EL NOMBRE AURI EN LES NOSTRES VIDES.

Som matemàticament perfectes?

ÍNDEX

1. Introducció .... Pàg. 3
2. Què és? .... Pàg. 4
3. Història. Els principis del nombre auri .... Pàg. 4
4. Càlcul del nombre auri .... Pàg. 4
   4.1. Successió de Fibonacci .... Pàg. 4
   4.2. Extrema i mitjana raó .... Pàg. 5
5. Algunes propietats del nombre auri .... Pàg. 6
6. Aplicacions de la proporció àuria .... Pàg. 8
   6.1. Pentàgon regular (Estrella de cinc puntes) .... Pàg. 8
   6.2. Triangle auri .... Pàg. 9
   6.3. Rectangle auri .... Pàg. 10
      6.3.1. Construcció d'un rectangle auri .... Pàg. 10
   6.4. Espiral logarítmica .... Pàg. 11
7. Utilitats de l'antiguitat i d'ara. On el trobem? .... Pàg. 13
   7.1. Cos humà .... Pàg. 13
   7.2. Música .... Pàg. 14
   7.3. Naturalesa .... Pàg. 15
   7.4. Art .... Pàg. 17
   7.5. Arquitectura .... Pàg. 17
   7.6. Astronomia .... Pàg. 18
8. Exemples comuns que la gent no coneix .... Pàg. 18
9. Curiositats .... Pàg. 18
10. Relació de la proporció àuria amb la música .... Pàg. 19
    10.1. La proporció àuria en la composició .... Pàg. 20
    10.2. Anàlisi d'una partitura .... Pàg. 20
    10.3. Anàlisi de *Claire de lune* de Debussy .... Pàg. 21
11. Relació entre les matemàtiques i la fisonomia humana .... Pàg. 23
12. Càlculs. Estadística .... Pàg. 24
13. Conclusions .... Pàg. 30
14. Fonts d'informació .... Pàg. 32
    14.1. Bibliografia .... Pàg. 32
    14.2. Webgrafia .... Pàg. 32
15. Agraïments .... Pàg. 34
16. Annexos .... Pàg. 35

1. INTRODUCCIÓ.

Actualment, ens trobem que el món de les matemàtiques està present per tot arreu i no en som conscients, no ho sabem. Un cas d’aquests és el nombre d’or. És per això que he fet aquest treball, amb la finalitat de fer veure a la gent que les matemàtiques estan presents en el nostre dia a dia i, a més a més, transmetre uns coneixements sobre el nombre auri que s'utilitza per elaborar molts objectes que estem acostumats a manejar diàriament.

Al llarg d'aquest treball coneixerem què és el nombre d'or, el seu valor, una part d’història per saber d’on surt, les seves aplicacions, i com apareix al llarg de les nostres vides, entre altres coses.

Des del meu punt de vista, és important saber el que ens envolta i és molt curiós si, a més a més, té a veure amb el món matemàtic. Això, juntament amb el meu interès pels números han estat el que m’han mogut a fer aquest treball per intentar demostrar que, en aquest cas, el nombre auri és molt present i no ens n’adonem. Per això he buscat informació d’aquest nombre i he fet l’estudi de mesurar a un nombre finit de persones per intentar trobar les relacions àuries en la fisonomia del cos humà, ja que amb el que estem més en contacte és amb nosaltres mateixos.

2. QUÈ ÉS?

El nombre auri és un nombre irracional que val 1,61803398874989482045868343656381... i que es pot calcular a partir de la successió de Fibonacci o bé resolent una equació de 2n grau, entre d'altres.

Aquest nombre també es pot definir com una raó de proporcions i es representa amb la lletra grega FI (ϕ).

3. HISTÒRIA. Els principis del nombre auri.

El nombre auri va ser descobert a l'època de la Grècia clàssica, segle V a. C., i es creu que va ser a partir de l'estudi de les proporcions i mesures geomètriques d'un segment. Llavors ja es coneixia perfectament i es començava a utilitzar en l'arquitectura i l'escultura, encara que no va rebre el símbol ϕ (FI) fins al segle XX.

La seva història documentada comença al llibre *Elementos de Geometría* d'Euclides on, gràcies a l'èxit d'aquest, s'ha desenvolupat de manera decisiva la matemàtica universal, definint el nombre auri amb l'extrema i mitjana raó.

4. CÀLCUL DEL NOMBRE AURI.

4.1. SUCCESSIÓ DE FIBONACCI.

Per calcular el nombre auri partim d'una base la qual és 0+1 i, a partir d'aquí, es crea la successió afegint el resultat de sumar els dos nombres anteriors:

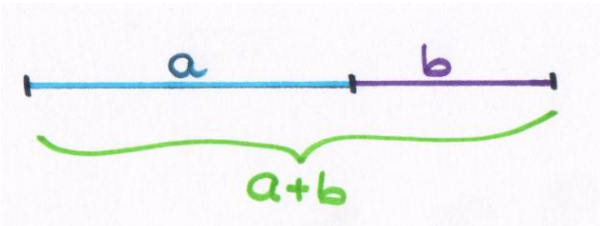
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1.597, 2.584, 4.181, 6.765, 10.946, 17.711, 28.657, 46.368, 75.025, 121.393, 196.418, 317.811, 514.229, 832.040, 1.346.269, 2.178.309, 3.524.578, 5.702.887, 9.227.465, 14.930.352, 24.157.817, 39.088.169, 63.245.986, 102.334.155, 165.580.141, 267.914.296, 433.494.437, 701.408.733, 1.134.903.170, 1.836.311.903, 2.971.215.073, 4.807.526.976, 7.778.742.049, 1'258626903$\cdot 10^{10}$, 2'036501107$\cdot 10^{10}$, 3'29512801$\cdot 10^{10}$, 5'331629117$\cdot 10^{10}$, 8'626757127$\cdot 10^{10}$, 1'395838624$\cdot 10^{11}$, 2'258514337$\cdot 10^{11}$, 3'654352961$\cdot 10^{11}$, 5'912867298$\cdot 10^{11}$, 9'567220259$\cdot 10^{11}$, 1'548008756$\cdot 10^{12}$, 2'504730782$\cdot 10^{12}$, 4’052739538·10^{12}, 6’55747032·10^{12}, 1’061020986·10^{13}, 1’716768018·10^{13}, 2’777789004·10^{13}, 4’494557022·10^{13}, 7’272346026·10^{13} ...

Un cop fet això, veiem que el valor del nombre auri és al que tendeixen les divisions d’aquests nombres de gran valor pel seu anterior.
Com més grans siguin els nombres a dividir, més exacte serà el valor que ens surti:

$$\phi = \frac{7{,}272346026 \cdot 10^{13}}{4{,}494557022 \cdot 10^{13}} = 1{,}618033989\ldots$$

4.2. EXTREMA I MITJANA RAÓ.

Podem dir que trobem aquesta proporció en un segment quan la relació entre el costat *a* amb el costat *b* és la mateixa que la relació entre el valor del segment complet *(a+b)* amb el valor del costat *a*. Suposem que el segment val una unitat:



*Font pròpia.

a = x
b = 1-x
a+b = 1

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Si resolem aquesta equació de segon grau obtindrem x = 0,618033988…
Quan substituïm el valor de la x per la solució que hem trobat, podem veure que la relació entre els dos segments és el nombre auri.

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398\ldots = \phi$$

5. ALGUNES PROPIETATS DEL NOMBRE AURI.

El nombre auri té unes propietats molt singulars que s'indiquen a continuació:

- ϕ és l'únic nombre real positiu del qual s'obté el quadrat sumant-li 1:

$$\boxed{\phi^2 = \phi + 1}$$

Comprovació:

$1{,}618033988^2 = 1{,}618033988 + 1 = 2{,}61803398$

Per tant, es pot calcular sumant-li 1 al seu invers:

$$\boxed{\phi = 1/\phi + 1}$$

Comprovació:

$(1/1{,}618033988) + 1 = 1{,}618033989$

- ϕ és l'únic nombre que es pot convertir en el seu invers restant-li 1:

$$\boxed{1/\phi = \phi - 1}$$

Comprovació:

$1/1{,}618033988 = 1{,}618033988 – 1 = 0{,}618033989$

- Qualsevol potència de ϕ es pot definir com la suma de les dues anteriors:

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2$$
$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3$$
$$\Phi^6 = \Phi^5 + \Phi^4 = 8\Phi + 5$$
$$\Phi^7 = \Phi^6 + \Phi^5 = 13\Phi + 8$$
$$\Phi^8 = \Phi^7 + \Phi^6 = 21\Phi + 13$$

...

*Font del llibre *La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza.*

Comprovació:

$\Phi^3 =$ 2 ϕ + 1 = 2 · 1,618033988 + 1 = 4,23606797

$\Phi^4 =$ 3 ϕ + 2 = 3 · 1,618033988 + 2 = 6,8541019

$\Phi^5 =$ 5 ϕ + 3 = 5 · 1,618033988 + 3 = 11,0901699

$\Phi^6 =$ 8 ϕ + 5 = 8 · 1,618033988 + 5 = 17,9442719

$\Phi^7 =$ 13 ϕ + 8 = 13 · 1,618033988 + 8 = 29,034441

$\Phi^8 =$ 21 ϕ + 13 = 21 · 1,618033988 + 13 = 46,978713

Si ens fixem en els resultats de les potències, veiem que segueixen la successió de Fibonacci.

Podem generalitzar la norma:

$$\Phi^n = a_n \Phi + a_{n-1}$$

*Font del llibre *La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza.*

on *n* és el nombre que ocupa aquesta posició en la successió de Fibonacci.

- ϕ tendeix d'aproximar valors per mitjà de fraccions continues:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \left(\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}\right)} = 1 + \frac{1}{\Phi} \rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

*Font del llibre *La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza.*

- ϕ tendeix d’una successió d’arrels quadrades a partir de les quals ens aproximem al nombre auri:

$$\sqrt{1+\sqrt{1}} = 1{,}4142$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = 1{,}5538$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} = 1{,}5931$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}} = 1{,}6119$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}} = 1{,}6161$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}} = 1{,}6174$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}} = 1{,}6178$$

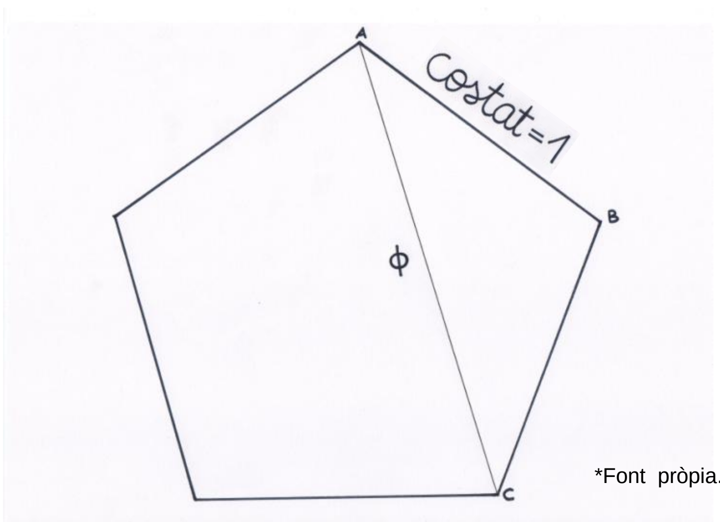
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}}} = 1{,}6180.$$

*Font del llibre *La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza.*

6. APLICACIONS DE LA PROPORCIÓ ÀURIA.

6.1. PENTÀGON REGULAR. Estrella de cinc puntes.

La relació que existeix entre la diagonal d’un pentàgon regular i un dels seus costats és igual al nombre auri. Suposem, com hem fet anteriorment, que els costats del pentàgon regular valen la unitat:

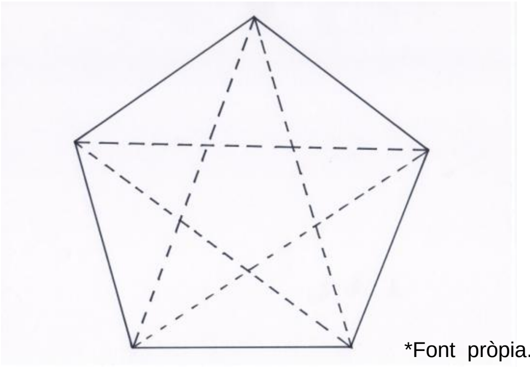


*Font pròpia.

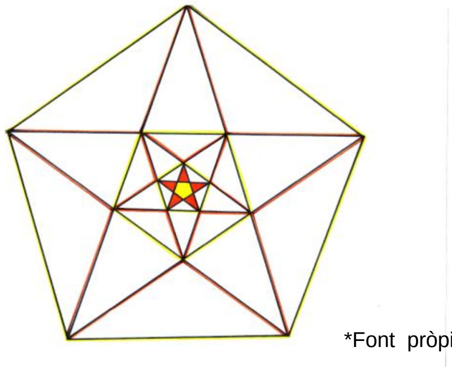
AC / AB = ϕ

AB = 1
i, per tant, AC = ϕ

Una vegada comprovat això observem que, dins d'un pentàgon regular, si hi tracem totes les diagonals existents ens trobem amb una estrella de 5 puntes, la qual al centre té la forma de pentàgon regular. Podem repetir la mateixa acció infinites vegades:



*Font pròpia.



*Font pròpia.

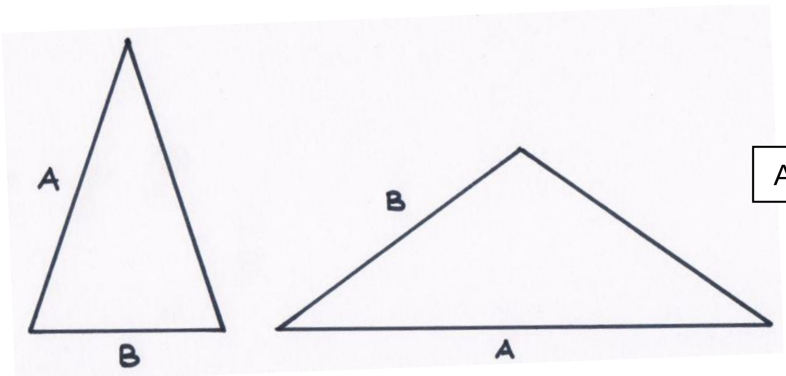
La secció àuria és una figura extraordinària que es reprodueix matemàticament de forma infinita. Pitàgores va ser el que va descobrir les matemàtiques en aquesta figura.

Aquesta estrella conté, també, el triangle d'or, un amb angles de 36º, 36º i 108º; i l'altre de 36º, 72º i 72º:

*Font pròpia.

6.2. TRIANGLE AURI.

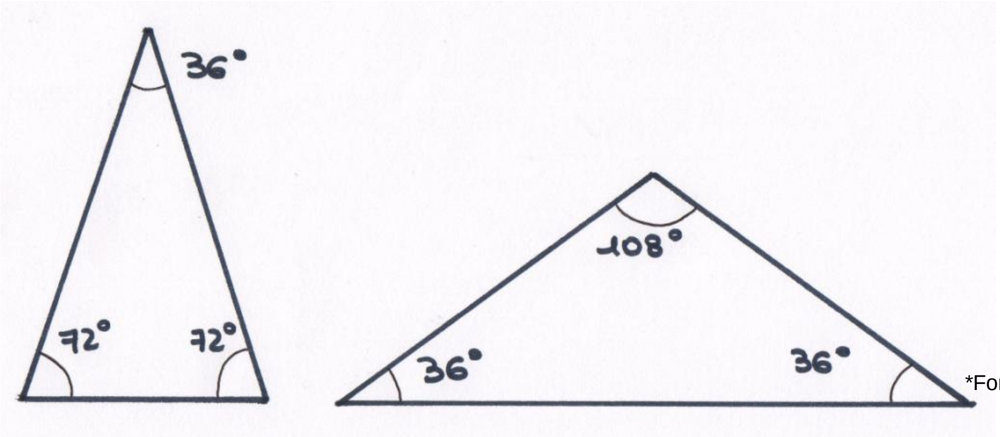
Els triangles que segueixen la proporció àuria són aquells els quals la relació entre el costat gran i el petit és ϕ.



A/B = ϕ

*Font pròpia.

Són triangles isòsceles que poden ser acutangles o obtusangles. En el primer cas, i com he mencionat més amunt, els angles que el formen són 72º, 72º i 36º i, en el segon cas, 108º, 36º i 36º.



*Font pròpia.

6.3. RECTANGLE AURI.

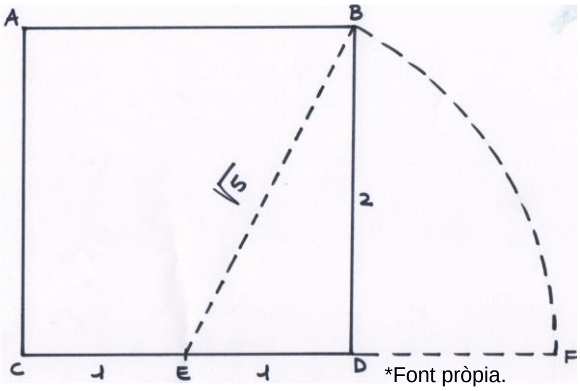
Perquè un rectangle segueixi les proporcions àuries cal que compleixi que la relació entre la seva base i altura sigui igual al nombre d'or:

$$\boxed{b/h = \phi}$$

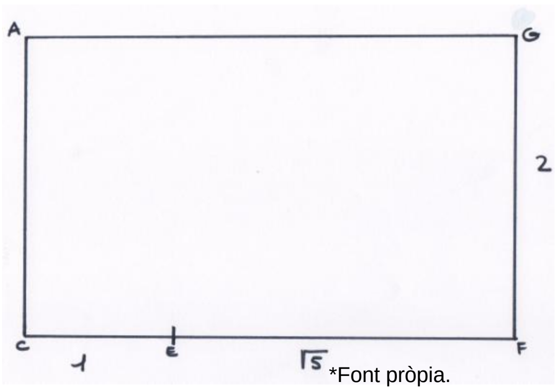
6.3.1. Construcció d'un rectangle auri.

Per dibuixar el rectangle auri partim d'un quadrat, en aquest cas, 2x2 (ABCD). Amb un compàs, punxem al mig d'un dels costats (E) i l'obrim fins a una de les puntes del costat oposat, com per exemple fins al punt B. A continuació, dibuixem l'arc corresponent fins el nivell de la base (BF). Tot seguit, hem d'allargar la base i l'alçada per tal que un dels extrems sigui F.

El rectangle que acabem d'obtenir (AGCF) segueix les relacions àuries:



*Font pròpia.



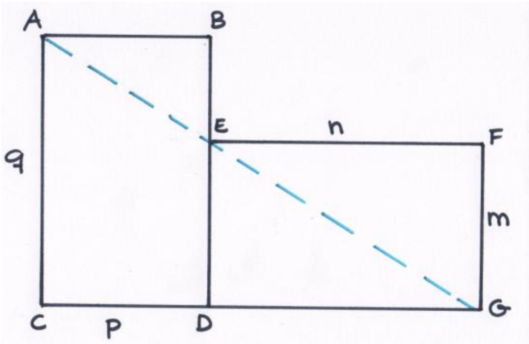
*Font pròpia.

En aquest cas, ens resulta que el rectangle té una base *b* de $1+\sqrt{5}$ i una alçada *h* que val 2.

Per tant, en aquest cas el rectangle segueix les proporcions àuries ja que:

b/h = $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

Si tenim dos rectangles (ABCD i EFDG) i volem comprovar si segueixen les proporcions àuries sense càlculs, hem de situar-los l'un al costat de l'altre de manera que formi una L. Si tracem la diagonal (AG) i ens trobem que passa pel punt entremig on es creuen els dos rectangles (E), direm que sí que són rectangles auris i segueixen la següent propietat:



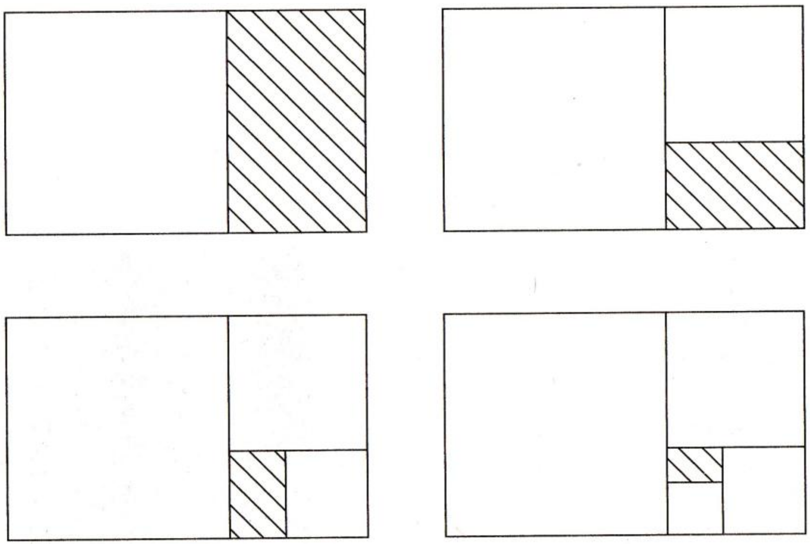
n/m = q/p

*Font pròpia.

6.4. ESPIRAL LOGARÍTMICA.

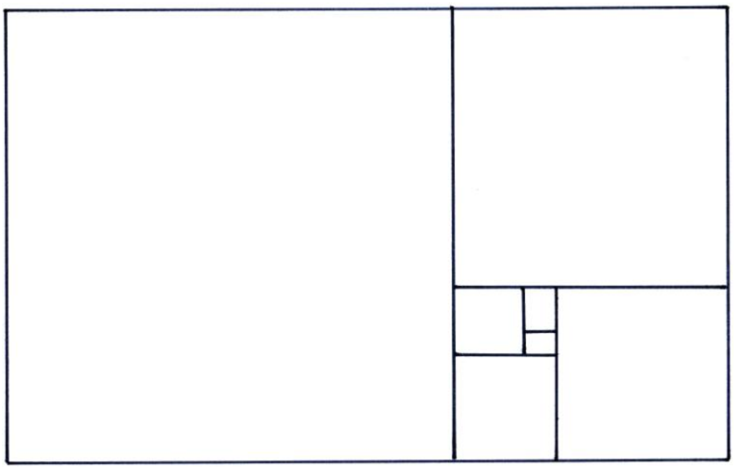
L'espiral logarítmica és l'aplicació més important de FI ja que apareix a la majoria d'elements de la natura. L'obtenim de sobreposar rectangles o triangles auris.

Per sobreposar rectangles, partirem d'un rectangle amb proporcions àuries i consisteix en anar restant-li quadrats. Un cop restat, repetim el procés en el rectangle resultant:



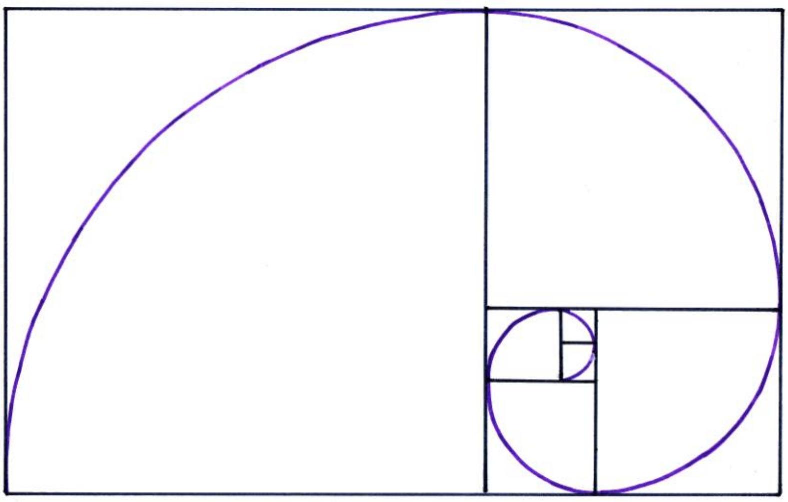
*Font del llibre *La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza.*

Un cop sobreposats els rectangles auris,



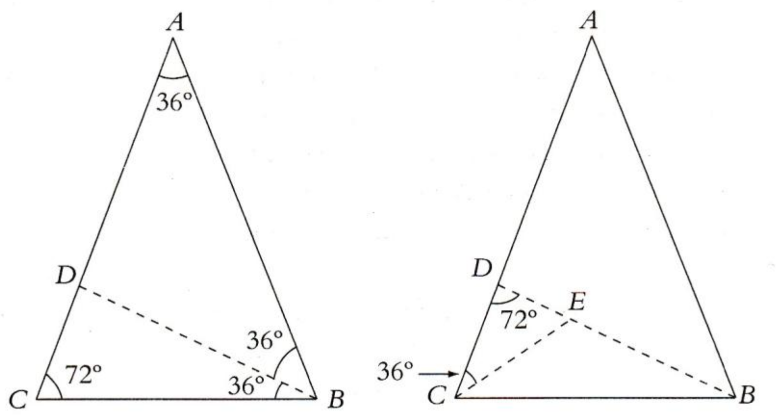
*Font pròpia.

ja hi podem dibuixar l’espiral logarítmica unint les puntes oposades de cada un dels quadrats:



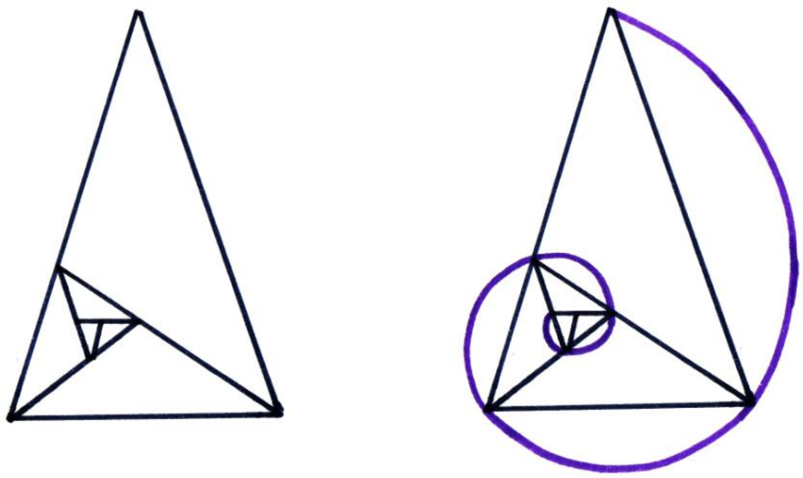
*Font pròpia.

En el cas dels triangles, agafem un triangle isòsceles acutangle de 36º, 72º i 72º i, per sobreposar-los hem de traçar una línia que divideixi un dels angles de 72º en dos de 36º iguals. Ho fem repetidament:



*Font del llibre *La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza.*

Un cop tinguem diversos triangles auris sobreposats, hi dibuixem l'espiral passant pels angles que han estat dividits anteriorment:



*Font pròpia.

7. UTILITATS DE L'ANTIGUITAT I D'ARA. On el trobem?

Jugar amb els nombres és fàcil i amb qualsevol d'ells podem trobar relacions curioses. En aquest cas, la proporció àuria és un concepte matemàtic que apareix lligat al cos humà, a la música, a la naturalesa, a l'art,...

7.1. COS HUMÀ.

En totes les formes de la naturalesa hi podem trobar una lògica matemàtica però no tots nosaltres som matemàticament perfectes.

Una persona es considera matemàticament perfecte quan compleix les següents relacions numèriques entre les parts del cos:

L'altura d'una persona és aproximadament igual que la braçada (distància que hi ha de l'extrem d'una mà a l'altra amb els braços estirats en l'horitzontal). Aquesta és 4 vegades més gran que la distància del colze a l'extrem dels dits, i aquesta última és el doble del que mesura un pam d'aquesta persona.
A més a més, de la divisió de l'alçada total entre la distància que hi ha del melic al terra i de la divisió de la distància de l'espatlla al dit més llarg entre la distància del colze al final de la mà ens ha de resultar el nombre auri.

7.2. MÚSICA.

Tal i com va enunciar Gottfried Wilhelm Leibniz, "La música es un ejercicio aritmético secreto y la persona que se entrega a ella no se da cuenta de que está manipulando números*".*

Podem relacionar la música amb la proporció àuria per la distribució dels compassos en una obra, les melodies, la progressió dels acords,... i podríem definir el nombre auri com una aproximació a la manera de compondre.

En fer vibrar una corda produeix un determinat so que depèn directament de la longitud, la grossor i la tensió d'aquesta. Pitàgores va defensar que si es dividia una corda en certes proporcions, els sons que produïa eren agradables a l'oïda humana. Un cop sabut això, ho va provar amb un monocordi i, amb els sons consonants i harmònics que en van sorgir es va escriure la base musical que tots coneixem.
A aquesta base l'anomenem escala, i no és més que la disposició de les notes musicals en un cert ordre que no ha estat decidit de forma arbitrària. L'escala està dividida en dotze distàncies iguals anomenades semitons on en diferenciem 8 notes anomenades també octava (de Do a Do Major).

Els factors més decisius de la música són la melodia, que ha de tenir unes proporcions adequades per tal que sigui bona, i el ritme, la qualitat més comptable de la música.

L’oient en escoltar el ritme i la melodia d’una obra no s’ha de parar a comptar compassos i situar-se en una escala per entendre-la, però el compositor sí que ho ha de fer per aconseguir els seus propòsits.

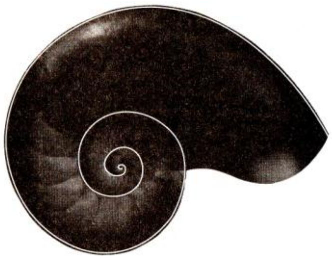
Per crear una sensació d’equilibri en la obra, s’utilitza la repetició, la variació i/o la imitació i aquí és on pren lloc la proporció àuria, fent coincidir els punts culminants de la composició segons el càlcul de la successió de Fibonacci.

Bach, Mozart, Wagner, Beethoven i Bartók, entre d’altres, són exemples de compositors que van utilitzar les matemàtiques intencionadament per escriure les seves obres.

En canvi, Claude Debussy, no només va utilitzar les matemàtiques sinó que va compondre amb recursos molt propers a la proporció àuria.

7.3. NATURALESA.

En quant al nombre auri en la naturalesa, la majoria de vegades apareix en forma d’espiral logarítmica, com en els cargols, els cargols de mar, els Nautilus, en la coliflor i algunes flors, encara que també pot prendre lloc per la successió de Fibonacci.

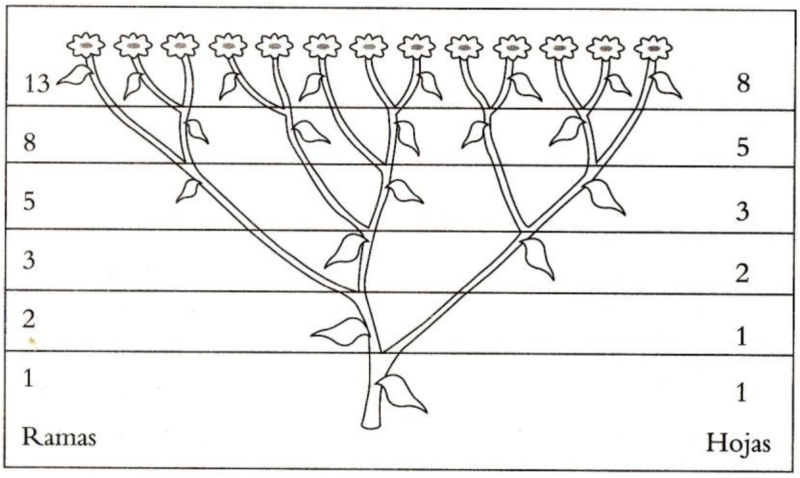


En aquesta imatge podem veure com apareix l’espiral logarítmica a la closca d’un Nautilus.

*Font del llibre *La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza.*

Si agafem una margarida i en comptem el número de pètals observarem que sempre serà un número pertanyent a la successió de Fibonacci.

També té una relació directa amb el creixement de les plantes:



*Font del llibre *La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza.*

La posició de les fulles en la tija d'una planta també segueix aquesta successió. A més a més es pot trobar la relació àuria en diferents longituds d'algunes fulles i flors.

Un altre exemple seria la reproducció d'alguns animals, com els conills.
Una parella de conills, mascle i femella, triga un mes a tenir l'edat fèrtil. A partir d'aquest moment, cada mes engendra una parella de conills que, al cap d'un mes n'engendrarà una altre i així successivament. Suposant que la parella que neix sigui d'un mascle i una femella i que no mori cap conill, tindrem el següent:

Generacions	Parelles de conills
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21

Si observem les parelles de conills que neixen veurem que segueixen els números de la successió de Fibonacci.

7.4. ART.

Quan parlem d'art, la proporció àuria apareix generalment en els quadres.

Un exemple és Leonardo Da Vinci que tenia uns coneixements matemàtics molt amplis i, per tant, moltes de les seves obres seguien la proporció àuria a partir del rectangle perfecte. Els seus quadres més importants en els quals podem observar la proporció àuria són la *Gioconda*, *L'Home de Vitrubi*, *Isabel d'Este* i l'*Anunciació*.

A part d'aquestes, també trobem ϕ en obres com *El Jardí de l'Edèn*, de Brueghel de Velours, *Les muntanyes rocalloses* de Bierdstadt, *l'Yvonne Lerolle* de Maurice, *La taula de sopar* de Matisse i en algunes obres de Picasso i Mondrian, que seguien un estil molt diferent al dels anteriors però també utilitzaven la proporció àuria.

A més dels quadres, la proporció àuria també va adquirir molta importància a la fotografia. El rostre de la tennista Helen Wills que va fotografiar Matila Ghyka va ser la que va ajudar a determinar totes les relacions àuries que es poden trobar a la cara.

En quant a les proporcions àuries a la resta de parts del cos, van ser descobertes primerament per Leonardo Da Vinci i, més endavant, per l'arquitecte Le Corbusier al segle XX.

7.5. ARQUITECTURA.

Pels grecs, la secció àuria representa la llei matemàtica de la bellesa; és per això que s'utilitza en l'arquitectura clàssica i en les escultures. El Partenó, la tomba de Mira, que es va construir basant-se en el pentàgon regular n'és un exemple.

Altres exemples de construccions més modernes són la Catedral de Saint Paul, el Castell de Windsor i la Porta de Bagdad.

7.6. ASTRONOMIA.

Johannes Kepler, un astrònom alemany, va intentar comprendre les lleis del moviment planetari i va considerar que aquestes havien de complir les lleis pitagòriques de l'harmonia.

8. EXEMPLES COMUNS QUE LA GENT NO CONEIX.

Com hem vist, ens trobem aplicacions directes del nombre auri a la naturalesa, les construccions antigues, algunes representacions artístiques,... encara que també les trobem diàriament en objectes en què s'utilitza la proporció àuria per la seva elaboració com en targetes de crèdit, carnets, caixes de tabac, mobles, alguns marcs de finestres, el flascó de perfum Chanel número 5, els DNIs, les targetes SIM,...

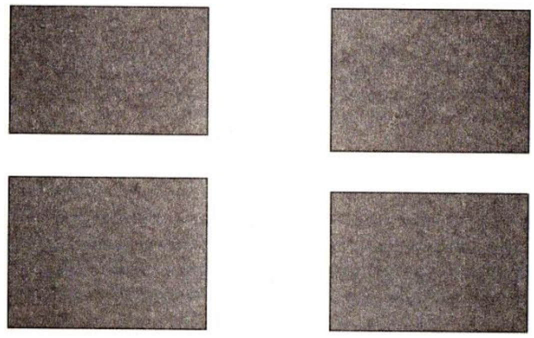
Hi ha altres objectes no tan comuns però que també es troben en la nostra vida quotidiana i que segueixen les proporcions perfectes com el respatller d'una cadira que va crear Charles i Ray Eames el 1946, una cafetera d'alumini i un gerro elaborats per Johan Rohde el 1920 i una ràdio totalment àuria.

9. CURIOSITATS.

A continuació, veurem algunes curiositats del nombre auri:

Els nens també estan en contacte amb el nombre auri? La resposta és que sí. Als casals d'estiu es fan manualitats de paper i n'hi ha una de particular que està directament relacionada amb el pentàgon auri.
La intenció és fer una estrella de paper. Hem d'agafar una cartolina i tallar-la en tires llargues. N'agafem una i en fem un nus. A continuació, amb la cartolina que ens sobra l'anem cargolant (veurem que ens queda marcat per on ho hem de fer). Finalment, obtindrem un pentàgon perfecte ja que si en calculem la diagonal i la dividim per la longitud d'un costat n'obtindrem el nombre d'or o bé, la divisió de dos nombres de la successió de Fibonacci.

Una altra curiositat seria la de la perfecció. Les persones associem el que és perfecte com el que és més bonic i, en vista d'això, l'alemany Gustav Theodor Fechner va proposar una petita prova per demostrar-ho. Aquest test consistia en preguntar a les persones quin dels següents rectangles els agradava més. Només un d'aquests rectangles segueix les proporcions àuries i, com que aquestes es consideren les proporcions perfectes, la majoria de gent hauria d'escollir aquest com el que més els hi agrada.



*Font del llibre *La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza.*

El primer rectangle de l'esquerra té la forma de les noves televisions, que són rectangles 16/9. El primer de la dreta té la forma d'una fotografia (36/24). El segon rectangle de l'esquerra és de $\sqrt{2}$ i, l'últim, el rectangle auri.

En fer aquest test he obtingut els següents resultats:

- El rectangle $\frac{16}{9}$ ha estat escollit per 12 persones.
- El rectangle $\frac{36}{24}$ ha estat escollit per 12 persones.
- El rectangle $\sqrt{2}$ ha estat escollit per 19 persones.
- El rectangle ϕ ha estat escollit per 21 persones.

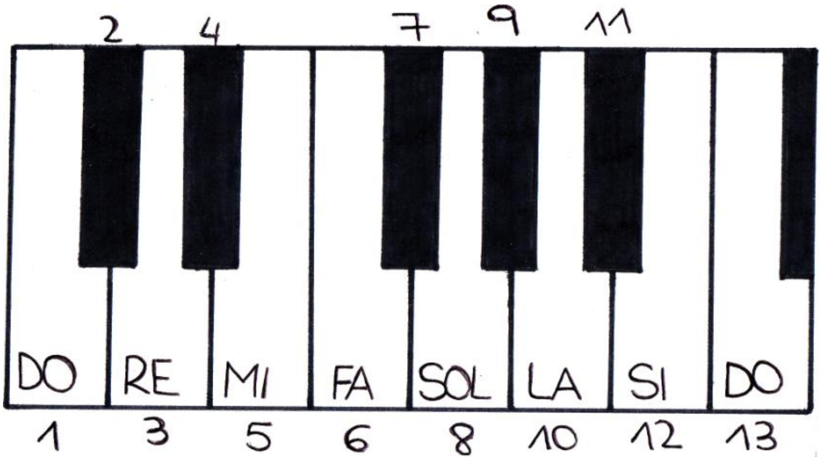
Per tant puc afirmar que la majoria de persones escollim les proporcions àuries com les més belles però també les de l'arrel quadrada de 2.

10. RELACIÓ DE LA PROPORCIÓ ÀURIA AMB LA MÚSICA.

Així com les matemàtiques estan relacionades amb el cos humà, la música també està present en el nostre dia a dia. En la majoria d'ocasions, quan tenim un mal dia o bé estem contents, escoltem música. Quan ens sentim sols, decebuts,... també escoltem música i, en fer-ho, no ens n'adonem però estem en contacte directe amb el món de les matemàtiques i de les proporcions divines.

Podem trobar la proporció àuria amagada en les composicions, melodies, instruments,... com hem dit anteriorment. Un exemple d'instrument n'és el piano, i com que l'obra que analitzarem també és a piano, treballarem aquest instrument.

La proporció àuria que trobem en el piano es presenta en forma de Successió de Fibonacci ja que considerem que una octava són tretze sons, vuit tecles blanques i cinc de negres que estan dividides en grups de dos i tres notes. Tots aquests números són de la successió de Fibonacci.



*Font Pròpia.

10.1. LA PROPORCIÓ ÀURIA EN LA COMPOSICIÓ.

A partir d'uns estudis que es van fer a moltes obres d'èpoques ben diferents s'ha trobat que l'estructura matemàtica més utilitzada és la de la proporció àuria i els més destacats en el seu ús són Bartók i Debussy. En el cas d'aquest últim, trobem la proporció divina en analitzar la seva obra *Clair de lune*.

En l'actualitat, hi ha molts compositors contemporanis que confessen haver utilitzat alguna vegada la proporció àuria, com per exemple, Nino Díaz.

10.2. ANÀLISI D'UNA PARTITURA.

Per analitzar una partitura cal, primerament, enumerar tots els compassos de la peça, un número per compàs. Seguidament s'ha de mirar si els compassos que coincideixen amb els números de la successió de Fibonacci són els rellevants per el desenvolupament de la peça musical. En el cas que no intervingui la successió, trobarem les proporcions que pot tenir l'obra multiplicant per el valor absolut de la secció àuria, que és 0,618 (el mateix que l'invers de ϕ).

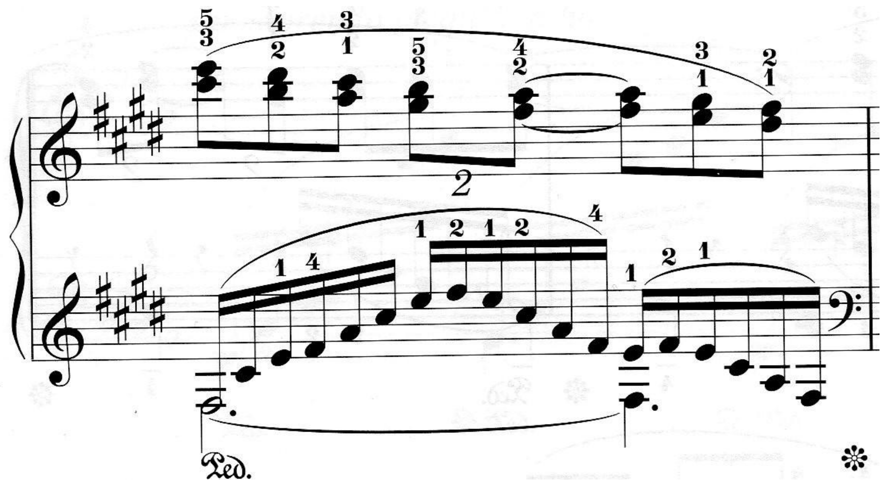
10.3. ANÀLISI DE *CLAIRE DE LUNE* DE DEBUSSY.

Un cop vistes les pautes per analitzar una partitura i sabent que l’obra *Claire de lune* de Claude Debussy segueix les proporcions àuries, n’analitzarem un fragment del principi per veure’n un exemple.

Primerament, enumerem els compassos i destriem els que segueixen els números de la successió de Fibonacci però, fent això, veiem que aquests no coincideixen amb els punts culminants i importants de l’obra.

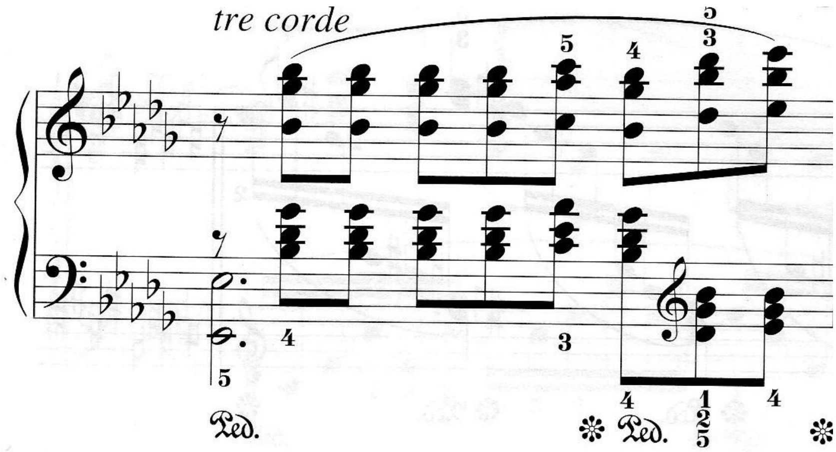
Com que hem vist que així no porta introduïda la proporció àuria, multiplicarem el nombre de compassos de l’obra pel nombre d’or. L’obra té un total de 72 compassos. Si aquest nombre el multipliquem per una aproximació de la secció de ϕ obtenim 44,498. Mirem a la partitura, concretament als compassos 44 i 45 però tampoc hi veiem res.

En *Claire de lune* trobem que els últims 7 compassos pertanyen a la CODA, que és la secció musical la qual pertany al final de la obra. Si no tenim en compte aquesta part, veiem que la composició consta de 65 compassos que, multiplicats per la secció àuria obtenim 40,172. Mirem el compàs corresponent i veiem que el següent coincideix amb el punt culminant de la obra. Hem trobat la proporció àuria en la partitura.



*Font del llibre *50 greats for the Piano.*

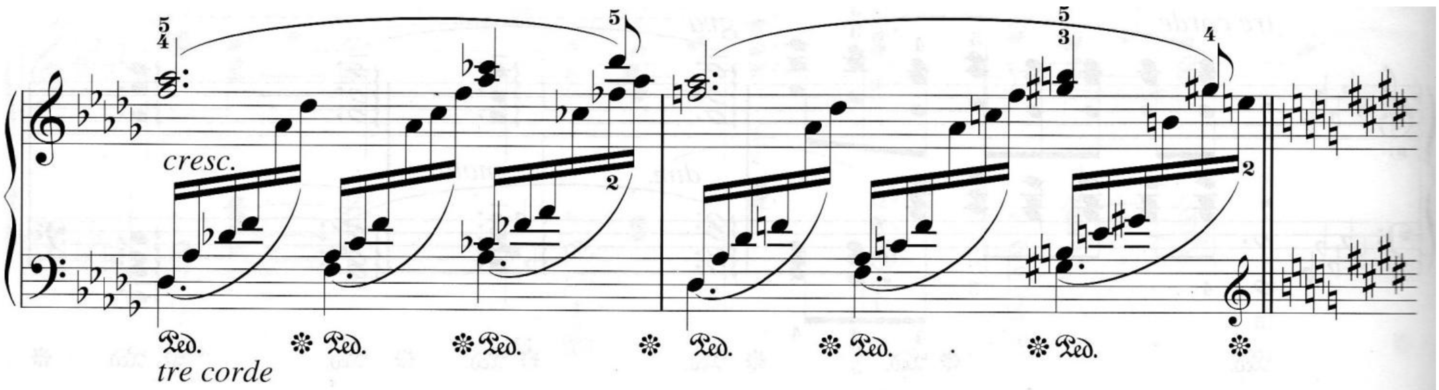
Com que coincideix, multipliquem el resultat anterior per la secció i ens resulta 24,828, un altre punt de gran tensió i important al llarg de l'obra.



*Font del llibre *50 greats for the Piano.*

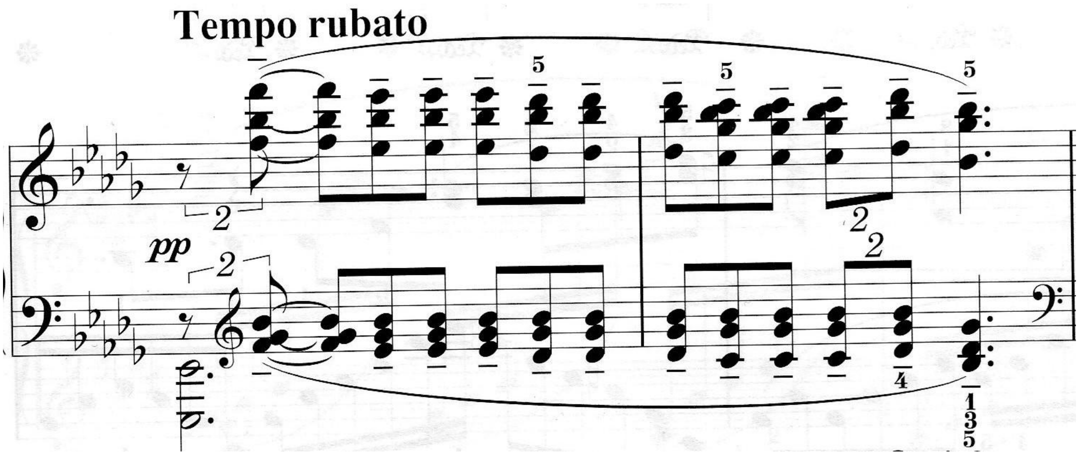
A un nivell més complex, es podrien trobar més punts on la secció àuria hi és present tenint en compte els canvis d'armadura de Re b a Do #.

Veiem que aquest canvi es troba al compàs 36, al punt mig de la obra.



*Font del llibre *50 greats for the Piano.*

Com que abans del canvi d'armadura hi ha 36 compassos, multipliquem la secció àuria per 36 i obtenim 22,249. Si contem 22 compassos començant des del 36 cap a l'inici de la partitura, arribarem al *Tempo rubato* (llibertat expressiva i rítmica).



*Font del llibre *50 greats for the Piano.*

A l'**Annex II** podrem trobar la partitura sencera.

11. RELACIÓ ENTRE LES MATEMÀTIQUES I LA FISONOMIA HUMANA.

Allò que veiem com a obvi, moltes vegades no ho és. S'afirma que hi ha persones matemàticament perfectes, i aquestes compleixen unes característiques específiques. Estudiarem dues d'aquestes característiques:

- Si de la relació entre l'alçada i la distància del melic al terra en tendeix el nombre auri.

- Si de la relació entre la distància de l'espatlla al dit més llarg i la distància del colze al dit més llarg en tendeix el nombre auri.

Per fer aquesta demostració, he mesurat a 70 persones la seva alçada, la distància del melic al terra, de l'espatlla al dit més llarg, del colze al dit més llarg, la seva braçada, i el pam.

Després de fer aquest estudi, que trobarem a l'**Annex I**, he calculat les relacions àuries i matemàtiques que hi ha a la fisonomia d'aquestes 70 persones.

12. CÀLCULS. Estadística.

L'Estadística és la disciplina que es troba dins les matemàtiques i utilitza un conjunt de dades numèriques per obtenir, a partir d'elles, inferències[1] basades en el càlcul de probabilitats.

Dins l'estadística trobem diversos càlculs com la mitjana aritmètica, la moda, la desviació típica, l'error absolut i l'error relatiu.

- La mitjana aritmètica $\bar{x}$ és el terme mitjà de les dades que hem recollit. Es calcula sumant tots els resultats que hem obtingut i dividint pel nombre d'elements (N) que utilitzem a la suma.

$$\bar{x} = \frac{\sum \left(\frac{a}{b} \right)}{N}$$

- La moda (Mo) és el valor més freqüent del conjunt de dades que hem estudiat. Per calcular-la, en aquest cas, ho farem per intervals de 4 dècimes.

- La desviació típica (σ) és una mesura que s'utilitza en probabilitat per saber la desviació que hi ha del valor mitjà que hem calculat i el valor exacte. Es calcula fent l'arrel quadrada de la resta del valor exacte menys el que hem calculat al quadrat, dividit entre el nombre d'elements (N) que hem utilitzat.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (xi - \bar{x})^2}{N}}$$

- L'error absolut (E_A) és la diferència entre el valor exacte i el valor aproximat que hem calculat per saber si ens hem desviat molt del resultat que buscàvem.

$$E_A = x - \phi$$

[1] Inferència: Procediment que generalitza una estimació obtinguda a partir d'una mostra limitada, a la totalitat de la població.

- L'error relatiu (E_R) és una altra manera de calcular el que ens hem desviat del resultat exacte. Aquest es calcula dividint l'error absolut (E_A) entre el valor exacte.

$$E_R = \frac{EA}{\phi}$$

Primer, busquem les relacions de l'alçada i la distància del melic al terra.

Començarem per la mitjana aritmètica:

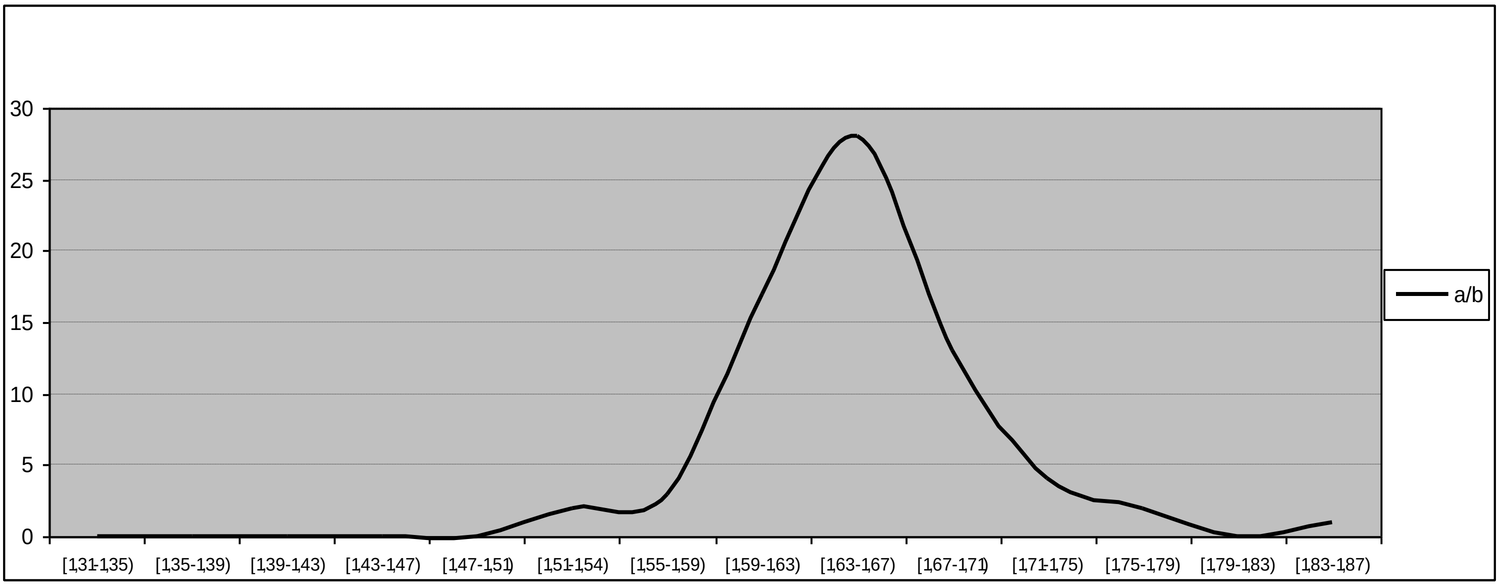
$$\bar{x} = \frac{115{,}384}{70} = 1{,}648342857$$

A continuació, la Moda,

[1,31-1,35)	0
[1,35-1,39)	0
[1,39-1,43)	0
[1,43-1,47)	0
[1,47-1,51)	0
[1,51-1,54)	2
[1,55-1,59)	3
[1,59-1,63)	17
[1,63-1,67)	28
[1,67-1,71)	13
[1,71-1,75)	4
[1,75-1,79)	2
[1,79-1,83)	0
[1,83-1,87)	1

que com observem a la taula ens dóna Mo = [1,63-1,67).

A la següent pàgina podem veure un gràfic lineal que representa els valors de la moda per a fer-nos una idea més gràfica dels resultats.



Seguidament, busquem el valor de la desviació típica i els errors:

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}268}{70}} = 0{,}062$$

E_A = 1,648342857 – 1,618033989 = 0,030, que representa un 1,85%

$E_R = \frac{0{,}030}{1{,}618033989} = 0{,}019$, que és un 1,9%

Tot seguit, ens disposem a fer els mateixos càlculs que hem fet anteriorment però amb la següent relació, que és la de la distància de l'espatlla al dit entre la distància del colze al dit.

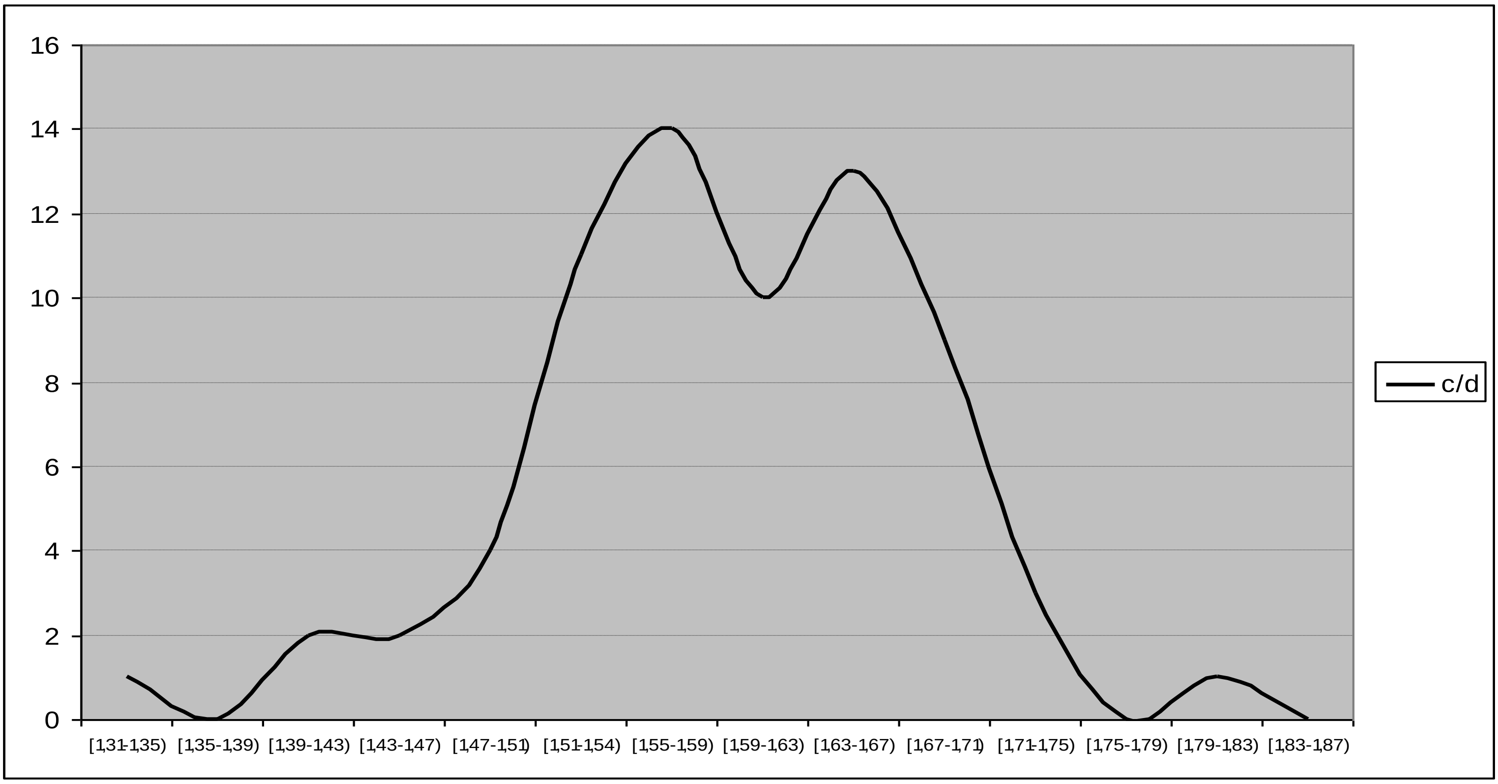
Primer, la mitjana aritmètica: $\bar{x} = \frac{111{,}436}{70} = 1{,}591942857$

Seguidament, el càlcul de la moda amb el seu gràfic corresponent:

[1,31-1,35)	1
[1,35-1,39)	0
[1,39-1,43)	2
[1,43-1,47)	2
[1,47-1,51)	4

[1,51-1,54)	11
[1,55-1,59)	14
[1,59-1,63)	10
[1,63-1,67)	13
[1,67-1,71)	9
[1,71-1,75)	3
[1,75-1,79)	0
[1,79-1,83)	1
[1,83-1,87)	0

La moda ens resulta Mo = [1,55-1,59).



$$\sigma = \sqrt{\frac{0,522}{70}} = 0,086$$

E_A = 1,591942857 – 1,618033989 = - 0,026, que representa un 1,61%

$E_R = \dfrac{0,026}{1,618033989} = 0,016$, que és un 1,6%

Per acabar amb aquest apartat de càlculs, buscarem les altres relacions matemàtiques que es troben en la fisonomia de les persones.
En el primer cas, busquem la relació entre l'alçada i la distància del melic al terra. Com que aquestes dues mesures han de ser iguals, si dividim una entre l'altra el resultat hauria de ser 1.

Per calcular aquestes relacions, utilitzem els mateixos mètodes que abans:

$$\bar{x} = \frac{69,685}{70} = 0,996$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,076}{70}} = 0,033$$

E_A = 0,996 – 1 = - 0,004, que representa un 0,25%

$E_R = \frac{0,004}{1} = 0,004$, que és de 0,4%

En la següent relació, ens trobem que la braçada és quatre vegades més gran que la distància del colze al dit més llarg, per tant, al dividir la primera mesura entre la segona, ens ha de resultar 4.
A continuació, trobarem els càlculs.

$$\bar{x} = \frac{266,64}{70} = 3,809$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1,122}{70}} = 0,127$$

E_A= 3,809 – 4 = - 0,191, que representa un 11,8%

$E_R = \frac{0,191}{4} = 0,048$, que és un 4,8%

Per concloure aquest apartat de càlculs, busquem la relació entre la distància del colze al dit més llarg i la del pam, que ha de ser la meitat per tal que una persona es consideri matemàticament perfecte.

$$\bar{x} = \frac{157,287}{70} = 2,247$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2,136}{70}} = 0,175$$

E_A = 2,247 – 2 = 0,247, que representa el 15,27%

$E_R = \frac{0,247}{2} = 0,124$, que és un 12,4%

13. CONCLUSIONS.

Amb l'estudi que he dut a terme de 70 persones no podem afirmar res amb la seguretat que sigui totalment cert, encara que sí que ens serveix per a fer-nos una idea aproximada de la proporció àuria a la fisonomia de les persones a partir de les mesures i els càlculs que he fet més amunt.

Tal i com s'explica a l'apartat anterior, he calculat la mitjana aritmètica, la moda, la desviació típica i els errors absolut i relatiu.

Amb els resultats obtinguts hem vist que en la primera relació de l'alçada i la distància del melic al terra, la mitjana aritmètica ens dóna 1,648342857. Es desvia un 0,062 per tant, trobem que la relació entre aquestes dos mesures es troba entre 1,586 i 1,71. El valor del nombre auri és troba entre aquests dos nombres, per això podem afirmar que la primera relació, tot i tenir uns errors absolut del 1,85% i relatiu del 1,9%, és adequada.

Pel que fa a la moda, la freqüència més alta és troba a l'interval [1,63-1,67), és a dir, que es desvia entre 0,12 i 0,52 del valor exacte (ϕ).

Per tant, a la primera relació veiem que el valor de la mitjana és més alt que ϕ encara que al fer la desviació típica, el valor de FI queda inclòs en el resultat, per això podríem dir que en aquest cas la majoria de persones mesurades tenen les mesures aproximadament correctes per ser matemàticament perfectes.

Pel que fa a la segona relació, a diferència de la primera, el valor de la mitjana aritmètica és més baix que ϕ, ja que val 1,591942857. La màxima freqüència es troba a l'interval [1,55-1,59). Podem observar que la mitjana aritmètica i la moda coincideixen i tenen una desviació típica de 0,086. ϕ està inclòs dins el valor de la desviació. L'error relatiu val 1,6% i l'absolut, 1,61%.

A partir d'aquestes dades veiem que en aquest cas també podem considerar aquestes persones matemàticament perfectes perquè, igual que amb la relació anterior, s'hi aproxima tant que el nombre auri està inclòs dins l'interval de la desviació típica.

Finalment, amb l'estudi d'altres relacions que no inclouen la proporció àuria, trobem que en la primera, la relació entre l'alçada i la braçada ha de ser 1. La mitjana aritmètica val 0,996 i es desvia un 0,033. L'error relatiu val 0,4% i l'absolut, 0,25%. Vist això, podem afirmar que les persones tenim la braçada igual de llarga que la nostra alçada.

En la següent relació, ens trobem que la braçada és quatre vegades més gran que la distància del colze al dit més llarg. La mitjana aritmètica d'aquesta relació ens ha donat 3,809. Té una desviació de 0,127.
En aquest cas, els errors ens han sortit molt alts ja que l'absolut és d'un 11,8%. El relatiu no és tan alt però també és important tenir-lo en compte. És del 4,8%

Per finalitzar, busquem la última relació: el pam ha de valer la meitat que la distància que va del colze al dit més llarg de la mà. La mitjana aritmètica és de 2,247 i té una desviació típica de 0,175. Com veiem a l'apartat de càlculs, hi ha un gran percentatge d'error, tant absolut com relatiu, que són de 15,27% i 12,4%.

Totes aquestes mesures han estat calculades amb un marge d'aproximació, per tant, hem de tenir en compte l'error que puc haver comés al mesurar a les persones a causa de l'estri utilitzat.

En definitiva, la investigació que he dut a terme ha donat els resultats que esperava encara que sigui en valors aproximats. No puc assegurar-ho però, des del punt de vista del meu treball de camp, trec les conclusions que la majoria de persones segueixen les proporcions àuries en molt poca desviació i les relacions matemàtiques que he buscat en la seva fisonomia.

14. FONTS D’INFORMACIÓ.

14.1. BIBLIOGRAFIA.

- CORBALÁN, F. *La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza*. Espanta: 2010. RBA. ISBN 978-84-473-6623-1
- ALVAR EZQUERRA, M. [ed.]. *Gran diccionario general de la lengua española*. Vol. 1 i 2. Reimpresió. España: maig del 2003. VOX.
- *50 greats for the Piano*. YAMAHA.

14.2. WEBGRAFIA.

- Viquipèdia. < http://ca.wikipedia.org/wiki/Portada > [Consulta: Setembre 2012]
- Ciència per a tothom. <http://lacebeta.blogspot.com.es/2011/12/nombre-auri-i-proporcio-auria.html> [Consulta: Setembre 2012]
- Mates + o - <http://blocs.xtec.cat/matesmesomenys/info-2/ >

  [Consulta: Octubre 2012]
- El número áureo. <http://www.acmor.org.mx/cuam/2009/Fisico-Mate/108-CUAM%20Mor-Numero%20aureo.pdf > [Consulta: Octubre 2012]
- El número de oro, Phi, la divina proporción (Youtube). <http://www.youtube.com/watch?v=j9e0auhmxnc > [Consulta: Setembre 2012]
- Junta de Andalucía, Concejería de educación y Ciencia. <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/concurso2002/alumnado > [Consulta: Novembre 2012]
- Recursos para el aula, Universidad Politécnica de Madrid. <http://www2.caminos.upm.es/departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/actividades/conferencias/conferencias/11.Numero%20de%20oro.pdf>

  [Consulta: Desembre 2012]
- El número de oro en el arte y la naturaleza. <http://www.omerique.net/calcumat/arteoro.htm> [Consulta: Novembre 2012]
- Dailymotion. <http://www.dailymotion.com/video/xfobgi_el-numero-aureo-en-la-naturaleza-m-g-ka_creation> [Consulta: Desembre 2012]

- La música y la divina proporción. <http://www.educacion.gob.es/exterior/ad/es/publicaciones/Aula_Abierta2_Musica.pdf> [Consulta: Novembre 2012]
- ¿Qué aprendemos hoy? <http://queaprendemoshoy.com/la-proporcion-aurea-ii-aplicaciones-a-la-vida-cotidiana-del-numero-de-oro/>
- [Consulta: Octubre 2012]
- I.E.S. Clara Campoamor (Getafe). <http://www.exploralaciencia.profes.net/ArchivosColegios/Ciencia/Archivos/5%20experiencias%20ciencia/RE_Leonaureob.pdf> [Consulta: Setembre 2012]
- Treball de Recerca. <http://www.cornellaweb.com/educacio/mostratreballsrecerca/mostratreballsrecerca2010/pdf%5C11%5C11.pdf > [Consulta: Desembre 2012]
- Pajareo <http://www.pajareo.com/4721-las-curiosidades-del-numero-aureo-o-la-proporcion-divina/ > [Consulta: Octubre 2012]
- I.E.S. Madrid-Sur (Madrid). <http://www.sectormatematica.cl/medicina/Mat_Cpo_Humano.pdf>

  [Consulta: Setembre 2012]
- I.E.S. Clara Campoamor (Getafe). <http://www.madrimasd.org/cienciaysociedad/feria/publicaciones/Feria5/31/RE_Leonaureob.pdf> [Consulta: Setembre 2012]
- Diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans. (DIEC) <http://dlc.iec.cat/> [Consulta: Gener 2013]

15. AGRAÏMENTS.

M’agradaria agrair, primer de tot, a la Sílvia Beltran, la meva professora de matemàtiques durant l’ESO, que va ser la que em va ajudar a escollir el tema i a enfocar-lo.

Seguidament, a en Quim Güell, el meu tutor del treball, i a la Carmen Morales, que és la que ha estat amb mi tots els dimecres a les hores de treball de recerca. Ells han estat els que m’han ajudat més al llarg del treball, primer la Carmen i més endavant en Quim.

He de mencionar també la Júlia Beltran, que m’ha respost tots els dubtes que tenia sobre com plantejar la història del nombre d’or i alguns altres punts.

Finalment, només em queda agrair a totes les persones que m’han permès amablement que les mesurés per dur a terme la part pràctica.

Gràcies a tots per formar part del meu treball.

16. ANNEXOS.

Annex I

	EDAT	a.ALÇADA	b.MELIC	a/b	c.ESPATLLA	d.COLZE	c/d	e.BRAÇADA	g.PAM	e/a	e/d	d/g
1	82	148	88	1,67	64	40,5	1,58	151	18	0,98	3,73	2,25
2	84	156,5	94	1,66	67,5	42	1,607	156	21	1	3,71	2
3	12	151	93,5	1,615	66	39	1,69	151	18	1	3,87	2,17
4	46	168	101,5	1,66	73	46,5	1,57	172	21	0,97	3,7	2,217
5	46	158	93,5	1,69	65,5	40,5	1,617	158	19	1	3,9	2,137
6	32	161	100	1,61	68	43	1,58	167	19,5	0,9	3,88	2,21
7	17	188	114,5	1,64	80	48	1,67	188	22,5	1	3,92	2,13
8	24	174	108	1,61	70	46	1,52	178	20	0,98	3,87	2,3
9	24	153	95	1,611	69	43	1,605	154	20	0,99	3,58	2,15
10	18	185,5	122	1,52	83	49,5	1,68	193	22,5	0,96	3,9	2,2
11	57	156	91	1,71	72,5	42,5	1,71	164	18	0,95	3,86	2,36
12	13	167,5	100,5	1,67	70,5	44	1,602	162	18,5	1,03	3,68	2,38
13	14	161	96	1,68	68	42	1,619	161	19	1	3,83	2,21
14	13	162	102	1,59	61	42	1,45	164	18	0,99	3,9	2,33
15	16	172	106,5	1,615	68	46,5	1,46	174	19	0,99	3,74	2,45
16	15	164	99	1,66	70,5	42	1,68	165	19	0,99	3,93	2,21
17	52	160	94	1,70	63	42	1,50	161	20	0,99	3,83	2,1
18	17	173,5	105	1,65	71,5	44,5	1,606	172	20	1,01	3,86	2,23
19	52	154	94	1,64	63	41	1,54	158	18	0,97	3,85	2,28
20	52	160	93	1,72	69	41	1,68	159	20	1,01	3,88	2,05
21	32	175	107	1,64	73	47	1,55	173	19	1,01	3,68	2,47
22	17	170	102,5	1,66	71,5	44	1,62	174	20,5	0,98	3,95	2,15
23	51	166	94	1,77	69	43	1,605	167	20	0,99	3,88	2,15
24	34	182	110,5	1,65	75	48	1,56	187	20	0,97	3,9	2,4
25	17	161	99	1,63	68,5	41	1,67	161	17,5	1	3,93	2,34
26	12	167	109	1,53	73	44	1,66	171	20	0,98	3,89	2,2
27	32	175	106	1,65	74	47	1,57	176	21	0,99	3,74	2,24
28	17	170	106	1,603	71,5	43	1,66	170	19	1	3,95	2,26
29	17	162	98	1,65	63	40,5	1,55	156	18,5	1,04	3,85	2,19
30	46	158	96,5	1,64	70	41	1,70	158	20	1	3,85	2,05
31	46	175	109	1,61	74	49	1,51	183	21	0,96	3,73	2,33
32	38	160	102	1,57	64	45	1,42	162	21	0,99	3,6	2,14
33	15	176	110	1,60	74	48	1,54	186	24	0,95	3,875	2
34	15	167	104	1,605	69	44	1,57	174	19	0,96	3,95	2,32
35	31	177	103	1,72	79	47	1,68	178	22	0,99	3,79	2,14
36	35	168	104	1,615	74	44	1,68	168	18	1	3,82	2,44
37	17	172	103	1,67	76	46	1,65	175	21	0,98	3,8	2,19
38	17	180	109	1,65	74,5	46	1,619	180	20	1	3,91	2,3
39	55	156	96	1,62	67	43,5	1,54	160	21	0,975	3,68	2,07
40	17	161	95	169	64	41,5	1,54	155	18	1,04	3,73	2,31
41	50	171,5	104	1,65	70,5	47,5	1,48	179	18,5	0,96	3,77	2,57
42	31	165	101	1,63	56	42	1,33	161	14	1,02	3,83	3
43	10	148	92	1,608	59	39	1,51	147	17	1,01	3,77	2,29
44	13	164	97	1,69	70	45,5	1,54	168	20	0,98	3,69	2,275
45	12	155	100	1,55	67	43	1,56	150	19	1,03	3,49	2,26
46	12	153	94	1,63	61	40	1,53	153	17,5	1	3,825	2,29
47	17	161	98,5	1,63	76	42,5	1,79	164	19,5	0,98	3,86	2,18
48	16	163	99,5	1,64	68	43	1,58	162,5	16,5	1,	3,78	2,61
49	13	162	104	1,56	64	43	1,49	164	20	0,99	3,81	2,15
50	13	165	104	1,59	70	44	1,59	177	19	0,93	4,02	2,32
51	39	170	104	1,63	65	42	1,55	160	18	1,06	3,81	2,33
52	23	187	115	1,63	78	48	1,63	193	23	0,97	4,02	2,09
53	22	170	107	1,59	72	44	1,64	170	20	1	3,86	2,2
54	79	150	81	1,85	66,5	38,5	1,73	130	17	1,15	3,38	2,268
55	77	177	104	1,70	69,5	50	1,39	182	22	0,97	3,64	2,27

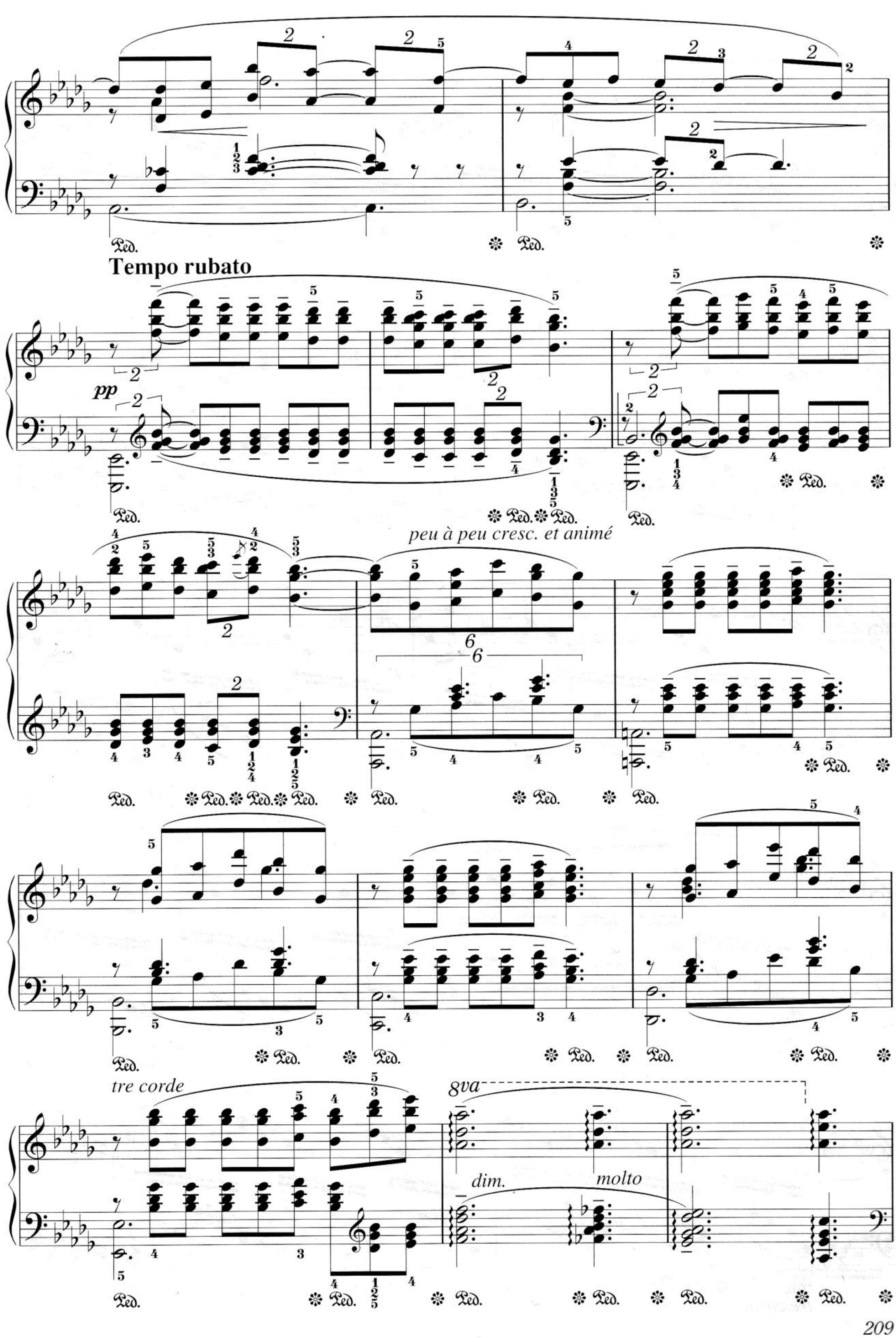
56	51	171	105,5	1,62	75,5	46,5	1,62	178	21,5	0,96	3,83	2,16
57	42	162,5	95	1,70	64,5	39,5	1,63	156,5	18	1,04	3,96	2,19
58	51	182	104,5	1,74	76	51	1,49	182	21	1	3,57	2,43
59	50	163,5	97	1,69	71	43	1,65	165	19	0,99	3,84	2,26
60	9	142	82	1,73	59,5	36	1,65	143	18	0,99	3,97	2
61	9	138	85	1,62	61,5	37	1,66	136	16	1,01	3,68	2,31
62	9	129	78	1,65	54	35	1,54	133	16	0,97	3,8	2,19
63	7	131	79	1,66	55	35	1,57	126	14	1,04	3,6	2,5
64	7	133	80,5	1,65	57	35,5	1,606	130	18	1,02	3,66	1,97
65	7	133	78	1,70	54	35	1,54	132	17	1,01	3,77	2,06
66	7	129	78,5	1,64	56	34	1,65	124	14	1,04	3,65	2,43
67	7	132	79,5	1,66	53	32,5	1,63	128	17	1,03	3,94	1,91
68	7	128	73	1,75	50,5	31	1,63	124	16,5	1,03	4	1,88
69	10	144	87	1,66	60,5	36,5	1,66	145	14	0,99	3,97	2,61
70	10	148,5	89,5	1,66	65,5	38	1,72	149	17	1	3,92	2,23

Annex II

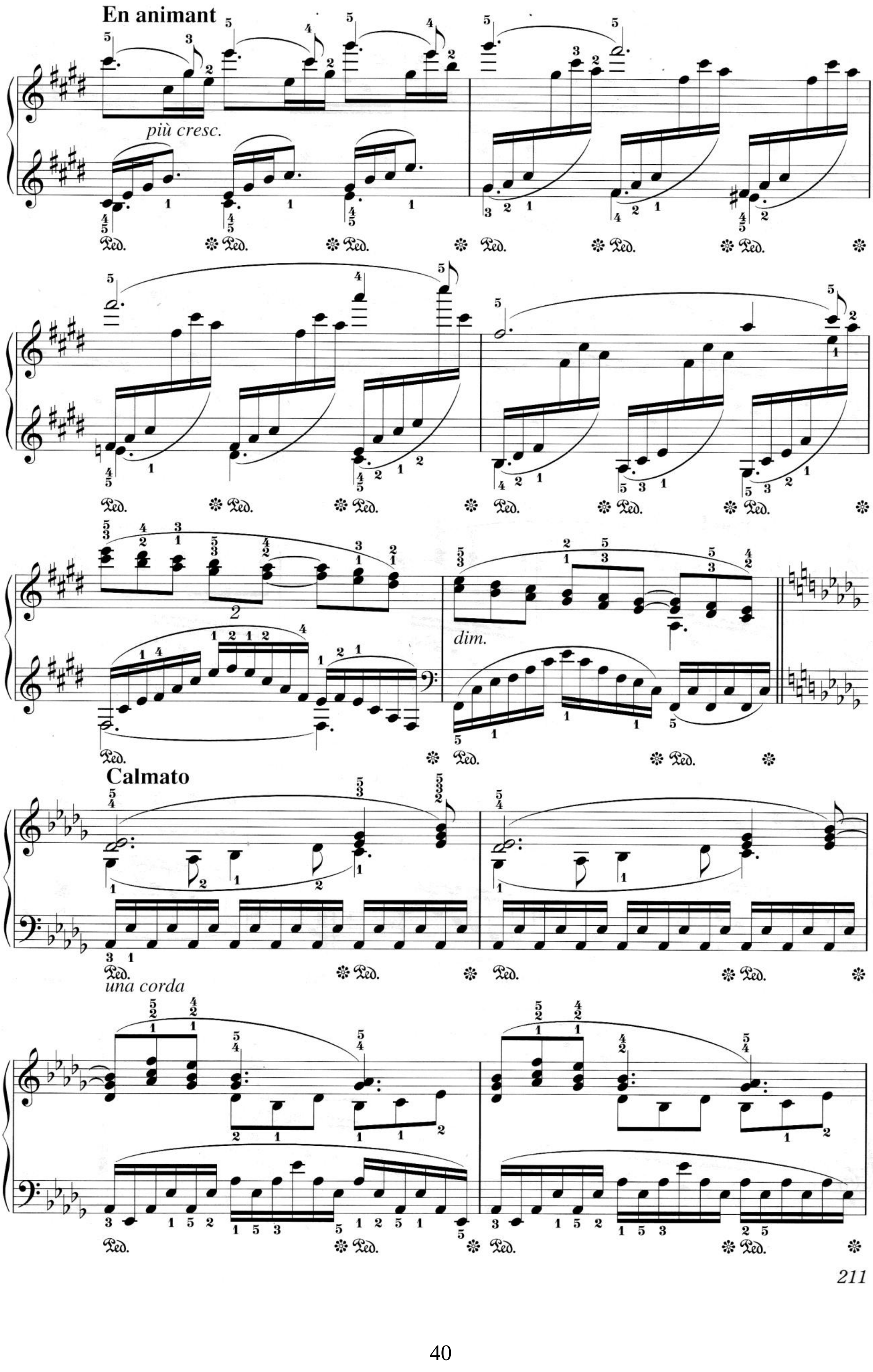
Song No.
48

Clair de lune

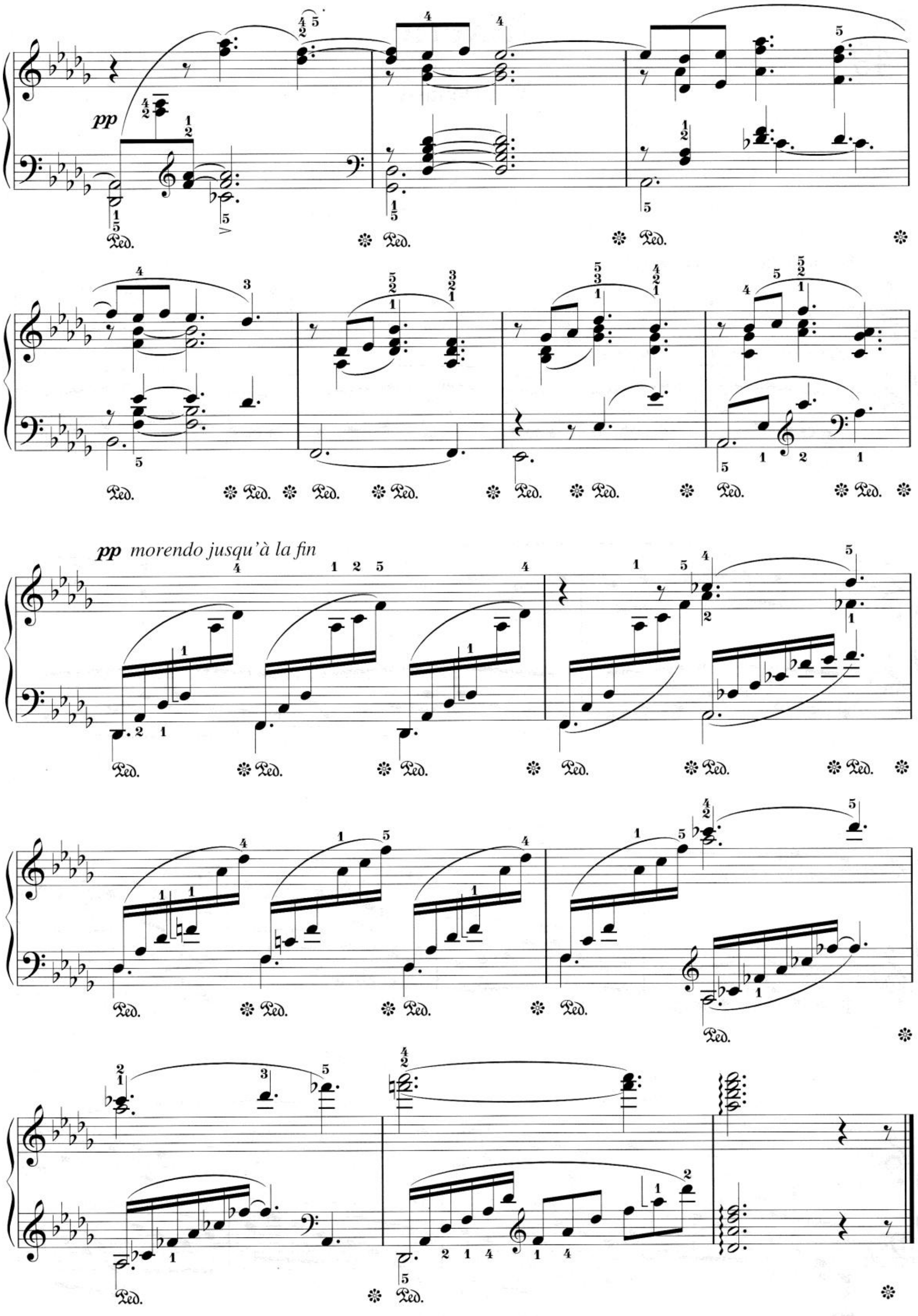
C.A.Debussy


Tempo rubato
pp
peu à peu cresc. et animé
tre corde
8va
dim.
molto

Un poco mosso


En animant
più cresc.
dim.
Calmato
una corda
211


Tempo I
8va
ppp
(8va)
Ped.


pp
pp morendo jusqu'à la fin