CONSTANTS UNIVERSALS

Pseudònim: Io

Treball de Recerca

2n Batxillerat A

Curs 2020/2021

Sumari

1 INTRODUCCIÓ....6
2 CONSTANT D'AVOGADRO I CONSTANT DELS GASOS....9
2.1 L'estudi dels elements i el naixement de la química moderna....9
2.1.1 Els pensadors grecs i els inicis de l'atomisme....9
2.1.2 La Revolució científica: les lleis dels gasos....10
2.1.3 L'ús sistemàtic de la balança: les lleis ponderals....11
2.1.4 Un nou model pels gasos: hipòtesi d'Avogadro....13
2.2 Mesures de N_A....16
2.2.1 Mètode de Loschmidt: condensació....16
2.2.2 Mètode de Perrin: moviment brownià....17
2.2.3 Mètode de Millikan: coulombimetria....18
2.2.4 Disfracció de raigs X en estructures cristal·lines....19
2.3 Mesures de *R*....22
2.4 Determinació de N_A: electròlisi de l'aigua en medi àcid....24
2.4.1 Objectius....24
2.4.2 Introducció....24
2.4.3 Material....26
2.4.4 Procediment....26
2.4.5 Càlculs i resultats....27
2.5 Determinació de *R:* reacció entre un metall i un àcid....30
2.5.1 Objectius....30
2.5.2 Introducció....30
2.5.3 Material....30
2.5.4 Procediment....31
2.5.5 Càlculs i resultats....32
3 CÀRREGA ELEMENTAL....34
3.1 Models atòmics....34
3.1.1 Inicis de l'atomisme: dels filòsofs grecs a Dalton....34
3.1.2 Les partícules subatòmiques....35
3.1.3 La nova física del s XX....36
3.2 Mesures de *e*....38
3.2.1 Thomson: càlcul relació e/m de l'electró....38
3.2.2 Millikan: experiment de la gota d'oli....40
3.3 Determinació de *e:* experiment de la gota d'oli amb simulador....43
3.3.1 Objectius....43
3.3.2 Introducció....43
3.3.3 Material....43
3.3.4 Procediment....43
3.3.5 Càlculs i resultats....44
4 CONSTANT DE PLANCK....46
4.1 La teoria quàntica....46
4.1.1 Radiació del cos negre: la constant quàntica h....46
4.1.2 L'efecte fotoelèctric: els fotons....48
4.1.3 Model de Bohr: espectres atòmics....49
4.2 Mesures de *h*....52
4.2.1 Millikan: potencial de frenada....52
4.2.2 Altres mesures....55

4.3 Determinació de *h:* electroluminescència d'un díode....56
4.3.1 Objectius....56
4.3.2 Introducció....56
4.3.3 Material....57
4.3.4 Procediment 1: Longitud d'ona d'un LED....58
4.3.5 Resultats λ....58
4.3.6 Procediment 2: Energia de la banda prohibida....59
4.3.7 Resultats E....59
4.3.8 Càlcul de la constant de Planck....61
5 VELOCITAT DE LA LLUM....62
5.1 Què és la llum?....62
5.1.1 Model corpuscular....62
5.1.2 Model ondulatori....62
5.1.3 De l'èter a les ones electromagnètiques....64
5.1.4 Dualitat ona-corpuscle....65
5.2 Mesures de *c*....66
5.2.1 Galileu: el primer intent....66
5.2.2 Roemer i les ocultacions d'Io....67
5.2.3 Interferències amb rodes dentades i miralls....67
5.3 Determinació de *c:* mètode de Roemer....69
5.3.1 Objectius....69
5.3.2 Introducció....69
5.3.3 Material....71
5.3.4 Procediment 1: determinació de dates esperades d'observació....71
5.3.5 Procediment 2: registre de dades observades....72
5.3.6 Procediment 3: càlcul de posicions angulars i distància T-J....73
5.3.7 Procediment 4: tractament de dades....75
5.3.8 Càlcul de la velocitat de la llum....79
6 CONCLUSIONS....81
7 BIBLIOGRAFIA....85
Annex 1. Tractament de dades experimentals....93
Annex2. Pressió de vapor....100
Annex3. Visibilitat del cel 2020....101
Annex 4. Propagació error resolució en *c*....*102*

1 INTRODUCCIÓ

Les constants universals són magnitud físiques que tenen un valor numèric fix, igual en tot l'univers i al llarg del temps. Si el valor d'aquestes fos un altre, tot l'univers seria absolutament diferent perquè en regeixen les lleis. La vida no seria possible tal i com es dona en aquest univers. Aquest Treball de Recerca consisteix en repassar alguns dels principals experiments científics que s'han dut a terme al llarg de la història per determinar el valor de diferents constants universals. D'aquesta manera, també es pretén analitzar l'evolució històrica del coneixement científic en la societat humana analitzant breument el context històric i les eines i mitjans dels investigadors de l'època.

Per això, recollirem informació sobre les principals constants i sobre la transformació dels models científics (representacions conceptuals ideades per tal d'oferir una explicació lògica als fenòmens o processos físics) que ens han portat a la concepció del món d'avui en dia, citant els seus defensors, opositors i retractors i les idees al respecte de diversos personatges, des dels primers filòsofs grecs fins a científics recents com, per exemple, Niels Bohr. Finalment, recrearem algun dels experiments originals efectuats per trobar el valor de cada constant treballada. Per arribar a entendre com funciona la pràctica realitzada, anteriorment haurem d'aprofundir en el món atòmic i subatòmic, abastant àmbits de la física i la química, i de les propietats i comportament de la matèria i les ones, i en definitiva, conèixer una mica millor la realitat del nostre univers.

Així doncs, aquest treball té com a objectius els punts següents:
- Ampliar el coneixement de la història de la ciència i d'alguns dels seus descobriments més importants
- Demostrar que és possible recrear alguns d'aquests experiments al laboratori amb eines i materials a l'abast d'un alumne de batxillerat.
- Apropar-se el màxim al valor real de les constants amb les pràctiques del treball de camp.

La meva hipòtesi és que sí, es pot fer i amb una precisió notable, considerant les limitacions del mètode emprat. Evidentment, és impossible mesurar amb exactitud les constants perquè caldrien instruments i coneixements no disponibles. En el càlcul de la càrrega elemental, no ha estat possible reproduir l'experiment degut a la seva complexitat tècnica.

Considero que aquest estudi pot tenir certa rellevància científica perquè, tot i saber anticipadament quin hauria de ser el resultat de les pràctiques, demostrem que es poden imitar els treballs de científics reconeguts amb instruments i tècniques prou senzills, en general, i a l'abast d'un alumne de batxillerat. A més, també resulta interessant conèixer el context històric i els aparells d'investigació utilitzats per grans artífexs de la ciència com Roemer, Planck o Avogadro. La majoria dels experiments estudiats han estat clau per obtenir la informació necessària per al desenvolupament de la ciència i la tecnologia

actuals. És sorprenent conèixer com van ser mesurades constants físiques les quals, avui en dia, són utilitzades habitualment en l'àmbit científic.

El meu interès personal en l'àmbit que tracta el treball ha estat imprescindible per a la seva realització. Sempre he manifestat curiositat per l'astronomia, la física i tot allò relacionat amb la ciència en general. A més, m'agrada formular hipòtesis i experimentar, i per tant tenia la intenció de triar un treball amb una part pràctica important. Com que veia en moltes de les propostes de treball possibilitats de fer-ne una investigació completa, així com un treball de camp o experimental, em va semblar complicat decidir-me per un dels temes disponibles. Tot i això, quan ja va estar adjudicat, vaig veure que no m'havia equivocat en la tria. Si bé ha representat molta dificultat i ha requerit un temps considerable de documentació, investigació i de càlculs matemàtics, aquesta motivació i l'entusiasme m'han ajudat a seguir dedicant-hi esforços per superar els entrebancs.

Quant al cos del treball, es divideix en dues parts ben diferenciades: un marc teòric per a cada constant i la part pràctica. El marc teòric és un recull i selecció d'informació que inclou conceptes i coneixements previs sobre la constant i la història del seu descobriment. La segona part és l'informe de la pràctica, seguit dels càlculs, els resultats obtinguts i, posteriorment a l'apartat de conclusions, la seva anàlisi. Aquest patró es repeteix amb cada constant treballada dels 4 capítols, que són: la constant d'Avogadro, Faraday i la constant dels gasos (1), la càrrega de l'electró (2), la constant de Planck (3) i per últim, la velocitat de la llum (4).

En el primer apartat, s'estudia el coneixement sobre la composició de la matèria i com ha anat canviant al llarg del temps. En el segon, es repassen els diferents models atòmics i la introducció del concepte d'electró. L'experiment corresponent ha estat realitzat amb una simulació. En el tercer, es fa una incursió a la teoria quàntica i al concepte de quantització de l'energia, explicant el descobriment dels fotons. Per acabar, l'últim apartat tracta de la naturalesa de la llum i la dualitat ona-partícula. Totes les constants d'aquest treball estan relacionades amb el món atòmic: des del nombre d'Avogadro, que expressa la quantitat de substància, fins a la velocitat de la llum emesa pels electrons quan salten de nivell energètic.

Per a l'elaboració del marc teòric, he fet servir el contingut de pàgines web, de diversos llibres de text o instructius i d'articles de revistes especialitzades. També he consultat a persones enteses per a la cerca d'informació i el disseny i elaboració de procediments de laboratori.

En la part pràctica, he emprat materials del laboratori de l'escola i un telescopi *Celestron NexStar 4SE,* cedit també pel centre, per a la mesura de la velocitat de la llum. M'han servit d'ajuda els programes *Geogebra* i *LoggerLite* per a la creació de gràfiques i recull de dades estadístiques; també l'*Excel* per fer taules i comparar diverses dades a la vegada

sense haver de repetir sistemàticament les mateixes operacions matemàtiques. A més, he utilitzat el programa Paint per a l'elaboració de figures pròpies.

La realització d'aquest Treball de Recerca no hauria estat possible sense la participació de diverses persones.

En primer lloc, dono les gràcies a la meva mare per l'interès mostrat en el treball i per haver dedicat paciència i esforços a ajudar-me. El seu suport incondicional m'ha animat a seguir treballant per realitzar la feina el millor possible.

També al professor de ciències per la seva implicació en la tasca i la col·laboració en la part pràctica, que ha estat clau per tirar-la endavant. Valoro tota l'ajuda i els consells rebuts.

Finalment, agraeixo a la meva tutora la seva bona disposició a assessorar-me i a recolzar-me al llarg de tot el treball i haver-me encoratjat

2 CONSTANT D'AVOGADRO I CONSTANT DELS GASOS

2.1 L'estudi dels elements i el naixement de la química moderna

(basat en Asimov, 2003)

2.1.1 Els pensadors grecs i els inicis de l'atomisme

Des del s. VII a. C., els grans erudits i filòsofs de la civilització grega centraren la seva atenció cap a la naturalesa, l'univers i l'estructura dels materials que el componen.

Un dels primers teòrics fou Tales de Milet (aproximadament 640-546 aC), que es plantejà si una substància pot transformar-se en qualsevol altra mitjançant un nombre determinat de passos. D'aquesta manera, totes les substàncies serien diferents representacions d'una mateixa matèria bàsica. La seva idea era que sí, efectivament, hi havia un element únic primordial, establint així un ordre i simplicitat únics a l'univers. Considerava que aquest element era l'aigua.

Tales, doncs, introdueix el que més endavant seria el concepte químic d'element o substància simple: «és una substància pura que no es pot descompondre en substàncies més senzilles.» (Caamaño i Obach, 2003)

Figura 1: Els 4 elements segons Empèdocles.
Font: University of Bristol

En el segle següent, diversos pensadors van proposar altres elements, com l'aire o el foc, com a elements primigenis de la naturalesa. Fou Empèdocles (aproximadament 490-430 aC) qui unificà el pensament dels seus predecessors i establí la teoria dels quatre elements: terra, aigua, aire i foc.

Mentrestant, en un altre corrent de pensament, Leucip (aproximadament 450 aC) i el seu deixeble Demòcrit (aproximadament 470-380 aC) establien les bases de l'atomisme. Els seguidors d'aquest corrent defensaven la indivisibilitat de la matèria: aquesta està formada per petites partícules, anomenades àtoms. Demòcrit suposà que els àtoms de cada element eren de diferent mida i forma, i que aquestes diferències eren les que donaven a les substàncies (tangibles i visibles) les seves propietats. Creia que aquestes podien transformar-se en una altra alterant la naturalesa de la mescla.

Aristòtil (384-322 aC), el més influent dels filòsofs grecs, refusà l'atomisme i acceptà la doctrina dels quatre elements, la qual va impulsar el pensament humà durant dos mil anys. La teoria atomista es va fer impopular i va romandre oblidada fins al seu ressorgiment al s. XVIII.

2.1.2 La Revolució científica: les lleis dels gasos

No és fins al Renaixement, amb la revolució científica protagonitzada per Copèrnic, Galileu i Newton, que es començaren a aplicar sistemàticament els mesuraments quantitatius i les tècniques matemàtiques per a l'explicació dels fenòmens observats.

El químic irlandès Robert Boyle (1627- 1691) dissenyà una bomba de compressió per tal d'estudiar el comportament dels gasos. En els seus experiments, va trobar que el volum d'una mostra d'aire variava amb la pressió segons una proporció inversa, és a dir, que el volum disminuïa a mesura que augmentava la pressió.

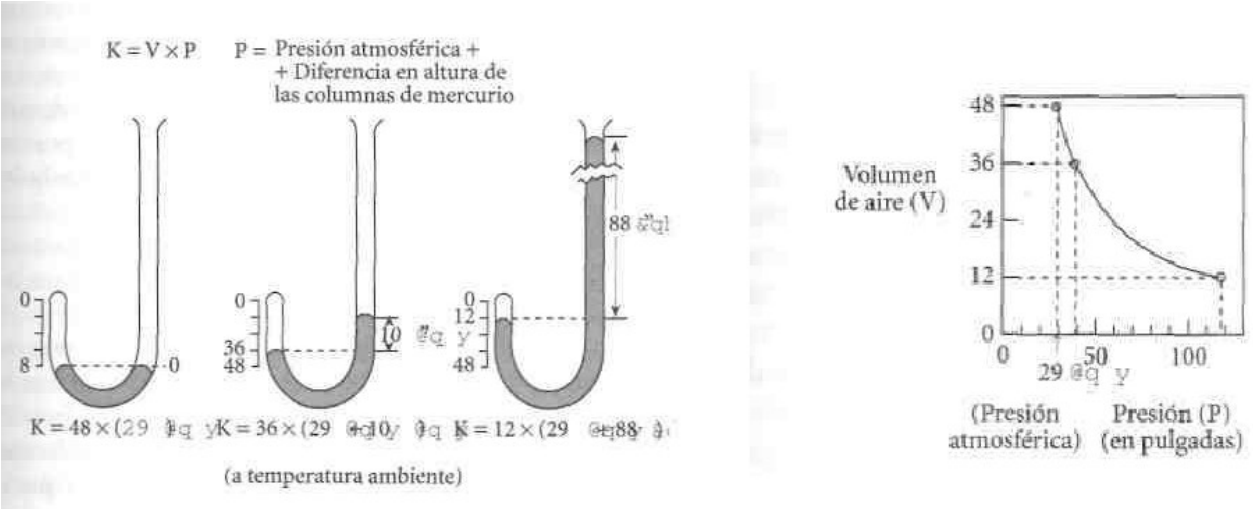


Figura 2: La llei de Boyle, que estableix la relació de proporcionalitat inversa entre la pressió i el volum d'un gas a temperatura constant. Font: Isaac Asimov

Aquest resultat és el que coneixem com a llei de Boyle:

$$PV = constant$$

En el segle següent, l'inventor, científic i matemàtic francès Jacques Charles (1746-1823) avançà en l'estudi dels gasos. Demostrà que els diferents gasos s'expandeixen en la mateixa proporció quan són sotmesos a un mateix increment de temperatura, tot mantenint-los a pressió constant. Charles, però, no va donar a conèixer els seus experiments. Fou el químic francès Joseph Louis Gay-Lussac (1778-1850) qui va publicar les seves observacions sobre el mateix fenomen unes dècades més tard. Els seus resultats coincidien amb els de Charles i se'n dedueix la llei de Charles i Gay-Lussac:

$$\frac{V}{T} = constant$$

No fou aquesta l'única aportació de Gay-Lussac a l'estudi dels gasos, però en parlarem més endavant en aquest mateix capítol.

2.1.3 L'ús sistemàtic de la balança: les lleis ponderals

Ja en el s. XVIII, els nombrosos descobriments sobre els gasos van ser recollits en una teoria global pel químic francès Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794). Amb els seus mesuraments sistemàtics i precisos, va adonar-se que si es tinguessin en compte totes les substàncies que realment prenien part en un experiment, mai hi hauria un canvi de massa.

Durant un període de 101 dies va bullir aigua en un aparell, on el vapor es condensava i retornava al matràs repetidament. Va pesar l'aigua i el recipient, abans i després del període d'ebullició. Al final havia aparegut un sediment, però l'aigua no havia canviat de pes durant el procés. En canvi, el recipient sí que havia disminuït de pes, una pèrdua de massa que era justament la del sediment. En altres paraules, el sediment no procedia de la transformació de l'aigua, sinó del material del vidre atacat per l'aigua calenta i precipitat en fragments sòlids.

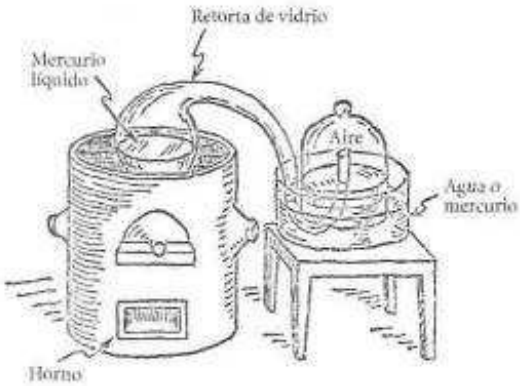


Figura 3: Il·lustracions de Mme Lavoisier dels experiments narrats per Lavoisier en el seu llibre Elements de Química. Font: Isaac Asimov

Aleshores, Lavoisier establí la llei de conservació de la massa: la massa no es crea ni es destrueix, sinó que simplement canvia d'unes substàncies a unes altres. Aquest enunciat aparentment simple és la base de la química del s. XIX i per això que Lavoisier és considerat el pare de la química moderna.

El 1789, Lavoisier va publicar el seu llibre *Tractat elemental de Química,* aportant una visió unificada del coneixement, les noves teories i la nomenclatura de les substàncies. Fou el primer text modern de química. Entre altres coses, incloïa una llista de tots els elements coneguts fins aleshores. De les 33 substàncies enumerades, només dues eren errònies.

Els resultats obtinguts per Lavoisier van inspirar i animar altres científics. El francès Joseph Louis Proust (1754-1826), utilitzant anàlisis acurades, va demostrar el 1799 que el carbonat de coure contenia coure, carboni i oxigen en proporcions definides en massa. La proporció responia sempre a 5,3 parts de coure per 4 d'oxigen i 1 de carboni, sense importar com s'hagués preparat en el laboratori. També va arribar a demostrar que molts altres compostos seguien el mateix comportament.

L'any 1794, Proust enuncià la llei de les proporcions definides: si dos o més elements químics es combinen per formar un determinat compost químic, ho fan en una relació de masses invariable. [1]

1 Aquesta llei també estableix clarament què és un compost (el resultat de la combinació de dos o mes elements en una determinada proporció) i el diferencia d'una mescla (on la proporció no és definida).

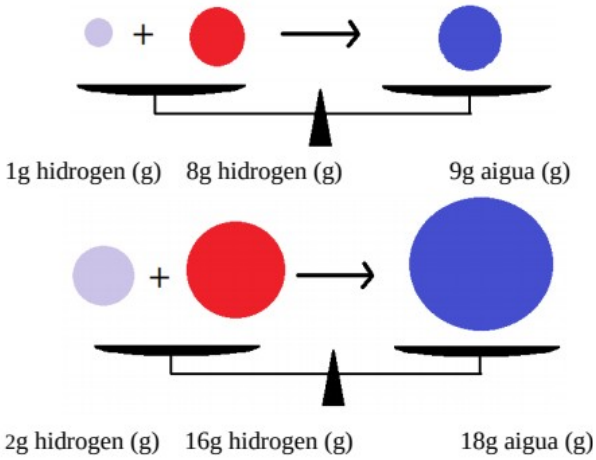


Figura 4: Llei de conservació de la massa (Lavoisier) i llei de les proporcions definides (Proust). Font: elaboració pròpia

No obstant això, existeixen alguns elements que poden combinar-se entre sí en diferents proporcions per tal de formar diferents compostos. El químic anglès John Dalton (1766 - 1844) treballà les proporcions en què es combinen el nitrogen i l'oxigen per donar òxids de nitrogen. Segons les seves anàlisis, dos o més elements poden combinar-se en més d'una proporció donant lloc a compostos diferents.

Per exemple, el metà i l'etilè són dos gasos compostos per carboni i hidrogen, de composició (% en massa) coneguda. Ell, però, es plantejà quina massa d'hidrogen hi havia per cada 100 g de carboni en cadascun dels compostos.

	% en massa		massa per cada 100g de C / g	
	Metà (CH_4)	etilè(C_2H_4)	metà	etilè
carboni	74,87	85,63	100	100
hidrogen	25,13	14,37	33,6	16,8

Taula 1: càlculs propis fets a partir de la Taula Periòdica (IUPAC, 2019)

A partir de les dades obtingudes, resulta evident que 33,6 és exactament el doble de 16,8. Per tant, el metà té el doble d'àtoms d'hidrogen que l'etilè.

Els estudis experimentals de Dalton el van portar a enunciar la llei de les proporcions múltiples (1803). Aquesta afirma que quan dos elements es combinen per originar diferents compostos, donada una quantitat fixa d'un d'ells, les diferents quantitats possibles de l'altre element estan en relació de nombres enters senzills.

Les tres lleis ponderals explicades van suggerir a Dalton un nou model de comportament de la matèria. Va recuperar la idea atomista de Demòcrit i el 1808 va publicar la seva teoria atòmica[2], evidenciant que la matèria està organitzada en forma d'unitats indivisibles.

2.1.4 Un nou model pels gasos: hipòtesi d'Avogadro

Paral·lelament a la publicació de la teoria atòmica, Joseph Louis Gay-Lussac va obtenir una sèrie de resultats en els seus experiments amb gasos, en principi discordants amb les idees de Dalton. El químic francès descobrí que 100 volums d'oxigen es combinen amb 200 volums d'hidrogen i el resultat són només 200 volums de vapor d'aigua. És a dir, es produeix una contracció del volum total. L'any 1809 publicà la seva llei dels volums de combinació. Les seves mesures eren molt curoses i dedicava especial atenció a la contracció de volum que es produïa i que seguia una llei regular:

> Els volums de totes les substàncies gasoses que intervenen en una reacció química, mesurats en les mateixes condicions de pressió i temperatura, estan en una relació constant i molt senzilla de nombres enters entre sí.

Dalton opinava que aquests resultats eren inacceptables, absurds i impossibles. Gay-Lussac va evitar una confrontació i es va limitar a millorar la precisió de les seves mesures, que van confirmar-se més. Altres pensadors, però, opinaven que les idees de Dalton i els resultats de Gay-Lussac podien ser compatibles.

Segons la teoria de Dalton, els àtoms de diferents elements no tenen el mateix volum, de manera que volums iguals de diversos gasos no haurien de contenir el mateix nombre de partícules. Imaginant un gas com a partícules en contacte, era absurd suposar que una quantitat concreta d'aquestes ocuparia sempre el mateix volum.

Però segons el químic Amedeo Avogadro (Itàlia, 1776-1856), aquest model de comportament dels gasos era incorrecte i plantejà un canvi. Si es considera que entre les seves partícules hi ha una enorme separació, el volum d'un gas no dependrà del radi relatiu de cadascuna d'aquestes sinó del seu nombre total.

En paraules del propi científic: "Volums iguals de gasos, sota les mateixes condicions de pressió i temperatura, contenen el mateix nombre de partícules." (Avogadro, 1811)

$$\frac{V}{N} = constant$$

on N és nombre de partícules.

A més d'aquesta primera idea, l'aportació fonamental d'Avogadro fou una hipòtesi nova, imaginativa i atrevida, difícil d'acceptar per les creences i conviccions poc receptives a un canvi de paradigma basat en una intuïció.

2 de la teoria de Dalton en parlarem més detalladament en el següent capítol d'aquest treball.

Avogadro plantejà que els gasos elementals no estaven formats per simples àtoms, sinó per partícules més grans; concretament per agrupacions d'àtoms del mateix tipus que va anomenar molècules. La hipòtesi més senzilla era que els gasos elementals estaven constituïts per molècules diatòmiques.

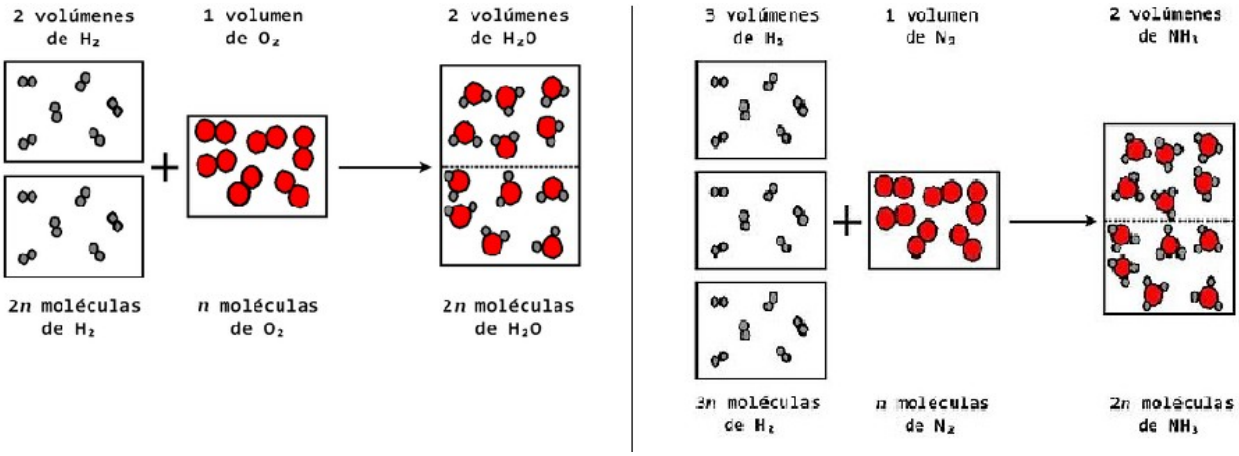


Figura 5: Formació de l'aigua i formació de l'amoníac, segons la hipòtesi d'Avogadro. Font: wikipedia.

Aquest científic va proposar la possible existència d'espècies com ara O_2, O_3, O_4, etc. En principi, resultava impossible determinar la fórmula exacta d'un determinat gas. Aleshores quedaven explicats alguns dels resultats, fins llavors paradoxals, de les propietats i reaccions d'alguns compostos.

Per exemple, la densitat del nitrogen gasós és superior a la de l'amoníac gasós. Si la molècula de nitrogen és N2 enlloc de ser monoatòmic, queda plenament justificat que el gas nitrogen (N_2) sigui més dens que el gas amoníac (NH_3).

El mateix succeeix amb la reacció de formació de l'aigua. Si assumim que volums iguals contenen el mateix nombre de partícules i que els gasos hidrogen i oxigen són diatòmics, les molècules d'aigua correspondran a dos volums.

Les idees d'Avogadro no van ser acceptades per la comunitat científica i la seva hipòtesi va romandre ignorada. No va ser fins l'any 1860, durant el Congrés de Karlsruhe (el primer congrés internacional de química del món), quan la hipòtesi va ser convertida en llei i la seva autoria va ser reconeguda a Amedeo Avogadro. Tot gràcies als treballs de Stanislao Cannizzaro, que va presentar un treball en el qual calculava els pesos atòmics correctes de diferents elements seguint els principis marcats per la hipòtesi d'Avogadro. La rellevància d'aquest article recau en el fet que aclaria el concepte de pes atòmic, relacionant-lo correctament amb el pes molecular.

Basant-se en les idees d'Avogadro i Cannizzaro i combinant les lleis dels gasos (Boyle, Charles i Gay-Lussac), se'n dedueix l'equació d'estat dels gasos ideals, escrita per primer

cop el 1874 pel químic rus Dimitri Mendeleiev (1834-1907), tot i que no de la forma tal i com la coneixem avui en dia[3].

$$PV = \frac{m}{M} RT \quad \rightarrow \quad PV = nRT$$

on:

P és la pressió del gas

V és el volum del gas

m és la massa de la mostra de gas

M és la massa molar del gas

n és el nombre de mols del gas

R és la constant dels gasos ideals

T és la temperatura del gas.

3 La primera expressió és l'equació obtinguda per Mendeleiev i la segona és l'equació dels gasos ideals en la forma actual.

2.2 Mesures de N_A

La constant d'Avogadro (N_A) és una constant física fonamental que representa el nombre d'entitats elementals que hi ha en un mol.

$$N_A = 6{,}02214087(62) \times 10^{23}\ mol^{-1}$$

El mol, terme suggerit pel químic i físic alemany W. Ostwald el 1896, es pot aplicar a qualsevol entitat elemental: àtoms, molècules, ions, electrons, protons, neutrons, altres partícules, grups d'àtoms, etc. Correspon al nombre d'àtoms o molècules necessari per aplegar una massa en grams equivalent a la massa atòmica relativa o molecular d'un material. El concepte de mol era útil encara que no se sabés el nombre d'àtoms o de molècules que el formaven.

Curiosament, tot i el nom d'aquesta constant, Avogadro no va ser qui va calcular el nombre, ni tan sols li va posar el seu nom. D'on surt, aleshores, aquesta constant?

Segons la hipòtesi d'Avogadro, en el mateix volum de dos gasos diferents, en condicions iguals de temperatura i de pressió, hi ha presents el mateix nombre de partícules. Tanmateix, no sabia quina era aquesta quantitat, però altres científics en el futur van determinar el nombre de partícules de matèria presents en un determinat volum gràcies a les seves aportacions.

2.2.1 Mètode de Loschmidt: condensació

El primer científic que intentà aquest càlcul fou el físic i químic austríac Johann Josef Loschmidt (1821-1895). El 1865, a partir de la teoria cinètica dels gasos, va estimar el nombre de molècules que hi ha en un centímetre cúbic d'aire, nombre que s'anomena constant de Loschmidt N_L

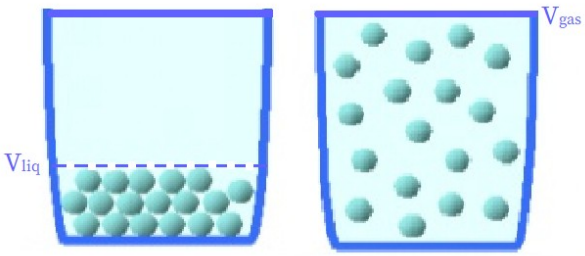


Figura 6: Segons Loschmidt, el volum de N partícules en estat gasós és igual al volum del líquid un cop condensades.
Font: elaboració pròpia

El mètode de càlcul de Loschmidt es basava en comparar el volum d'un gas amb el líquid obtingut un cop condensat. Creia que el volum ocupat «realment» per la mida de les molècules en estat gasós era el mateix que en l'estat líquid, i que la resta era l'espai disponible per al moviment de les partícules.

Les molècules d'un gas, en moviment constant, xoquen les unes amb les altres tot recorrent una longitud mitjana de camí lliure sense col·lisionar amb cap altra. Aquest camí lliure es pot calcular a partir de la velocitat mitjana de les molècules (que depèn de la seva massa i de la temperatura) i del temps mitjà entre col·lisions (que depèn de la densitat del gas).

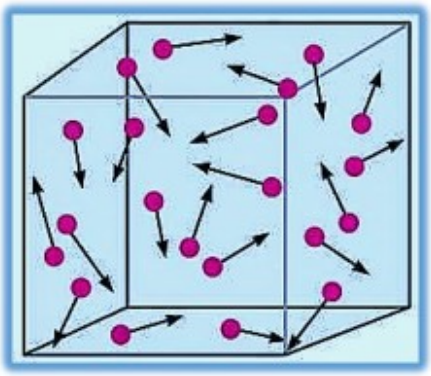


Figura 7: Moviment de les partícules d'un gas .
Font: www.quimica-organica.com

Un cop conegut el camí lliure i tenint en compte el coeficient de condensació del gas[4], Loschmidt va deduir la mida d'una partícula! I si totes elles, un cop condensades, ocupaven el volum mesurat en l'estat líquid, podia deduir quantes n'hi havia.

No obstant, Loschmidt va cometre alguns errors en els seus càlculs i aproximacions que el desviaren del resultat correcte. Malgrat tot, fou el primer intent de mesurar el nombre d'Avogadro. Aplicant correctament el seu mètode, els resultats obtinguts serien[5] :

N_L = partícules contingudes en 1cm^3 d'aire = 1,83 x 10^{18} part/cm^3

N_A =partícules contingudes en un mol = 4,09 x 10^{22} part/mol

2.2.2 Mètode de Perrin: moviment brownià

El primer en obtenir una mesura fiable va ser el físic francès Jean Baptiste Perrin (1870-1942), qui va dissenyar diversos i variats mètodes per determinar el nombre N_A. Fou ell qui va proposar anomenar-lo com "constant d'Avogadro" en honor al químic que, malgrat que no l'havia calculat, havia posat la base teòrica que va permetre fer-ho.

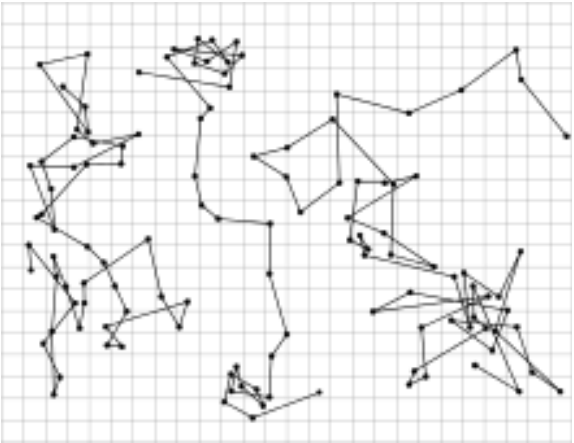


Figura 8: Reproducició del llibre de Jean Baptiste Perrin. Font: wikipedia

Dels diferents mètodes proposats per Perrin, parlarem del que està basat en el moviment brownià, amb el qual va calcular quantes molècules hi havia en un centímetre cúbic de gas hidrogen. « El moviment brownià és el moviment irregular i aleatori que segueixen petites partícules immerses en un fluid.» (Wikipedia).

Perrin observà i mesurà els desplaçaments de les partícules en suspensió d'un col·loide amb un microscopi que disposava d'un ocular reticulat, que servia com a sistema de referència.

4 Coeficient de condensació: relació entre el volum d'una substància en estat gasós respecte el volum de la mateixa en estat líquid un cop ha estat condensada. És experimentalment mesurable.

5 Resultats segons Córdova, José L. UAM – Mèxic.

També calculà la mitjana quadràtica[6] dels desplaçaments. Després aplicà les fórmules deduïdes per Einstein, segons les quals la mitjana quadràtica del desplaçament està relacionada, entre altres factors, amb el nombre total de partícules presents. A partir dels seus resultats es va definir inicialment el mol com el nombre de molècules que hi ha en dos grams de gas hidrogen.

Segons els càlculs de Perrin, aquest nombre corresponia a :

$N_A = 6{,}7 \times 10^{23} mol^{-1}$.

2.2.3 Mètode de Millikan: coulombimetria

El 1913, Robert A. Millikan determinà el valor de la càrrega del electró a partir del seu famós expriment de la gota d'oli[7]. Aprofitant aquest resultat i els treballs ja existents sobre l'electròlisi, també calculà el nombre d'Avogadro.

Gràcies als treballs del físic i químic britànic Michael Faraday (1791-1867), ja era ben conegut el procés d'electròlisi, mètode de separació dels elements que formen un compost aplicant-los electricitat.

En els experiments realitzats per Faraday, inicialment es dissol una substància en un determinat dissolvent, donant lloc als ions corresponents. A continuació, s'aplica un corrent elèctric mitjançant dos elèctrodes conductors connectats a una font. Cada elèctrode atreu els ions de càrrega oposada. Finalment, en els elèctrodes, els electrons són captats o cedits pels ions, formant elements o substàncies diferents de la inicial.

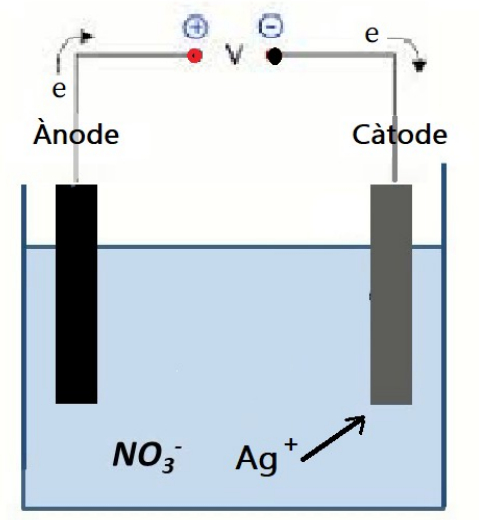


Figura 9: Electròlisi del nitrat de plata.
Font: elaboració pròpia

En la seva primera llei de l'electròlisi, Faraday enuncia que hi ha una relació de proporcionalitat entre la quantitat de substància transformada i la quantitat total de càrrega elèctrica que ha circulat pel sistema.

Per exemple, en l'electròlisi del nitrat de plata ($AgNO_3$) el ió plata (Ag^+) migra cap al càtode, on capta electrons segons la reacció de reducció:

$$Ag^+_{(aq)} + 1e^- \rightarrow Ag_{(s)}$$

6 La mitjana quadràtica es calcula com l'arrel quadrada de la mitjana aritmètica dels quadrats dels valors al d'una variable. S'utilitza quan una variable pot tenir valors positius i negatius, per evitar obtenir una mitjana de valor zero.

7 D'aquest experiment en parlarem detalladament en el proper capítol d'aquest treball. El que expliquem a continuació és cronològicament posterior al de l'apartat dedicat a la càrrega de l'electró. No obstant, com que el concepte de quantitat de substància és anterior al descobriment de l'electró, ens ha semblat més adequat seguir aquest ordre en els apartats.

Mesurant la massa de plata sòlida dipositada a l'ànode, es pot determinar el nombre de mols d'electrons n_e que han circulat.

A partir de la intensitat de corrent I i el temps del procés Δt es calcula la càrrega elèctrica que ha circulat:

$$Q = I \Delta t$$

Això permet determinar la càrrega (en valor absolut) continguda en un mol d'electrons, anomenada constant de Faraday F. Per definició, correspon a la càrrega elemental[8] e multiplicada pel nombre d'Avogadro N_A:

$$F = Q/n_e = e N_A \quad \rightarrow \quad N_A = F/e$$

Així que un cop determinada F i coneguda la càrrega elemental e, es pot conèixer N_A.

TABLE XXI.

Elementary electrical charge	e	$= 4.774 \pm .009 \times 10^{-10}$
Number of molecules per gram molecule	N	$= 6.062 \pm .012 \times 10^{23}$
Number of gas molecules per c.c. at 0° 76	n	$= 2.705 \pm .005 \times 10^{19}$
Kinetic energy of a molecule at 0° C	E_0	$= 5.621 \pm .010 \times 10^{-4}$
Constant of molecular energy	ϵ	$= 2.058 \pm .004 \times 10^{-16}$
Constant of the entropy equation	k	$= 1.372 \pm .002 \times 10^{-16}$
Elementary "Wirkungsquantum"	h	$= 6.620 \pm .025 \times 10^{-27}$
Constant of the Wien displacement law	c_2	$= 1.4470 \pm 0030$

Figura 10: Taula de constants fonamentals. Font: Millikan, 1913

En l'article *«On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant»* (Millikan, 1913) es revisa meticulosament el càlcul de la càrrega elemental e i es determinen totes les constant que en depenen, entre elles la constant d'Avogadro N_A. Com a curiositat, ens adonem que Millikan utilitza com a unitat de càrrega: *electrostatic unit of charge (esu) from centimeter-gram-second (cgs) system of units.* (1 unitat electrostàtica de càrrega (esu) equival a aproximadament 3.3356×10^{-10} coulombs)

Segons els seus resultats (i coneguda la constant de Faraday F):

$e = 4{,}774 \times 10^{-10}$ esu $= 1{,}5924 \times 10^{-19}$ C

$N_A = 6{,}07 \times 10^{23}$ mol^{-1}

2.2.4 Disfracció de raigs X en estructures cristal·lines

Des de mitjans s. XX, els mètodes més precisos per determinar el valor de la constant d'Avogadro es basen en l'estudi de la difracció de raigs X que es produeix en les estructures sòlides cristal·lines.

8 La càrrega elèctrica elemental equival al mòdul de la càrrega elèctrica d'un electró

Una estructura cristal·lina és una forma de xarxa tridimensional en la que els constituents, àtoms o ions, estan empaquetats de manera ordenada i amb patrons de repetició. El patró mínim que es va repetint és la «cel·la unitària». Els cristalls es poden classificar en sis sistemes cristal·lins i dins de cada un existeixen diverses formes. En la matèria trobem 14 tipus de xarxes diferents. En veiem dos exemples:

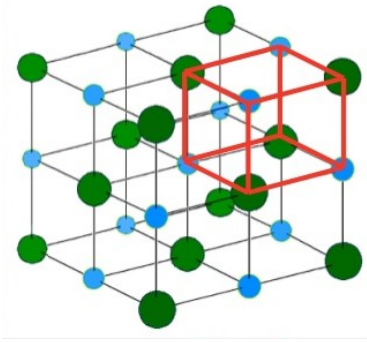


Figura 11: Clorur de sodi (NaCl) estructura cúbica
Font: Viquipèdia

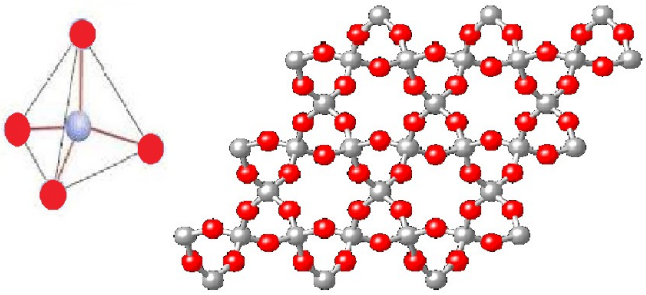


Figura 12: Diòxid de silici (SiO_2) estructura tetraèdrica
Font: pngwing

Cal remarcar que la cel·la unitària no coincideix amb la unitat de fórmula. Per exemple, en el diòxid de silici (SiO_2) la unitat fórmula correspon a 1 àtom de silici i 2 d'oxigen, mentre que la cel·la unitària conté 1 àtom de silici i 4 d'oxigen.

Quan els raigs X arriben a un àtom, interaccionen amb els seus electrons exteriors. Aquests reemeten la radiació electromagnètica incident en diferents direccions i els rajos procedents d'àtoms propers interfereixen entre sí constructivament o destructivament, fenomen conegut amb el nom de difracció.

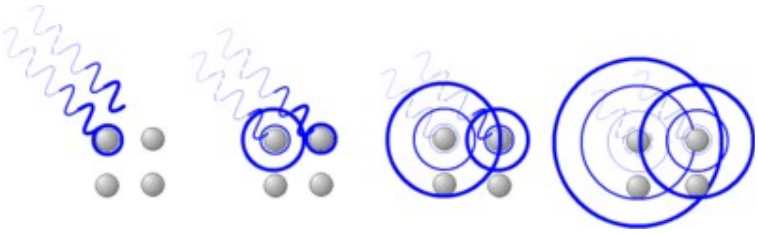


Figura 13: diagrama esquemàtica dels raigs X incidents sobre un vidre. *Font: Viquipèdia*

Els àtoms de la fila superior reemeten la radiació amb un cert decalatge temporal entre ells, ja que la radiació incident ha de recórrer un camí més llarg per arribar al segon àtom (això tindrà un efecte inapreciable en aquest esquema, ja que la diferència és d'una longitud d'ona i per tant no provocarà cap diferència de fase). Els punts en què la radiació procedent d'aquests dos àtoms es superposa constructivament es mostren com la zona d'intersecció dels anells.

La interferència és constructiva quan la diferència de camí recorregut entre dos raigs és un múltiple enter de la longitud d'ona, condició que es coneix com la llei de Bragg:

$$n\lambda = 2d\sin(\theta)$$

on

n és un nombre enter

λ és la longitud d'ona dels raigs X

d és la distància entre els plans de la xarxa cristal·lina

θ és l'angle entre els raigs incidents i els plans de la xarxa cristal·lina.

Observant els patrons d'interferència d'un cristall segons diferents angles de la llum incident, es pot determinar el tipus de xarxa cristal·lina i la distància d entre plans segons diferents direccions. És a dir, és possible esbrinar la forma i mida de la cel·la unitària i per tant, les de la molècula o unitat de fórmula. Amb aquest volum i la densitat del cristall analitzat, es calcula la massa d'una molècula.

Aleshores ja es pot determinar la constant d'Avogadro com:

$$N_A = \frac{Massa\,molar}{massa\,molecular} = \frac{M}{m}$$

Les mesures més recents del nombre d'Avogadro amb difracció de raigs X han donat:

$N_A = 6{,}02214076 \times 10^{23}\ mol^{-1}$

2.3 Mesures de *R*

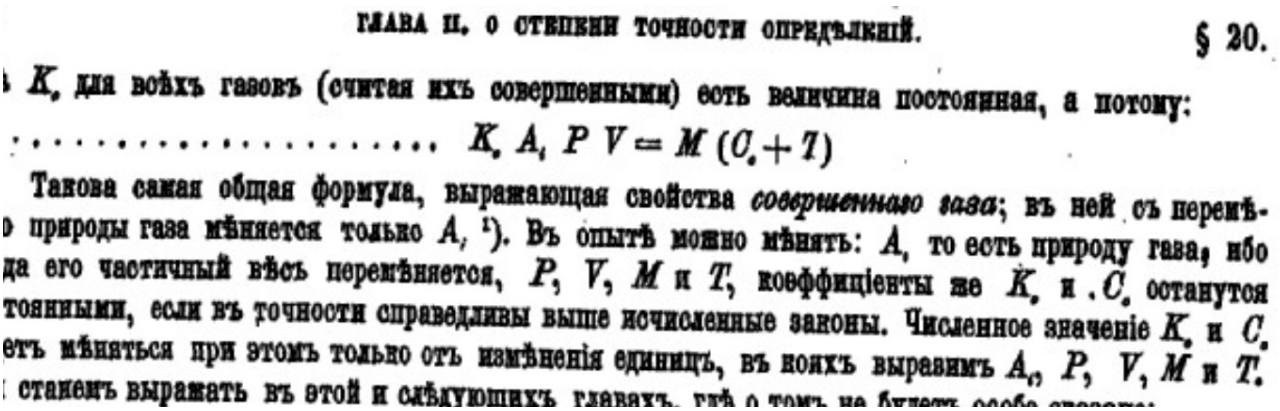
La constant dels gasos ideals és una constant física té un valor de:

R= 8,3144621 J/mol K =0,08205746 atm L /mol K

Com ja hem vist, la constant R relaciona entre sí diverses variables d'estat d'un gas, establint així la relació entre el volum, la pressió, la temperatura i la quantitat de substància.

$$PV = nRT$$

El primer científic en realitzar mesures de la constant dels gasos fou Mendeleiev, basant-se en mesures de pressió, volum, temperatura i massa de diferents gasos. Malauradament, l'article de Mendeleiev del 1874 *Sobre la compressibilitat dels gasos* només l'hem trobat en rus. Tot i això, passant les pàgines hem pogut identificar algunes equacions i dades.



ГЛАВА II. О СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ ОПРЕДѢЛЕНІЙ. § 20.

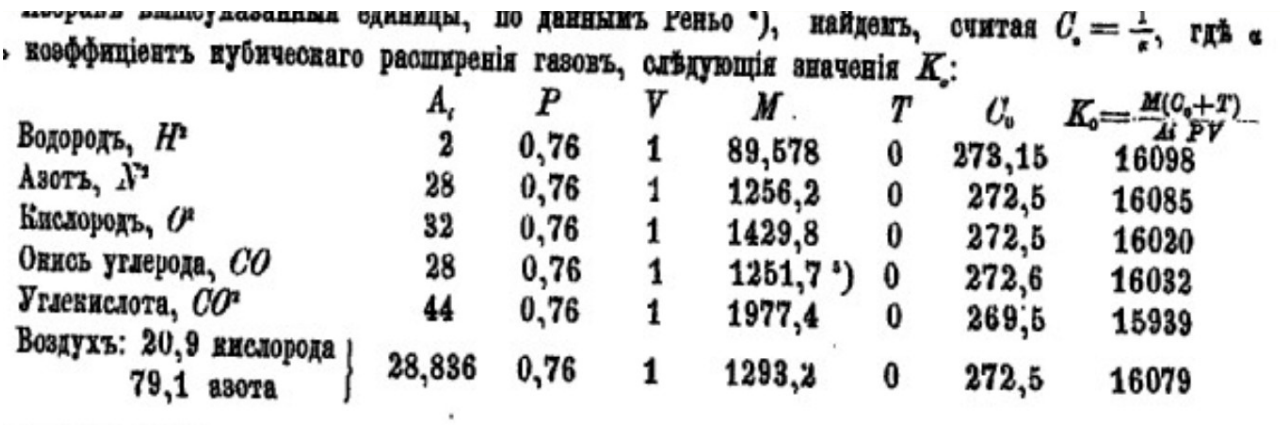
K_0 для всѣхъ газовъ (считая ихъ совершенными) есть величина постоянная, а потому:

. . . . . $K_0 A_i P V = M (C_0 + T)$

Такова самая общая формула, выражающая свойства *совершеннаго газа*; въ ней съ перемѣ-
природы газа мѣняется только A_i [1]). Въ опытѣ можно мѣнять: A_i то есть природу газа, ибо
да его частичный вѣсъ перемѣняется, P, V, M и T, коэффиціенты же K_0 и C_0 останутся
тоянными, если въ точности справедливы выше исчисленные законы. Численное значеніе K_0 и C_0
етъ мѣняться при этомъ только отъ измѣненія единицъ, въ коихъ выразимъ A_i, P, V, M и T.
станемъ выражать въ этой и слѣдующихъ главахъ, гдѣ о томъ не будетъ особо сказано.

Figura 14: Fragment de l'article de Mendeleiev (1874) on s'identifica l'equació d'estat dels gasos. Font: Gallica

$$K A P V = M (C_0 + T)$$



единицы, по даннымъ Реньо [4]), найдемъ, считая $C_0 = \frac{1}{\alpha}$, гдѣ α
коэффиціентъ кубическаго расширенія газовъ, слѣдующія значенія K_0:

	A_i	P	V	M	T	C_0	$K_0 = \frac{M(C_0+T)}{A_i PV}$
Водородъ, H^2	2	0,76	1	89,578	0	273,15	16098
Азотъ, N^2	28	0,76	1	1256,2	0	272,5	16085
Кислородъ, O^2	32	0,76	1	1429,8	0	272,5	16020
Окись углерода, CO	28	0,76	1	1251,7 [5])	0	272,6	16032
Углекислота, CO^2	44	0,76	1	1977,4	0	269,5	15939
Воздухъ: 20,9 кислорода, 79,1 азота	28,836	0,76	1	1293,2	0	272,5	16079

Figura 15: Fragment de l'article de Mendeleiev, 1874. Font: Gallica

També podem identificar en la taula de resultats els diferents gasos emprats, les magnituds mesurades i la constant calculada. Mendeleiev feia els seus càlculs en unitats diferents a les actuals del SI i la constant calculada equival a 8,29482 J/mol·K, un valor només 0,24% inferior al valor actual.

Intentem identificar quines unitats feia servir Mendeleiev comparant les magnituds de la seva equació amb la notació actual.

$$\left\{\begin{matrix} K\,A\,P\,V = M(C_0+T) \\ PV = nRT \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad PV = \frac{M}{A}\frac{1}{K}(C_0+T) = n\frac{1}{K}(C_0+T) \quad \rightarrow \quad R = \frac{1}{K}$$

Amb la mitjana dels valors de *K* observats a la taula (16.042,17) calculem *R* i apliquem factors de conversió de canvis d'unitats per tal d'obtenir un valor reconeixible. Detectem que la temperatura està en graus Celsius (ºC) i hem de contrastar les unitats de pressió i volum.

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{16.042{,}17} = 62{,}33 \times 10^{-6}$$

Després de diverses provatures, veiem que el valor obtingut és compatible amb unitats de pressió de *mmHg:*

$$62{,}33 \times 10^{-6}\,\frac{mmHg \cdot L}{K \cdot mol} \times \frac{133.322\,Pa}{1\,mmHg} \times \frac{1\,kPa}{1.000\,Pa} = 8{,}31\,\frac{L \cdot kPa}{K \cdot mol}$$

Finalment, els paràmetres utilitzats per Mendeleiev són:

A és la massa molecular relativa (g)

P és la pressió (mmHg)

V és el volum de gas (L)

M és la massa del gas (g)

T és la temperatura (ºC)

C_o = Temperatura convertida a graus Kelvin

K_o = constant de l'equació dels gasos = 16042, 17 K·mol / L·mmHg

2.4 Determinació de N_A: electròlisi de l'aigua en medi àcid

2.4.1 Objectius

Separar els elements de l'aigua, mitjançant la tècnica de l'electròlisi

Calcular la constant de Faraday (F) i la constant d'Avogadro (N_A)

2.4.2 Introducció

L'electròlisi (trencament pel pas d'electricitat) és una reacció de tipus redox. Les reaccions redox són aquelles en les que s'esdevé una transferència d'electrons entre elements, canviant el seu estat d'oxidació. Una reacció redox es pot desdoblar en dues semireaccions: una oxidació, en la qual una espècie química cedeix electrons i una reducció, en què una altra espècie química guanya electrons.

L'electròlisi té lloc en un recipient anomenat cel·la electrolítica, que conté una dissolució de la substància a descompondre. En ella submergim dos elèctrodes que es connecten a un corrent continu. En el cas de l'aigua, perquè la reacció tingui lloc, però, cal augmentar la conductivitat elèctrica afegint-hi un àcid.

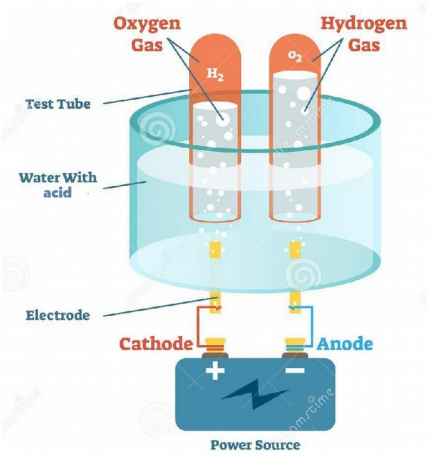


Figura 16: Cel·la electrolítica.
Font: dreamstime.com

Semireaccions:

Ànode (+) oxidació: $2\ H_2O_{(l)} \square O_{2(g)} + 4\ H^+_{(aq)} + 4\ e^-$

Càtode (-) reducció: $2\ H^+_{(aq)} + 2\ e^- \square H_{2\ (g)}$

Reacció global: $2\ H_2O_{(l)} \square 2\ H_{2(g)} + O_{2(g)}$

El total d'hidrogen generat és dues vegades el d'oxigen, i tots dos són proporcionals al total de càrrega elèctrica que ha circulat. Així que a partir del volum d'hidrogen generat, podem calcular el nombre de mols d'electrons que han circulat.

Per una part, podem aplicar l'equació d'estat dels gasos ideals a l'hidrogen format al càtode (que recollirem en un tub invertit):

$$PV = nRT \quad \rightarrow \quad n = \frac{PV}{RT}$$

on R és la constant universal dels gasos, T la temperatura ambient que mesurem amb un termòmetre, V el volum mesurat d'hidrogen i P la pressió que exerceix l'hidrogen a les parets del recipient.

Per calcular la pressió P hem de tenir en compte que a l'interior del tub hi ha tres pressions diferents: la pressió del gas hidrogen (P_{H_2}), la pressió de vapor de l'aigua (P_{vapor})i la pressió hidrostàtica (P_{H_2O})

Les tres pressions sumades han d'igualar la pressió atmosfèrica a la base de la columna d'aigua del tub.

$P_1 = P_2$

$P_{atm} = P_{H_2} + P_{vapor} + P_{H_2O}$

$P_{H_2} = P_{atm} - P_{vapor} - P_{H_2O}$

P_{atm}: la pressió atmosfèrica es pot consultar per internet en el moment de l'experiment

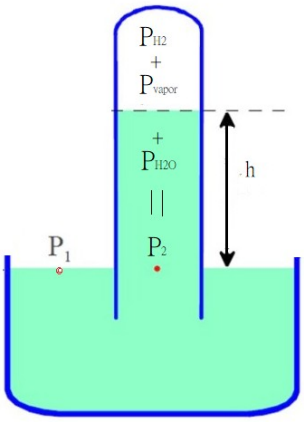


Figura 17: Pressió a l'interior del tub. Font: elaboració pròpia

P_{vapor}: la pressió exercida per l'aigua evaporada. El seu valor depèn de la temperatura de l'ambient i es pot esbrinar a partir d'una taula de pressió de vapor (Annex 2)

P_{H_2O}: la pressió hidrostàtica l'exerceix l'aigua líquida i depèn de la densitat del liquid i de l'alçada a la qual està submergida l'objecte. Es calcula segons la següent fórmula:

$$P_{H2O} = \rho g h$$

on ρ és la densitat de l'aigua, g és la gravetat i h correspon a l'alçada de la columna d'aigua a l'interior del tub.

Un cop determinat el nombre de mols d'hidrogen, utilitzant els factors estequiomètrics de la semireacció de reducció es calculen el nombre de mols d'electrons que han circulat.

$$n \times \frac{2\,mol\,e}{1\,mol\,H_2} = n_e$$

Per l'altra part, es pot calcular la càrrega elèctrica total Q que ha circulat durant el temps que ha durat l'electròlisi, segons la fórmula:

$$Q = It$$

on la intensitat s'enregistra amb l'amperímetre durant l'electròlisi i es cronometra el temps t que dura el procés.

Finalment podrem calcular:

Constant de Faraday: $F = \frac{Q}{n_e}$

Constant d'Avogadro: $F = N_A e \rightarrow N_A = \frac{F}{e}$

2.4.3 Material

termòmetre

vas de precipitats de 500 mL / cubeta

dos elèctrodes de platí

font d'alimentació, cable conductor i pinces de cocodril

interfície *Vernier*

sensor de voltatge *Vernier*

sensor d'intensitat *Vernier*

tub d'assaig aforat

aigua destil·lada

àcid sulfúric 1M

2.4.4 Procediment

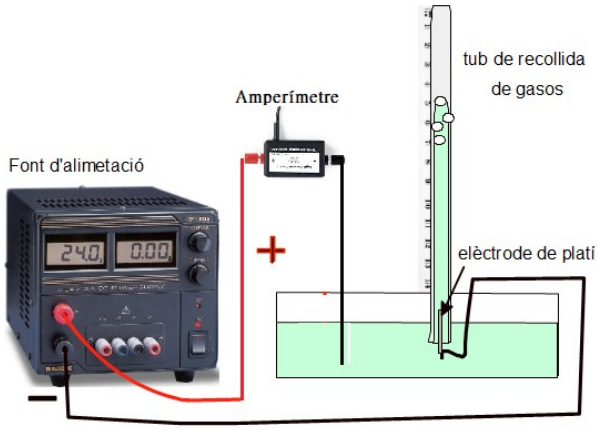


Figura 18: Muntatge de l'experiment.
Font: Josep Corominas

- Col·locar la cubeta o vas de precipitats amb aproximadament 200mL aigua destil·lada i 10 mL d'àcid sulfúric 1M.

- Col·locar un tub invertit al càtode completament ple d'aigua per recollir el gas hidrogen.

- Connectar el càtode al pol negatiu de la font d'alimentació i l'ànode al positiu.

- Col·locar un sensor de corrent en sèrie que connectarem al corresponent equip Vernier el qual configurarem perquè reculli el valor de la intensitat cada 10s.

- Iniciar el procés aplicant un voltatge d'uns 4,5V de corrent continu i cronometrar des del moment inicial.

- Quan considerem que tenim un volum suficient i fàcilment mesurable de gas hidrogen, aturar la font d'alimentació i el cronòmetre.

- Repetir el procés uns quants cops, en el nostre cas, 3 vegades amb diferents voltatges.

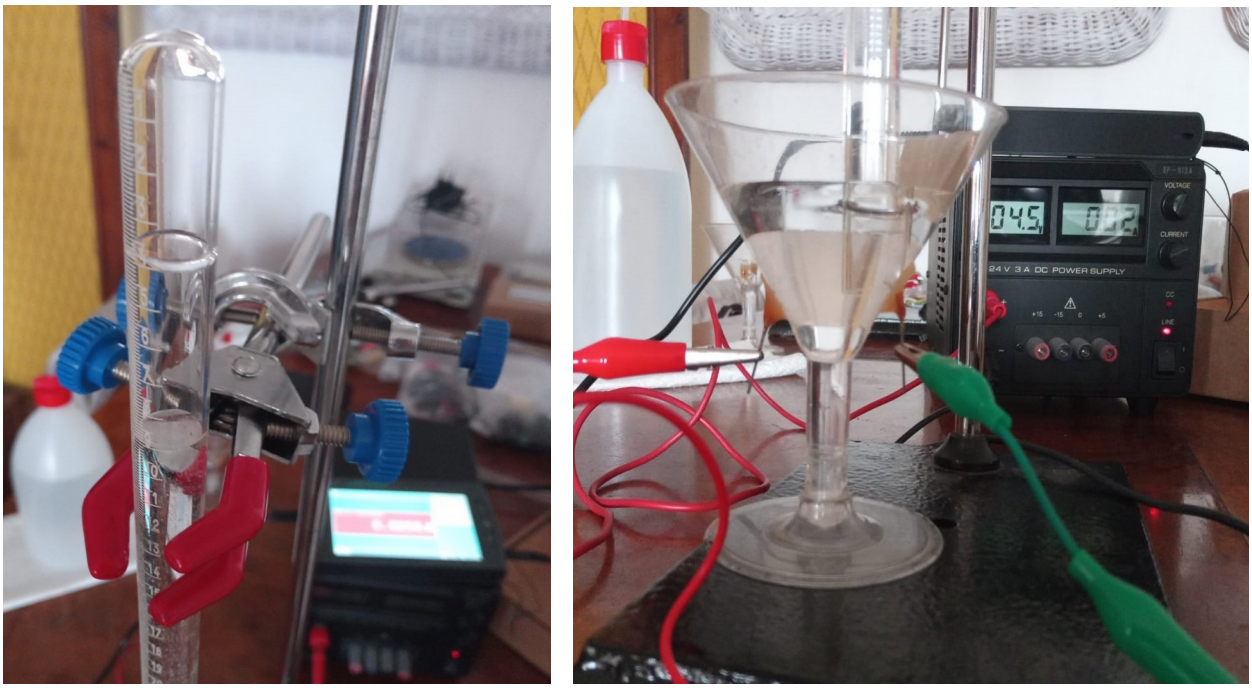


Figura 19: Fotografies del muntatge experimental realitzat

2.4.5 Càlculs i resultats

Dades inicials:

g = 9,81 m/s² ρ_{H2O} = 997 kg/m³ e = 1,602 · 10⁻¹⁹ C R = 8314,47 Pa · L / K · mol

Experiment 1:

P_{atm} = 1015,3 hPa

T = 27,8ºC

V_{H2} = 15,2 mL

h_{H2O} = 40,2 cm

Δt = 3070 s

I = 0,03576 A

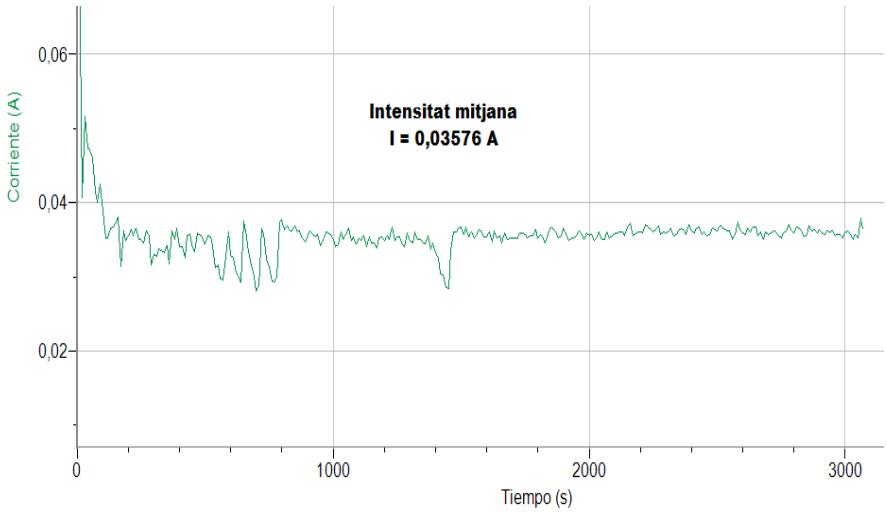


Figura 20: Registre de la intensitat del corrent. Font: elaboració pròpia

$$P_{H2O} = \rho g h = 997 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}402 = 3931{,}79\ Pa$$

$$P_{H2} = P_{atm} - P_{vapor} - P_{H2} = 101530 - 3800 - 3931{,}79 = 93798{,}21\ Pa$$

$$n_{H2}=\frac{PV}{RT}=\frac{93798,21\cdot 0,0152}{8314,472\cdot 300,95}=5,70\times 10^{-4}\,mols \quad \rightarrow \quad n_e=2\,.\,n_{H2}=1,14\times 10^{-3}\,mols$$

$$Q=I\,\Delta t=0,03576\cdot 3070=109,7832\,C$$

$$F=\frac{Q}{n_e}=\frac{109,7832}{1,14\times 10^{-3}}=96301,05\,C/mol$$

$$N_A=\frac{F}{e}=\frac{96301,05}{1,602\times 10^{-19}}=6,011\times 10^{23}\,mol^{-1}$$

Repetint aquests càlculs per cada prova hem obtingut els resultats següents:

Exp	intensitat (A)	temps (s)	T (K)	Volum H_2 (mL)	Patm (Pa)	PH2O (Pa)	h H2O (cm)	F (C)	NA (mol-1)
1	0,03576	3070	300,8	15,2	101530	3800	40,2	9,629E+04	6,011E+23
2	0,01026	3480	301,0	5,0	101530	3800	50,4	9,629E+04	6,011E+23
3	0,01966	2460	300,5	6,8	101530	3800	48,6	9,556E+04	5,965E+23

La mitjana obtinguda és de: $5,988 \cdot 10^{23}$ (desviació típica: $2,3 \times 10^{21}$)

Tal com s'explica a l'annex 1, la nostra mesura està afectada per la propagació d'errors de resolució dels paràmetres mesurats. En aquest cas, aquest error resulta major que la desviació típica i, conseqüentment, és el valor que prendrem.

Per fer el càlcul d'error de resolució substituïm a la fórmula de N_A cadascuna de les expressions utilitzades per tal d'analitzar la dependència de N_A respecte les diferents variables mesurades durant el procediment.

$$N_A=\frac{F}{e}=\frac{Q}{n_e e}=\frac{It}{n_e e}=\frac{It}{2ne}=\frac{It}{2\frac{PV}{RT}e}=\frac{ItRT}{2PVe}=\frac{ItRT}{2Ve\left(P_{atm}-P_{vapor}-P_{H2O}\right)}=\frac{ItRT}{2Ve\left(P_{atm}-P_{vapor}-\rho g h\right)}$$

Així, trobem que NA depèn de les nostres mesures de la intensitat de corrent *I,* el temps de durada del procés *Δt,* la temperatura *T,* l'alçada de la columna d'aigua *h* i del volum d'hidrogen obtingut *V*.

La resta de valors són constants o valors que hem consultat en taules o a Internet i no disposem del seu marge d'error. A continuació calculem les derivades parcials de la funció N_A respecte cadascuna de les variables considerades, calculem l'error respecte cadascuna d'elles i l'error total.

$$\frac{\partial N_A}{\partial I}=\frac{tRT}{2Ve\left(P_{atm}-P_{vapor}-\rho g h\right)} \quad \rightarrow \quad \epsilon_{N_A}(I)=\left|\frac{\partial N_A}{\partial I}\right|\epsilon_I$$

$$\frac{\partial N_A}{\partial t}=\frac{IRT}{2Ve\left(P_{atm}-P_{vapor}-\rho g h\right)} \quad \rightarrow \quad \epsilon_{N_A}(t)=\left|\frac{\partial N_A}{\partial t}\right|\epsilon_t$$

$$\frac{\partial N_A}{\partial T}=\frac{ItR}{2Ve(P_{atm}-P_{vapor}-\rho g h)} \rightarrow \epsilon_{N_A}(T)=|\frac{\partial N_A}{\partial T}|\epsilon_T$$

$$\frac{\partial N_A}{\partial V}=\frac{-ItRT}{2V^2 e(P_{atm}-P_{vapor}-\rho g h)} \rightarrow \epsilon_{N_A}(V)=|\frac{\partial N_A}{\partial V}|\epsilon_V$$

$$\frac{\partial N_A}{\partial h}=\frac{ItRT\rho g}{2Ve(P_{atm}-P_{vapor}-\rho g h)^2} \rightarrow \epsilon_{N_A}(h)=|\frac{\partial N_A}{\partial h}|\epsilon_h$$

$$\boxed{\epsilon_{N_A}=\sqrt{\epsilon^2_{N_A}(I)+\epsilon^2_{N_A}(t)+\epsilon^2_{N_A}(T)+\epsilon^2_{N_A}(V)+\epsilon^2_{N_A}(h)}}$$

Exp	dN/dI	dN/dt	dN/dT	dN/dV	dN/dh
1	1,681E+25	1,958E+20	1,998E+21	3,954E+25	6,267E+22
2	5,858E+25	1,727E+20	1,997E+21	1,202E+26	6,335E+22
3	3,034E+25	2,425E+20	1,985E+21	8,772E+25	6,275E+22

Exp	ε(I)	ε(t))	ε(T)	ε(V)	ε(h)	ε
1	1,681E+21	1,958E+20	1,998E+20	1,977E+22	3,134E+19	1,985E+22
2	5,858E+21	1,727E+20	1,997E+20	6,011E+22	3,167E+19	**6,039E+22**
3	3,034E+21	2,425E+20	1,985E+20	4,386E+22	3,137E+19	4,397E+22

Finalment, es pren el valor de l'error de resolució més gran aproximat per excés amb 2 xifres significatives i obtenim el següent valor de N_A:

$$\boxed{N_A=5{,}99(\pm 0{,}61)\times 10^{23}\,mol^{-1}}$$

2.5 Determinació de *R:* reacció entre un metall i un àcid

2.5.1 Objectius

Determinar el volum molar de l'hidrogen.

Determinar la constant dels gasos.

2.5.2 Introducció

És ben coneguda la reacció entre els metalls i els àcids en la que es produeix gas hidrogen. Fem reaccionar una quantitat de massa *m* coneguda de magnesi amb àcid clorhídric en excés:

$$Mg_{(s)} + 2\ HCl_{(aq)} \rightarrow MgCl_{2\ (aq)} + H_{2\ (g)}$$

Es pot calcular la quantitat (nombre de mols) de gas hidrogen produït a partir de la massa molar del magnesi i l'estequiometria de la reacció:

$$m \times \frac{24{,}305\,g}{1\,mol\,Mg} \times \frac{1\,mol\,H_2}{1\,mol\,Mg} = n_{H_2}$$

El gas produït el recollim en un tub invertit i, un cop determinats el seu volum V, la temperatura T i la pressió del gas P, utilitzem l'equació dels gasos ideals per trobar la constant dels gasos:

$$PV = nRT \quad \rightarrow \quad R = \frac{PV}{nT} = \frac{P\,V_m}{T}$$

Per calcular la pressió P hem de tenir en compte que a l'interior del tub hi ha dues pressions diferents[9]: la pressió del gas hidrogen (P_{H2}), la pressió de vapor de l'aigua (P_{vapor}).

La suma d'aquestes pressions ha d'igualar la pressió atmosfèrica a l'exterior del recipient.

$$P_{atm} = P_{H2} + P_{vapor} + P_{H2O} \rightarrow P_{H2} = P_{atm} - P_{vapor} - P_{H2O}$$

2.5.3 Material

matràs Kitasato

goma

cinta de magnesi

àcid clorhídric 1M

aigua destil·lada

termòmetre

9 Aquest càlcul ja ha estat explicat detalladament en l'apartat de determinació de la constant d'Avogadro.

cubeta

tub invertit

balança electrònica (de precisió 0,01g)

xeringa

2.5.4 Procediment

- Omplir d'aigua una cubeta i posar-hi el tub invertit també ple d'aigua.

- Connectar la llengüeta del matràs amb el tub de recollida de gasos a través de la mànega.

- Col·locar el tros de magnesi prèviament pesat a la bàscula dins del matràs Kitasato.

- Afegir-hi la solució d'àcid clorhídric en excés mitjançant la xeringa i tapar-ho ràpidament perquè no s'escapi l'hidrogen produït.

- Quan ja s'hagi consumit el reactiu limitant, anotar el volum de gas contingut dins del tub aforat i mesurar l'alçada de l'aigua per determinar la pressió.

Figura 21: Fotografies del muntatge experimental realitzat

2.5.5 Càlculs i resultats

Dades inicials:

g = 9,81 m/s² ρ_{H2O} = 997 kg/m³ M_{Mg} = 24,305 g/mol

Experiment 1:

P_{atm} = 100990 Pa

T = 24,7ºC

h_{H2O} = 27,6 cm

V_{H2} = 21,3mL

m_{Mg} = 0,02 g

$$0{,}02\,g\times\frac{1\,mol\,Mg}{24{,}305\,g}\times\frac{1\,mol\,H_2}{1\,mol\,Mg}=8{,}229\times10^{-4}\,mols_{H_2}$$

$$V_m=\frac{V}{n}=\frac{21{,}3\times10^{-3}}{8{,}229\times10^{-4}}=25{,}884\,L/mol$$

$$P_{H2O}=\rho\,g\,h=997\cdot9{,}81\cdot27{,}6\times10^{-2}=2699{,}44\,Pa$$

$$P_{H2}=P_{atm}-P_{vapor}-P_{H2O}=100990-3169-2699{,}44=95121{,}56\,Pa$$

$$R=\frac{PV}{nT}=\frac{P\,V_m}{T}=\frac{95121{,}56\times10^{-3}\cdot25{,}884}{297{,}85}=8{,}266\,kPa\cdot L/K\cdot mol$$

Repetint aquests càlculs per cada prova hem obtingut els resultats següents:

Exp	Patm (Pa)	PH2O (Pa)	h H2O (cm)	Volum H2 (mL)	m Mg (g)	T (K)	R
1	100990	3169,0	27,6	21,3	0,02	297,85	8,2666
2	100990	3362,9	18,9	31,4	0,03	299,15	8,1449
3	100990	3362,9	17,5	32,2	0,03	298,45	8,3839
4	100990	3362,9	19,2	30,4	0,03	298,65	7,8962
5	101500	3781,8	20,7	33,2	0,03	301,15	8,5470

La mitjana obtinguda és de: 8,243 (desviació típica: 0,22)

Per fer el càlcul d'error de resolució, substituïm a la fórmula de R cadascuna de les expressions utilitzades per tal d'analitzar la dependència de R respecte les diferents variables mesurades durant el procediment.

$$R=\frac{PV}{nT}=\frac{PV}{(m/M)T}=\frac{(P_{atm}-P_{vapor}-\rho\,g\,h)V}{(m/M)T}$$

Així, trobem que R depèn de les nostres mesures de l'alçada de la columna d'aigua h, el volum d'hidrogen obtingut V, la massa de magnesi m i la temperatura T.

A continuació calculem les derivades parcials de la funció R respecte cadascuna de les variables considerades, calculem l'error respecte cadascuna d'elles i l'error total.

$$\frac{\partial R}{\partial h}=\frac{-\rho g V}{(m/M)T} \quad \rightarrow \quad \epsilon_R(h)=\left|\frac{\partial R}{\partial h}\right|\epsilon_h$$

$$\frac{\partial R}{\partial V}=\frac{(P_{atm}-P_{vapor}-\rho g h)}{(m/M)T} \quad \rightarrow \quad \epsilon_R(V)=\left|\frac{\partial R}{\partial V}\right|\epsilon_V$$

$$\frac{\partial R}{\partial m}=\frac{-(P_{atm}-P_{vapor}-\rho g h)V}{m^2 T/M} \quad \rightarrow \quad \epsilon_R(m)=\left|\frac{\partial R}{\partial m}\right|\epsilon_m$$

$$\frac{\partial R}{\partial T}=\frac{-(P_{atm}-P_{vapor}-\rho g h)V}{(m/M)T^2} \quad \rightarrow \quad \epsilon_R(T)=\left|\frac{\partial R}{\partial T}\right|\epsilon_T$$

$$\boxed{\epsilon_R=\sqrt{\epsilon_R^2(h)+\epsilon_R^2(V)+\epsilon_R^2(m)+\epsilon_R^2(T)}}$$

Exp	dR/dh	dR/dV	dR/dm	dR/dT
1	8,500E+02	3,881E+02	4,133E+02	2,775E-02
2	8,317E+02	2,594E+02	2,715E+02	2,723E-02
3	8,549E+02	2,604E+02	2,795E+02	2,809E-02
4	8,066E+02	2,597E+02	2,632E+02	2,644E-02
5	8,736E+02	2,574E+02	2,849E+02	2,838E-02

Exp	ε(h)	ε(V)	ε(m)	ε(T)	ε
1	4,250E-01	1,941E-01	4,133E+00	2,775E-03	**4,134E+00**
2	4,159E-01	1,297E-01	2,715E+00	2,723E-03	2,715E+00
3	4,275E-01	1,302E-01	2,795E+00	2,809E-03	2,795E+00
4	4,033E-01	1,299E-01	2,632E+00	2,644E-03	2,633E+00
5	4,368E-01	1,287E-01	2,849E+00	2,838E-03	2,850E+00

Finalment, es pren el valor de l'error de resolució més gran aproximat per excés amb 2 xifres significatives i obtenim el següent valor de R:

$$\boxed{R=8{,}2(\pm 4{,}2)\,kPa\cdot L/K\cdot mol}$$

3 CÀRREGA ELEMENTAL

3.1 Models atòmics

3.1.1 Inicis de l'atomisme: dels filòsofs grecs a Dalton

Ja en l'antiga Grècia, els grans pensadors es plantejaven quina era l'estructura de la matèria. Hi havia dos corrents de pensament: continuista i atomista. Els primers, com Aristòtil, creien que la matèria era contínua i que es podia subdividir de forma indefinida. Els altres, com Demòcrit i Leucip, suposaven que era discontínua i constituïda per partícules indivisibles que anomenaren àtoms.

Segons Demòcrit:

els àtoms es movien en el buit

els seus xocs a l'atzar provocaven la formació dels cossos

les diferències entre dels cossos es devien a les diverses propietats (forma, posició i mida) dels àtoms que els constituïen.

Tot i que la teoria de Demòcrit, amb la introducció dels conceptes d'àtom i buit, va ser precursora de la concepció actual de la matèria, durant molts segles no fou acceptada i la teoria continuista es va afermar al pensament durant més de vint segles. No va ser fins el 1803 que el químic britànic John Dalton (1766- 1844) proposà la primera teoria atòmica amb caràcter científic, marcant l'inici de la química moderna.

Basant-se en un sèrie d'experiments al seu laboratori, Dalton va reprendre les idees dels atomistes grecs. Les idees fonamentals de la seva teoria eren:

- La matèria està constituïda partícules esfèriques i diminutes anomenades àtoms.

- Els àtoms són indivisibles i no es modifiquen en les reaccions químiques.

- Tots els àtoms d'un mateix element són idèntics: tenen la mateixa mida, massa i propietats químiques.

- Els àtoms d'elements químics diferents són diferents.

- Els compostos estan formats per la unió d'àtoms d'elements diferents en proporcions fixes i senzilles.

Figura 22: Símbols atòmics segons Dalton.
Font: Viquipèdia

3.1.2 Les partícules subatòmiques

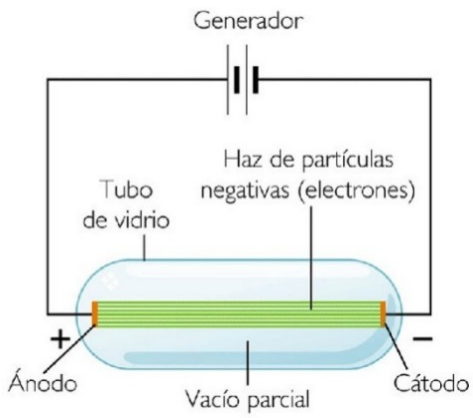


Figura 23: Tub de raigs catòdics.
Font: Míriam Redondo

Mig segle més tard, el físic anglès Joseph John Thomson (1856-1940) va proposar un model d'àtom no uniforme format per unes partícules amb càrrega negativa (electrons), immerses en un fluid de càrrega elèctrica positiva, que donava com a resultat un àtom elèctricament neutre.

Amb les seves pràctiques, Thomson va observar que podia extreure partícules amb càrrega elèctrica aplicant una descàrrega a les molècules d'un gas. Per fer-ho, utilitzava un tub de vidre que conté un gas i on es crea parcialment el buit. Aplicant un alt voltatge, generava un corrent elèctric al llarg de tot el tub. Juntament amb aquest corrent, el gas emet uns raigs (raigs catòdics) que poden ser desviats aplicant camps elèctrics i magnètics.

Estudiant les propietats d'aquests raigs, Thomson va arribar a la conclusió que estaven constituïts per partícules amb càrrega negativa, que anomenà electrons.

A més, les partícules eren idèntiques per a qualsevol gas, de manera que havien de formar part de la composició de qualsevol àtom. Així doncs, la idea que els àtoms eren indivisibles es va ensorrar.

En els inicis del s. XX, el físic britànic nascut a Nova Zelanda Ernest Rutherford (1871-1937) aportà noves evidències sobre l'estructura de l'àtom. En el seu experiment de la làmina d'or del 1911, Rutherford va llançar partícules alfa de càrrega positiva sobre una prima làmina d'or.

Contràriament al que esperava, ja que segons Thomson els àtoms eren esferes massisses, va observar que:

la major part de les partícules travessaven la làmina sense desviar-se

algunes es desviaven i canviaven de direcció considerablement

unes poques partícules rebotaven cap enrere.

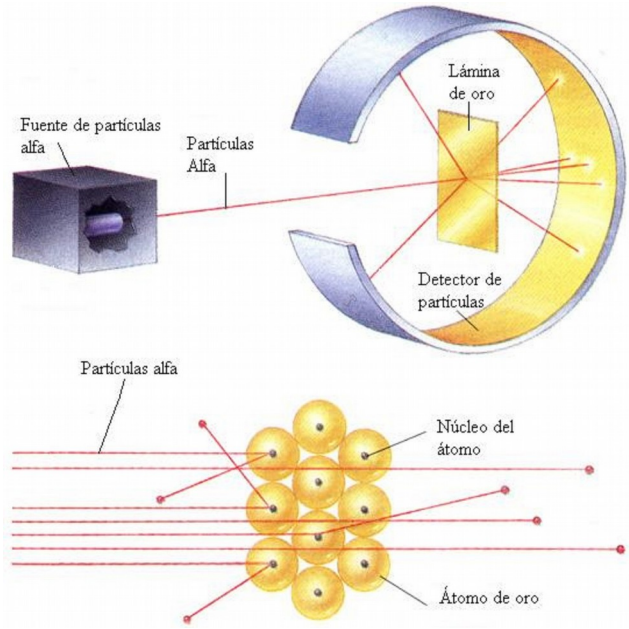


Figura 24: Experiment de la làmina d'or.
Font: Míriam Redondo

Per explicar aquests resultats, Rutherford proposà un model d'àtom constituït per un nucli central molt petit (amb càrrega positiva i molt massiu) i un embolcall o escorça on se situen els electrons (amb càrrega negativa) orbitant al voltant del nucli.

Així, la majoria de partícules alfa travessen la làmina sense impactar amb res, ja que l'àtom és gairebé tot buit. Les partícules que, en la seva trajectòria, passen prop del nucli, són desviades per la repulsió entre càrregues positives. Unes poques partícules alfa reboten perquè impacten contra el nucli, que concentra la major part de la massa de l'àtom.

El 1917, el mateix Rutherford va demostrar que la càrrega elèctrica positiva del nucli atòmic de l'element que constituïa la làmina era sempre un múltiple enter de la càrrega elemental. En conseqüència, Rutherford va pensar que la càrrega del nucli era deguda a la presència de partícules de càrrega positiva de valor igual a la càrrega elemental. Aquest resultat significà el descobriment del protó com a partícula constitutiva del nucli de tots els elements. Tot i que també va intuir l'existència dels neutrons, fou Chadwick (1891-1974) qui en va fer el descobriment l'any 1932, estudiant l'excés de massa de l'àtom d'heli (la massa atòmica relativa és 4 i no 2,com correspon al nombre de protons).

No obstant això, el model de Rutherford presentava dos seriosos inconvenients: d'una banda, era incapaç d'explicar perquè els electrons es mantenien en les seves òrbites i no collapsaven cap al nucli; d'altra banda, tampoc aportava cap explicació sobre l'observació dels espectres atòmics.

3.1.3 La nova física del s XX

En el següent capítol d'aquest treball, dedicat a la constant de Planck, abordarem amb més detall el tema dels espectres atòmics i el nou model atòmic proposat pel físic danès Niels Böhr (1885- 1962). De forma breu, ara esmentarem que incorporà les noves idees de Planck i Einstein sobre la quantització de l'energia millorant el model atòmic de Rutherford.

Publicat el 1913, suposava que l'àtom estava format per un nucli compacte amb càrrega elèctrica positiva i una escorça on els electrons estan distribuïts en diferents capes o òrbites. En aquestes capes, l'energia de l'electró es troba quantitzada, la qual cosa significa que l'electró només pot ocupar unes òrbites o estats estacionaris amb uns valors concrets i que depenen de cada àtom.

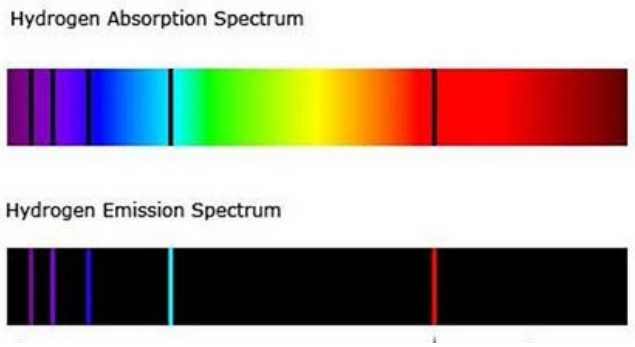


Figura 25: Línies espectrals de l'hidrogen.
Font: Khan Academy

L'èxit rotund del seu model es deu a l'explicació dels espectres d'emissió de llum de l'àtom d'hidrogen, associant cada línia espectral a un salt entre nivells energètics.

Posteriorment, el model atòmic de Bohr també va ser modificat per tal d'explicar els espectres d'àtoms més complexos. Tot i així, segueix essent la base del model atòmic actual. El model vigent d'àtom quàntic-ondulatori estableix que és impossible saber amb exactitud on es troba un electró. Enlloc d'això, es defineix una regió de l'espai (anomenada orbital atòmic) al voltant del nucli en la qual hi ha una alta probabilitat de trobar-lo.

Aquest model es basa en la mecànica quàntica ondulatòria, teoria desenvolupada al llarg de la dècada del 1920 gràcies a les contribucions de científics destacats com Einstein, Planck, de Broglie, Bohr, Heisenberg o Schrödinger.

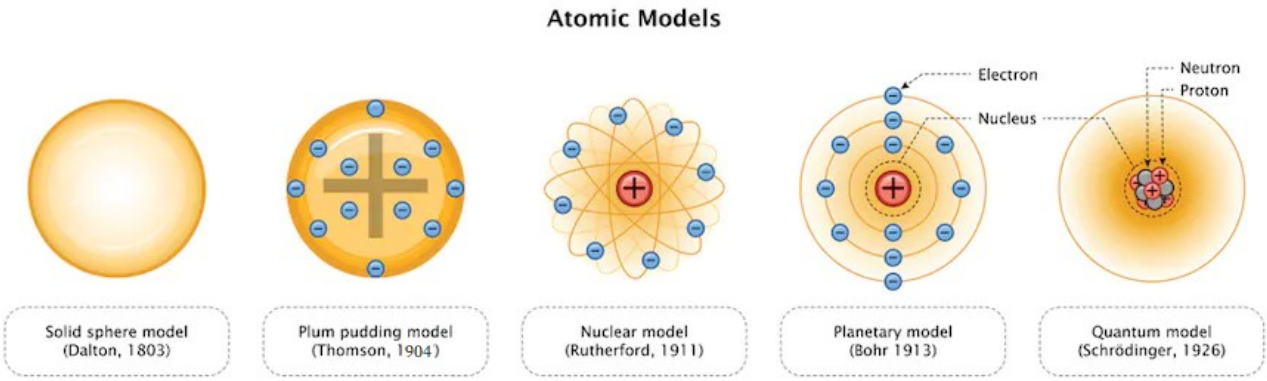


Figura 26: Models atòmics. Font: Vinoth Narasingam

3.2 Mesures de *e*

L'electró (símbol e^-) és una partícula elemental perquè no té uns components o una subestructura coneguts. La seva càrrega correspon a la càrrega elemental negativa.

La càrrega elèctrica elemental *e* és una constant física equivalent al mòdul de la càrrega elèctrica d'un electró i es defineix com a la mínima càrrega elèctrica possible. El seu valor és de :

$$e = |q_e| = 1{,}602 \times 10^{-19}\ C$$

L'any 1909, el físic nord-americà Robert Millikan (1868-1953) fou el primer en fer una mesura experimental de la constant *e* a partir del seu famós experiment de la gota d'oli. Només quatre anys més tard, el físic anglès Henry Moseley (1887-1915) determinà experimentalment que tots els nuclis atòmics contenen càrrega positiva amb valors múltiples enters de la càrrega elemental *e*. Això significa que la càrrega dels electrons i la dels protons són idèntiques en valor absolut.

Tal com s'ha explicat en el capítol anterior, Thomson va descobrir l'electró amb el seu tub de raigs catòdics (1896). Va fer bones estimacions tant de la càrrega *e* com de la massa *m*, i va demostrar que la seva proporció càrrega-massa (*e*/*m*) era independent del material del càtode, i que per tant es tractava d'una partícula universal.

3.2.1 Thomson: càlcul relació e/m de l'electró

L'objectiu de l'experiment de Thomson era demostrar la naturalesa corpuscular dels raigs catòdics. L'aparell constava de:

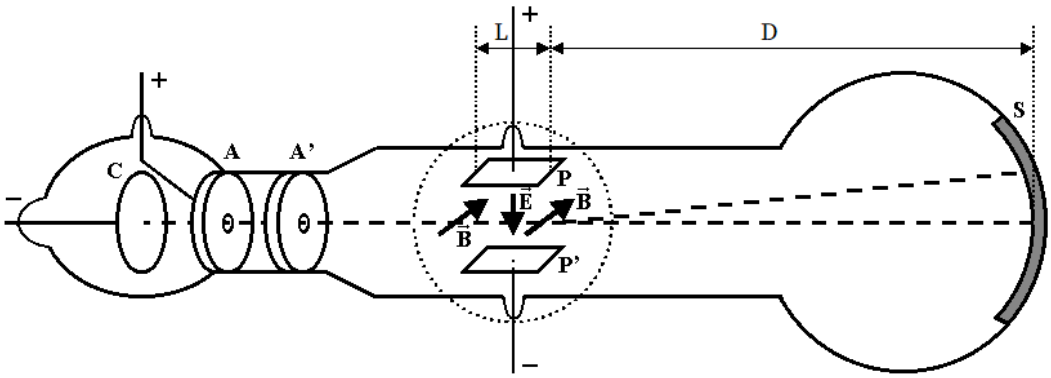


Figura 27: Esquema de l'aparell de Thomson. Font: upm

C: càtode on són emesos els electrons.

A, A': ànodes amb un potencial positiu elevat.

P,P': làmines deflectores separades una distància coneguda, de longitud *L* que generen un camp elèctric uniforme *E*.

S: placa fluorescent on impacten els electrons.

En el seu muntatge experimental, els electrons surten del càtode *C*; la major part impacten en *A* però alguns travessen l'orifici. Entre les plaques *A* i *A',* els electrons són accelerats mitjançant un camp elèctric. Un cop passat l'orifici de *A',* els electrons es veuen sotmesos als camps elèctric *E* i magnètic *B* durant una distància *L*.

La prova constava de dos procediments en els que s'utilitzava el dispositiu de forma diferent:

1) Determinació de la velocitat del feix d'electrons

En aquesta primera part s'emetia i s'accelerava un feix d'electrons mitjançant un camp elèctric. Després es determinava la seva velocitat a partir d'un selector de velocitats. El selector combinava un camp elèctric i un camp magnètic produïts per unes plaques connectades a una bateria i per uns electroimants, respectivament.

Analitzem tant la força elèctrica com la magnètica exercides sobre les partícules:

- El camp elèctric uniforme *E* produït per les plaques *P* i *P'* exerceix una força elèctrica sobre la partícula de càrrega *q* el mòdul de la qual ve donat per :

$$F_e = qE$$

- El camp magnètic uniforme *B* produït pels electroimants (no dibuixats a la figura) exerceix una força magnètica sobre la partícula de càrrega *q* que es mou a una velocitat *v* el mòdul de la qual ve donat per :

$$F_m = qvB$$

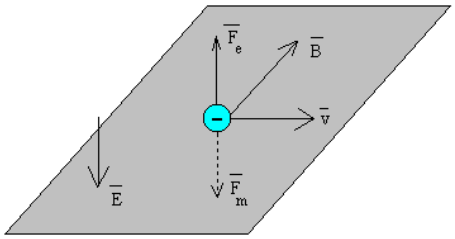


Figura 28: forces elèctrica i magnètica sobre un electró en moviment.
Font: Angel Franco.

Com que es tracta d'una càrrega negativa, les dues forces són de sentits oposats i els electrons no es desviaran si les forces són iguals. Thomson ajustava els camps per compensar les forces (equilibri), de manera que els electrons no es desviaven i seguien una trajectòria rectilínia. En aquestes condicions, podia determinar la velocitat del feix d'electrons a partir de les intensitats dels camps elèctric i magnètic aplicats.

$$F_e = F_m \quad \rightarrow \quad qE = qvB \quad \rightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

2) Determinació de la relació e/m:

En aquesta segona part s'emetia i s'accelerava un feix d'electrons mitjançant un camp elèctric, en les mateixes condicions que el procediment anterior. Aleshores, ja coneguda la ve-

locitat dels electrons, es determinava la relació e/m mesurant la desviació del feix sota l'acció d'un camp elèctric (sense activat el camp magnètic).

En aquest cas, un cop accelerat i amb una velocitat v, l'electró entra en camp elèctric orientat perpendicularment a la seva velocitat. Entre les plaques deflectores, l'electró es veu sotmès només a la força elèctrica de manera que descriurà una trajectòria parabòlica.

Apliquem, doncs, les equacions del moviment parabòlic que desdoblem en un MRU horitzontal i un MRUA vertical:

Eix X (MRU): $a_x=0$ $v_x=v$ $x=vt$

Eix Y (MRUA): $a_y=\frac{qE}{m}$ $v_y=a_y t$ $y=\frac{1}{2}a_y t^2$

Combinant les fórmules anteriors, la desviació vertical y del feix d'electrons a la sortida de les plaques serà:

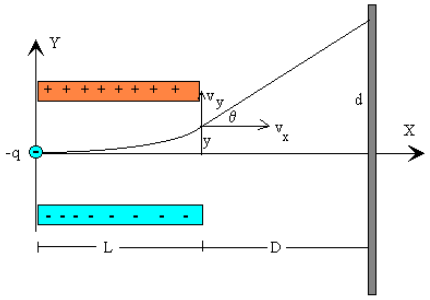


Figura 29: desviació de l'electró entre les plaques d'un condensador. Font: Angel Franco.

$$y=\frac{qEL^2}{2mv^2}$$

Un cop l'electró abandona la regió entre plaques, a partir de $x=L$, segueix un MRU. La desviació total en la pantalla situada a una distància D del condensador ve donada per:

$$d=y+\frac{v_y}{v_x}D=\frac{qEL}{mv^2}\left(\frac{L}{2}+D\right)$$

A partir de totes les mesures *(d, D, E, L, v)* Thomson calculà la relació càrrega/massa de l'electró com a:

$$|q|/m = e/m_e = 1{,}76.10^{11}\ C/kg$$

3.2.2 Millikan: experiment de la gota d'oli

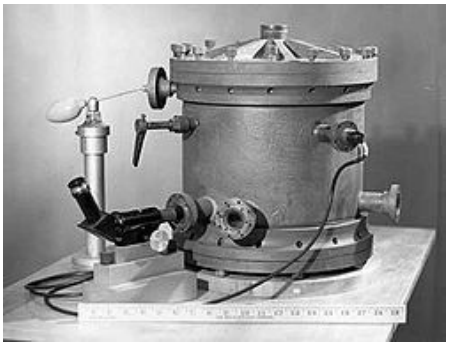


Figura 30: Aparell utilitat per Millikan el 1909. Font: Wikipedia

Amb l'experiment de Thomson, els científics s'adonaren de la possibilitat de la quantització de la càrrega i que, per tant, podia existir una porció mínima de càrrega elèctrica, és a dir, un valor de càrrega elemental. La seva mesura fou realitzada per Millikan l'any 1909.

L'objectiu del seu muntatge era la determinació de la quantitat de càrrega d'una minúscula gota d'oli.

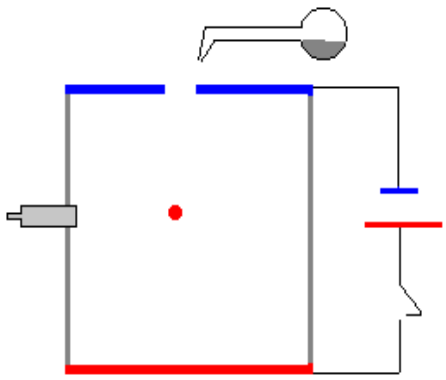


Figura 31: esquema de l'experiment de Millikan. Font: Ángel Franco.

Les gotes s'injecten entre les armadures d'un condensador pla, les quals es troben disposades de manera horitzontal. Una diferència de potencial aplicada crea un camp elèctric orientat verticalment.

Les forces que actuen sobre la gota són: força de la gravetat, força deguda al principi d'Arquimedes, resistència de l'aire (fórmula de Stokes) i força deguda al camp elèctric. La resultant de totes aquestes forces produirà una acceleració de la gota.

Els mòduls de les forces venen donats per les següents expressions:

força gravitatòria o pes de la gota: $P=mg=\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{oli} g$

força d'Arquimedes o empenyiment de l'aire $F_A=m'g=\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{aire} g$

força de Stokes o de fricció amb l'aire $F_r=6\pi \eta_{aire} rv$

força elèctrica del camp creat pel condensador $F_e=qE=q\frac{\Delta V}{d}$

on:

r = radi de la gota

g = acceleració de la gravetat

ρ_{oli} = densitat de l'oli

ρ_{aire} = densitat de l'aire

η_{aire} = viscositat de l'aire

v = velocitat de la gota

q =càrrega de la gota

ΔV = diferència de potencial entre les plaques del condensador

d = distància entre les plaques

El procediment constava de dues parts que es portaven a terme amb una mateixa gota. En primer lloc es determinava el radi de la gota; després la càrrega. L'experiment es repetia múltiples vegades amb diferents gotes. Totes elles donaven un valor de la càrrega (positiva) múltiple d'una càrrega mínima: la càrrega elemental.

1) Determinació del radi de la gota a partir de la velocitat de caiguda en absència de camp elèctric.

Si s'anul·la la diferència de potencial aplicada a les armadures, la gota caurà amb una velocitat constant v [10]. Si negligim la força d'empenyiment de l'aire, ja que la densitat de l'oli és molt superior, les úniques forces que actuen són el pes i la fricció.

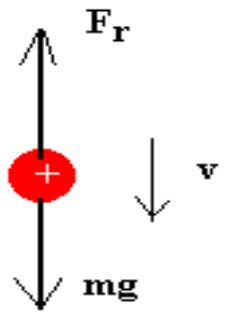


Figura 32: caiguda en absència de camp elèctric. Font: Ángel Franco

Apliquem la 2ª llei de Newton:

Velocitat constant → equilibri de forces ΣF=0

$$P=F_r \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{oli} g = 6\pi \eta_{aire} r v \quad \rightarrow \quad r=\sqrt{\frac{9\eta_{aire} v}{2\rho_{oli} g}}$$

2) Determinació de la càrrega fent que la gota es mantingui immòbil en presència d'un camp elèctric.

Bàsicament hi ha dues maneres de mesurar la càrrega de la gota. La primera és mantenint la gota immòbil en suspensió. La segona, més complexa, és aconseguint que la gota s'elevi a velocitat constant.

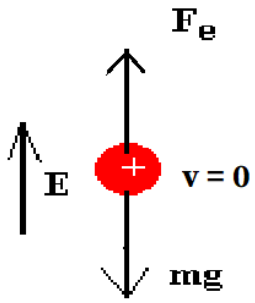


Figura 33: en suspensió sota l'acció del camp elèctric. Font: Ángel Franco.

Nosaltres exposarem el primer cas (gota immòbil), amb força de Stokes (resistència de l'aire) nul·la. Seguirem menyspreant la força d'empenyiment de l'aire. Apliquem de nou la 2ª llei de Newton:

Velocitat nul·la → equilibri de forces ΣF=0

$$P=F_e \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{oli} g = q\frac{\Delta V}{d} \quad \rightarrow \quad \boxed{q=\frac{4\pi r^3 \rho_{oli} g d}{3\Delta V}}$$

Repetint l'experiment per a moltes gotes, Millikan calculà el valor de la càrrega elemental com:

$$e = 1{,}592 \times 10^{-19}\ C$$

10 Cal anar provant diverses gotes de diferents mides fins que alguna caigui a velocitat constant

3.3 Determinació de *e:* experiment de la gota d'oli amb simulador

3.3.1 Objectius

Determinar el valor de la càrrega fonamental *e* a partir d'una simulació de l'experiment de Millikan del 1909.

3.3.2 Introducció

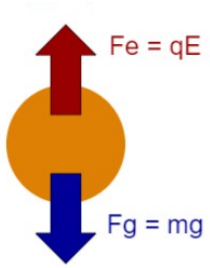


Figura 34: Equilibri de forces. Font: McCulley, F.

En aquesta simulació, s'aconsegueix mantenir una gota en suspensió, de manera que s'equilibren la força elèctrica i el pes:

$$F_e = F_g \quad \rightarrow \quad qE = mg \quad \rightarrow \quad q = \frac{mg}{E} \quad \text{on} \quad E = \frac{\Delta V}{d}$$

D'altra banda es determina la massa de la gota a partir del seu radi i de la densitat de l'oli com: $m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$

Aquest radi es mesura directament amb una lupa amb quadrícula i no tal com ho va fer Millikan en el seu experiment.

3.3.3 Material

Simulació:
https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/MillikanOilDropLab/index.html

on disposem de:

cambra amb condensador de plaques pla-paral·leles separades 3mm

polvoritzador amb oli de densitat 900 kg/m³

visor amb escala en nanòmetres

3.3.4 Procediment

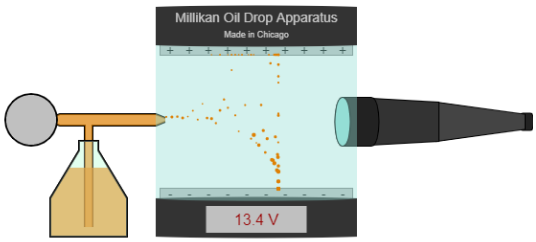


Figura 35: Aparell de Millikan en la simulació. Font: McCulley, F.

1) Pressionar el polvoritzador per generar gotes a l'interior de la cambra

2) Si no s'aconsegueix que cap gota quedi en suspensió tornar a repetir el pas 1)

3) Un cop s'obté una gota en suspensió entre les plaques mesurar el seu radi utilitzant el visor amb escala de referència així com la diferència de potencial entre plaques

4) Repetir el procediment fins a obtenir, almenys, 10 gotes.

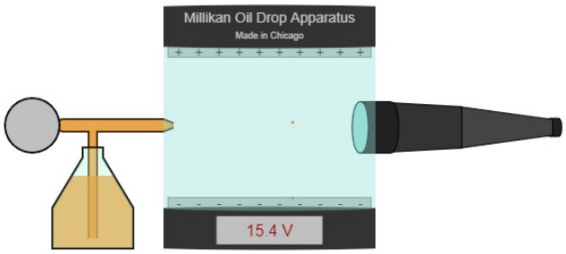
3.3.5 Càlculs i resultats

Dades inicials:

ρ_{oli} = 900 kg/m³ d = 3mm g = 9,81 m/s²

Experiment 8:

r_{gota}= 400 nm ΔV = 15,4 V



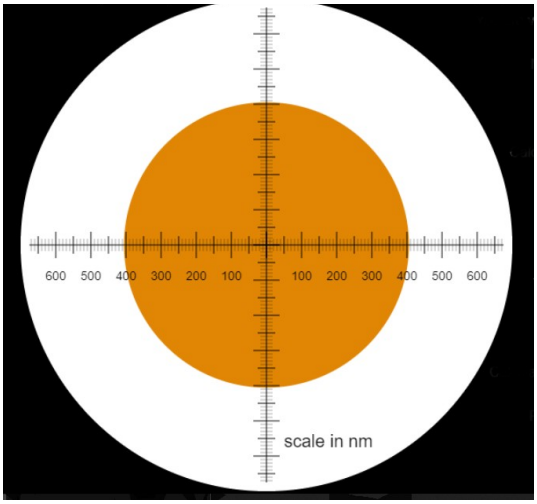


Figura 36: Imatges d'una de les gotes obtingudes (gota 8)

$$m=\rho\frac{4}{3}\pi r^3=900\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(400\times10^{-9})^3=2{,}413\times10^{-16}\,kg$$

$$E=\frac{\Delta V}{d}=\frac{15{,}4}{3\times10^{-3}}=5133{,}33\,V/m=5133{,}33\,N/C$$

$$q=\frac{mg}{E}=\frac{2{,}413\times10^{-16}\cdot9{,}81}{5133{,}33}=4{,}611\times10^{-19}\,C$$

La taula següent mostra els valors obtinguts repetint aquest procés amb 10 gotes diferents:

exp	radi (nm)	voltatge (V)	volum (m3)	massa (kg)	camp (V/m)	càrrega (C)	q/qmin
1	530	15,1	6,236E-19	5,613E-16	5033,33	1,094E-18	3,56
2	410	12,0	2,887E-19	2,598E-16	4000,00	6,372E-19	2,07
3	370	11,8	2,122E-19	1,910E-16	3933,33	4,763E-19	1,55
4	400	15,1	2,681E-19	2,413E-16	5033,33	4,702E-19	1,53
5	490	13,7	4,928E-19	4,435E-16	4566,67	9,528E-19	3,10
6	470	14,5	4,349E-19	3,914E-16	4833,33	7,944E-19	2,58
7	420	16,7	3,103E-19	2,793E-16	5566,67	4,922E-19	1,60
8	400	15,4	2,681E-19	2,413E-16	5133,33	4,611E-19	1,50
9	410	12,1	2,887E-19	2,598E-16	4033,33	6,320E-19	2,06
10	380	19,8	2,298E-19	2,069E-16	6600,00	3,075E-19	1,00

L'última columna mostra el quocient entre el valor de cada càrrega i la càrrega mínima obtinguda (gota 10). Analitzant aquestes dades, ens adonem que tots són múltiples enters de la meitat del valor mínim, ja que tots els quocients són nombres enters o semienters. Per tant, concloem que la càrrega elemental correspon a:

$$e = 3{,}075 \times 10^{-19}/2 = 1{,}5375 \times 10^{-19}\, C$$

Per fer el càlcul d'error de resolució substituïm a la fórmula de q (càrrega de la gota) cadascuna de les expressions utilitzades per tal d'analitzar la dependència de q respecte les diferents variables mesurades durant el procediment. Tanmateix, només és necessari calcular l'error per la gota 10 i dividir-lo entre 2.

$$\boxed{q = \frac{mg}{E} = \frac{\rho V g}{E} = \frac{\rho \left(4/3\right) \pi r^3 g}{E} = \frac{\rho 4 \pi r^3 g}{3 \Delta V / d} = \frac{\rho 4 \pi r^3 g d}{3 \Delta V}}$$

Trobem que e depèn de les nostres mesures del radi de la gota r i de la diferència de potencial entre les plaques ΔV.

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\rho 4 \pi r^2 g d}{\Delta V} \quad \rightarrow \quad \epsilon_q(r) = \left|\frac{\partial q}{\partial r}\right| \epsilon_r$$

$$\frac{\partial q}{\partial \Delta V} = \frac{-\rho 4 \pi r^3 g d}{3 \Delta V^2} \quad \rightarrow \quad \epsilon_q(\Delta V) = \left|\frac{\partial q}{\partial \Delta V}\right| \epsilon_{\Delta V}$$

$$\boxed{\epsilon_q = \sqrt{\epsilon_q^2(r) + \epsilon_q^2(\Delta V)}}$$

exp	dq/dr	dq/dV	ε(r)	ε(V)	ε	E/2
10	2,427E-12	1,553E-20	1,214E-20	1,553E-21	1,224E-20	**6,118E-21**

Així doncs, aplicant un error de 2 xifres significatives aproximat en excés, aconseguim arribar a un valor per a la càrrega elemental de:

$$\boxed{e = 1{,}538 (\pm 0{,}062) \times 10^{-19}\, C}$$

4 CONSTANT DE PLANCK

4.1 La teoria quàntica

(basat en Tipler, edició 1994)

En els darrers anys del s. XIX i les primeres dècades del s. XX, es van produir una sèrie de descobriments sorprenents que no es podien explicar amb els conceptes de la física clàssica. Les lleis sòlidament establertes deixaven de ser vàlides en intentar aplicar-les a fenòmens dels sistemes microscòpics. El comportament de les partícules que componen els àtoms només pot ser descrit modificant de forma essencial algunes idees fonamentals que fins aleshores s'aplicaven per explicar el món físic.

Molts científics contribuïren al desenvolupament de la teoria quàntica i el debat es va estendre al llarg d'unes quantes dècades, consolidant-se definitivament cap a finals dels anys 1920. Basant-se en els principis d'aquesta teoria, es va donar una explicació a fenòmens com la radioactivitat, la radiació del cos negre, els espectres atòmics i l'efecte fotoelèctric.

4.1.1 Radiació del cos negre: la constant quàntica h

Sorprenentment, l'origen de la constant quàntica està relacionat amb l'estudi de l'energia tèrmica, la qual es transfereix mitjançant tres processos: conducció, convecció i radiació. En la radiació, l'energia és emesa o absorbida en forma de radiació electromagnètica que es desplaça a la velocitat de la llum.

La radiació emesa per un cos qualsevol varia segons la seva temperatura. Quan l'objecte s'escalfa, el ritme d'emissió d'energia augmenta i l'energia radiada correspon a longituds d'ona cada cop més curtes:

a temperatures per sota 600 °C no és visible (λ llargues)

a temperatures entre 600 °C i 700 °C una part important de l'energia radiada es troba en l'espectre visible i es pot apreciar una resplendor vermellosa

a temperatures superiors a 700°C l'objecte es torna d'un vermell brillant i es pot posar al blanc. (λ curtes)

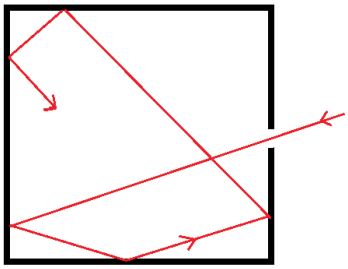


Figura 37: Cos negre.
Font: elaboració pròpia

Tots els objectes emeten radiació pel fet de trobar-se a certa temperatura, però també reflecteixen part de la radiació incident de l'entorn. Té especial interès l'estudi de l'anomenat *cos negre*. En física, un *cos negre* és aquell que absorbeix tota la radiació incident, sense reflectir-ne gens, de manera que la radiació emesa només depèn de la seva temperatura. No existeix a la natura un cos que respongui totalment a les característiques descrites, però sí que existeix algun model representatiu.

Una bona aproximació a un cos negre és una cavitat amb una petita obertura. L'energia radiant incident entra a través d'aquesta i es reflecteix múltiples vegades a les parets, essent atrapada pel cos sense poder escapar-ne (o almenys, només una mínima fracció). Així, la radiació absorbida contribuirà a augmentar la temperatura del cos, que emetrà aquesta energia tèrmica en forma de radiació electromagnètica.

La potència emesa[11] per un cos negre en funció de la longitud d'ona s'anomena distribució espectral de la radiació, i es pot obtenir experimentalment. El resultat és una funció que depèn de la longitud d'ona i també de la temperatura. La corba experimental presenta un màxim de potència a una determinada longitud d'ona que varia de forma inversament proporcional a la temperatura. Per temperatures més altes, el màxim de potència es desplaça cap a longituds d'ona més curtes.

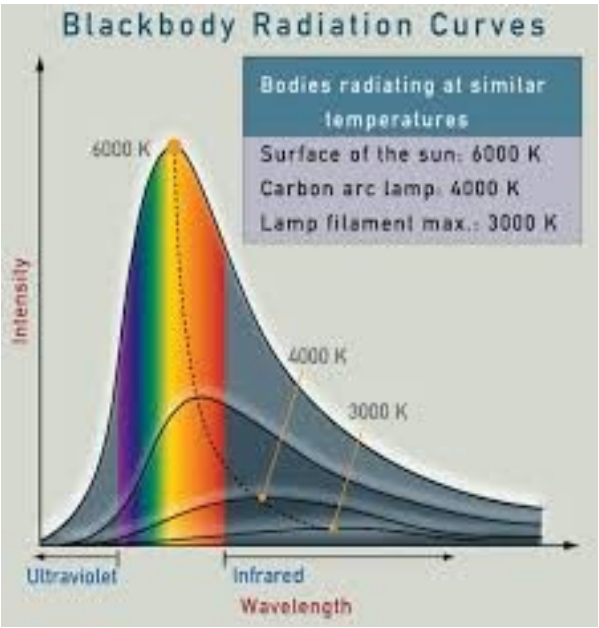


Figura 38: Distribució espectral de la radiació d'un cos negre per a diferents temperatures. Font: CSIC

A partir de les lleis de la termodinàmica clàssica, però, els resultats teòrics per a la distribució espectral d'un cos negre diferien dels resultats experimentals per longituds d'ona curtes, en les que la previsió era que el cos radiés una quantitat infinita d'energia. Fou l'anomenada *catàstrofe ultraviolada*.

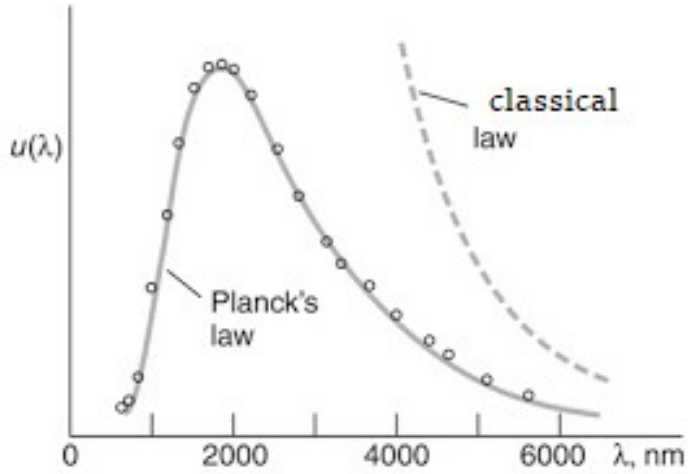


Figura 39: Distribució espectral segons el càlcul clàssic i segons la llei de Planck. Font: Tarleton University

Les discrepàncies entre les mesures experimentals i els càlculs teòrics dugueren al físic alemany Max Planck (1858-1947) a introduir alguns canvis. Amb deduccions purament matemàtiques, va trobar que podia reproduir la funció de distribució espectral si feia una hipòtesi completament nova i gens intuïtiva. La seva suposició consistia en la idea que l'energia del cos negre no era emesa de forma contínua, sinó en paquets discrets que anomenà «quàntum», i que l'energia continguda en un quàntum era proporcional a la freqüència de la radiació.

11 Potència emesa = Energia emesa / unitat de temps

Així, introdueix el concepte de quantització de l'energia, expressada amb la fórmula següent:

$$E = h\,f$$

on h és l'anomenada constant de Planck.

Amb el concepte de quantització de l'energia, Planck reproduí matemàticament les corbes de distribució espectral. Tot ajustant la seva funció a les dades experimentals, va deduir un valor per a la seva constant de:

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}$$

(Max Planck al seu fill: "Crec que avui he fet un descobriment digne del propi Newton!")

4.1.2 L'efecte fotoelèctric: els fotons

L'efecte fotoelèctric fou descobert el 1887 per Heinrich Hertz (1857-1894), tot i que l'explicació teòrica la va fer Albert Einstein el 1905. Consisteix en l'emissió d'electrons per part d'una superfície metàl·lica quan hi incideix radiació electromagnètica. Aquesta emissió es caracteritza pel fet que per cada substància exigeix una freqüència mínima o llindar de la radiació electromagnètica pròpia per sota de la qual no es produeix l'efecte, sigui quina sigui la intensitat de la radiació.

Els intents d'explicació d'aquest fenomen a partir de la visió ondulatòria de la llum no aportaven resultats satisfactoris. Des del punt de vista clàssic, en incrementar la intensitat lluminosa s'hauria d'incrementar l'energia absorbida per cada electró i, per tant, s'haurien de poder arrencar del material.

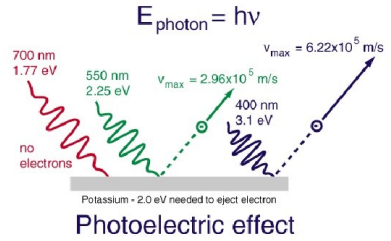


Figura 40: Efecte fotoelèctric
Font: CSIC

Einstein va explicar-ho utilitzant els quàntum que Planck havia introduït com a mètode de càlcul. Així, considerà que la llum no està distribuïda de forma contínua, sinó que es troba quantitzada en minúsculs paquets anomenats fotons. L'energia de cada fotó ve donada per la ja coneguda fórmula de Planck de l'energia del cos negre, però ara aplicada a l'energia de la radiació electromagnètica.

Aquesta consideració implicava un retrobament amb un vell conegut concepte en física: la naturalesa corpuscular de la llum. Cada «partícula de llum» o fotó de la radiació incident interactua amb un sol electró del metall. A partir d'aquesta idea es pot justificar tot el que ocorre en l'efecte fotoelèctric i que resultava inexplicable sota el punt de vista ondulatori.

D'aquesta manera:

- Si l'energia del fotó és petita (freqüències baixes) no es produeix cap emissió, ja que l'energia no és suficient per arrencar cap electró del material. Augmentar-ne la intensitat no té cap efecte, ja que cada electró interactua amb un sol fotó.

- Si l'energia del fotó és prou gran (freqüències altes), aquest electró "salta" del metall i adquireix una certa energia cinètica.

- Si augmenta la intensitat de la llum d'una freqüència donada, s'incrementa el nombre de fotons, però l'energia absorbida per cada electró segueix sent la mateixa. Per tant, augmenta el nombre d'electrons emesos però no la seva energia.

Aplicant el principi de conservació de l'energia mecànica a la interacció entre el fotó i l'electró tenim:

Energia del fotó = Energia per a arrencar l'electró + Energia cinètica de l'electró

$$E = h\,f = W_0 + E_c$$

$$W_0 = h\,f_0$$

on W_o, (funció de treball o treball d'extracció), correspon a l'energia mínima que cal donar a l'electró per "arrencar-lo" del material i E_c és l'energia cinètica que adquireix l'electró emès. La funció de treball, característica de cada material, es pot determinar amb la freqüència llindar f_o a partir de la qual es produeix l'efecte fotoelèctric.

4.1.3 Model de Bohr: espectres atòmics

Cap a finals del s. XIX, la comunitat científica havia registrat una gran col·lecció de dades sobre els espectres atòmics. Aquests s'obtenen analitzant la llum emesa pels àtoms dels gasos quan són excitats, per exemple, mitjançant descàrregues elèctriques, i s'anomenen espectres d'emissió. Anàlogament, els espectres d'absorció s'obtenen analitzant la fracció de la radiació incident que ha estat absorbida per un àtom.

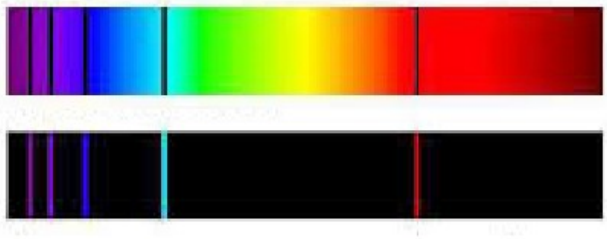


Figura 41: Espectres d'absorcio i d'emissió de l'hidrogen. Font: CESIRE

Aquesta anàlisi es porta a terme fent passar la llum per l'estreta escletxa d'un espectroscopi, que la separa en un conjunt de línies de diferents colors. El nombre de línies, les longituds d'ona i les intensitats són pròpies de cada element de la taula periòdica. Tots ells tenen un espectre únic que els caracteritza i els identifica.

Niels Bohr (Dinamarca, 1885-1962) proposà un model per a l'àtom d'hidrogen que recollia i combinava les idees de Planck i Einstein sobre la quantització de l'energia amb el model atòmic de Rutherford (explicat a l'anterior apartat d'aquest treball).

Segons Bohr, l'electró (de càrrega negativa) de l'àtom d'hidrogen es mou al voltant del nucli (de càrrega positiva) seguint la llei de Coulomb d'atracció electrostàtica entre càrregues. Per simplificar el seu model, considerà òrbites circulars. D'acord amb la teoria clàssica de l'electromagnetisme, aquesta situació és inestable i l'electró hauria de col·lapsar ràpidament en una trajectòria espiral cap al nucli.

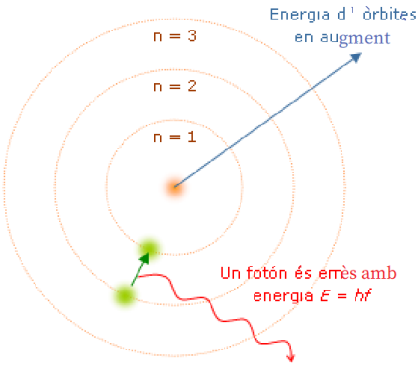


Figura 42: Transició entre òrbites estables en el model de Bohr. Font: Viquipèdia

Aleshores, Bohr introduí els nous conceptes quàntics i postulà que l'electró podia mantenir-se estable i moure's només en certes òrbites permeses o estats estacionaris d'energia definida.

Quan un electró, de la manera que sigui, adquireix o perd energia, pot transitar entre dos estats estacionaris. L'energia necessària per fer-ho ve donada per la diferència d'energia entre els dos estats i és única per a cada àtom, ja que cada un té una distribució de càrregues única.

Aquesta energia serà absorbida o emesa en forma de llum. Segons la fórmula de Planck, correspon a un fotó d'una determinada freqüència, és a dir, a un determinat color. Aquesta hipòtesi és la clau del model de Bohr per explicar els espectres atòmics. Així, en l'espectre d'emissió de l'hidrogen, les diferents línies es poden identificar com els fotons emesos amb una energia equivalent a la diferència d'energia d'una transició electrònica entre dos estats estacionaris de l'àtom.

Aquestes transicions o «salts» electrònics es poden donar entre qualssevol nivells, donant lloc a diferents sèries de línies en l'espectre.

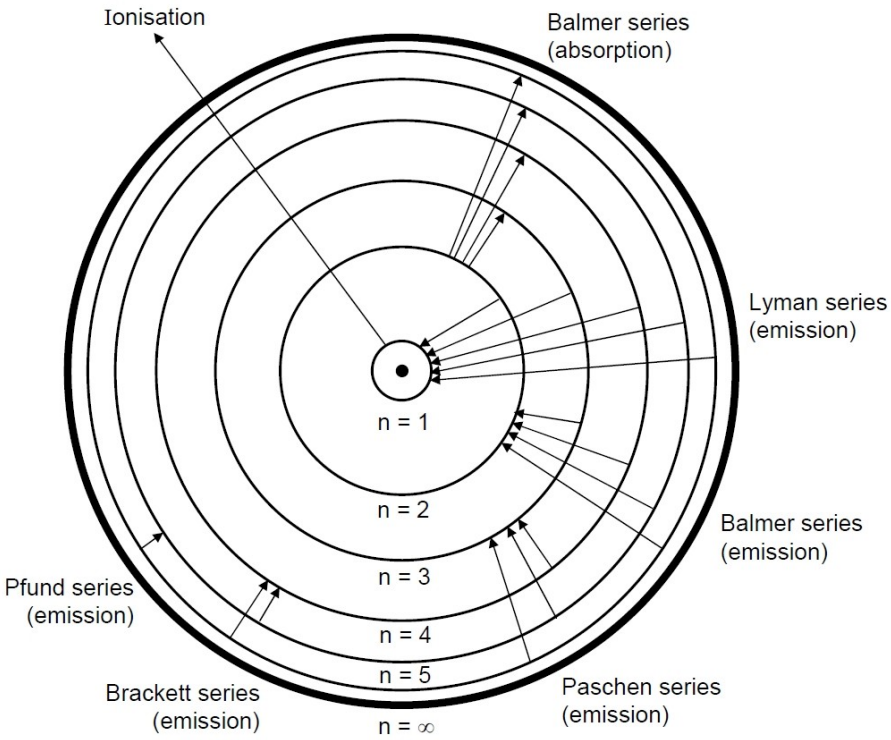


Figura 43: Transicions electròniques de les diferents línies espectrals de l'H. Font: Cronodon

Spectral series	Emission	Absorption	Frequency
Lyman series	Down to n = 1	Up from n = 1	Ultraviolet
Balmer series	Down to n = 2	Up from n = 2	Visible light
Paschen series	Down to n = 3	Up from n = 3	Near infrared
Brackett series	Down to n = 4	Up from n = 4	Far infrared
Pfund series	Down to n = 5	Up from n = 5	Far infrared

Figura 44: Taula de dades de les sèries espectrals de l'H.
Font: Cronodon

No voldríem acabar aquest capítol, però, sense anomenar la conferència Solvay de 1927.

«Els Congressos Solvay són unes trobades entre científics que tenen lloc des de 1911. N'hi ha de dos tipus: de física i de química. A principis del segle XX, aquestes conferències, especialment les de física, reunien els més grans científics del moment per discutir les noves teories i experiments que van revolucionar la física de l'època com ara la mecànica quàntica, la teoria de la relativitat i la radioactivitat.

Potser la més famosa conferència Solvay va ser la cinquena, celebrada a l'octubre de 1927. Va tractar sobre "Electrons i Fotons". Els més notables físics de l'època es van trobar per discutir la recentment formulada teoria quàntica, van donar un sentit al que no ho tenia, construïren una nova manera d'entendre el món i s'adonaren que per descriure i entendre la naturalesa calia abandonar gran part de les idees preconcebudes per l'ésser humà al llarg de tota la seva història. Disset dels vint-i-nou assistents eren o esdevindrien guanyadors del Premi Nobel.» (Viquipèdia, 2020)

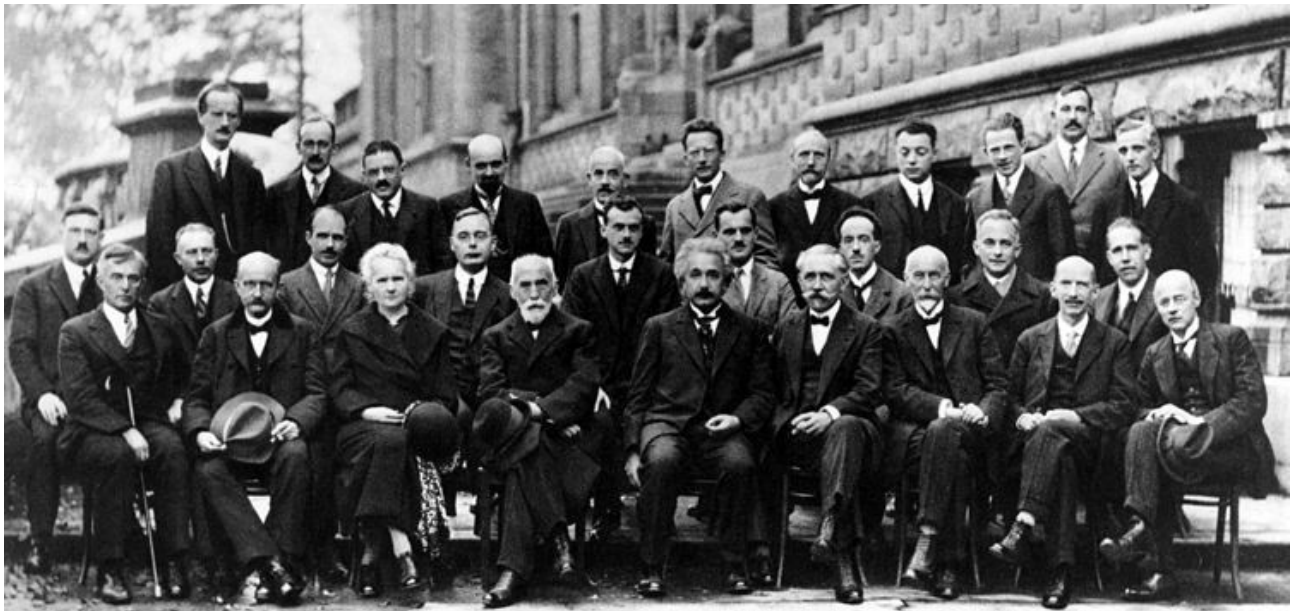


Figura 45: La famosa fotografia dels assistents al congrés Solvay de 1927. (Foto: Benjamin Couprie, Institut International de Physique Solvay, Brussel·les, Bèlgica) . Font: Viquipèdia.

4.2 Mesures de *h*

La constant de Planck (de símbol *h*), és una constant física fonamental que caracteritza la quantització de la natura. El seu valor en unitats del Sistema Internacional és:

$$h = 6{,}62607015 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

4.2.1 Millikan: potencial de frenada

La primera mesura experimental de la constant de Planck fou realitzada l'any 1916 pel físic nord-americà Robert Andrews Millikan (1868-1953), famós per haver mesurat la càrrega de l'electró amb l'experiment de la gota d'oli però menys conegut per aquesta tasca.

Quan Einstein va publicar el seu revolucionari article sobre l'efecte fotoelèctric i la naturalesa corpuscular de la llum, Millikan estava convençut que la llum era una ona i es disposà a desmentir la teoria d'Einstein. Va estar experimentant durant anys en el seu laboratori «al buit» per tal d'obtenir superfícies metàl·liques immaculadament netes i mesurar l'energia cinètica dels electrons emesos per les plaques.

Sorprès dels resultats, que confirmaven la teoria d'Einstein, dècades més tard afirmava que «Vaig emprar deu anys de la meva vida comprovant la teoria d'Einstein de 1905, i en contra de totes les meves expectatives, vaig veure'm forçat a afirmar la seva verificació malgrat que era irracional» (Millikan, 1949).

Per trobar l'energia cinètica dels electrons, el mètode de Millikan consistia a mesurar el potencial elèctric necessari per aturar-los; el potencial de frenada.

Segons la fórmula d'Einstein de l'efecte fotoelèctric

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = h f - W_0$$

on *h* és la constant de Planck, *f* la freqüència de la llum incident, i W_0 «el treball necessari per arrencar l'electró del metall», amb paraules del mateix Millikan.

D'altra banda, si apliquem el principi de conservació de l'energia mecànica en el procés de frenada dels electrons:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \quad \rightarrow \quad E_c = e V_0$$

on *e* és la càrrega de l'electró i V_0 el potencial de frenada.

Igualant les dues expressions i aïllant:

$$V_0 = \frac{h}{e} f - \frac{W_0}{e}$$

El potencial de frenada resulta ser una funció lineal de la freqüència, amb un pendent que depèn directament de la constant de Planck. Hem de tenir en compte que la càrrega elemental *e* ja havia estat trobada pel mateix Millikan.

Per tal de mesurar el potencial de frenada, es basà en el següent muntatge experimental:

La llum incideix sobre la superfície metàl·lica en el càtode i aquest emet electrons. Si arriben a l'ànode, es produirà un corrent en el circuit extern. Fixada una freqüència de la radiació incident, el nombre d'electrons emesos que arriben a l'ànode es pot augmentar o disminuir canviant la diferència de potencial entre els elèctrodes, obtenint un gràfic de la intensitat de corrent en funció de la diferència de potencial (ddp) aplicada.

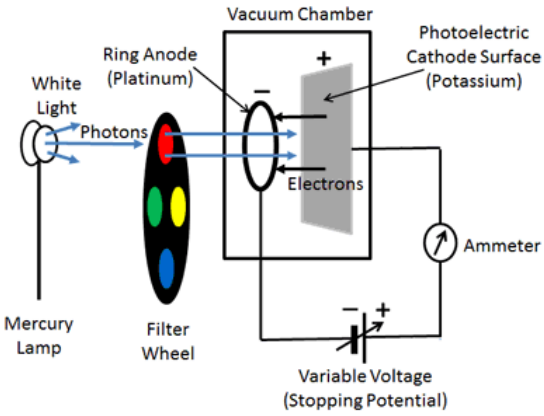


Figura 46: Esquema del muntatge de Millikan. Font: Barrie Lawson , Electropedia

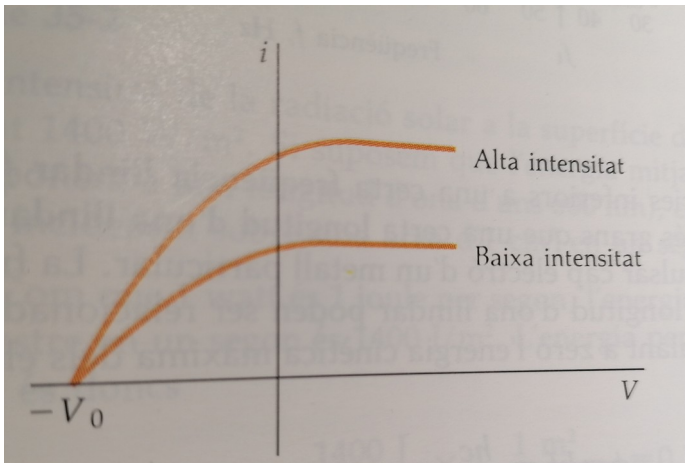


Figura 47: Per a valors del potencial menors que -Vo, no hi ha corrent. Per a valors gran del potencial, el corrent de saturació observat és proporcional a la intensitat de la llum incident. Font: A. Tipler

Quan la *ddp* és positiva, els electrons són atrets cap a l'ànode. Per valors suficientment grans, la totalitat dels electrons emesos hi arriben. Quan això ocorre, per molt que s'augmenti la *ddp*, la intensitat de corrent es manté perquè s'ha arribat al corrent de saturació.

No obstant això, quan la *ddp* és negativa, arriben menys electrons a l'ànode perquè són frenats en el seu camí. Existeix un potencial V_0 anomenat potencial de frenada, pel qual cap dels electrons emesos aconsegueix arribar a l'ànode.

Per tant, el potencial de frenada és diferent per a cada longitud d'ona, però en canvi no depèn de la intensitat de la radiació.

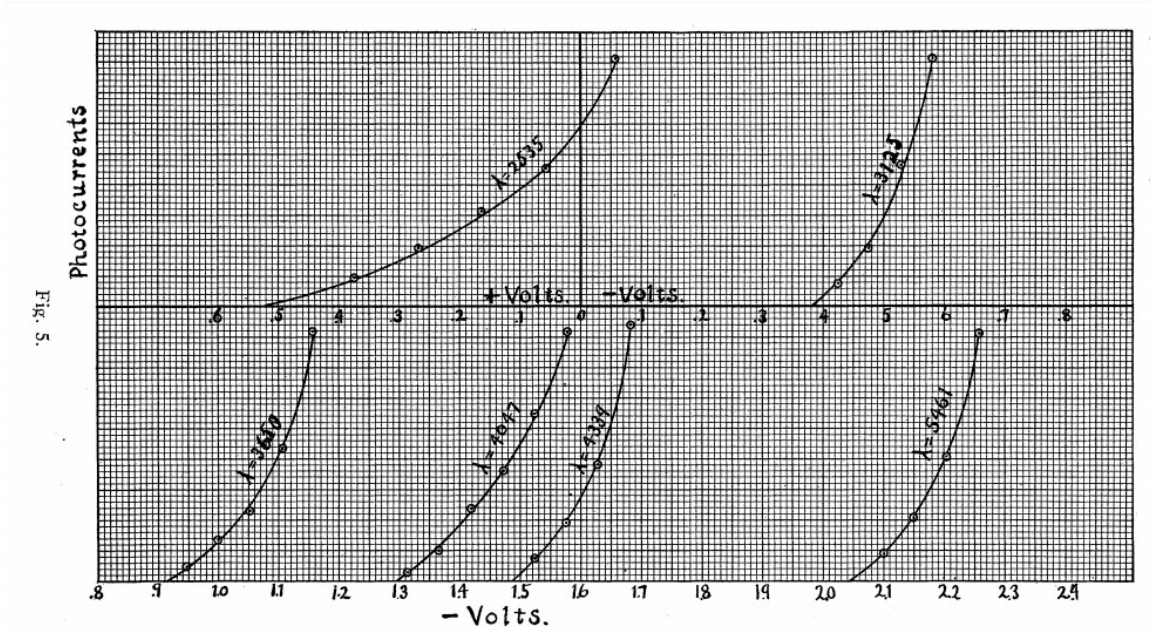


Figura 48: Gràfics intensitat de corrent – voltatge
Font: Millikan (1916)

En les corbes d'intensitat de corrent elèctric en funció del voltatge obtingudes per Millikan per a diferents valors de longitud d'ona de la llum incident, només es mostra el detall de les corbes en el seu tram inicial, fins a valors molt inferiors al corrent de saturació. Un cop determinats gràficament els potencials de frenada, es pot representar el seu valor en funció de la freqüència.

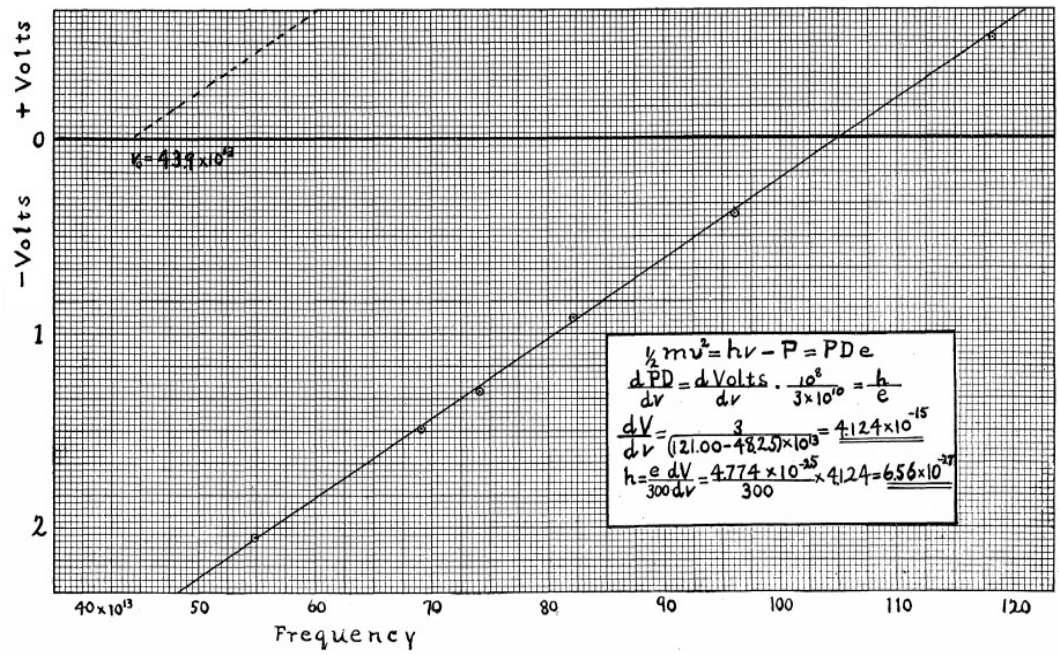


Figura 49: Gràfica potencial de frenada – freqüència
Font: Millikan (1916)

A partir del pendent de la recta obtinguda, Millikan calculà el valor de la constant de Planck, en unitats de erg.s [12] i obté un valor de:

$h = 6.56 \times 10^{-27}$ erg.s = $6,57 \times 10^{-34}$ J.s

Resultat amb un error d'un 0,5%, el millor obtingut fins al moment.

4.2.2 Altres mesures

Gràcies a la precisió de la tecnologia actual, la constant de Plank es pot determinar duent a terme diversos experiments: flux magnètic, efecte Hall, constant d'estructura fina, RMN (ressonància magnètica nuclear), corrents en superconductors... però tots aquests mètodes requereixen un desenvolupament teòric fora de l'abast d'aquest treball i no els tractarem.

Un mètode aproximat relativament modern es basa en l'efecte de *l'electroluminescència*, fenomen en el qual un material emet llum a causa d'un corrent elèctric que flueix a través d'ell. Aquesta és la base del funcionament dels díodes emissors de llum (LEDs) i és el que utilitzarem en la nostra pràctica, així que l'explicarem en el proper apartat.

12 1 erg és una unitat d'energia i treball equivalent a 10^{-7} J

4.3 Determinació de *h:* electroluminescència d'un díode

L'experiment original de l'efecte fotoelèctric és difícil de reproduir al laboratori, però el procés invers de l'efecte fotoelèctric es pot utilitzar per determinar, de forma molt simple, el valor de la constant de Planck. L'efecte que utilitzarem per fer la mesura és *l'electroluminescència*, en què l'energia d'un corrent d'electrons dona lloc a l'emissió de fotons.

4.3.1 Objectius

Determinació de la longitud d'ona d'un LED

Determinació de la constant de Planck a partir de l'energia de la banda prohibida

4.3.2 Introducció

Existeixen dos mecanismes bàsics de generar llum visible: incandescència i luminescència. La incandescència és causada pel moviment tèrmic dels àtoms que constitueixen un material, que emeten aquesta energia tèrmica en una àmplia banda de radiació. En canvi, la luminescència es una banda estreta de radiació emesa per la matèria com a conseqüència d'un canvi d'estat d'energia (generalment dels electrons). Aquest és el cas dels díodes emissors de llum (LED).

Els materials semiconductors utilitzats en els LEDs tenen gran quantitat d'electrons que poden ocupar un gran nombre d'*orbitals* (nivells d'energia similars als que ocupen els electrons en els àtoms). Cada orbital té una energia característica, però no totes les energies són possibles. Hi ha intervals d'energia possibles (bandes permeses) separats per intervals d'energia en què no hi ha cap orbital (banda prohibida). Els semiconductors tenen una banda permesa amb orbitals ocupats per electrons (banda de València) i una banda també permesa de major energia amb orbitals buits (banda de conducció).

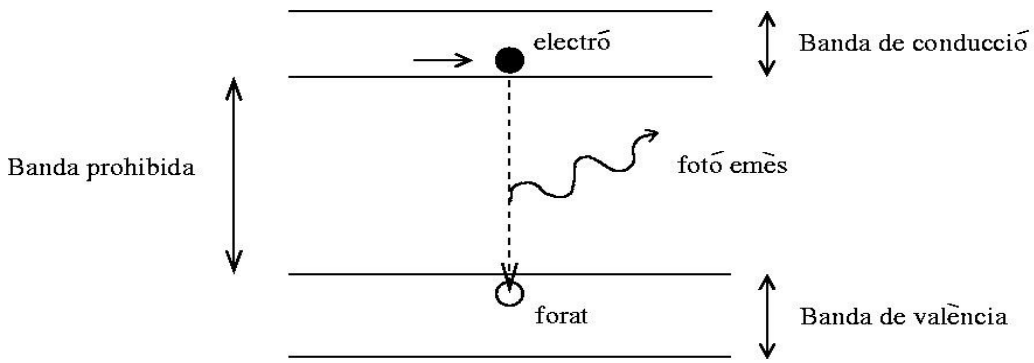


Figura 50: Esquema d'un material semiconductor
Font: Jordi Andreu i Josep Maria Valls (2005)

Quan apliquem una diferència de potencial a un díode emissor de llum, un cert nombre d'electrons guanyen prou energia per assolir la banda de conducció, deixant uns *forats* en la banda de València. Aquesta situació és inestable, ja que els electrons tendeixen a ocupar estats de menor energia, de manera que els de la banda de conducció cauen a la banda de València, emetent energia en forma d'un fotó. L'energia d'aquest fotó és molt similar a l'amplada de la banda prohibida del semiconductor.

Per determinar la constant de Planck a partir de l'electroluminescència de díodes LED, mesurarem la longitud d'ona de la llum emesa per diferents LEDs i calcularem la seva freqüència. Independentment, estimarem el valor de l'energia de la banda prohibida. Els punts experimentals obtinguts es representen i s'ajusten a una recta, el pendent de la qual és la constant de Planck.

$$f = c/\lambda \qquad E = h\,f$$

h = pendent de la recta si representem E en funció de f

on

c és la velocitat de la llum

λ és la longitud d'ona del LED

f és la freqüència d'emissió del LED

E és l'energia de la banda prohibida

h és la constant de Planck

4.3.3 Material

xarxa de difracció de 525 ratlles/mm

LEDs vermell, groc i blau

resistència 330 Ω

cinta mètrica

interfície *Vernier*

sensor de voltatge *Vernier*

sensor d'intensitat *Vernier*

placa de connexió *Protoboard*

cables de connexió

font d'alimentació de corrent continu variable

4.3.4 Procediment 1: Longitud d'ona d'un LED

Es connecta el LED a una font de corrent continu i a una resistència en sèrie per evitar cremar-lo.

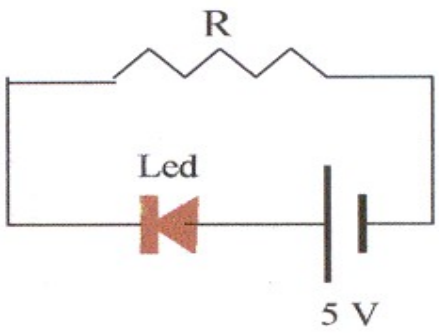


Figura 52: Esquema del circuit elèctric utilitzat. Font: Carolina Artuso, i Alejandro Satz (2001)

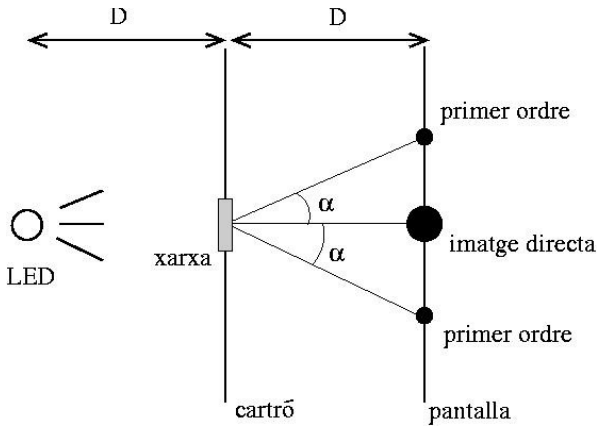


Figura 51: Muntatge experimental per determinar la longitud d'ona del LED. Font: Jordi Andreu i Josep Maria Valls (2005)

Utilitzem una xarxa de difracció amb una separació entre línies, *d,* situada a una distància *D* d'uns 20 cm del LED. Fem incidir el feix de llum perpendicularment sobre la xarxa. A l'altre costat i a la mateixa distància *D* que el LED, projectem les línies d'interferència sobre una pantalla blanca. Mesurant la distància entre la imatge del feix de llum directe i la imatge de primer ordre, podem determinar l'angle (α) entre els feixos de llum. La longitud d'ona ve determinada per la fórmula:

$$\lambda = d \sin(\alpha)$$

4.3.5 Resultats λ

Tot i haver realitzat el procediment amb tots els leds, ens ha estat impossible distingir amb un prou claredat i definició les bandes d'interferència com per mesurar-ne la separació amb un mínim de precisió. No disposem, doncs, d'aquests resultats i prenem com a valors per les longituds d'ona els valors indicats pel fabricant (Osram) i calculem la freqüència de cadascun dels LEDs:

Color	Longitud d'ona λ (nm)	Freqüècia f (Hz)
blau	466	$6{,}435 \cdot 10^{14}$
groc	587	$5{,}111 \cdot 10^{14}$
vermell	660	$4{,}545 \cdot 10^{14}$

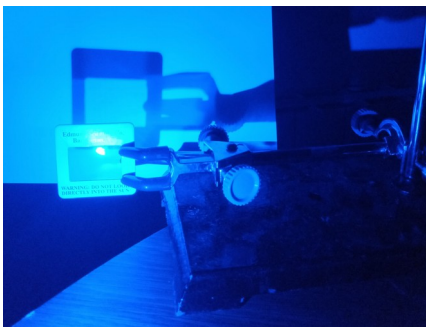


Figura 53: Prova realitzada

4.3.6 Procediment 2: Energia de la banda prohibida

Utilitzem una font de tensió, un amperímetre i un voltímetre. Un cop muntat el circuit cal assegurar-se que el comandament de la font de tensió està al mínim abans connectar-la, ja que si la tensió és excessiva podríem cremar el LED. Col·loquem també la resistència de forma que el corrent no superi el màxim que suporta el dispositiu. Registrem de forma contínua els parells de valors tensió-corrent amb el programa *Logger Lite*, tot augmentant lentament la tensió. La intensitat de corrent segueix molt aproximadament l'expressió:

$$I = A\,e^{BV}$$

on A i B són paràmetres que depenen de cada LED.

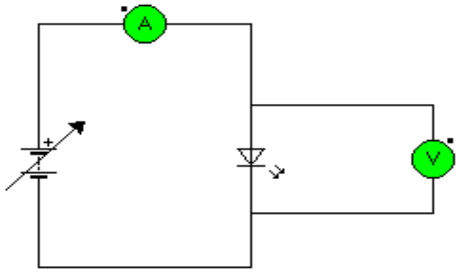


Figura 54: Muntatge experimental per determinar l'energia de la banda prohibida. Font: Jordi Andreu i Josep Maria Valls (2005)

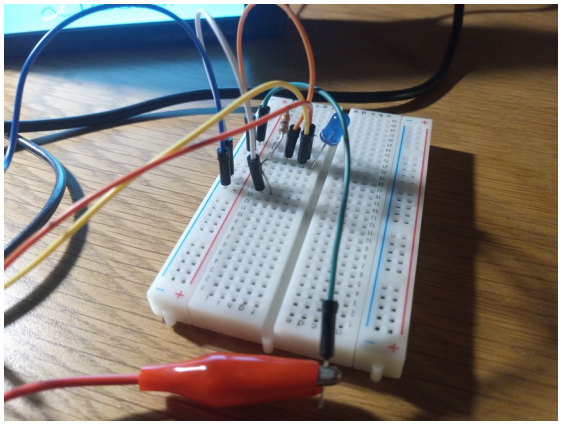


Figura 55: Placa de proves del circuit elaborat

4.3.7 Resultats E

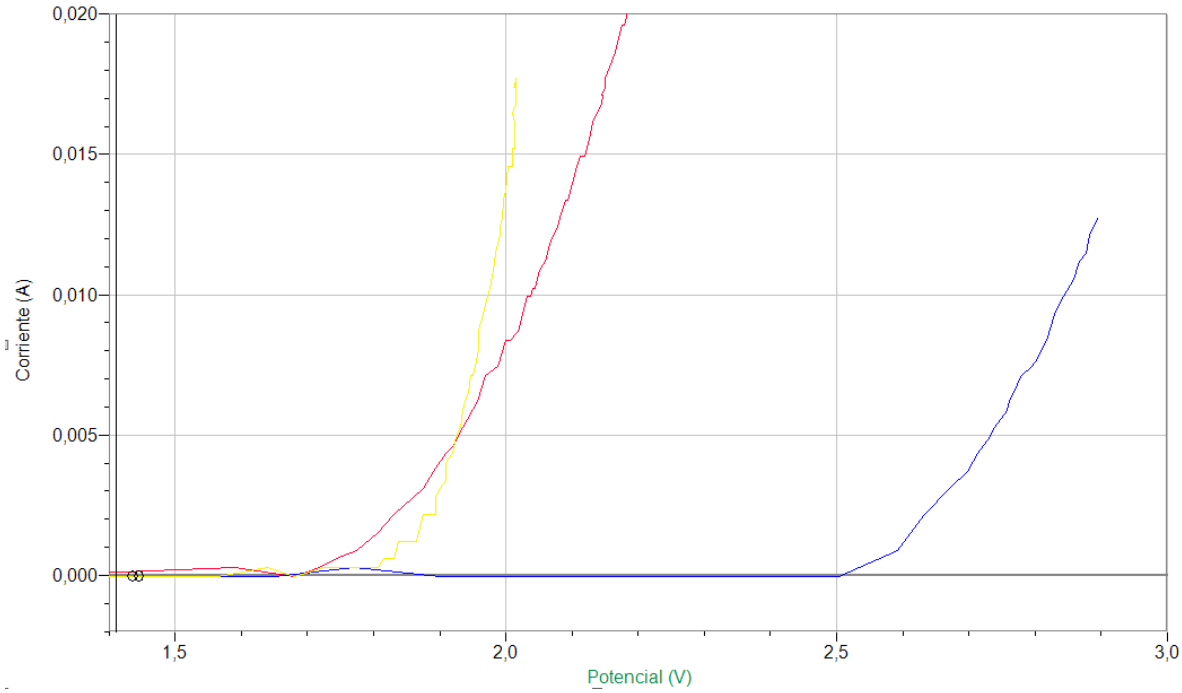


Figura 56: Corbes d'intensitat de corrent de cada LED. Font: elaboració pròpia

El valor de l'energia de la banda prohibida E0, es pot calcular com:

$$E_0 = e\,V_0$$

on *e* és el valor absolut de la càrrega de l'electró ($e=1{,}6\cdot10^{-19}$ C) i V_o el potencial mínim que cal aplicar per a que circuli un corrent elèctric, anomenat voltatge llindar.

Per obtenir V_o, cal ajustar la part del gràfic on el corrent augmenta linealment, traçant la recta tangent a la funció I(V) en el seu tram final. La intersecció d'aquesta recta amb l'eix X es pren com a valor de V_o. Per fer aquest anàlisi utilitzarem l'aplicació *Geogebra*.

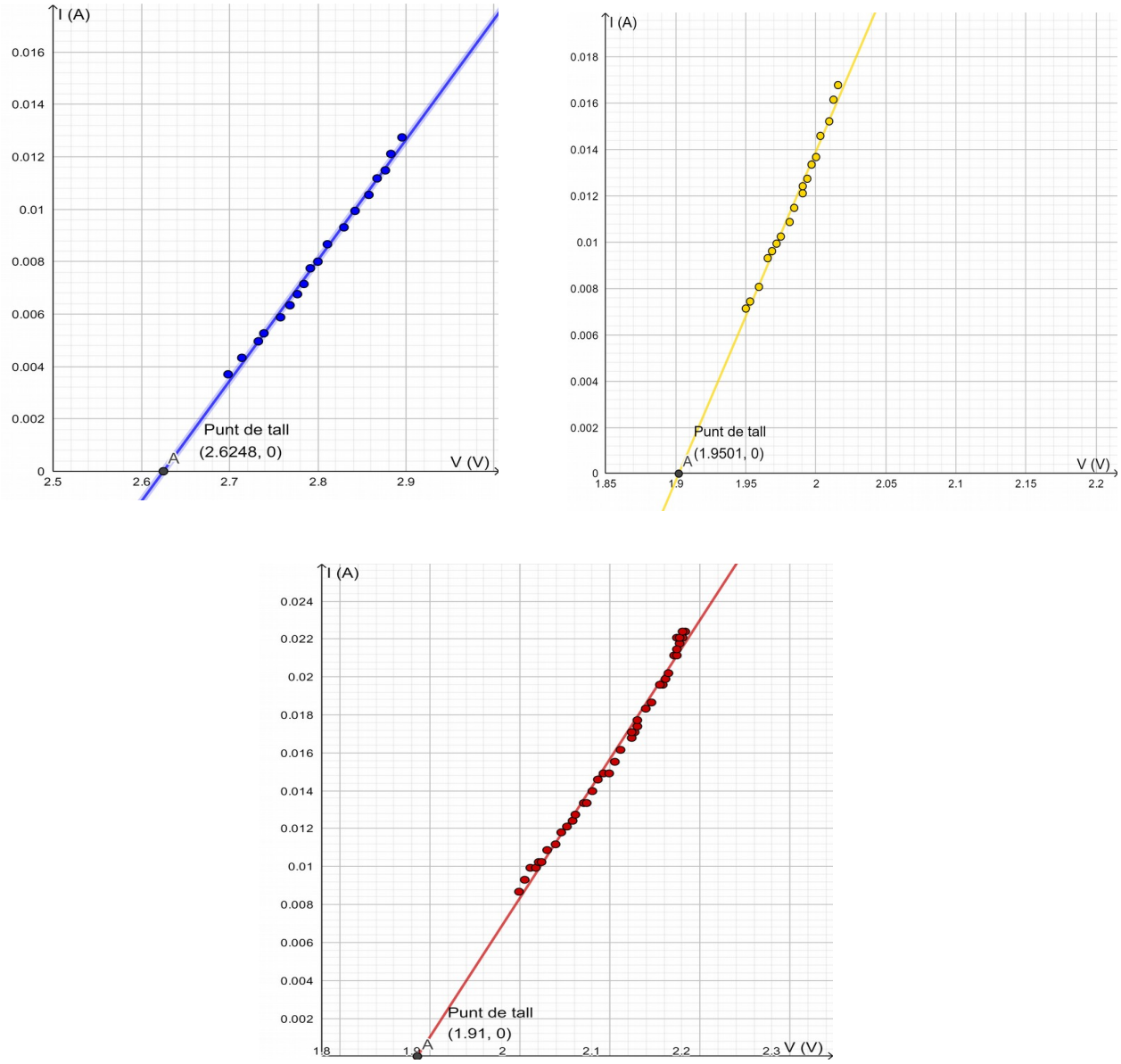


Figura 57: Rectes de regressió de les diferents freqüències.
Font: elaboració pròpia

Dades inicials i resultats obtinguts amb la regressió lineal:

c (m/s)	e (C)
3,000E+08	1,602E-19

Exp	λ (nm)	F (Hz)	V_0 (V)	eV_0 (J)
1	466	6,438E+14	2,62	4,197E-19
2	587	5,111E+14	1,95	3,124E-19
3	660	4,545E+14	1,91	3,060E-19

4.3.8 Càlcul de la constant de Planck

Amb les dades obtingudes, representem l'energia en funció de la freqüència i aproximem una recta per determinar-ne el pendent i trobar la constant de Planck. Aquesta aproximació la fem amb una regressió lineal a través de l'origen.

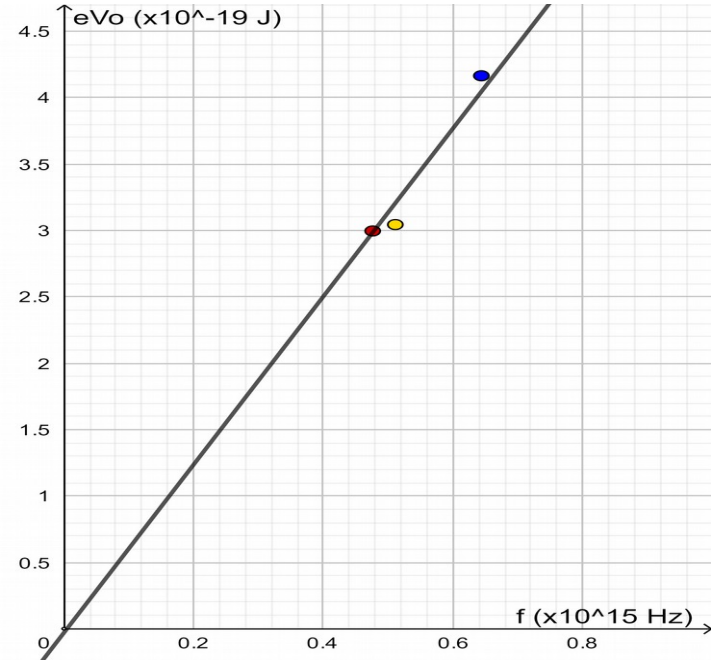


Figura 58: Regressió lineal: E = hf on h coincideix amb el pendent de la recta. Font: elaboració pròpia

A partir de les fórmules de l'annex 1 de tractament de dades experimentals, calculem el pendent de la recta i l'error quadràtic mig corresponent:

experiment	h (J·s)
1	6,520E-34
2	6,112E-34
3	6,732E-34

$\Sigma f_i E_i$	Σf_i^2	m=h (Js)	Error $\sqrt{\Sigma(hi-h)^2/n}$
5,689E-04	8,823E+29	**6,449E-34**	2,570E-35

Finalment, aquest és el resultat obtingut:

$$h = 6{,}45(\pm 0{,}26)\times 10^{-34}\, J{\cdot}s$$

5 VELOCITAT DE LA LLUM

5.1 Què és la llum?

(basat en Tipler, edició 1994)

5.1.1 Model corpuscular

Des de l'antiguitat, la humanitat s'ha interessat per la naturalesa de la llum. Segons les teories dels antics pensadors grecs, com Empèdocles (segle V aC), la llum emergia de l'ull, fent possible la visió. Posteriorment, aquesta hipòtesi va ser abandonada i es va imposar la idea de que la llum procedia dels objectes observats.

Al llarg de la història de la ciència, la confrontació entre el model ondulatori i el model corpuscular ha estat un dels debats més polèmics i durant molts anys va ser un tema de confrontació intensa. Diversos models i teories van intentar aportar «llum» (mai millor dit!) sobre la qüestió. «Tenen especial notorietat les disputes del segle XVIII entre els partidaris de què la llum està formada per partícules, «liderats» per Isaac Newton, i els que la concebien com una ona, «liderats» per Christian Huygens. Amb el pas del temps, la millora de les tècniques experimentals i el coneixement en profunditat dels fenòmens corpusculars i ondulatoris van fer tancar la disputa a favor dels partidaris de la imatge ondulatòria de la llum.» (Paco Savall, La polèmica sobre la naturalesa de la llum a principi del s XX, 2013).

Isaac Newton (Anglaterra, 1642 - 1727) va ser un dels defensors més influents de la teoria corpuscular. Segons aquesta, la llum està composta per petites partícules («corpuscles») que viatgen en línia recta a una velocitat finita i posseeixen energia cinètica.

Les partícules lluminoses, de diferent mida segons el color, són emeses pels cossos lluminosos i produeixen la visió en arribar als nostres ulls. Amb aquest model explicava els fenòmens de refracció i reflexió imaginant que la llum viatjava més ràpidament en l'aigua que en l'aire, cosa que després es va demostrar errònia.

5.1.2 Model ondulatori

Entre els principals defensors de la teoria ondulatòria figurava Christiaan Huygens (Holanda, 1629 – 1695). Defensava que la propagació de qualsevol ona a través de l'espai es pot explicar amb un mètode geomètric: l'anomenat *principi de Huygens*.

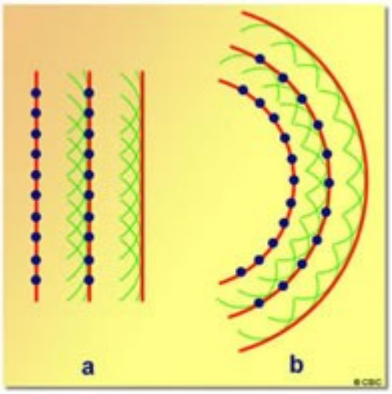


Figura 59: propagació de les ones, segons Huygens. Font: CSIC

Segons el principi de Huygens, cada punt d'un front d'ona primari actua com a font d'ones secundàries que avancen amb velocitat i freqüència iguals als de l'ona primària. L'ona resultant és la superposició de totes les noves ones secundàries.

Huygens explicava la reflexió i la refracció suposant que la llum es propaga més lentament en l'aigua que en l'aire. Newton va rebutjar les idees de Huygens emparant-se en l'aparent propagació rectilínia dels rajos. Degut a la popularitat de l'anglès, el model corpuscular va ser l'acceptat durant més d'un segle.

Al segle XIX, Thomas Young (Anglaterra, 1773 – 1829) reafirmava la teoria ondulatòria a partir dels fenòmens de difracció i interferència. L'any 1800, aquest científic posà en evidència el comportament ondulatori de la llum amb el seu experiment de la doble escletxa, un dels experiments més famosos i rellevants de la història de la física.

Young va dirigir un feix de llum a una pantalla on hi havia dues escletxes molt fines i separades per una distància minúscula. Al darrere hi havia situada una pantalla. Quan Young feia passar la llum per una sola escletxa, es projectava una línia de llum simple; quan es feia passar la llum per les dues escletxes simultàniament, s'observava un patró d'interferència amb alternança de franges fosques i brillants.

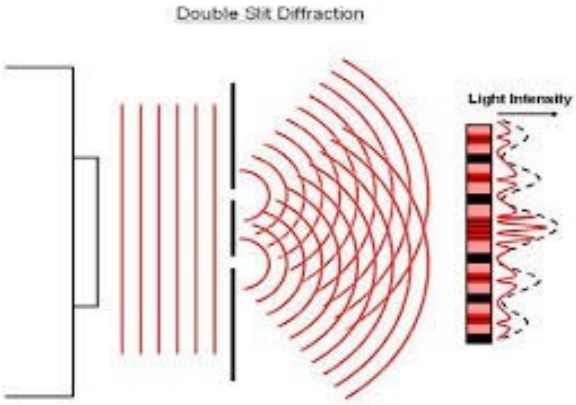


Figura 60: Esquema de l'experiment de la doble escletxa de Young. Font: UAB

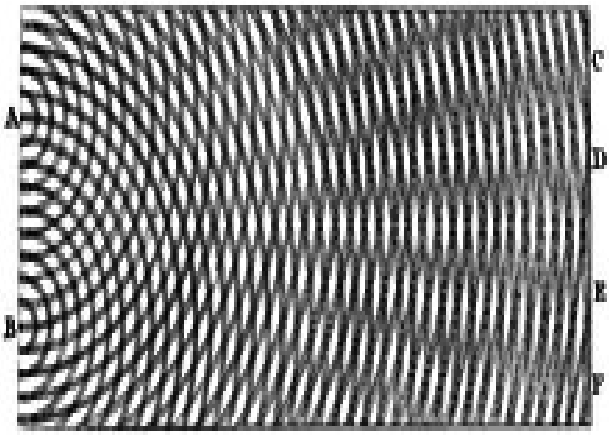


Figura 61: Dibuix original de Thomas Young que presenta els efectes d'interferència. Font: Viquipèdia

En qualsevol punt de la pantalla, el resultat és la superposició de les ones que hi arriben.

1) Si les dues ones arriben en fase, les seves intensitats es sumen de manera que el punt queda il·luminat.

2) Si les ones arriben en oposició de fase, la interferència és destructiva i la intensitat resultant és nul·la.

Aquest resultat només pot ser explicat suposant que la llum és de naturalesa ondulatòria. No es podrien produir interferències i la pantalla estaria uniformement il·luminada si estigués constituïda per partícules.

5.1.3 De l'èter a les ones electromagnètiques

El físic i enginyer francès Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) va fer un gran nombre d'experiments sobre interferències i difracció i va fer aportacions importants per al desenvolupament de la teoria ondulatòria. No obstant, encara faltava temps per determinar el medi pel qual es propaga l'ona de la llum, és a dir, què era el que oscil·lava. En el cas del so, per exemple, són els mitjans materials com l'aire o l'aigua que transporten l'ona. No es propaga en el buit ja que no hi ha cap medi que pugui vibrar.

Contràriament, la llum sí que es propaga pel buit. Així doncs, Fresnel suposà que havia d'haver-hi "alguna cosa" en el buit que servís per transportar les ones lluminoses. Aquest medi hipotètic era l'anomenat *èter*, però ningú no havia estat capaç de detectar-lo. La seva rigidesa havia de ser molt gran per justificar l'alta velocitat de propagació de la llum (que ja havia estat mesurada amb alguns experiments). D'altra banda, si es tractava d'un medi tan rígid, no s'entenia per què els objectes, com ara els planetes, podien moure a través d'ell sense cap mena de fricció.

Els científics nord-americans Albert Michelson (1852-1931) i Edward Morley (1838-1923) foren dels primers en intentar calcular la velocitat del nostre planeta respecte a l'èter mesurant la velocitat de la llum a la Terra. D'aquest experiment en parlarem amb més detall en l'apartat següent, però la conclusió que en van treure fou que la hipòtesi de l'èter era insostenible perquè la velocitat de la llum era igual a la Terra que en el suposat èter!

Paral·lelament, però de manera totalment independent a l'estudi de la llum, el matemàtic James Clerk Maxwell (Escòcia, 1831-1879) desenvolupà les equacions matemàtiques que regien el comportament de l'electromagnetisme.

En la seva teoria, Maxwell establia l'existència d'ones electromagnètiques, que són ones compostes per un camp elèctric i un de magnètic, tots dos en fase (que varien al mateix temps d'intensitat), perpendiculars entre sí i respecte de la direcció de propagació.

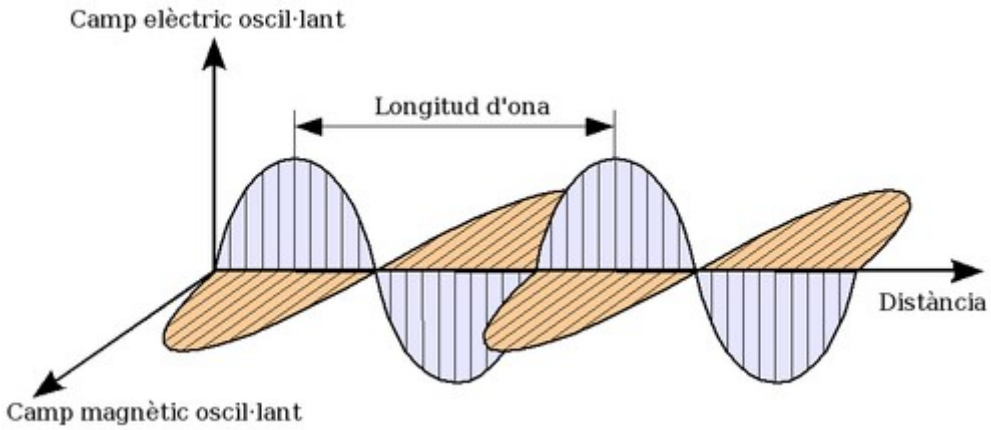


Figura 62: Components d'una ona electromagnètica. Font: cesire

La velocitat d'aquestes ones, calculada teòricament a partir de les lleis de l'electricitat i del magnetisme, resulta ser de $3 \cdot 10^8$ m/s, la mateixa que la velocitat de la llum! Aquesta ja havia estat mesurada. Com que resultava evident que no podia tractar-se d'una simple casualitat, es va establir la conclusió que la llum és un tipus d'ona electromagnètica. A partir d'aquest moment, la llum passa a ser una petita franja de tot l'espectre electromagnètic que inclou: ones de radio, microones, raigs infraroigs, llum visible, raigs X i raigs gamma.

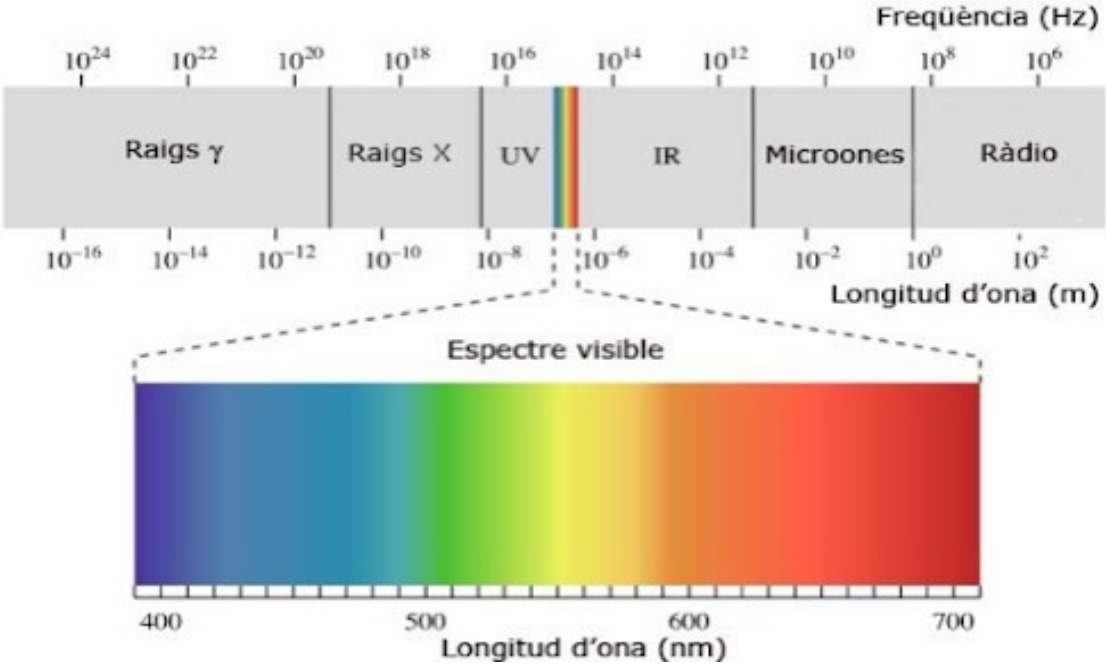


Figura 63: L'espectre electromagnètic. Font: cesire

5.1.4 Dualitat ona-corpuscle

En els inicis del s. XX, però, els nous conceptes de la teoria quàntica van replantejar altre cop la naturalesa de la llum. L'explicació d'Einstein de l'efecte fotoelèctric (explicat amb detall en el capítol anterior d'aquest treball) reintroduïa el model corpuscular de la llum.

Aleshores, quin model cal adoptar? Si en alguns casos la llum es pot representar mitjançant una ona i en d'altres com un feix de partícules, què és en realitat la llum? Doncs ambdues coses: ona i partícula. Amb cadascun d'aquests models es poden explicar certs aspectes del seu comportament. Per tant, s'ha de tractar a vegades com a ona i d'altres com a constituïda per partícules. Aquesta doble natura és el que s'anomena la dualitat ona-corpuscle de la llum.

5.2 Mesures de *c*

La velocitat de la llum en el buit és una constant física universal de valor :

c = 299 792 458 m/s

Fou inclosa en el Sistema Internacional d'Unitats com a constant el 1983, passant així el metre a ser una unitat derivada d'aquesta constant.

Segons la teoria de la relativitat especial, correspon a la velocitat màxima a la que pot viatjar qualsevol cosa, sigui matèria, energia o informació. Així, no hi ha absolutament res que pugui superar la velocitat de la llum. Aquest fet és paradoxal en el món de la física clàssica, on teòricament és possible augmentar la velocitat d'un cos transferint-li energia i no hi ha aparentment cap motiu per no poder assolir aquesta velocitat i, fins i tot, superar-la. Amb la teoria de la relativitat, però, Einstein proposa que l'energia transferida a un cos que es desplaça a velocitats properes a la de la llum és transformada en un augment de la massa. Llavors, s'estableix una equivalència entre massa i energia i la impossibilitat d'assolir la velocitat de la llum.

5.2.1 Galileu: el primer intent

El primer intent conegut de mesurar la velocitat de la llum fou portat a terme pel gran científic italià Galileu Galilei (1564 – 1642), que destacà en el camp de la física, les matemàtiques i la filosofia. Va tenir un paper important durant la revolució científica; se'l considera el creador del mètode científic i pare de l'observació astronòmica i de la física moderna. Stephen Hawking digué «*Galileu, potser més que qualsevol altra persona, fou el responsable del naixement de la ciència moderna.*» (Stephen Wawking, Galileo and the Birth of Modern Science, by Stephen Hawking, American Heritage's Invention & Technology, Spring 2009, Vol. 24, No. 1, p. 36)

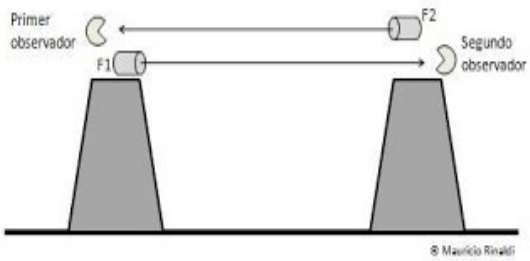


Figura 64: Esquema de l'experiment de Galileu. Font: Wordpress

D'entre els seus nombrosos i coneguts experiments, dedicà part del seu talent a intentar mesurar la velocitat de la llum.

Amb una llanterna i un obturador cadascun, ell i el seu ajudant es situaren al cim de dos turons. La distància entre ells era aproximadament d'un quilòmetre. Primer, Galileu destapava la seva llanterna i, en el moment de veure la llum, el seu ajudant havia de fer el mateix. Galileu mesurava, amb un pèndol, l'interval de temps entre l'emissió de llum de la seva pròpia llanterna i la recepció de llum de la llanterna de l'ajudant. Tanmateix, la llum viatja tan ràpidament que l'interval de temps a mesurar és imperceptible i no assolí cap resultat rellevant. La llum seguia sent instantània!

5.2.2 Roemer i les ocultacions d'Io

El primer a determinar la velocitat de la llum fou l'astrònom danès Olaf Roemer (1644 – 1710). Per fer-ho, es basà en les observacions astronòmiques de les ocultacions del satèl·lit Io de Júpiter. Aquestes ocultacions, que havien de ser periòdicament exactes i puntuals, es retardaven o s'avançaven en diferents èpoques de l'any, segons si la Terra s'allunyava o s'atansava a Júpiter.

Roemer calculà la velocitat de la llum tenint en compte el canvi en la distància Terra – Júpiter, el canvi en l'orientació de l'ombra de Júpiter i el temps de retard mesurat experimentalment entre dues observacions. Aquest retard no és apreciable entre dues ocultacions consecutives, però sí que ho és en un interval d'unes quantes setmanes. El resultat obtingut per Roemer per la velocitat de la llum fou de 214.000 km/s.

Figura 65: Esquema del mètode de Roemer. Font: CSIC

5.2.3 Interferències amb rodes dentades i miralls

Posteriorment, la primera mesura directa fou executada per Hippolyte Fizeau (França, 1819-1896). L'any 1849, realitzà un experiment que consistia en enviar un raig de llum, provinent d'un focus, sobre un mirall a centenars de metres de distància. En el trajecte entre el focus emissor i el mirall s'interposava una roda dentada que girava contínuament.

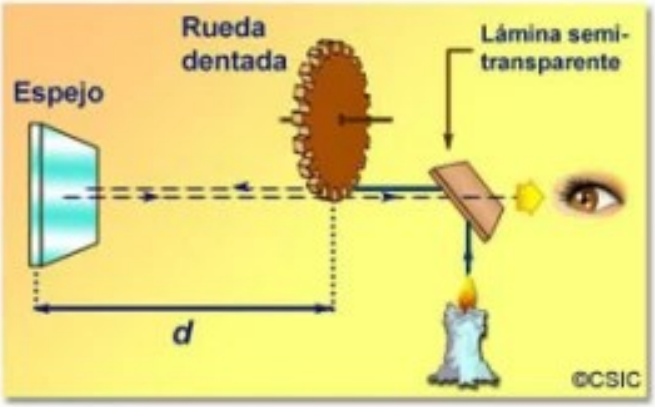


Figura 66: Esquema de l'experiment de Fizeau. Font: CSIC

Per a velocitats de rotació baixes, el raig passava a través d'un únic orifici de la roda, tant en l'anada com en la tornada, observant-se perfectament el raig lluminós de tornada. Però en incrementar-se la velocitat de rotació, el raig passava per un orifici a l'anada i topava amb una dent a la tornada, sense poder ser observat. Coneixent les distàncies, el nombre de dents de l'engranatge i la velocitat de rotació, la velocitat de la llum esdevenia calculable. Amb aquest mètode, Fizeau va trobar el valor de 313.000 km/s.

Anys més tard, el físic francès Léon Foucault (1819-1868) adoptà el mètode de Fizeau i el millorà, substituint la roda dentada per un mirall rotatori. La seva construcció consistia en un mirall pla que girava veloçment, amb l'eix de gir situat en el focus d'un mirall parabòlic.

A l'anada, el raig de llum produït per l'emissor es reflectia en el mirall pla i continuava fins al mirall parabòlic. A la tornada, es reflectia de nou en el mirall pla (que havia girat un angle α) i sortia desviat un angle 2α respecte el raig inicial.

La desviació és fàcilment mesurable quan la velocitat de gir és suficientment elevada. En el cas de Foucault, aquesta fou de 400 revolucions per segon i la distància entre els miralls era de 5 metres. El 1862, el valor de la velocitat de la llum estimat per Foucault va ser de 298.000 km/s.

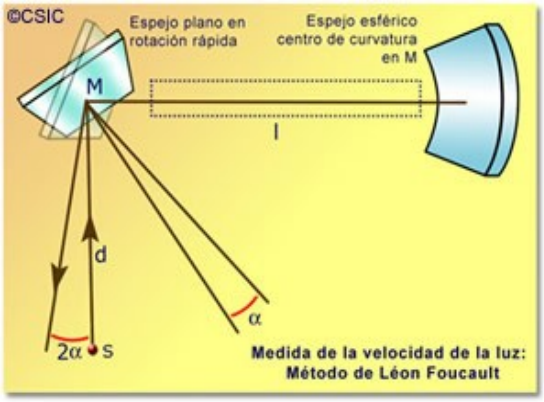


Figura 67: Esquema de l'experiment de Foucault. Font: CSIC

Ja en ple s. XX, Albert Michelson va repetir el muntatge de Foucault introduint notables millores. Incorporà unes lents per poder treballar amb grans distàncies i substituí el mirall pla per un prisma octogonal.

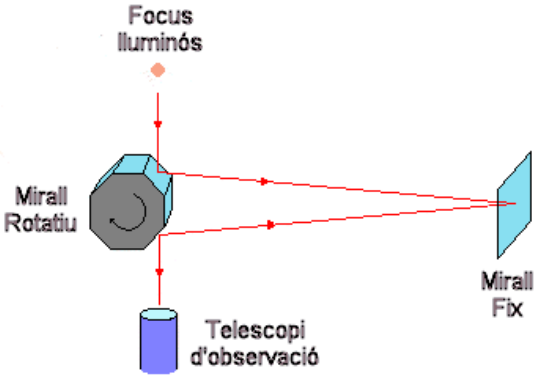


Figura 68: Esquema de l'experiment de Michelson. Font: Tipler

Amb aquesta estructura mesurà el temps que trigava la llum en fer un viatge d'anada i tornada entre el Mount Wilson i la muntanya de Sant Antonio (Califòrnia) a una distància de 35km. De les seves mesures, cada cop més precises, obtingué un valor de la velocitat de la llum de 299.796 km/s.

5.3 Determinació de *c:* mètode de Roemer

5.3.1 Objectius

L'objectiu d'aquesta pràctica és mesurar la velocitat de la llum a partir del retard en les ocultacions de Io darrere l'ombra de Júpiter.

5.3.2 Introducció

Com ja hem comentat anteriorment, Roemer efectuà el càlcul de la velocitat de la llum a partir de l'avançament / retard de les ocultacions de Io corresponents als mesos de l'any en què el moviment relatiu entre la Terra i Júpiter és d'apropament / allunyament .

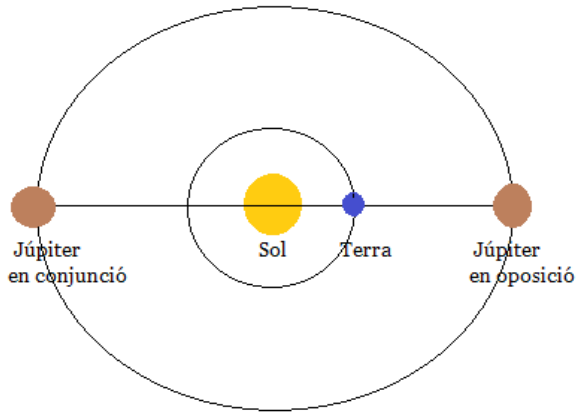


Figura 69: Posicions relatives de la Terra, el Sol i Júpiter. Font: elaboració pròpia.

Aquests dos intervals de temps venen determinats per les posicions de conjunció i oposició. Si només tenim en compte el moviment de translació de la Terra i no el de Júpiter, que té un període translació de 11,86 anys, aquests dos intervals seran aproximadament de 6 mesos cadascun.

Conjunció: estan alineats Júpiter, el Sol i la Terra (Sol entre la Terra i Júpiter).

Oposició: estan alineats el Sol, la Terra i Júpiter (Júpiter i el Sol en dos punts diametralment oposats en relació a la Terra).

Si les òrbites planetàries fossin circulars, l'oposició coincidiria amb el punt de mínima distància T-J i la conjunció amb el de màxima. En realitat, tal com demostrà Kepler amb les seves lleis del moviment planetari, els planetes descriuen òrbites el·líptiques amb el Sol situat en un dels focus. Això fa que el punt de màxim apropament entre La Terra i Júpiter no es correspongui amb l'oposició. Tot i així, en aquest treball considerarem que són circulars i aproximarem tots els moviment orbitals com a MCU, ja que les òrbites d'ambdós planetes tenen poca excentricitat.

Analitzem ara el moviment de Io al voltant de Júpiter. El període orbital és de 1,769 dies (= 42h 27' 34") i gira en sentit antihorari (igual que la Terra i Júpiter). A partir d'aquesta dada i d'una observació inicial, cal anar sumant 1,769 dies *n* vegades per determinar, suposadament, quan s'haurien de produir les properes ocultacions en l'ombra. Si la Terra i Júpiter estiguessin sempre a la mateixa distància (en repòs o orbitant amb el mateix període) el temps que mesuraríem entre dues aparicions consecutives romandria invariable. No obstant, al cap d'un temps serà apreciable un cert decalatge en la ocultació de Io, produït per **dos factors** que cal tenir en compte: la variació de la distància T-J i el gir de l'ombra de Júpiter, ja que observem el planeta des d'un angle respecte el Sol cada dia diferent.

Aquest any 2020, l'oposició de Júpiter es produeix el 14 de juliol a les *2h 58m* i la primera ocultació posterior observable des de la nostra latitud és el 17 de juliol a les *3h 26m 01s*. El moment exacte en què es produeixi[13] serà el temps de referència per calcular l'avançament / retard de les ocultacions. Això vol dir que Sol, Terra i Júpiter estan pràcticament alineats, que la distància T-J és quasi bé mínima i que l'ombra de Júpiter es projecta just al seu darrere (respecte la Terra) en un angle 0º. Abans i després d'aquesta data, la forma d'abordar el procediment i el càlcul és lleugerament diferent.

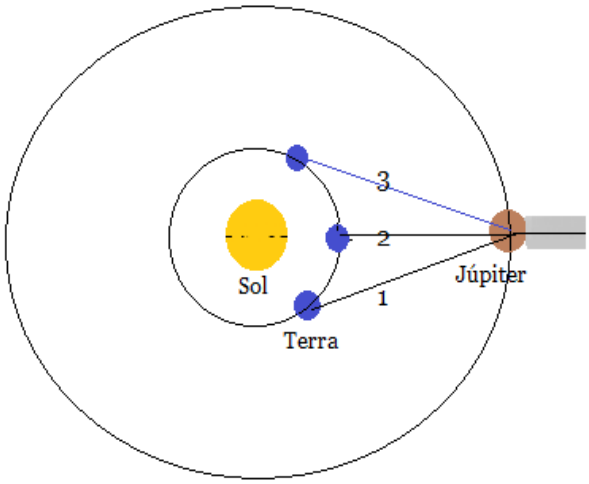


Figura 70: Vista superior del pla de l'eclíptica. Translació de T i J i òrbita d'Io en sentit antihorari. Font: elaboració pròpia

Posició1 (març 2020) : vist des de la Terra, l'ombra de Júpiter queda a la dreta i Io s'ocultarà en l'ombra i reapareixerà a l'esquerra tangent a Júpiter.

Posició 2: L'ombra de Júpiter és cada cop menor fins que Sol-Terra-Júpiter queden alineats el 14/07/2020.

Posició 3 (octubre 2020): l'ombra haurà anat augmentant, projectant-se a l'esquerra. Vist des de la Terra, Io s'oculta tangent a Júpiter i reapareixerà després de l'ombra.

En aquest esquema suposem que Júpiter es manté en repòs, però en els càlculs posteriors tindrem en compte el seu moviment.

Apropament: observació avançament de l'inici de l'ocultació

Després de la conjunció, durant aproximadament els sis mesos en què Júpiter s'apropa a la Terra fins a la data de l'oposició, per un observador terrestre, el període de les ocultacions de Io s'anirà escurçant gradualment, de forma que entre una ocultació i la següent el satèl·lit s'avançarà.

Allunyament: observació retard del final de l'ocultació

Després de l'oposició, durant els sis mesos aproximats en què Júpiter s'allunya de la Terra, per un observador terrestre, el període de les ocultacions de Io s'anirà allargant gradualment, de forma que entre una ocultació i la següent el satèl·lit es retardarà. A partir d'ara tractarem només aquest cas ja que és el que es correspon a les nostres observacions.

Aquest fet no és mesurable entre dues ocultacions consecutives, però sí que ho serà si observem dues ocultacions separades un interval de temps suficientment gran. El decalatge aparent entre dues ocultacions ve determinat per dos factors:

13 Aquest moment pot ser difícil de detectar perquè Io no s'oculta o apareix en l'ombra, sinó que ho farà tangent al planeta i potser no es distingirà bé.

$$\Delta t_{obs} = \Delta t_{angle} + \Delta t_{dist}$$

on:

Δt_{angle} és degut el canvi en l'orientació de l'ombra de Júpiter vista des de la Terra

Δt_{dist} és a causa del canvi de la distància T-J: la llum recorre, des de Io fins l'observador, una distància cada cop més gran degut als moviments de translació (terrestre i de Júpiter).

Així doncs, mesurant el retard entre dues ocultacions i calculant el factor causat pel canvi d'orientació de l'ombra podem determinar:

$$\Delta t_{dist} = \Delta t_{obs} - \Delta t_{angle}$$

I un cop calculat el canvi de la distància T-J a partir de les equacions dels MCU i l'aplicació alguns coneixements trigonomètrics, podem calcular la velocitat de la llum com:

$$c = \Delta d / \Delta t_{dist}$$

Per poder realitzar aquests càlculs, haurem de seguir els passos següents:

1 - Fer una previsió de dates i hores d'ocultacions observables de Io des de la nostra localitat a partir del 14 de juliol de 2020.

2 - Elaborar un registre del temps real observat del final de les ocultacions.

3 - Calcular les posicions angulars de la Terra i Júpiter (i de la seva ombra) a partir de les equacions del MCU i la distància entre els dos planetes.

4 – Per cada parell d'observacions: esbrinar el retard causat pel gir de l'ombra, el retard respecte l'hora prevista i calcular la velocitat de la llum.

5.3.3 Material

- Telescopi *Celestron NexStar 4SE* (de tipus *Maksutov-Cassegrain* de 102mm f/13 amb montura altazimutal computaritzat)
- Cronòmetre

5.3.4 Procediment 1: determinació de dates esperades d'observació

Primerament, farem una previsió de dates d'observació d'ocultacions de Io. A tal efecte, consultem una efemèride i prenem les dades següents:

la visibilitat de Júpiter durant tot l'any 2020 des de la nostra localització. (Annex 3)

les dates en que es produirà la conjunció (27/12/2019) i l'oposició (14/07/2020).

el període de Io T_{io} = 42h 27' 34" (= 1,769 dies)

la data i hora del final de la primera ocultació de Io posterior a l'oposició (17/07/2020) com a dades inicials per calcular el moment esperat per a les successives ocultacions fins a l'oposició. Si aquest dia no hagués estat possible fer l'observació, hauríem pres la següent ocultació visible.

A partir de les dades de la primera ocultació, només ens cal sumar el període de Io per trobar l'instant previst per a la següent i així successivament.

1ª ocultació → dia_1, h_1

2ª ocultació → $h_2 = h_1 + T(Io)$ → dia_2, h_2

n-èsima ocultació → $h_n = h_{n-1} + T(Io) = h_1 + (n-1)\,T(Io)$ → dia_n h_n

Com que es tracta d'un càlcul repetitiu, hem dissenyat un full de càlcul en el qual passem les hores a format decimal. Segons l'hora en que es produeix una ocultació, la següent pot ocórrer al dia següent o al cap de dos dies. Aquest fet s'ha tingut en compte a l'hora de donar els resultats per a l'instant previst de cada ocultació en format dia / hora. Un fragment de la taula elaborada es mostra a continuació.

ocultació	hora dec	dia	hora fi
1	3,48	17/07/20	03:28:32
2	21,93	18/07/20	21:56:05
3	16,39	20/07/20	16:23:39
4	10,85	22/07/20	10:51:12
5	5,31	24/07/20	05:18:46
6	23,77	25/07/20	23:46:19
7	18,23	27/07/20	18:13:53
8	12,69	29/07/20	12:41:26
9	7,15	31/07/20	07:09:00
10	1,61	02/08/20	01:36:33
11	20,07	03/08/20	20:04:07
12	14,53	05/08/20	14:31:40
13	8,99	07/08/20	08:59:14
14	3,45	09/08/20	03:26:47
15	21,91	10/08/20	21:54:21

Taula 2: Previsió per a cada final d'ocultació. En verd, els que són visibles des de la nostra posició.

5.3.5 Procediment 2: registre de dades observades

Un cop triades les dates en què farem servir el telescopi, confiant en que la previsió meteorològica ens serà favorable, establim quins són els paràmetres que caldrà enregistrar i com fer-ho en cada ocasió.

Durant les primeres setmanes vam familiaritzar-nos amb el maneig del telescopi i la sincronització del nostre cronòmetre amb el temps universal. També vam acotar en quin marge d'azimut Júpiter era observable des del terrat de casa. Finalment, vam haver d'acumular

grans dosis de paciència quan les condicions meteorològiques no eren adients per a l'observació astronòmica.

El nostre registre d'observacions vàlides comença, doncs, a partir de l'oposició de Júpiter (dia 14/07/2020) i el que esperem trobar és un retard respecte l'instant previst de cada final d'ocultació de Io.

Com a exemple, ocultació 10 a partir d'ocultació 1: (el resultat no coincideix exactament amb el de la taula 2 per l'arrodoniment de xifres significatives)

comptem els intervals de temps a partir del **dia 17/07/20 a les 0h**

ocultació 1 → t_1= 0,1448 = 17/07/20 a les *3h 28' 32"*

ocultació 10 → $t_m = t_n + (m-n)\,T_{Io} = 0{,}1448 + (10-1)\,1{,}769 = 16{,}0658\,dies$

t_{10}= 16,0658 dies = 02/08/20 a les 1h 34'45"

ocultació	dies respecte 17/07/20 0h	dia	hora fi	dia	hora fi
		CALCULAT		**OBSERVAT**	
1	0,1448	17/07/20	03:28:32	17/07/20	03:28:32
10	16,0659	02/08/20	01:34:52	02/08/20	01:44:55
15	24,9109	10/08/20	21:51:44	10/08/20	22:07:42
19	31,9870	17/08/20	23:41:13	18/08/20	00:02:04
23	39,0630	25/08/20	01:30:42	25/08/20	01:56:40
28	47,9080	02/09/20	21:47:34	02/09/20	22:20:06
37	63,8291	18/09/20	19:53:55	18/09/20	20:38:36
54	93,9023	18/10/20	21:39:14	18/10/20	22:47:38
59	102,7056	27/10/20	16:56:06	27/10/20	18:11:23
72	125,7027	19/11/20	16:51:56	19/11/20	18:25:19

Taula 3: Registre de les observacions realitzades. Previsió a partir del moment de l'ocultació 1.

Taula[14]

5.3.6 Procediment 3: càlcul de posicions angulars i distància T-J

Consultem les següents dades planetàries:

períodes orbitals

T_T = 1 any = 365,2425 dies

T_J = 11,86 anys = 4.331,7761 dies terrestres

radis mitjans de les òrbites

r_T = 1 UA = $1{,}496 \cdot 10^{11}$m

r_J = 5,203 UA = $7{,}784 \cdot 10^{11}$m

14 Ocultació 59: -1h hivern

Com ja hem esmentat anteriorment, les òrbites són molt poc excèntriques i les aproximem per MCU. Amb aquesta consideració calculem, en un cert temps *t* mesurat des de l'instant de l'oposició, el desplaçament angular de la Terra i Júpiter. L'interval de temps és el que ocorre entre el moment d'oposició (angle 0rad) i l'hora prevista (no la observada) per a cada observació, per tal de simplificar el full de càlcul. Hem comprovat que aquesta aproximació no afecta en cap cas el resultat final.

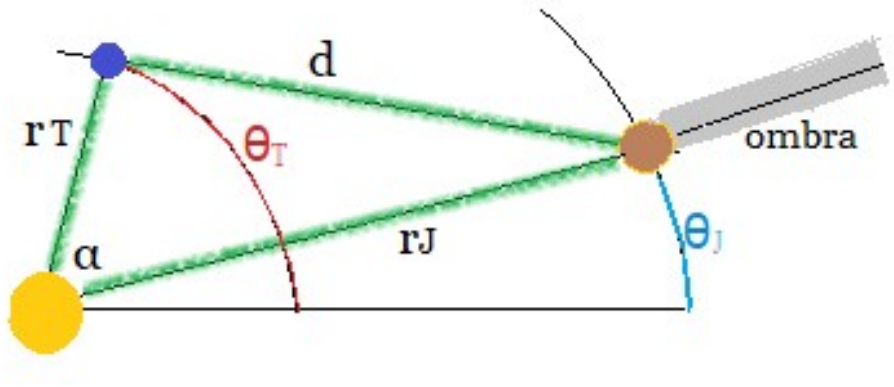


Figura 71: posicions relatives de la Terra i Júpiter (i la seva ombra) respecte al Sol. Font: elaboració pròpia.

θ_T : angle que forma el radi vector que uneix el Sol amb la Terra i l'horitzontal. En l'oposició pren el valor 0 rad.

$$\theta_T = \frac{2\pi}{T_T} t$$

θ_J: angle que forma el radi vector que uneix el Sol amb Júpiter i l'horitzontal. En l'oposició pren el valor 0 rad.

$$\theta_J = \frac{2\pi}{T_J} t = \alpha_{ombra}$$

α : diferència entre els angles terrestre i de Júpiter.

$$\alpha = \theta_T - \theta_J$$

A partir del triangle determinat per les posicions de Sol – Terra – Júpiter i aplicant el teorema del cosinus, determinem la distància *d* entre Terra i Júpiter. Prenem com a origen el temps mesurat des de l'oposició, instant en què la distància és mínima amb l'aproximació d'òrbites circulars.

$$d^2 = r_T^2 + r_J^2 - 2 r_T r_J \cos\alpha$$

Com a exemple, ocultació 10 a partir de l'oposició:

temps des d'oposició fins final de l'ocultació 10

$t_{10,op} = t_{op} + t_{10} = 2{,}8764 + 16{,}0659 = 18{,}9423$ dies

on

t_{op} = temps des de l'oposició fins el 17/07/20 a les 0h

t_{10} = temps des del 17/07/20 a les 0h fins el final de l'ocultació 10

$$\theta_T = \frac{2\pi}{T_T} t = \frac{2\pi}{365{,}2425} 18{,}9423 = 0{,}3259\, rad$$

$$\theta_J = \frac{2\pi}{T_J} t = \frac{2\pi}{365{,}2425 \cdot 11{,}86} 18{,}9423 = 0{,}0275\, rad$$

$$\alpha = \theta_T - \theta_J = 0{,}3259 - 0{,}0275 = 0{,}2984\, rad$$

$$d = \sqrt{r_T^2 + r_J^2 - 2 r_T r_J \cos\alpha} = \sqrt{1^2 + 5{,}203^2 - 2 \cdot 1 \cdot 5{,}203 \cdot \cos 0{,}2984} = 4{,}2573\, UA$$

ocultació	dies respecte 14/07/20 2h58m	angle T (rad)	angle J (rad)	distància T-J (UA)
1	3,0212	0,0520	0,0044	4,2044
10	18,9423	0,3259	0,0275	4,2573
15	27,7873	0,4780	0,0403	4,3181
19	34,8634	0,5997	0,0506	4,3813
23	41,9394	0,7215	0,0608	4,4559
28	50,7844	0,8736	0,0737	4,5630
37	66,7055	1,1475	0,0968	4,7854
54	96,7786	1,6649	0,1404	5,2526
59	105,5820	1,8163	0,1531	5,3880
72	128,5791	2,2119	0,1865	5,7132

Taula 4: Posicions angulars i distància T-J. L'angle de l'ombra projectada per Júpiter és igual a l'angle d'aquest planeta respecte el Sol.

5.3.7 Procediment 4: tractament de dades

Totes les mesures realitzades en les diferents dates són independents. Cadascuna d'elles pot servir com a dada inicial per a les posteriors observacions, de manera que per cada parell de dades procedirem a obtenir dades per a la regressió i efectuar el càlcul de c. Si prenem les observacions de les ocultacions *n* i *m*:

ocultació *n* → $dia_{obs,\,n}$, $hora_{obs,\,n}$, distància T-J d_n i angle de l'ombra $\alpha_{ombra,\,n}$

ocultació *m* → $dia_{obs,\,m}$, $hora_{obs,\,m}$, distància T-J d_m i angle de l'ombra $\alpha_{ombra,\,m}$

ocult	dies respecte 17/07/20 0h	dia	hora fi
		CALCULAT	
1	0,1448	17/07/20	03:28:32
10	16,0659	02/08/20	01:34:52
15	24,9109	10/08/20	21:51:44
19	31,9870	17/08/20	23:41:13
23	39,0630	25/08/20	01:30:42
28	47,9080	02/09/20	21:47:34
37	63,8291	18/09/20	19:53:55
54	93,9023	18/10/20	21:39:14
59	102,7056	27/10/20	16:56:06
72	125,7027	19/11/20	16:51:56

ocult	dies respecte 02/08/20 0h	dia	hora fi
		CALCULAT	
10	0,0729	02/08/20	01:44:55
15	8,9179	10/08/20	22:01:46
19	15,9939	17/08/20	23:51:15
23	23,0700	25/08/20	01:40:45
28	31,9150	02/09/20	21:57:36
37	47,8361	18/09/20	20:03:57
54	77,9092	18/10/20	21:49:16
59	86,7126	27/10/20	17:06:08
72	109,7097	19/11/20	17:01:58

ocult	dies respecte 10/08/20 0h	dia	hora fi
		CALCULAT	
15	0,9220	10/08/20	22:07:42
19	7,9980	17/08/20	23:57:11
23	15,0741	25/08/20	01:46:40
28	23,9191	02/09/20	22:03:32
37	39,8402	18/09/20	20:09:52
54	69,9133	18/10/20	21:55:12
59	78,7167	27/10/20	17:12:03
72	101,7138	19/11/20	17:07:54

ocult	dies respecte 18/08/20 0h	dia	hora fi
		CALCULAT	
19	0,0014	18/08/20	00:02:04
23	7,0775	25/08/20	01:51:33
28	15,9225	02/09/20	22:08:24
37	31,8436	18/09/20	20:14:45
54	61,9167	18/10/20	22:00:05
59	70,7201	27/10/20	17:16:56
72	93,7172	19/11/20	17:12:46

ocult	dies respecte 25/08/20 0h	dia	hora fi
		CALCULAT	
23	0,0810	25/08/20	01:56:40
28	8,9261	02/09/20	22:13:31
37	24,8471	18/09/20	20:19:52
54	54,9203	18/10/20	22:05:11
59	63,7237	27/10/20	17:22:03
72	86,7208	19/11/20	17:17:53

ocult	dies respecte 02/09/20 0h	dia	hora fi
		CALCULAT	
28	0,9306	02/09/20	22:20:06
37	16,8517	18/09/20	20:26:26
54	46,9248	18/10/20	22:11:46
59	55,7282	27/10/20	17:28:37
72	78,7253	19/11/20	17:24:27

ocult	dies respecte 18/09/20 0h	dia	hora fi
		CALCULAT	
37	0,8601	18/09/20	20:38:36
54	30,9333	18/10/20	22:23:55
59	39,7367	27/10/20	17:40:46
72	62,7338	19/11/20	17:36:37

ocult	dies respecte 18/10/20 0h	dia	hora fi
		CALCULAT	
54	0,9497	18/10/20	22:47:38
59	9,7531	27/10/20	18:04:29
72	32,7502	19/11/20	18:00:19

ocult	dies respecte 27/10/20 0h	dia	hora fi
		CALCULAT	
59	0,7579	27/10/20	18:11:23
72	23,7550	19/11/20	18:07:13

Taula 5: Amb cada ocultació, instant previst per a les posteriors.

- Retard degut al canvi d'orientació de l'ombra:

$$\Delta\alpha_{ombra}=\alpha_{ombra,m}-\alpha_{ombra,n} \qquad \Delta\alpha_{ombra}=\frac{2\pi}{T_{Io}}\Delta t_{ombra} \quad \rightarrow \quad \Delta t_{ombra}=\frac{T_{Io}}{2\pi}\Delta\alpha_{ombra}$$

- Previsió per a l'ocultació *m* a partir de *n* i retard respecte el valor esperat:

$$h_{prev,m}=h_n+(m-n)T_{Io} \qquad \Delta t_{obs}=h_{obs,m}-h_{prev,m}$$

- Canvi de la distància T-J i retard degut al canvi de distància:

$$\Delta d=d_m-d_n \qquad \Delta t_{dist}=\Delta t_{obs}-\Delta t_{angle}$$

- Velocitat de la llum: $c=\Delta d/\Delta t_{dist}$

Exemple 1 - Ocultació 10 a partir ocultació 1:

$$\Delta\alpha_{ombra}=\alpha_{ombra,m}-\alpha_{ombra,n}=\alpha_{J,10}-\alpha_{J,1}=0{,}0275-0{,}0044=0{,}0231\,rad$$

$$\Delta t_{ombra}=\frac{T_{Io}}{2\pi}\Delta\alpha_{ombra}=\frac{1{,}769\cdot 24\cdot 3600}{2\pi}0{,}0231=562\,s$$

$$\Delta t_{obs}=h_{obs,10}-h_{prev,10}=1h44'55\text{-}1h34'52=603\,s$$

$$\Delta t_{dist}=\Delta t_{obs}-\Delta t_{ombra}=603-562=41\,s$$

$$\Delta d=d_{10}-d_1=4{,}2573-4{,}2044=0{,}0529\,UA$$

$$c=\Delta d/\Delta t_{dist}=0{,}0529\cdot 1{,}496\times 10^{11}/41=1{,}93\times 10^{8}\,m/s$$

Exemple 2 - Ocultació 37 a partir ocultació 10:

$$\Delta\alpha_{ombra}=\alpha_{ombra,m}-\alpha_{ombra,n}=\alpha_{J,37}-\alpha_{J,10}=0{,}0968-0{,}0275=0{,}0693\,rad$$

$$\Delta t_{ombra}=\frac{T_{Io}}{2\pi}\Delta\alpha_{ombra}=\frac{1{,}769\cdot 24\cdot 3600}{2\pi}0{,}0693=1685\,s$$

$$\Delta t_{obs}=h_{obs,37}-h_{prev,37}=20h38'36\text{ - }20h\,03'57=2079\,s$$

$$\Delta t_{dist}=\Delta t_{obs}-\Delta t_{ombra}=2079-1685=394\,s$$

$$\Delta d=d_{37}-d_{10}=4{,}7854-4{,}2573=0{,}5281\,UA$$

$$c=\Delta d/\Delta t_{dist}=0{,}5281\cdot 1{,}496\times 10^{11}/394=2{,}01\times 10^{8}\,m/s$$

Aquestes operacions són manuals i no hem agafat les mateixes xifres significatives que el full de càlcul, per la qual cosa alguns resultats difereixen lleugerament. A la pàgina següent es mostra la taula amb la combinació de tots els parells de dades possibles.

ocultació Inicial	ocultació Comparada	retard obs (s)	retard ombra (s)	**retard dist (s)**	**canvi dist T-J (UA)**	velocitat (m/s)
1	10	602	562	40	0,0529	1,961E+08
	15	958	874	84	0,1137	2,032E+08
	19	1250	1124	127	0,1769	2,087E+08
	23	1557	1373	184	0,2515	2,046E+08
	28	1951	1685	266	0,3586	2,016E+08
	37	2681	2247	434	0,5810	2,005E+08
	54	4103	3308	795	1,0482	1,972E+08
	59	4517	3619	898	1,1836	1,972E+08
	72	5602	4430	1172	1,5088	1,925E+08
10	15	355	312	43	0,0608	2,099E+08
	19	648	562	86	0,1239	2,146E+08
	23	955	811	143	0,1985	2,071E+08
	28	1349	1124	226	0,3057	2,026E+08
	37	2078	1685	393	0,5281	2,010E+08
	54	3501	2746	755	0,9953	1,973E+08
	59	3914	3057	857	1,1308	1,973E+08
	72	5000	3868	1132	1,4559	1,924E+08
15	19	293	250	43	0,0631	2,194E+08
	23	599	499	100	0,1378	2,058E+08
	28	994	811	182	0,2449	2,008E+08
	37	1723	1373	350	0,4674	1,999E+08
	54	3146	2434	711	0,9345	1,965E+08
	59	3559	2745	814	1,0700	1,966E+08
	72	4645	3556	1089	1,3951	1,917E+08
19	23	307	250	57	0,0746	1,956E+08
	28	701	562	139	0,1818	1,951E+08
	37	1430	1124	307	0,4043	1,971E+08
	54	2853	2185	668	0,8714	1,951E+08
	59	3266	2495	771	1,0069	1,953E+08
	72	4352	3307	1046	1,3320	1,906E+08
23	28	394	312	82	0,1072	1,948E+08
	37	1124	874	250	0,3296	1,975E+08
	54	2546	1935	611	0,7968	1,950E+08
	59	2960	2246	714	0,9323	1,953E+08
	72	4045	3057	988	1,2574	1,903E+08
28	37	729	562	167	0,2225	1,988E+08
	54	2152	1623	529	0,6896	1,951E+08
	59	2565	1933	632	0,8251	1,954E+08
	72	3651	2745	906	1,1502	1,899E+08
37	54	1423	1061	362	0,4672	1,933E+08
	59	1836	1372	464	0,6026	1,942E+08
	72	2922	2183	739	0,9277	1,879E+08
54	59	413	311	103	0,1355	1,971E+08
	72	1499	1122	377	0,4605	1,826E+08
59	72	1086	811	274	0,3250	1,772E+08

Taula 6: Retards i canvis de distància relatius entre observacions.

5.3.8 Càlcul de la velocitat de la llum

Amb les dades de la taula anterior (retard degut al canvi de distància i el canvi de distància) fem una regressió lineal per obtenir el pendent (velocitat de la llum).

$$c = \Delta d / \Delta t_{dist} \quad \rightarrow \quad \Delta d = c \, \Delta t_{dist}$$

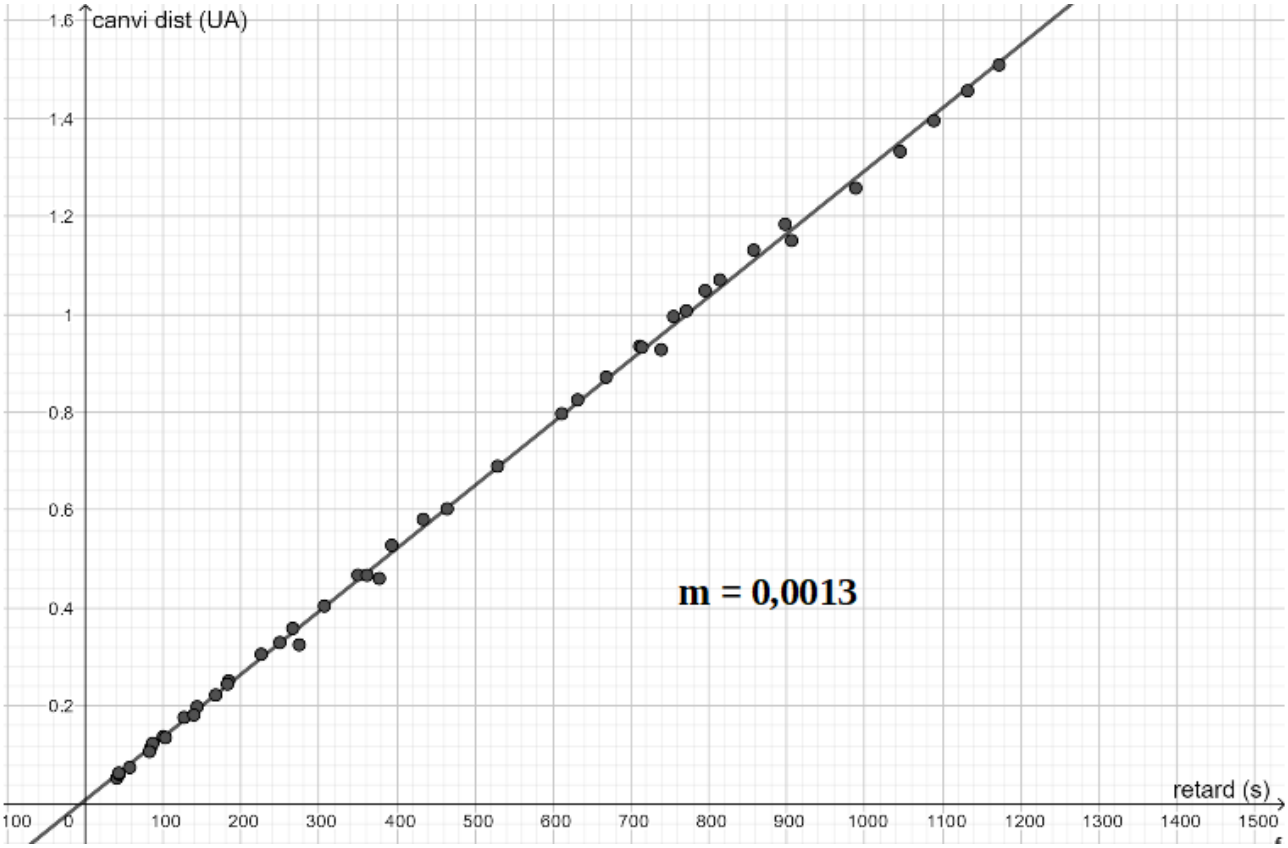


Figura 72: Punts corresponents a la taula anterior i recta de regressió. Font: elaboració pròpia

$\Sigma t_i \cdot d_i$	Σt_i^2	m=c (UA/s)	Error $\sqrt{\Sigma(d_i - ct_i)^2/(n-1)\Sigma t_i^2}$
1,983E+04	1,530E+07	**1,300E-03**	3,662E-06

$$m = 0{,}0013 \, UA/s \times \frac{1{,}496 \times 10^{11} \, m}{1 \, UA} = 1{,}945 \times 10^{8} \, m/s$$

Tal com indica la taula anterior, l'error quadràtic mig ($3{,}7 \cdot 10^{-6}$) és extremadament petit i no afecta significativament al valor calculat de la nostra constant. Aquest fet és observable en el gràfic perquè tots els punts són molt propers a la recta de regressió. Per tant, calcularem la propagació de l'error de resolució de les nostres mesures perquè tindrà un efecte major en el nostre resultat.

Per fer el càlcul d'error de resolució analitzem la fórmula de *c:*

$$c=\Delta d/\Delta t_{dist}=\frac{\Delta d}{\Delta t_{obs}-\Delta t_{angle}}$$

Només depèn de les nostres mesures de l'interval entre temps esperat i temps observat. A continuació calculem la derivada de la funció *c* respecte la variable *t* i l'error:

$$\frac{dc}{dt}=\frac{-\Delta d}{(\Delta t_{obs}-\Delta t_{angle})^2} \quad \rightarrow \quad \epsilon_h=\epsilon_h(t)=|\frac{dh}{dt}|\epsilon_t$$

Detallem el càlcul per cada punt en l'annex 4. Prenent una incertesa en la mesura del temps de 5 segons, el màxim error de resolució és de: $2{,}6 \cdot 10^7$ m/s.

Per tant, obtenim un resultat de:

$$\boxed{c=1{,}95(\pm 0{,}26)\times 10^8 m/s}$$

6 CONCLUSIONS

Després de la realització de la part pràctica d'aquest treball, arribem a les següents conclusions:

CONSTANT D'AVOGADRO:

$$N_A = 5{,}99(\pm 0{,}61)\times 10^{23}\, mol^{-1} \qquad E_r = \frac{|6{,}02-5{,}99|}{6{,}02}\times 100 = 0{,}50\,\%$$

L'error relatiu és només del 0,5%. De les 3 proves realitzades, les més satisfactòries han estat la 1 i la 2, amb un resultat de $6{,}011 \cdot 10^{23}$. D'aquestes, la més fiable és la primera perquè té un error de resolució menor. Això succeeix perquè circulava una intensitat de corrent més elevada que va generar un volum de gas H_2 major. Amb la mateixa incertesa en l'escala de mesura, el mateix error de resolució afecta menys de forma relativa.

Podem considerar un èxit aquest resultat perquè depèn de moltes mesures experimentals (intensitat de corrent *I,* el temps de durada del procés *Δt,* la temperatura *T,* l'alçada de la columna d'aigua *h* i del volum d'hidrogen obtingut *V).* Malgrat haver realitzat només 3 proves, hem vist que tenien poca dispersió respecte la mitjana obtinguda. Això demostra que la pràctica de l'electròlisi de l'aigua en medi àcid és un mètode força fiable per mesurar la constant d'Avogadro.

CONSTANT DELS GASOS

$$R = 8{,}2(\pm 4{,}2)\, kPa\cdot L/K\cdot mol \qquad E_r = \frac{|8{,}3-8{,}2|}{8{,}3}\times 100 = 1{,}20\,\%$$

En aquesta pràctica cal remarcar la poca precisió en la mesura de la massa de magnesi, ja que la bàscula utilitzada només mostra fins a centèsimes de gram. Això provoca que l'error de resolució sigui extremadament gran. Malgrat haver obtingut un resultat final per *R* de *8,3 kPa · L / K · mol* amb un error relatiu de 1,2%, no ho considerem un procediment adient perquè la dispersió entre els resultats de cada experiment és bastant elevada i hauríem pogut obtenir una mitjana força diferent. Amb el mateix valor de 0,003g de Mg, obtenim 4 valors de *R* força diferents entre si.

Per millorar aquest mètode, la bàscula utilitzada hauria de tenir més precisió i hauríem de ser capaços de recollir un gran volum de gas.

CÀRREGA ELEMENTAL

$$e = 1{,}538(\pm 0{,}062)\times 10^{-19}\, C \qquad E_r = \frac{|1{,}602\times 10^{-19} - 1{,}538\times 10^{-19}|}{1{,}602\times 10^{-19}}\times 100 = 4{,}00\,\%$$

L'error de resolució no abasta el valor real. El fet d'haver treballat amb una simulació que imita l'experiment de Millikan fa que no puguem valorar aquest desajust. Desconeixem com aquest programa determina, per exemple, el volum de la gota d'oli o si considera nulla o no la força d'empenyiment (prinicipi d'Arquímedes).

Aquest experiment ha estat repetit fins a 10 vegades, atès que és necessari obtenir un gran nombre de resultats. Calia trobar el nombre del qual totes les càrregues fossin múltiples, i aquest sempre pot ser la seva meitat o qualsevol fracció (de numerador 1). Per tant, havíem d'assegurar-nos que realment aquest nombre corresponia a la càrrega elemental i no era també un múltiple d'aquesta. En el nostre cas, hem deduït que la gota amb càrrega més petita conté 2 vegades la càrrega elemental.

CONSTANT DE PLANCK

$$h = 6{,}45(\pm 0{,}26) \times 10^{-34}\, J{\cdot}s \qquad E_r = \frac{|6{,}626 - 6{,}45|}{6{,}626} \times 100 = 2{,}66\,\%$$

La primera part de l'experiment ha estat un fracàs absolut (no s'ha pogut determinar la longitud d'ona) i hem hagut de recórrer a les dades facilitades pel fabricant dels LEDs. Tot i això, podem considerar aquesta pràctica un èxit perquè l'error comès ha estat només del 2,66%.

Malgrat haver obtingut poques dades per fer la regressió lineal (la prova ha estat realitzada amb només 3 freqüències diferents), la dispersió és molt petita, és a dir, els resultats obtinguts per separat en cada prova s'apropen bastant. Així doncs, considerem que aquesta pràctica és vàlida per a la determinació de la constant.

Valorem que el principal error es troba en la determinació de l'energia de la banda prohibida, concretament en la tria del tram adequat de la corba d'intensitat de corrent de cada freqüència, per fer-ne la primera regressió i trobar el punt de tall correcte amb l'eix X.

VELOCITAT DE LA LLUM

$$c = 1{,}95(\pm 0{,}26) \times 10^{8}\, m/s \qquad E_r = \frac{|3{,}00 - 1{,}95|}{3{,}00} \times 100 = 35\,\%$$

Aparentment, aquesta constant és en la que hem obtingut el pitjor resultat, amb un error relatiu del 35%. A més, el valor real de *c* no entra dins l'interval d'error de resolució previst. Aquest desajust és causat, principalment, pel fet d'haver aproximat òrbites circulars uniformes.

Són diverses les característiques de les òrbites de la Terra i de Júpiter al voltant del Sol que caldria haver tingut en compte per fer un càlcul més realista:

- L'òrbita de la Terra està continguda, per definició, en el pla de l'eclíptica, mentre que l'òrbita de Júpiter presenta una certa inclinació *i* respecte aquest pla.

- L'òrbita de Júpiter creua el pla de l'eclíptica en dos punts anomenats nodes (ascendent i descendent). En el pla de l'eclíptica, el node ascendent es troba a un cert angle anomenat longitud Ω mesurat des d'un punt de referència fix (punt d'Àries).

- D'acord amb les lleis de Kepler, les òrbites planetàries són el·líptiques i la velocitat és màxima en el periheli i mínima en l'afeli.

- La línia que uneix el Sol amb el periheli i l'afeli (línia dels àpsides) és diferent en cadascuna de les òrbites. A més d'estar continguda en diferents plans, la seva projecció sobre el pla de l'eclíptica no coincideix. Per tant, l'angle mesurat sobre el pla de l'òrbita des del node ascendent fins al periheli (argument del periheli ω) és diferent per a cada planeta.

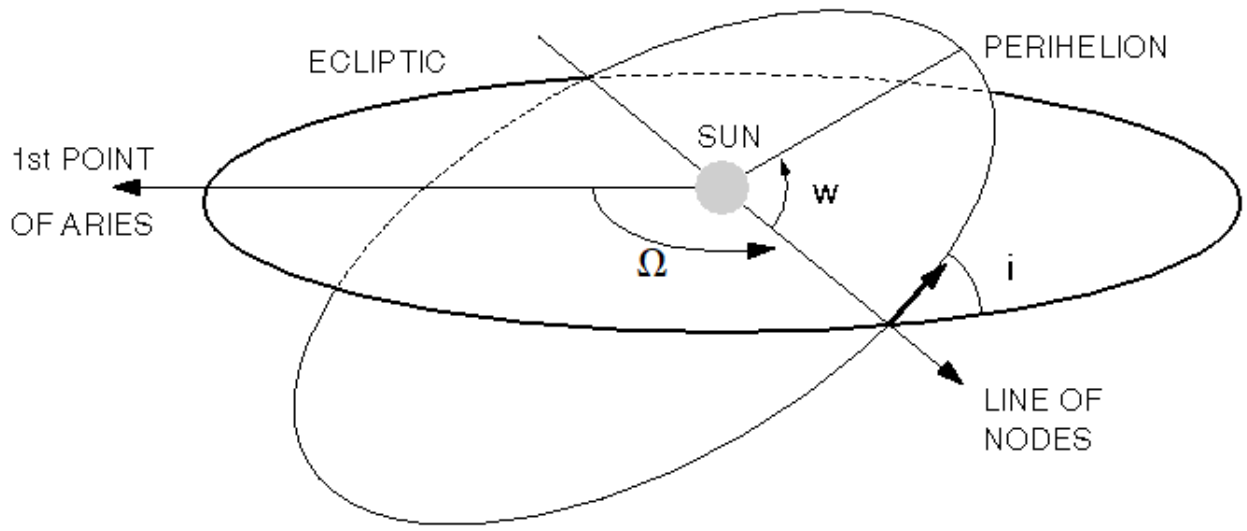


Figura 73: Elements orbitals d'una òrbita el·líptica. Font: ESA

Les eines matemàtiques al nostre abast no són suficients per incloure tots els punts explicats anteriorment. Això fa que ens sigui absolutament impossible saber les velocitats angulars de la Terra i Júpiter i les seves posicions relatives en qualsevol instant de temps en concret. En conseqüència, els nostres càlculs de la distància T-J i del canvi d'aquesta distància entre dues observacions són erronis, com també ho són els resultats obtinguts per l'angle de l'ombra de Júpiter i pel retard causat per l'ombra.

Utilitzant el programa *Stellarium* per consultar distàncies relatives T-J, hem detectat que la distància entre els dos planetes anava disminuint en les dates posteriors a l'oposició. Sorprenentment, si canviéssim la nostra distància calculada per la distància real, obtindríem un resultat encara més erroni (més petit) per a la velocitat de la llum.

Així doncs, l'efecte del canvi d'orientació de l'ombra de Júpiter ha de ser força rellevant. El retard real causat per l'ombra ha de ser major que el calculat, és a dir, que el desplaçament angular real de Júpiter ha de ser també major que el calculat en el MCU.

En conclusió, deduïm que en el període de les nostres observacions, Júpiter es trobava en un punt de la seva òrbita en el qual la velocitat angular és major que la mitjana, és a dir, en les "proximitats" del periheli.

Sota aquesta consideració, creiem que el nostre resultat és prou encertat. A més, s'observa que gairebé la totalitat dels valors obtinguts comparant cada parell de dades coincideix amb la recta de regressió. Per tant, la dispersió és mínima.

En definitiva, amb l'aproximació de les òrbites a MCU no és possible assolir un resultat gaire més proper. Roemer va concloure que la llum viatjava a 220.000 km/s.

CONCLUSIONS GENERALS:

Els objectius plantejats en la introducció d'aquest treball han estat àmpliament complerts.

En la part pràctica, ha quedat demostrat que dur a la pràctica diferents experiments amb els materials a l'abast d'un alumne de batxillerat és perfectament viable. Evidentment, en l'època en què es van dur a terme per primer cop, els mitjans disponibles no eren els mateixos i és plausible l'enginy i la tenacitat dels seus autors. El més complicat, sens dubte, ha sigut la determinació de la velocitat de la llum per les hores d'observacions astronòmiques i la impossibilitat de controlar les condicions atmosfèriques. També per la dificultat de les matemàtiques del tractament de dades.

Aprofundint en l'evolució històrica de les diferents teories i models científics, hem comprovat que la construcció del coneixement científic és un procés laboriós i complex, en el qual sovint es cometen errors i la resposta correcta requereix la col·laboració de moltes persones que, amb les seves contribucions, aporten noves idees.

Tot comença amb l'observació sistemàtica i rigorosa d'algun fenomen que dona lloc a la pregunta del perquè i la formulació d'hipòtesis. Totes les hipòtesis cal reafirmar-les amb fets experimentals, que són els que corroboren una teoria científica o la refuten. Qualsevol model és totalment provisional i té una validesa finita, fins que es descobreixen nous fenòmens que el contradiuen o que no es poden explicar.

7 BIBLIOGRAFIA

ANDREU, Jordi, VALLS, Josep M. «Determinació de la constant de Planck a partir de l'electroluminiscència d'un díode» Universitat de Barcelona i Escola Pia Diputació. 2005. Sense més dades (còpia en paper)

ARTUSO, Carolina; SATZ, Alejandro. «Determinación de la Constante de Planck Utilizando Leds». Universidad de Buenos Aires, 2001. Sense més dades. Document: http://users.df.uba.ar/sgil/labo5_uba/inform/info/pautadas/led_const_plank2k1.pdf

ASIMOV, Isaac. *Breve historia de la química*. 4ª edició . Madrid: Alianza, 2003, 141 p, col·lecció: *Área de conocimiento: Ciencia técnica*. ISBN: 84-206-3979-6. Document: http://www.univermedios.com/wp-content/uploads/2018/Breve-Historia-de-la-Quimica-Isaac-Asimov.pdf

ASTROAFICIÓN. *Efeméridas Astron´micas: Abril 2020*. Madrid, 2020. https://astroaficion.com/2020/04/01/efemerides-astronomicas-abril-de-2020/ [abril 2020]

Autor desconegut. *Experiment de la doble ranura de Young*. Departament d'Ensenyament.http://apliense.xtec.cat/prestatgeria/a8053030_984/llibre/bookcontents.php?page=10&section=11&viewis=&username= [maig 2020]

Autor desconegut. *Mediciones de la velocidad de la luz a lo largo de la historia*. Abril 2015. https://medidasvelocidadluzhistoricas.wordpress.com/ [abril 2020]

BASSEDAS, Mariona et al. *Química en context. https://sites.google.com/a/xtec.cat/quimica-en-context/* CESIRE, Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya.

BEC-BORSENBERGER, Annick et al. *Les étoiles le système solaire. Encyclopédie scientifique de l'univers du bureau des longitudes*. Paris: Gauthier-Villars, 1986, 403 p. ISBN: 2-04-016441-3.

BEST, Nicholas W. *Principis, elements i substànciesombre d'Avogadro*. Revista Mètode, Universitat de València, 18 novembre 2011. https://metode.cat/revistes-metode/monografics/principis-elements-i-substancies.html [setembre 2020]

CAAMAÑO, Aureli; COROMINAS, Josep. «¿Cómo abordar con los estudiantes la planificación de los trabajos pràcticos investigativos?» Alambique: didáctica de las ciencias experimentales. Num 39, 2004, p. 52-63. Document: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=785905

CAAMAÑO, Aureli; OBACH, Damià. *Química 1 batxillerat*. Barcelona: Teide, 2000, 383 p. ISBN: 84-307-5033-9.

CAAMAÑO, Aureli; OBACH, Damià. *Química 2 batxillerat*. Barcelona: Teide, 2004, 422 p. ISBN: 84-307-5065-7.

CAPELLÀ SOLER, Margalida. *El fil de les clàssiques: els grecs i la història de la llum*. Premià de Mar, 15 novembre 2015. *https://blocs.xtec.cat/elfildelesclassiques/2015/11/09/els-grecs-i-la-historia-de-la-llum/* [maig 2020]

CASADO, Juan C; SERRA-RICART, Miquel; CUESTA, Luis. «Unidad didáctica Ocultaciones». Instituto Astronomica de Canarias. Document: https://www.iac.es/system/files/documents/2019-09/unidad-ocultaciones_0.pdf

CASELLAS, Octavi et al. F*ísica en context*. CESIRE, Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya, edició 2019. http://cesire.cat.mialias.net/recursos/context/fisica/unitat%206/index.html

CLOSA, Daniel. *Avogadro, l'home que NO va calcular el seu nombre*. 23 octubre 2019. http://danielclosa.cat/centpeus/avogadro-lhome-que-no-va-calcular-el-seu-nombre/ [setembre 2020]

Col·laboradors Agència Espacial Europea, ESA. *The Ulysses Orbit: classical orbital elements*. ESA, sense més dades. https://www.cosmos.esa.int/web/ulysses/orbital-elements [desembre 2020]

Col·laboradors de Cronodon. *Atoms-Spectra*. Cronodon, maig 2018. https://cronodon.com/Atomic/AtomTech3.html [juliol 2020]

Col·laboradors d'EcuRed. *Química moderna*. EcuRed, 13 agost 2019. https://www.ecured.cu/Qu%C3%ADmica_moderna [setembre 2020]

Col·laboradors de ICandela. *La calidad de la luz del LED*. Revista Icandela, 1 gener 2016. https://www.interempresas.net/Iluminacion/Articulos/225100-La-calidad-de-la-luz-del-LED-(1-parte).html [juliol 2020]

Col·laboradors de Museo Virtual de la Ciencia. *La naturaleza de la luz*. CSIC, sense més dades. http://museovirtual.csic.es/sala1.htm [maig 2020]

Col·laboradors de PNGWING. *PNGWING,descarga gratuita de imágenes png transparentes*. Sense més dades. https://www.pngwing.com/es/free-png-pglqj. [setembre 2020]

Col·laboradors de Química-organica. *Teoría Cinética Molecular de los Gases*. https://www.quimica-organica.com/teoria-cinetica-molecular-gases/. Sense més dades. [setembre 2020]

Col·laboradors de Va de Ciència. *Velocitat de propagació de la llum*. Novembre 2010. http://vdciencia.blogspot.com/2010/11/velocitat-de-propagacio-de-la-llum.html [abril 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Càrrega elèctrica elemental*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 30 juny 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/C%C3%A0rrega_el%C3%A8ctrica_elemental. [agost 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Clorur de sodi*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 3 juliol 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/Clorur_de_sodi [setembre 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Congrés Solvay*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 19 juny 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/Congr%C3%A9s_Solvay [juliol 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Constant de Planck*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 21 juny 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/Constant_de_Planck [juliol 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Constant dels gasos*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 1 setembre 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/Constant_dels_gasos [octubre 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Cristal·lografia de raigs X*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 1 juny 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/Cristal%C2%B7lografia_de_raigs_X. [setembre 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Electró*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 1 juliol 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/Electr%C3%B3. [agost 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Estructura cristal·lina*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 1 juny 2020.https://ca.wikipedia.org/wiki/Estructura_cristal%C2%B7lina . [setembre 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Experiment de la doble escletxa*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 7 abril 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/Experiment_de_la_doble_escletxa [maig 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Història de la mecànica quàntica*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 20 juliol 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/Hist%C3%B2ria_de_la_mec%C3%A0nica_qu%C3%A0ntica [juliol 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Llei de Bragg*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 7 agost 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/Llei_de_Bragg [setembre 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Lleis ponderals*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 1 maig 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/Lleis_ponderals [agost 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Nombre d'Avogadro*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 10 agost 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/Nombre_d%27Avogadro. [setembre 2020]

Col·laboradors de Viquipèdia. *Òrbita*. Viquipèdia, l'Enciclopèdia Lliure, 24 desembre 2020. https://ca.wikipedia.org/wiki/%C3%92rbita [desembre 2020]

Col·laboradors de Wikipedia. *Constante de Avogadro*. Wikipedia, La Enciclpedia Libre, 1 agost 2020. https://es.wikipedia.org/wiki/Constante_de_Avogadro [setembre 2020]

Col·laboradors de Wikipedia. *Constante de Planck*. Wikipedia, La Enciclopedia Libre, 25 juny 2020. https://es.wikipedia.org/wiki/Constante_de_Planck [juliol 2020]

Col·laboradors de Wikipedia. *Espectro del hidrógeno*. Wikipedia, La Enciclopedia Libre, 23 juliol 2020. https://es.wikipedia.org/wiki/Espectro_del_hidr%C3%B3geno [juliol 2020]

Col·laboradors de Wikipedia. *Ley de Avogadro*. Wikipedia, La Enciclopedia Libre, 1 agost 2020. https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Avogadro [setembre 2020]

Col·laboradors de Wikipedia. *Loschmidt constant*. Wikipedia, The Free Encyclopedia , 12 abril 2020. https://en.wikipedia.org/wiki/Loschmidt_constant [setembre 2020]

Col·laboradors de Wikipedia. *Movimiento browniano*. Wikipedia, La Enciclopedia Libre, 12 agosto 2020. https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_browniano [setembre 2020]

Col·laboradors de Wikipedia. *Robert Andrews Millikan*. Wikipedia, La Enciclopedia Libre, 7 juliol 2020. h*ttps://es.wikipedia.org/wiki/Robert_Andrews_Millikan#El_efecto_fotoel %C3%A9ctrico* [juliol 2020]

Col·laboradors de Wikipedia. *Velocidad de la luz*. Wikipedia, La Enciclopedia Libre, 16 març 2020. https://es.wikipedia.org/wiki/Velocidad_de_la_luz [abril 2020]

CORDOVA José Luis. «*El número de Avogadro*». Universidad Autónoma Metropolitana. México, publicaciones online. Sense més dades. Document: https://www.mhe.es/bachillerato/fisica_quimica/8448150058/archivos/media/esp/unidad_10/Avogadro.pdf

COROMINAS, Josep. *«Química talla S»*. Sense més dades. Document: http://corominas-quimica.com/wp-content/uploads/2017/01/Qu%C3%ADmica-talla-S.pdf

COSTA, Carles. "Models atòmics: diverses teories al llarg de la història". 2010. Sense més dades. Document: https://blocs.xtec.cat/carlescosta/files/2010/11/models-atomics-tema-4.pdf

DATSI. *Campos Magnéticos*. Universidad Politécnica de Madrid. Sense més dades. http://tamarisco.datsi.fi.upm.es/ASIGNATURAS/FFI/apuntes/camposMagneticos/teoria/estacionarios/estacionarios9/estacionarios9.htm

DÍAZ, Vicente. *El cielo del mes*. 2020. Sense més dades. http://www.elcielodelmes.com/Efemerides/conjunciones-y-oposiciones-planetas-externos.php#2 [juny 2020]

ELIZALDE, Emili. «La radiació de cos negre: de Max Planck a Stephen Hawking». Institute of Space Sciences, CSIC. 2015. Presentació: http://www.ice.csic.es/personal/elizalde/eli/aascv_14mar15a.pdf

ELIZALDE, Emili. «Llum: Ona o Partícula?». Institute of Space Sciences, CSIC. Presentació: http://www.ice.csic.es/personal/elizalde/eli/semuab_dissabfis15.pdf

FRANCO GARCÍA, Angel. *El efecto fotoeléctrico*. Universidad del País Vasco, 2016. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cuantica/fotoelectrico/fotoelectrico.htm [juliol 2020]

FRANCO GARCÍA, Angel. *El osciloscopio*. Universidad del País Vasco, 2016. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/movimiento/osciloscopio/osciloscopio.htm [agost 2020]

FRANCO GARCÍA, Angel. *Medida de la relación carga/masa*. Universidad del País Vasco, 2016. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/thomson/Thomson.html [agost 2020]

FRANCO GARCÍA, Angel. *Medida de la unidad fundamental de carga*. Universidad del País Vasco, 2016. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/millikan/millikan.html [agost 2020]

FRANCO GARCÍA, Angel. *Medida de la velocidad de la luz. Procedimiento de Roemer*. Universidad del País Vasco, 2016. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/roemer/roemer.htm [febrer 2020]

GALVÁN, Elisabeth K; VILLEGA, Ximena. «Práctica 4: determinación de la constante universal de los gases». Facultad de Química, Universidad Autónoma de México. Sense més dades. Document: http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/Practica_4_Constante_R_26851

GELLÓN, Gabriel. *Didáctica de las ciencias naturales. Capítulo 1: Modelos teóricos en pugna. El caso Dalton vs. Gay-Lussac*. Buenos Aires: Lugar Editorial, 2011. 214 p. ISBN: 978-950-89236-6-0. Document: https://expedicionciencia.org.ar/wp-content/uploads/2015/04/Modelos-te%C3%B3ricos-en-pugna.pdf

HOLTON, Gerald. *Centennial focus: Millikan's Measurement of Planck's Constant*. American Physics Society, basat en article de Physical Review, 1999. *https://physics.aps.org/story/v3/st23* [juliol 2020]

ICCUB. *Serviastro*. Universitat de Barcelona. 2020. https://serviastro.ub.edu/ [febrer 2020]

Khan Academy. *Absorption/Emission lines*. Sense més dades. https://www.khanacademy.org/science/class-11-chemistry-india/xfbb6cb8fc2bd00c8:in-in-structure-of-atom/xfbb6cb8fc2bd00c8:in-in-bohr-s-model-of-hydrogen-atom/a/absorptionemission-lines. [agost 2020]

Laboratori de Tecnologia Electromagnètica. *"Mesura de la càrrega de l'electró*. L'experiment *de* Millikan". Universitat de Barcelona. Sense més dades. Document: http://www.ub.edu/gilafa/gilafa_tecno/sites/default/files/pdf/experiment_millikan.pdf

LAWSON, Barrie. *Millikan's determination of Planck's constant*. Electropaedia. Sense més dades. https://www.mpoweruk.com/figs/Plancks-Constant.htm [juliol 2020]

MARTÍNEZ-RIPOLL, Martín. *Cristalografía*. CSIC, 28 abril 2020. https://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/ [setembre 2020]

McCULLEY, Frank. *The Millikan Oil Drop Lab*. Simulació: https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/MillikanOilDropLab/index.html

MENDELEIEV, Dimitri. "Recherches expérimentales sur l'élasticité des gaz". Société Impériale Technique Russe, 1875. Sense més dades. Document: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k95208b/f63.image

MILLIKAN, Robert Andrews. «On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant». Physical Review Vol II, num2, 1 agost 1913 , p. 109-143. Document: https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.2.109

MILLIKAN, Robert Andrews. «Photoelectrical Determination of Planck's "h"». Physical Review Vol VII, num3, 1916 , p 355-388. Document: https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.7.355

OAN. *Información Astronómica del OAN para el 2020*. Instituto Geográfico Nacional. 2020. http://www.oan.es/servidorEfem/index.php [març 2020]

Physical Measurement Laboratory of NIST. *Nist: The NIST Reference on Constants, Units , and Uncertainty*. NIST, maig 2019. https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html [desembre 2020]

RAMIREZ, Lorenzo. *Experimentació lliure*. https://experimentaciolliure.com/constants/. [desembre 2020]

REDONDO DÍAZ, Míriam. "Teoria atòmica models atòmics". 21 setembre 2014. Presentació: https://es.slideshare.net/mredon6/models-atmics

RINALDI, Mauricio. *Acerca de la velocidad de la luz*. Buenos Aires, 2011. http://estudioarslux.blogspot.com/2011/11/ [abril 2020]

ROMÁN POLO, Pascual. "*Canizzarro: químico, revolucionario y precursor de la tabla periódica*". Anales de la Real Sociedad Española de Química. Num 2, 2010, p. 137-144. Document: http://www.ehu.eus/reviberpol/pdf/historiaquimica/roman2.pdf

SAVALL, Paco. "La polèmica sobre la naturalesa de la llum a principi del s XX". *Revista DauAlDeu,* primera època, num4, 2013, p 33-35. Document: https://daualdeu.wordpress.com/2013/12/09/la-polemica-sobre-la-naturalesa-de-la-llum-a-principi-del-segle-xx/

SHUTTERSTOCK, Inc. https://www.shutterstock.com/it/image-vector/atomic-models-scientist-years-solid-sphere-1530632366. [agost 2020]

Tarleton State University. " Planck's *constant*". Texas, 2010. Sense més dades. https://faculty.tarleton.edu/goderya/documents/Teaching/phy334/M6-ch-3.pdf

TIPLER, Paul A. *Física*. 1ª edició en català. Barcelona: Reverté, S.A., 1994, Volum 2, 574 p. ISBN: 84-291-4371-8.

TORRENTS, Isabel. *Tecnologia dia a dia: ones electromagnètiques*. Ies Joan Puig i Ferreter, abril 2012. https://blocs.xtec.cat/tecnologia/2012/04/23/ones-electromagnetiques/ [maig 2020]

TRULLÀS, Quim. "L'Espectre Electromagnètic". Universitat Politècnica de Catalunya, 2013. Presentació:https://fisica.upc.edu/ca/fisica-1/SF11-FIB/docencia/fisica-1/presentacions

UNAM. "Ondas". Universidad Nacional Autónoma de México. Sense més dades. Presentació: http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/antecedentes_35091.pdf

University of Bristol. *The Elements*. http://www.chm.bris.ac.uk/webprojects2002/tubb/elements.htm [setembre 2020]

VALENZUELA, David. *Fisic: Teorías de la luz*. Valparaíso, 21 octubre 2019. *https://www.fisic.ch/contenidos/ondas-y-la-luz/teor%C3%ADas-de-la-luz/* [maig 2020]

VIETA, Pep Anton. *PepQuímic: apunts de divulgació científica*. 24 juliol 2009. https://pepquimic.wordpress.com/2009/07/24/electrolisi-de-laigua/ [octubre 2020]

Annexos

Annex 1. Tractament de dades experimentals

Introducció

La determinació experimental de qualsevol magnitud física (massa, temperatura, voltatge, intensitat ...) es realitza mitjançant aparells de mesura i el posterior tractament de les dades obtingudes. Qualsevol que sigui el grau de complexitat d'una mesura, les dades experimentals que s'obtenen sempre tenen una certa imprecisió que cal saber valorar. El grau d'imprecisió, o de fiabilitat, d'aquestes dades es caracteritza amb una quantitat anomenada error experimental. Aquest és el sentit que donem al concepte d'error en ciències experimentals, que no té res a veure amb la idea d'equivocació.

Tipus d'error

Encara que les causes dels errors en les mesures experimentals són molt variades, els diferents tipus d'errors es poden classificar en dos grups: els errors instrumentals i els errors accidentals.

Errors instrumentals

Els errors instrumentals estan directament relacionats amb l'aparell de mesura. Els diferents tipus d'errors instrumentals que presenta tot aparell són els següents:

a) L'**error de resolució** és degut a la precisió intrínseca de l'aparell. Aquest error és inherent a qualsevol mesura i, per tant, inevitable, de manera que no podem assolir resultats amb un error inferior al de resolució. Normalment, el fabricant d'un aparell indica el valor de l'error de resolució, però si no és així se segueix el criteri següent per determinar-lo:

a1) En els aparells analògics es considera que l'error de resolució és igual a la meitat de la diferència entre dos valors consecutius de l'escala. A l'exemple de l'amperímetre de la Figura 1 l'error de resolució és de 0.1 A.

a2) En els aparells digitals es considera que l'error de resolució és igual a una unitat en l'últim dígit. A l'exemple de l'amperímetre de la Figura 2 l'error de resolució és de 0.001 A.

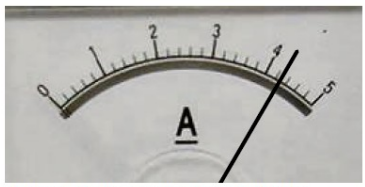


Figura 1: Amperímetre analògic

Figura 2: Amperímetre digital

b) L'**error de zero** és el valor que indica l'aparell quan la magnitud mesurada correspon al valor inicial d'escala. Si l'amperímetre de la Figura 1 marquès un valor diferent de 0 quan no circula intensitat, voldria dir que té un error de zero. Alguns aparells permeten corregir aquest error, calibrant el zero.

c) L'**error d'escala** és la diferència entre la magnitud mesurada i el valor real a diferents punts de l'escala de mesura. Si l'amperímetre de la Figura 1 no marquès 5 A quan circula

un corrent de 5 A, voldria dir que té un error d'escala. Aquest error es corregeix calibrant l'aparell.

Errors accidentals

Quan es repeteix una mesura més d'una vegada en, aparentment, idèntiques condicions, sovint s'observa que els resultats no coincideixen. Si hom pogués controlar tots els factors que incideixen sobre un experiment sempre trobaria el mateix resultat. A la pràctica, però, hi ha una sèrie de factors aleatoris que provoquen desviacions en els resultats d'una mateixa magnitud. Aquestes desviacions introdueixen una incertesa en el resultat final que s'anomena error accidental. L'estimació d'aquest tipus d'error es basa en mètodes estadístics.

En la majoria de mesures que farem els errors accidentals acostumen a ser inferiors a l'error de resolució i no els tindrem en compte. Per tant, si no es diu el contrari, considerarem que l'error de les mesures serà només el de resolució.

Expressió d'un resultat experimental

Tenint en compte el que hem comentat a l'apartat anterior queda clar, doncs, que quan mesurem una determinada magnitud, el resultat que obtenim no és un resultat exacte sinó un interval al voltant d'un resultat aproximat. El resultat de la mesura s'acostuma a escriure com

$$\boxed{x \pm \epsilon_x}$$

on x indica el resultat de la magnitud mesurada que es considera millor i ε_x és un nombre real positiu (amb les mateixes unitats que x). Aquesta expressió indica que el valor de la mesura està comprès entre x-ε_x i x+ε_x.

Normalment, l'error s'expressa amb una o dues xifres significatives. Hi ha tres possibles maneres de suprimir xifres d'una quantitat:

a) Aproximació per defecte o **truncament**: Consisteix a suprimir les xifres sobrants.

b) Aproximació per **excés**: Consisteix a suprimir les xifres sobrants i sumar una unitat a l'última xifra expressada.

c) **Arrodoniment**: Consisteix en truncar o aproximar per excés de manera que el valor arrodonit sigui el més proper al valor previ a l'arrodoniment, la qual cosa es fa d'acord amb el criteri següent:

- Si la xifra d'ordre més alt suprimida és inferior a 5, es trunca

- Si la xifra d'ordre més alt suprimida és superior o igual a 5, s'aproxima per excés

L'ERROR SEMPRE S'APROXIMA PER EXCÉS.

Exemples de l'expressió correcta dels errors:

Valor	2 xifres significatives	1 xifra significativa
1.3458	1.4	2
57.763	58	60
24.7×10^4	25×10^4	3×10^5
0.0298	0.030	0.03

Una vegada s'ha expressat l'error amb una o dues xifres significatives, el valor de la magnitud mesurada s'expressa de manera que l'última xifra significativa sigui del mateix ordre que la d'ordre més baix a l'error.

EL VALOR DE LA MAGNITUD MESURADA SEMPRE S'ARRODONEIX.

Exemples de l'expressió correcta del resultat d'una mesura:

Magnitud	Error	Expressió correcta
2.5483	1.3458	2.5 ± 1.4
3458.9353	57.763	3459 ± 58
67.8295	0.0276	67.830 ± 0.028
809.4563	0.0298	809.456 ± 0.030

Al laboratori expressarem els errors amb 2 xifres significatives.

Propagació d'errors

Sovint estem interessats en magnituds que no podem mesurar directament, i, en conseqüència, ens veiem obligats a avaluar-les a partir d'altres magnituds que sí que ho són. Per exemple podem trobar l'àrea d'una moneda a partir de la mesura del seu diàmetre. Aleshores, cal determinar l'error de les mesura indirecta (l'àrea) degut a l'error de la directa (el diàmetre). És a dir, hem de saber com es propaga l'error de la mesura directa a la indirecta.

Valor i error d'una magnitud funció d'una altra

Suposem que una magnitud z és funció d'una magnitud x mesurable directament, Per exemple, l'àrea de la moneda en funció del seu diàmetre D és $A = p(D/2)2$. Si en la mesura directa de x hem obtingut un valor xo, amb un error ε_x , llavors la magnitud indirecta, $z_o = z(x_o)$, estarà entre $z(x_o-\varepsilon_x)$ i $z(x_o+\varepsilon_x)$, com es veu a la figura 3.

Si considerem que prop del punt xo la funció $z(x)$ ve donada aproximadament per la recta tangent a aquesta funció en x_o, això és

$z(x) \approx z(x_0) + z'(x_0)\cdot(x-x_0)$

on $z'(x_0)$ és el valor del pendent d'aquesta recta, és a dir el valor a x_0 de $z' = dz / dx$. Llavors, els valors de $z(x)$ a $x_0-\varepsilon_x$ i $x_0+\varepsilon_x$ són,,

$z(x_0+\varepsilon_x) \approx z(x_0) + z'(x_0)\ \varepsilon_x$

$z(x_0-\varepsilon_x) \approx z(x_0) - z'(x_0)\ \varepsilon_x$

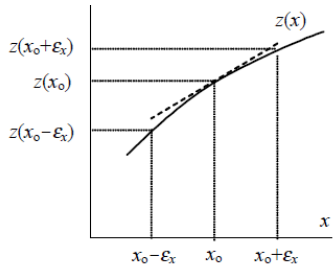


Figura 3

Aleshores diem que l'error estimat de la mesura indirecta z és la semilongitud de l'interval delimitat per aquests dos valors, és a dir,

$$\boxed{\epsilon_z = \epsilon_{z(x)} = \left|\frac{dz}{dx}\right| \epsilon_x}$$

<u>Exemple</u>: En la mesura del diàmetre d'una esfera hem obtingut D = 4.5 cm, amb un error total ε_D = 0.3 cm. Quin és el volum de l'esfera?

El volum d'una esfera és $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (D/2)^3 = 47{,}713\, cm^3$

i tenint en compte que $V' = \frac{dV}{dD} = \frac{\pi}{2}(D)^2$

tenim $\epsilon_V = \left|\frac{dV}{dD}\right| \epsilon_D = \frac{\pi}{2}(D)^2 \epsilon_D = 9{,}543\, cm^3$

Per tant, direm que el volum d'aquesta esfera és V = (47.7 ± 9.6) cm³, on hem expressat l'error amb dues xifres significatives (aproximant per excés), i hem arrodonit el valor de la magnitud V de manera que l'última xifra significativa sigui la d'ordre més baix a l'error.

Valor i error d'una magnitud funció d'altres

De vegades la magnitud mesurada indirectament z és funció de diverses magnituds (x_1, ..., x_i,..., x_N) que són les que mesurem directament, és a dir,

$$z = z(x_1, ..., x_i, ..., x_N)$$

Una magnitud d'aquest tipus seria l'àrea d'un triangle, que es calcula a través de l'expressió $A = bh/2$ on b és la base i h l'altura del triangle.

Per determinar l'error de z s'ha de procedir de la manera següent. Primer, s'ha de calcular l'error originat per cadascuna de les magnituds, x_i, com si la resta de variables fossin exactes, és a dir, com si y només fos funció de x_i i la resta de variables fossin constants.

Aquest error, d'acord amb el que hem vist a l'apartat anterior, és

$$\boxed{\epsilon_z(x_i) = \left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right| \epsilon_{x_i}} \quad \text{(i=1,....., N)}$$

on el símbol $\partial z/\partial x_i$ (que s'anomena derivada parcial de z respecte x_i) indica que estem determinant la derivada de z respecte la variable x_i considerant les altres variables com si fossin constants. Aleshores l'error total d'una magnitud afectada per diversos errors es defineix com

$$\epsilon_z=\sqrt{\epsilon_z^2(x_1)+\ldots+\epsilon_z^2(x_N)}$$

Exemple: Calculeu l'àrea del triangle, si les mesures de la base (b) i l'altura (h) han donat b = (10.0 ± 0.6) cm i h = (6.7 ± 0.3) cm

L'àrea és $$A=\frac{bh}{2}=33{,}50\,cm^2$$

L'error degut a b és $$\epsilon_A(b)=\left|\frac{\partial A}{\partial b}\right|\epsilon_b=\frac{h}{2}\epsilon_b=2{,}01\,cm^2$$

i l'error degut a h és $$\epsilon_A(h)=\left|\frac{\partial A}{\partial h}\right|\epsilon_h=\frac{b}{2}\epsilon_h=1{,}50\,cm^2$$

Per tant l'error total és $$\epsilon_A=\sqrt{\epsilon_A^2(b)+\epsilon_A^2(h)}=2{,}508\,cm^2$$

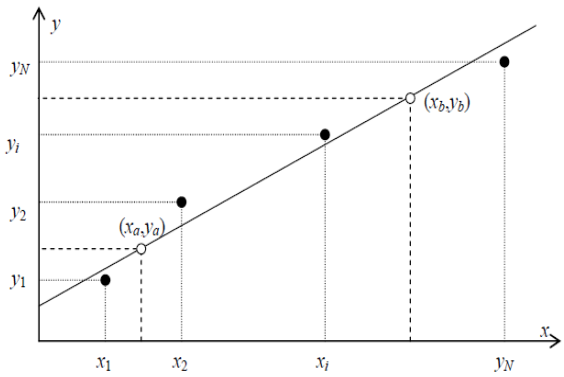
i direm que l'àrea del triangle és A = (33.5 ± 2.6) cm².

Regressió lineal

Hi ha un tipus de mesures indirectes una mica diferent del que hem vist anteriorment. En el cas general d'una magnitud y que és funció d'una altra magnitud x segons una relació lineal

$$y=ax+b$$

si volem determinar els valors de a i b haurem de mesurar y per a N valors diferents de x, de manera que tindrem N parells de punts (x_i, y_i). Teòricament aquests punts haurien d'estar sobre la recta y = a x + b. A la pràctica, però, si posem els punts (x_i,y_i) en un gràfic observem que no estan perfectament alineats (a la gràfica són els punts negres). Això és conseqüència dels errors en les mesures de x i y.



Llavors per determinar els valors de a i b seguirem el procediment de l'ajust per regressió lineal basant-nos en el mètode dels mínims quadrats, la qual cosa vol dir trobar quina és la recta que millor ajusta els N punts (xi,yi) representats en el pla xy.

El mètode consisteix a fer mínima la suma dels quadrats de les diferències entre l'ordenada del punt experimental i la corresponent a la recta ajustada per a la mateixa abscissa. Per a cada punt experimental (xi, yi), aquesta diferència seria

$$e_i = y_i - (ax_i + b)$$

Elevant al quadrat i sumant per a tots els punts experimentals, obtindrem

$$\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2$$

Tenim, doncs, una funció de dues variables. Els valors de a i b que busquem són els que minimitzen $\varphi(a, b)$ i, per tant, satisfan el sistema d'equacions donat per

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0$$

La solució del sistema és

$$\boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N \bar{x}^2}} \quad \text{i} \quad \boxed{b = \bar{y} - a \bar{x}}$$

$$\text{on} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{i} \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i$$

La recta caracteritzada per aquests paràmetres a i b, s'anomena **recta de regressió.** L'error estàndard en el càlcul dels paràmetres a i b ve donat per

$$S(a) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^2}{N(N-2)S_x}} \quad \text{i} \quad S(b) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^2}{N(N-2)} \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{S_x^2}\right)} \quad \text{on} \quad S_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2$$

En algunes ocasions hem d'estimar regressions amb ordenada a l'origen igual a zero, anomenades **regressions a través de l'origen**, en les que

$$\boxed{y = ax}$$

Aquest cas també es resol aplicant el mètode de mínims quadrats i la solució és

$$\boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}}$$

i l'error estàndard es calcula com

$$S(a)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^2}{(N-1)\sum_{i=1}^{N} x_i^2}}$$

És possible també determinar si la recta trobada és "bona" o no (en el sentit que ajusti bé els punts experimentals (*xi*, *yi*). Per això es calcula el **coeficient de correlació** com

$$\boxed{r=|a|\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N\bar{y}^2}\right]^{1/2}}$$

Es pot demostrar que $0 < r < 1$. Quan r està prop de 1 l'ajust és molt bo; quan està prop de 0 és un desastre. Per tal de fixar una referència direm que per sota $r = 0.8$ l'ajust és dolent, és a dir, els punts experimentals no s'ajusten bé a una recta.

Annex2. Pressió de vapor

TAULA

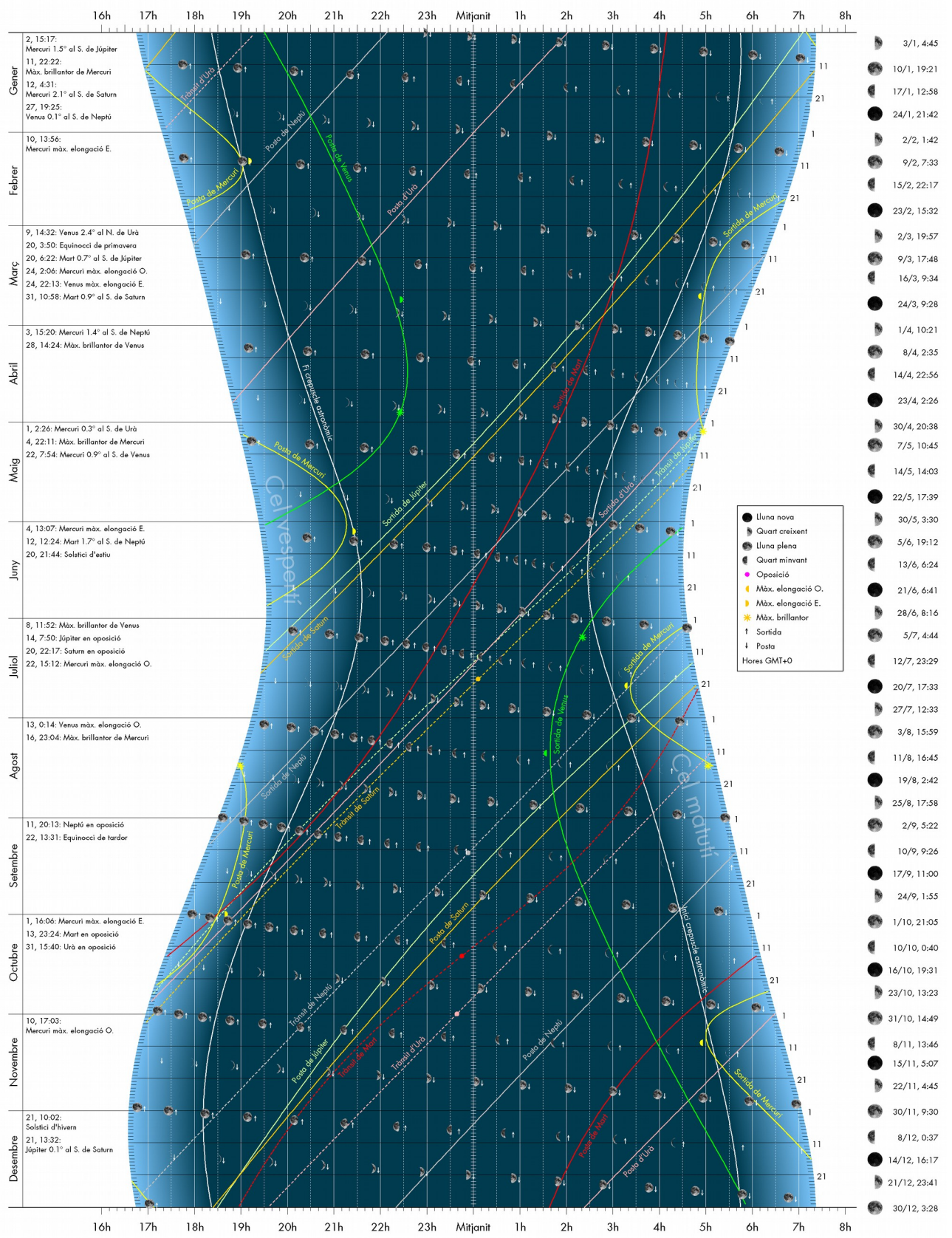
PRESSIÓ DE VAPOR DE L'AIGUA DE 0 A 100° C

(Haar, L., Gallagher, J.S., and Kell, G.S., *NBS/NRC Steam Tables*, Hemisphere Publishing Corp., New York, 1984.)

t/°C	P/kPa	P/mmHg	t/°C	P/kPa	P/mmHg
0.0000	0.61129	4.5851	51.000	12.970	97.283
1.0000	0.65716	4.9291	52.000	13.623	102.18
2.0000	0.70605	5.2958	53.000	14.303	107.28
3.0000	0.75813	5.6864	54.000	15.012	112.60
4.0000	0.81359	6.1024	55.000	15.752	118.15
5.0000	0.87260	6.5450	56.000	16.522	123.93
6.0000	0.93537	7.0159	57.000	17.324	129.94
7.0000	1.0021	7.5164	58.000	18.159	136.20
8.0000	1.0730	8.0482	59.000	19.028	142.72
9.0000	1.1482	8.6122	60.000	19.932	149.50
10.000	1.2281	9.2115	61.000	20.873	156.56
11.000	1.3129	9.8476	62.000	21.851	163.90
12.000	1.4027	10.521	63.000	22.868	171.52
13.000	1.4979	11.235	64.000	23.925	179.45
14.000	1.5988	11.992	65.000	25.022	187.68
15.000	1.7056	12.793	66.000	26.163	196.24
16.000	1.8185	13.640	67.000	27.347	205.12
17.000	1.9380	14.536	68.000	28.576	214.34
18.000	2.0644	15.484	69.000	29.852	223.91
19.000	2.1978	16.485	70.000	31.176	233.84
20.000	2.3388	17.542	71.000	32.549	244.14
21.000	2.4877	18.659	72.000	33.972	254.81
22.000	2.6447	19.837	73.000	35.448	265.88
23.000	2.8104	21.080	74.000	36.978	277.36
24.000	2.9850	22.389	75.000	38.563	289.25
25.000	3.1690	23.769	76.000	40.205	301.56
26.000	3.3629	25.224	77.000	41.905	314.31
27.000	3.5670	26.755	78.000	43.665	327.51
28.000	3.7818	28.366	79.000	45.487	341.18
29.000	4.0078	30.061	80.000	47.373	355.33
30.000	4.2455	31.844	81.000	49.324	369.96
31.000	4.4953	33.718	82.000	51.342	385.10
32.000	4.7578	35.686	83.000	53.428	400.74
33.000	5.0335	37.754	84.000	55.585	416.92
34.000	5.3229	39.925	85.000	57.815	433.65
35.000	5.6267	42.204	86.000	60.119	450.93
36.000	5.9453	44.593	87.000	62.499	468.78
37.000	6.2795	47.100	88.000	64.958	487.23
38.000	6.6298	49.728	89.000	67.496	506.26
39.000	6.9969	52.481	90.000	70.117	525.92
40.000	7.3814	55.365	91.000	72.823	546.22
41.000	7.7840	58.385	92.000	75.614	567.15
42.000	8.2054	61.546	93.000	78.494	588.75
43.000	8.6463	64.853	94.000	81.465	611.04
44.000	9.1075	68.312	95.000	84.529	634.02
45.000	9.5898	71.929	96.000	87.688	657.71
46.000	10.094	75.711	97.000	90.945	682.14
47.000	10.620	79.657	98.000	94.301	707.32
48.000	11.171	83.789	99.000	97.759	733.25
49.000	11.745	88.095	100.00	101.32	759.96
50.000	12.344	92.588			

Annex3. Visibilitat del cel 2020

(serviastro.ub.edu)



Annex 4. Propagació error resolució en *c*

dc/dt	ε(t)
3,246E-05	1,623E-04
1,623E-05	8,114E-05
1,100E-05	5,502E-05
7,441E-06	3,720E-05
5,062E-06	2,531E-05
3,091E-06	1,546E-05
1,658E-06	8,291E-06
1,468E-06	7,341E-06
1,098E-06	5,489E-06
3,239E-05	1,619E-04
1,661E-05	8,303E-05
9,649E-06	4,824E-05
5,997E-06	2,999E-05
3,417E-06	1,708E-05
1,748E-06	8,738E-06
1,538E-06	7,690E-06
1,136E-06	5,682E-06
3,405E-05	1,703E-04
1,374E-05	6,871E-05
7,358E-06	3,679E-05
3,819E-06	1,909E-05
1,847E-06	9,234E-06
1,614E-06	8,071E-06
1,177E-06	5,886E-06
2,292E-05	1,146E-04
9,357E-06	4,679E-05
4,296E-06	2,148E-05
1,951E-06	9,756E-06
1,693E-06	8,467E-06
1,219E-06	6,093E-06
1,581E-05	7,907E-05
5,286E-06	2,643E-05
2,133E-06	1,066E-05
1,829E-06	9,143E-06
1,287E-06	6,434E-06
7,940E-06	3,970E-05
2,465E-06	1,233E-05
2,068E-06	1,034E-05
1,401E-06	7,004E-06
3,575E-06	1,787E-05
2,795E-06	1,398E-05
1,700E-06	8,499E-06
1,282E-05	6,409E-05
3,236E-06	1,618E-05
4,315E-06	2,158E-05
Error resolució (màx)	
(UA/s)	(m/s)
1,70E-04	2,547E+07