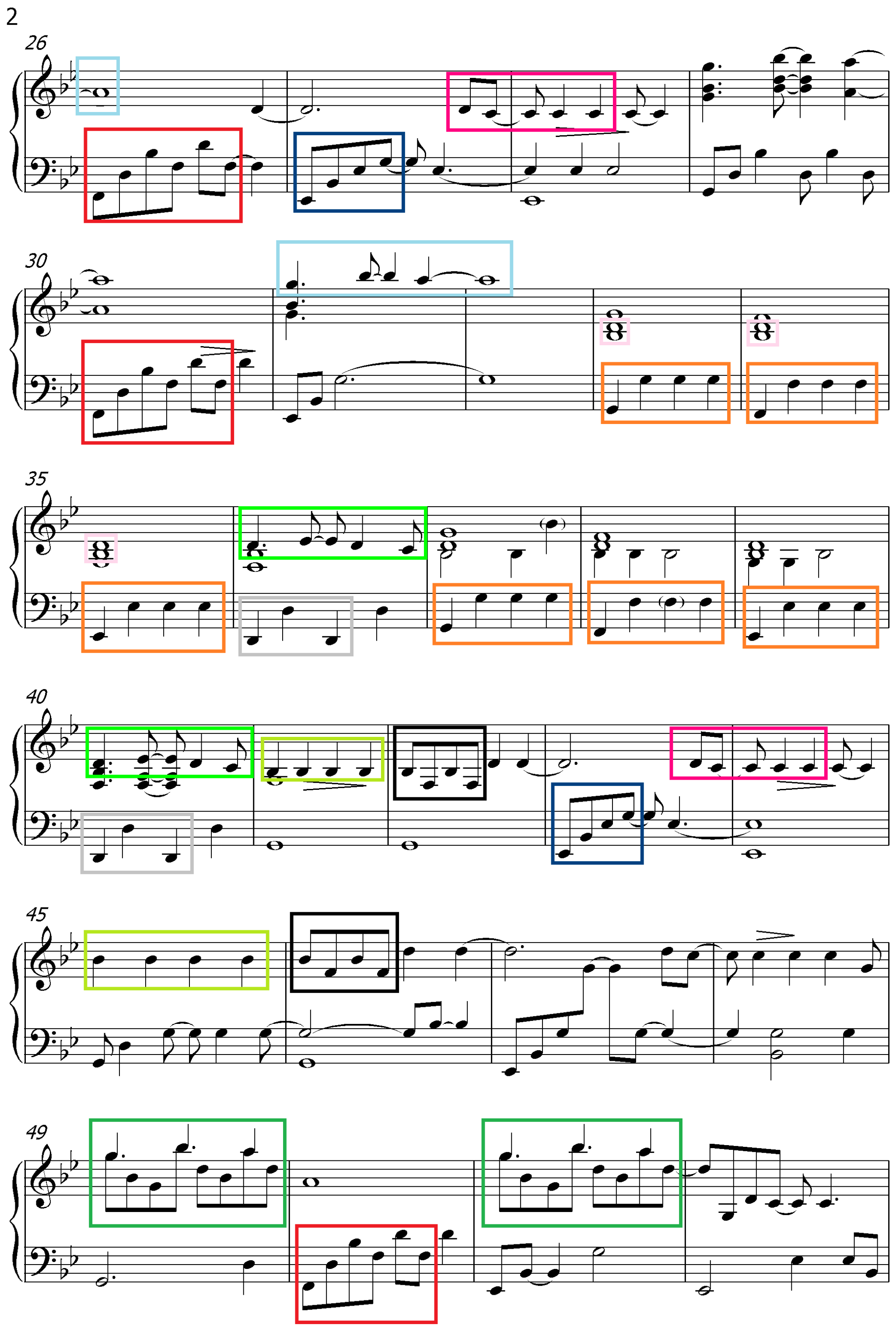
9.2.1. Translacions:

horitzontal i vertical

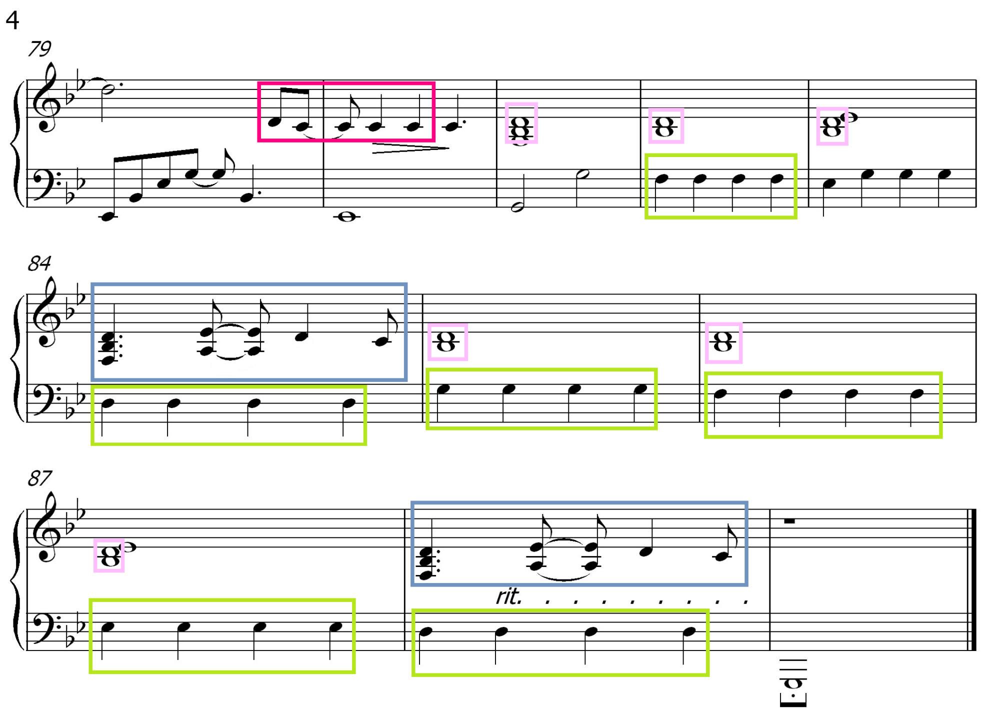
vertical

horitzontal



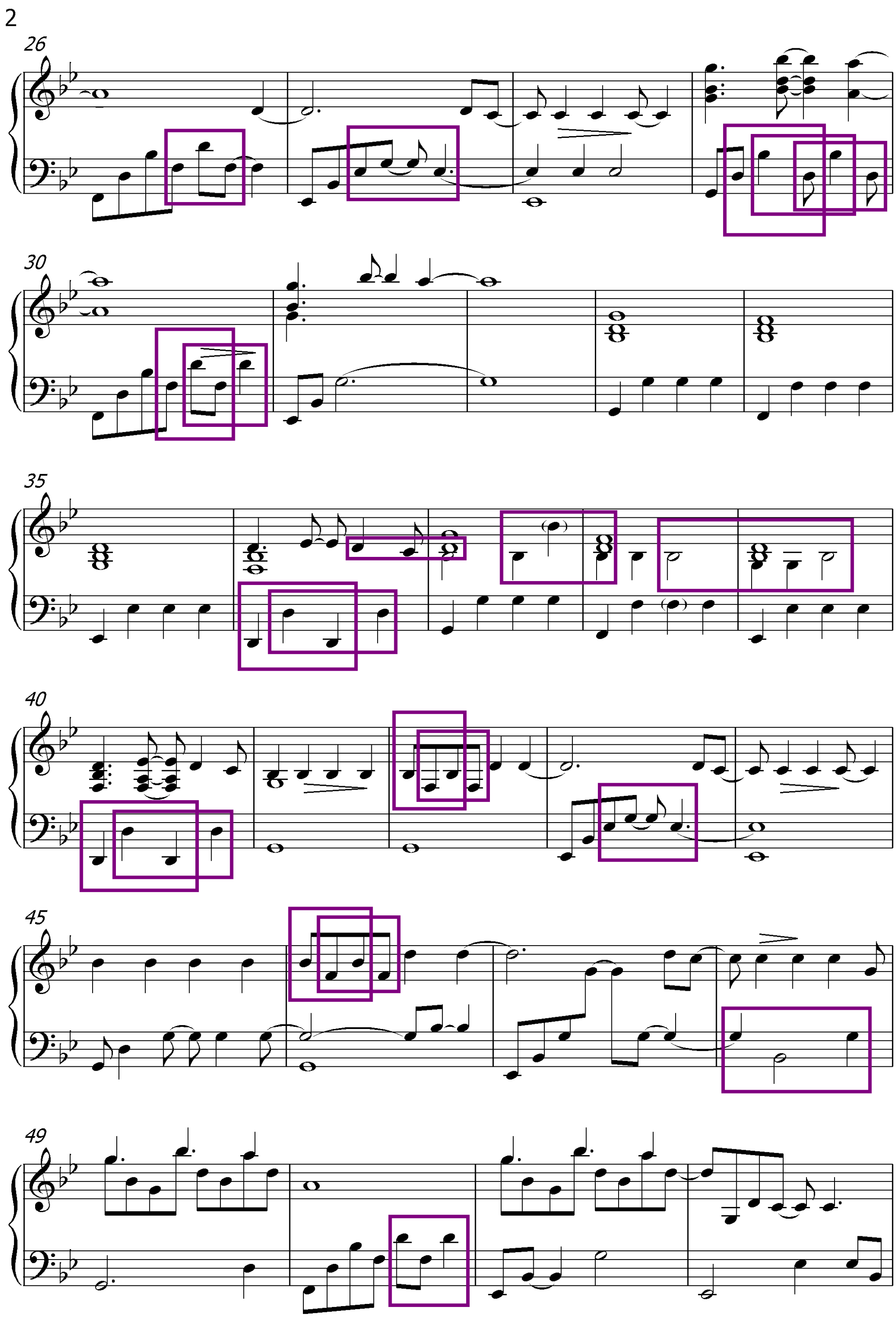

2
26
30
35
40
45
49

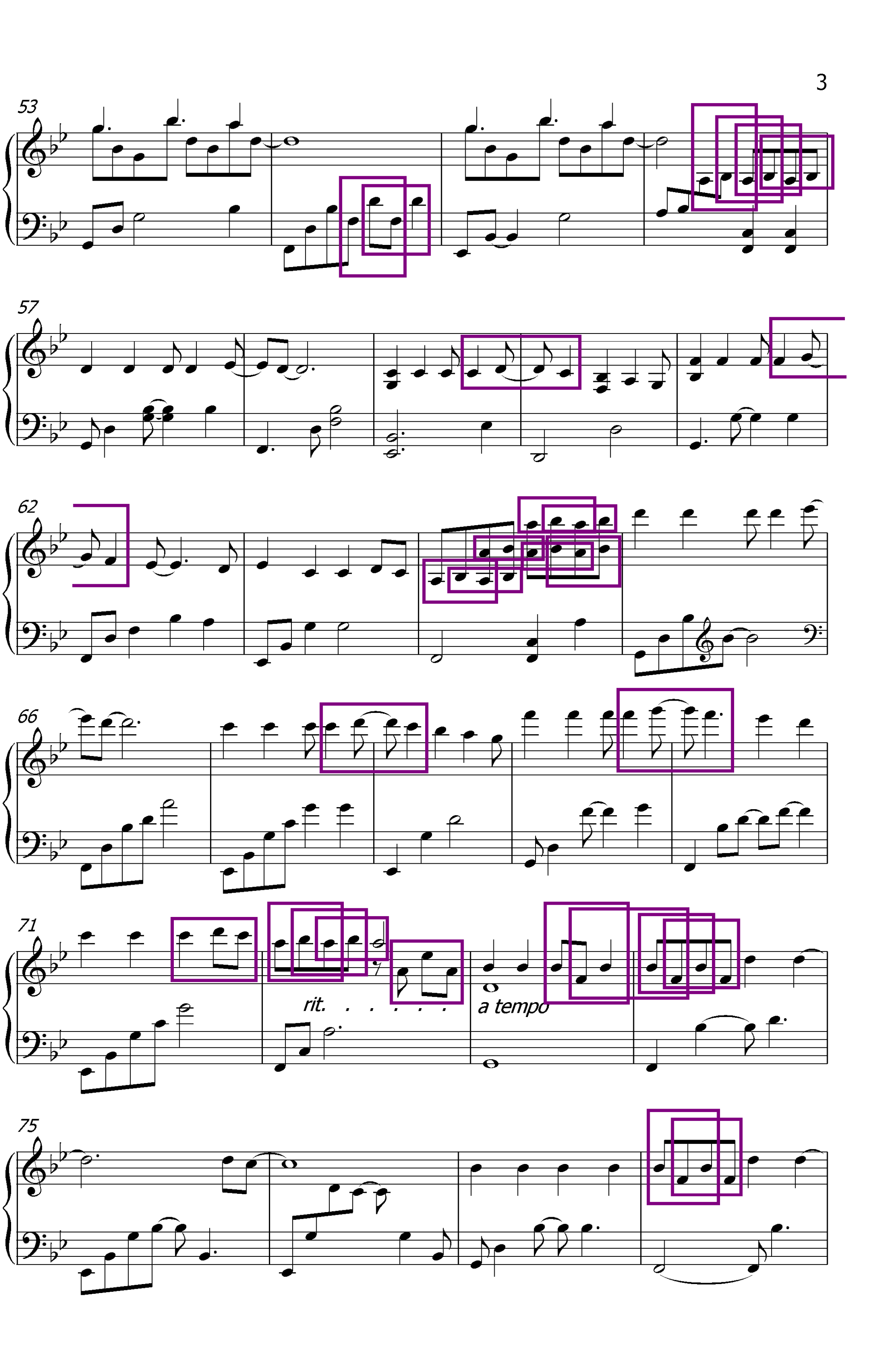

3
53
57
62
66
71
rit. . . . . . .
a tempo
75



Pel que fa a les translacions, podem veure que la partitura està plena de colors, cosa que passa per la gran quantitat de translacions que presenta la partitura. És la translació geomètrica de les tres utilitzades que menys notes en blanc deixa en tota la partitura. Les translacions que predominen són les horitzontals. Per exemple, trobem translacions horitzontals als compassos 3, 7, 11, 15, 23, 28, 43 i 79.

9.3. Reflexions:

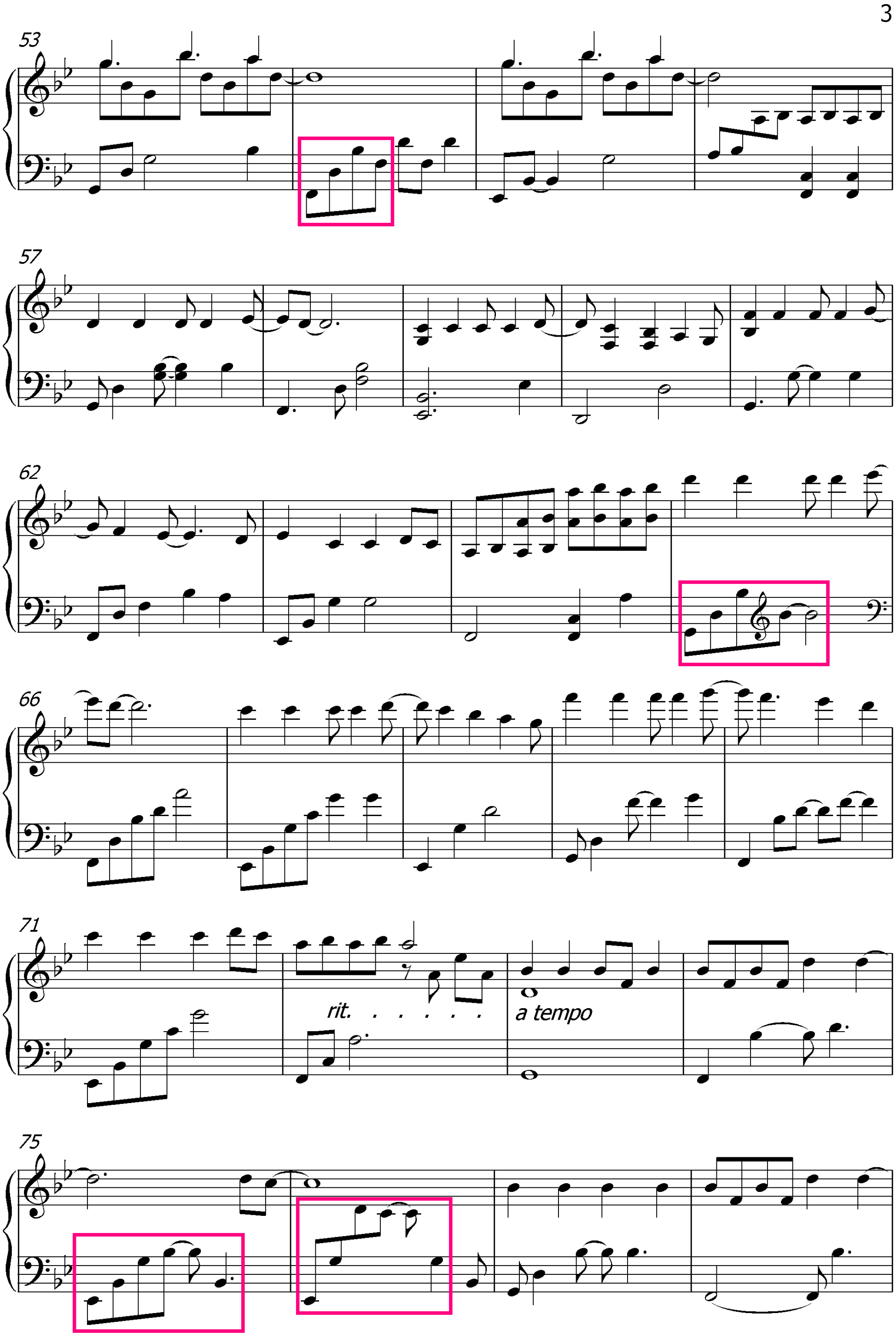

2
26
30
35
40
45
49


3
53
57
62
66
71
rit. . . . . . .
a tempo
75

Quant a les reflexions veiem que només n'hi ha d'un tipus i al contrari que les translacions, si que hi ha bastants notes en blanc al llarg de la partitura, és a dir, que no contenen cap reflexió. Hi ha compassos en els quals estan agrupades vàries reflexions, com és el cas dels compassos 29, 56, 64, 72 i 73.

9.4. Inversions:


2
26
30
35
40
45
49


3
53
57
62
66
71
rit. . . . . . .
a tempo
75

Les inversions, com es pot observar, és la translació geomètrica menys predominant a la partitura, n’hi ha exactament 17 i es troben en els compassos 7, 11, 15, 18, 22, 23, 26, 27, 30, 43, 47, 50, 54, 65, 75, 76 i 79.

Com a conclusió general d’aquests apartats podem veure que sí que hi ha matemàtiques en les partitures. Per exemple, hi ha transformacions geomètriques que és el que s’ha buscat en aquesta anàlisi de la partitura. Les més abundants són les translacions, seguides de les reflexions i finalment, com a menys abundants es troben les inversions.

10. Conclusió

En aquest apartat s'exposarà un resum de totes les conclusions obtingudes durant el treball.

Es comença, per exemple, amb l'anàlisi matemàtic de la partitura. Com s'ha pogut veure, si que hi ha transformacions geomètriques a les partitures. Les més abundants són les translacions, i més concretament, les translacions horitzontals, seguides de les reflexions que es troben compactades en compassos determinats i finalment, com a menys abundants, però no menys importants, es troben les inversions.

Es pot seguir amb l'anàlisi realitzat dels perfils i les ones de les notes gravades, és a dir, de les dotze notes de l'escala cromàtica. Observant aquest estudi, es pot concretar que tots els perfils de les notes d'un mateix instrument tenen la mateixa forma. En canvi, la mateixa nota de diferents instruments, presenta perfils diferents com a conseqüència de la manera de produir el so.

Pel que fa a les formes de les ones que representen al so, s'ha observat que una nota produïda per un instrument no és un so pur sinó que l'ona resultat és la suma dels diferents harmònics. Aquests harmònics depenen de cada instrument, per tant, totes les notes d'un mateix instrument tenen aproximadament la mateixa forma, però, la mateixa nota de diferents instruments presenta formes d'ona totalment diferents.

De l'anàlisi de les freqüències de les notes i havent-se realitzat els càlculs pertinents, s'observa que a mesura que es puja a l'escala cromàtica, és a dir, notes més agudes, les freqüències van augmentant i la longitud d'ona va disminuint. O bé que, l'altura i la freqüència són directament proporcionals, mentre que l'altura i la longitud d'ona són inversament proporcionals.

Tanmateix, s'ha verificat la relació (2:1) entre dos notes iguals d'octaves consecutives.

En general, dels errors calculats que en cap cas se supera l'1%, es pot dir que la presa de valors i les mesures han estat bastant precises.

Finalment, es pot concloure que: " les matemàtiques, la música i la física, estan íntimament relacionades".

11.Bibliografia:

- ARBONÉS, Javier y MILUD, Pablo. *La armonía es numérica. Música y matemáticas.* RBA Coleccionables, Navarra, 2011.
- Revistes Catalanes amb Accés Obert (RACO). *"Matemàtica en la creació musical".* Salvador Comalada, juliol 2002. Butlletí de la societat catalana de matmàtiques. >http://www.raco.cat/index.php/ButlletiSCM/article/view/149282/201183> Vol. 17, num. 1, Pàg. 65-78.
- Grups Blanquerna >http://grups.blanquerna.url.edu/m37/atonalisme/treball.htm>
- Grups Blanquerna. El trencament amb la tonalitat. >http://grups.blanquerna.url.edu/m37/atonalisme/dodecafonisme.htm>
- Institut d'Estudis Catalans (IEC). *"Les matemàtiques i les escales musicals".* Joan Girbau i Badó, octubre 1985. >http://publicacions.iec.cat/repository/pdf/00000011/00000017.pdf>
- "El Rincón musical Peruano". *"Cómo se produce la música? La música y las matemáticas".* Andrei Volkov y Jorge Merino. >http://www.musicaperuana.com/espanol/mm.htm>
- Imatges Google. >http://www.google.com/imghp?hl=es>
- Scribd. *"Clint Mansell- Together we will live forever"* . Publicat per: api-3809468, 17 d'Octubre de 2008. > http://es.scribd.com/doc/7059623/Clint-Mansell-Together-We-Will-Live-Forever>
- MÈTODE. *"Entre les matemàtiques I la música",* Rafael Ríos i Mario García. Revista de Difusió de la investigación de la Universitat de València, 2003. >http://metode.cat/Revistes/Monografics/Fons-i-forma/Entre-les-matematiques-i-la-musica>
- Universidad Autónoma de Madrid (UAM). *"Música y Matemáticas",* curso 2006-2007. Roberto Romero. >http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Musica%20y%20Matematicas.pdf>

- Dispositiu de la Recerca de Catalunya (RECERCAT). *“Música & Matemàtiques”*, Irene Hernández Sánchez. >http://www.recercat.net/bitstream/handle/2072/13446/Treball+de+recerca+M%DASICA+I+MATEM%C0TIQUES.pdf;jsessionid=D42A988729495945F4E770C1F7D24BD7.recercat1?sequence=1>
- Wikipedia, “Decible”. 13 juliol de 2014.>http://ca.wikipedia.org/wiki/Decibel>
- Diccionari de Termes Musicals (DicMus). >http://dicmus.blogspot.com.es/>
- Physics of Music-Notes >http://www.phy.mtu.edu/~suits/notefreqs.html>

- Sector Matemática (SM) . Capítulo II *“Matemática en la Música I”.* >http://www.sectormatematica.cl/musica/matematica%20en%20la%20musica.pdf>
- Hotel infinit. *“Música i matemàtiques 1”, 15 de setmbre del 2010.* Gerard. >http://hotelinfinit.blogspot.com.es/2010/09/musica-i-matematiques-1.html>
- Sapiensman “Sonido y Acústica”. Technical English – Spanish vocabulary. >http://www.sapiensman.com/docs/sonido_y_acustica.htm>
- Musica con computadoras en español (YIO). “Curso de sonido”. >http://www.yio.com.ar/imprimir.php?aid=5>
- Laboratorio de Procesado de Imagen (LPI) “Relaciones entre la Música y las Matemàticas”. Juan Ignacio Arribas. >http://www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_06_07/io5/public_html/p1.html>
- Mindomo “El so i les seves característiques”. >http://www.mindomo.com/mindmap/el-so-i-les-seves-caracteristiques-6e4e0f34f162469a9e12cc5e>
- Escuela Universitaria de Música (EUM), Departamento de Teoría y Composición. “Intervalos, Escalas y Afinación. Luis Jure >http://www.eumus.edu.uy/docentes/jure/teoria/burns/burns.html>
- Epistemowikia. “Matemáticas, música y algoritmia”. Juliol del 2014. >http://cala.unex.es/cala/epistemowikia/index.php?title=Matem%C3%A1ticas%2C_m%C3%BAsica_y_algoritmia>

- Calaméo "Tutorial Audacity". Centre de Documentació i Experimentació en ciències i Tecnologia. >http://en.calameo.com/read/00021629830bc50dc06ed>
- Xtec, "El so". > http://www.xtec.cat/~sgirones/elso/el_so.htm>
- Centro virtual de divulgación de las matemáticas (divulgaMAT), Real sociedad Matemática Española (RSME). "Las matemáticas en la música de Xenakis I". >http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=11360:18-octubre-2010-las-matematicas-en-la-musica-de-xenakis-i&catid=67:ma-y-matemcas&directory=67>
- 123RF fotos. "Imágenes similares". >https://es.123rf.com/similar-images/19255435>
- OSCROVE'S WEBLOG. "Los elementos de la música". >http://oscrove.wordpress.com/teoria-musical/los-elementos-de-la-musica/>
- Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). "Música y Matemáticas".12 de maig de 2008. >http://www.fespm.es/IMG/pdf/dem2008_-_musica_y_matematicas.pdf>
- Laboratorio de Procesado de imagen (LPI). "Relaciones entre la Música y las Matemáticas". >http://www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_06_07/io5/public_html/p4.html>
- Jesusda. Juan Félix Mateo, Abril 2005. "Audacity 1.2.3". >http://www.jesusda.com/docs/ebooks/ebook_audacity-manual.pdf>
- Enchufa 2. "Música y matemáticas. La afinación pitagórica. El origen de la escala cromática", Iñaki i Almudena. >http://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-la-afinacion-pitagorica-el-origen-de-la-escala-cromatica.html>
- Xtec, "La caixa de música" >http://www.xtec.cat/iesbellvitge/caixa/index.htm>
- Yumpu. "Acústica: Ones sonores, Efecte Doppler i Instruments musicals", 2013. >https://www.yumpu.com/es/document/view/13377213/acustica-ones-sonores-efecte-doppler-i-instruments-musicals>

- Wikipedia, “Freqüència”. 5 juliol de 2014. >http://ca.wikipedia.org/wiki/Freq%C3%BC%C3%A8ncia>
- Slidechare, De què està feta la música?, el so i el soroll”. 27 de noviembre de 2008. >http://www.slideshare.net/juliansamaniego/de-qu-est-feta-la-msica-presentation?next_slideshow=1>
- Wikipedia, “Longitud d’ona”. 28 de juny de 2014. >http://ca.wikipedia.org/wiki/Longitud_d%27ona>
- Teoria, “El compás”, J. Rodríguez Alvira 2011. >http://www.teoria.com/referencia/c/compas.php>
- IES Santanyí. “Moviments geometrics”. > http://www.iessantanyi.cat/exposiciomatematiques/web2008/cartells/17_geometria_musica.pdf>
- Bioritmes, “La finció sinusoidal. >http://bioritmes-jnietomaldonado.blogspot.com.es/2012/02/lololoolooooll.html>
- Wikipedia, “Factor de conversió” > http://ca.wikipedia.org/wiki/Factor_de_conversi%C3%B3>
- Wikipedia, “raó aritmética”. >http://ca.wikipedia.org/wiki/Ra%C3%B3_aritm%C3%A8tica>
- Recursos tic, “Mesura d’errors. >http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas_cat/3quincena1/3quincena1_contenidos_5b.htm>
- Xtec. “La caixa de música”> http://www.xtec.cat/iesbellvitge/caixa/ones.htm>

12. Fonts de les imatges

3.Definicions i conceptes bàsics musicals:

Figura 3.2.1.- Pentagrama amb clau de sol (el de dalt) i amb clau de fa (el de baix).http://2.bp.blogspot.com/_2SxnKXtZwes/SYEl0O9avzI/AAAAAAAAAOw/pNj6Qss8cHI/s400/Pentagramagranpentagramamedioclefbasstreble.jpg

Figura 3.2.2.- Tetragrama. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c8/UtQueantLaxis-Arezzo.svg/500px-UtQueantLaxis-Arezzo.svg.png / http://3.bp.blogspot.com/-KKA8lt8oEnI/T_FXWkm-fOI/AAAAAAAAARY/k5GsNp06qjA/s400/partitura-gregoriano.jpg

Figura 3.3.1.- Acord. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c1/C_triad.svg/200px-C_triad.svg.png

Figura 3.4.1.1.- Clau sol. https://sp.yimg.com/ib/th?id=HN.607996635912800685&pid=15.1&P=0

Figura 3.4.2.1.- Clau fa. https://sp.yimg.com/ib/th?id=HN.608038030805109445&pid=15.1&P=0

Figura 3.4.3.1.- Clau Do. https://sp.yimg.com/ib/th?id=HN.608038030805109445&pid=15.1&P=0

Figura 3.6.1.1.- Escala de do major. http://1.bp.blogspot.com/-WZGxerrXl60/UXFiG1jxHcI/AAAAAAAAAnQ/o7QE6_Xwwls/s1600/Escala+de+Do+Mayor.jpg

Figura 3.6.1.2.- Tons i semitons en l'escala.

Figura 3.6.1.3.- Origen del nom de les notes. http://2.bp.blogspot.com/-5aLTRCgreqU/TfEc9-3TNOI/AAAAAAAAADI/2izmyzfntD4/s400/utqueantlaxis.jpg

Figura 3.6.2.1.- Escala cromàtica. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2f/Chromatische_toonladder.png/500px-Chromatische_toonladder.png

Figura 3.7.1.- Compàs. http://lh4.googleusercontent.com/-xodDoFGQ46I/TYkvbGaiQXI/AAAAAAAAADY/bJMZlEuXkU8/s1600/Compas.jpg

Figura 3.7.1.- Compàs d'una composició. https://sp.yimg.com/ib/th?id=HN.608009701200364445&pid=15.1&P=0

Figura 3.9.1.- Alteracions musicals.
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/concurso2001/2premio/imagenes/alteraciones.gif / http://3.bp.blogspot.com/-f89cS5_Q9zI/UIylythVysI/AAAAAAAAAQ0/s8lABnFuoJU/s1600/alteraciones-musicales.jpg
Figura 3.10.1.- Tonalitat musicals.
https://sp.yimg.com/ib/th?id=HN.607997142711666971&pid=15.1&P=0

4.Definicions i conceptes bàsics matemàtics:

Figura 4.5.1.- Funció trigonomètrica.
http://4.bp.blogspot.com/_SPuKaCF3bpk/TKDNZdJKmBI/AAAAAAAABuk/-Ago5JiUGP8/s400/Funciones+trigonom%C3%A9tricas+2.png
Figura 4.5.2.- Modificacions de funcions sinusoïdals.
http://stc.obolog.net/photos/4e5e/4e5e8aac6c28es8112_p.jpg

5.Definicions i conceptes bàsics físics:

Figura 5.1.1.- Fluctuació local de la densitat de l'aire.
https://sp.yimg.com/ib/th?id=HN.607989111127606958&pid=15.1&P=0
Figura 5.1.2.- Altura o to d'un so. http://2.bp.blogspot.com/-Nnm-N1eeCyU/T4v__z_VbVI/AAAAAAAAArQ/-m4F1SUmXSM/s1600/tono.gif
Figura 5.2.3.1- Intensitat o volum d'un so.
https://sp.yimg.com/ib/th?id=HN.608030475956519174&pid=15.1&P=0
Figura 5.3.1.1- Freqüència fonamental i harmònics.
https://sp.yimg.com/ib/th?id=HN.608004465631692489&pid=15.1&P=0
Figura 5.3.2.1- Desenvolupament temporal del so.
http://i258.photobucket.com/albums/hh263/kaux/MisImagenesDidacticas/ADSR.jpg
Figura 5.3.4.1- Harmònics generats en un tub tancat
Figura 5.3.5.1- Harmònics generats en una corda pulsada.
Figura 5.4.1- Paràmetres d'ona.
https://sp.yimg.com/ib/th?id=HN.608056202813836202&pid=15.1&P=0

6.Matemàtiques a les composicions musicals:

7.Audacity:

Imatges realitzades per l'autora del treball.

8.Estudi i anàlisi de les freqüències de l'escala cromàtica

Imatges realitzades per l'autora del treball.

9.Anàlisi d'una partitura

Imatges realitzades per l'autora del treball.