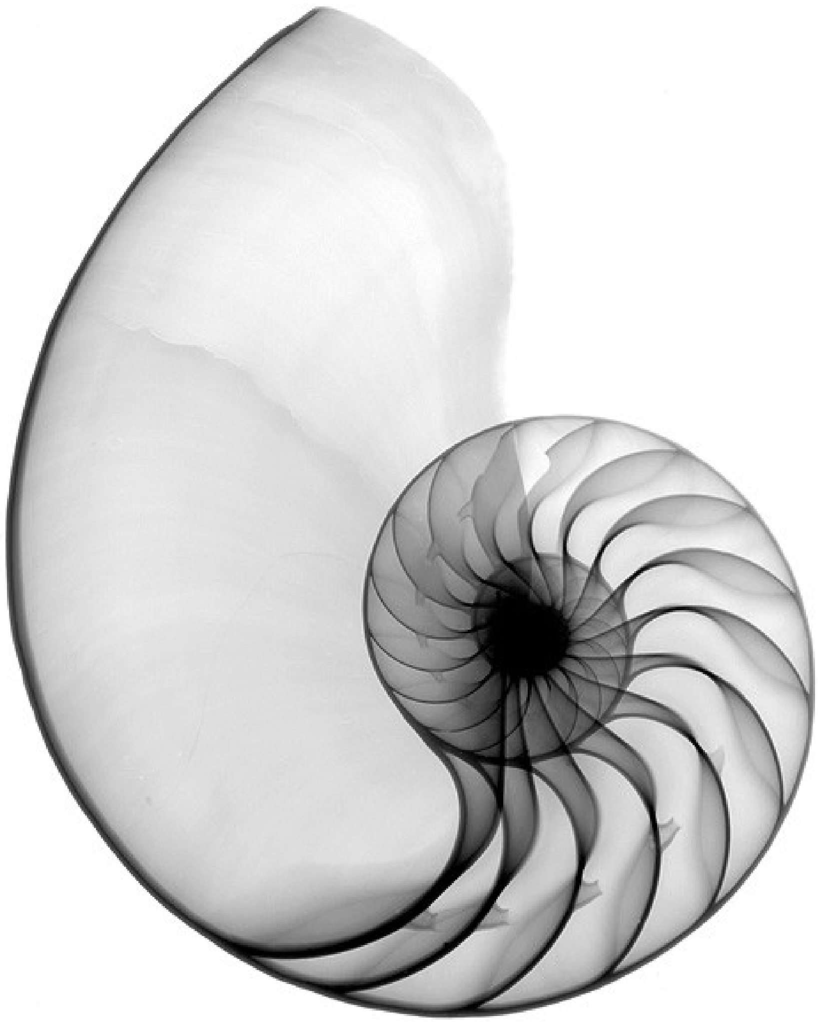
LA PROPORCIÓ ÀURIA EN L'ARQUITECTURA



Agraïments

Vull agrair la col·laboració de totes aquelles persones que m'han ajudat a realitzar aquest treball, i que sense elles tot això no hauria estat possible.

En primer lloc vull agrair l'ajuda que m'ha proporcionat el meu tutor del treball del centre, ************, que m'ha fet de guia durant tot el treball i m'ha ajudat a comprendre part de les qüestions matemàtiques d'aquest. Seguidament, agrair també l'ajuda rebuda pel meu tutor del Programa Argó, el Dr. Eduard Gallego, qui m'ha proporcionat gran part de les bases matemàtiques del treball juntament amb el Dr. Agustí Reventós.

No puc acabar aquest apartat sense anomenar a la meva professora de dibuix tècnic, la ***********, que sempre m'ha resolt totes les qüestions pel que fa al dibuix dels plànols i la construcció de la maqueta. Tanmateix agrair la informació que m'ha proporcionat sobre geometria.

Per acabar, agraeixo el suport rebut tant per la meva família com els amics, ja que durant un any de treball no totes les etapes són fàcils.

A tots, moltes gràcies.

Índex de continguts

"Allò miraculós és que l'univers creés una part de sí mateix per estudiar la resta de sí mateix, i que aquesta part que s'estudia a sí mateixa trobi la resta de l'univers reflectit en la seva pròpia realitat interior natural"

John C. Lilly (1915-2001)

0 Introducció

El meu treball de recerca es titula «La proporció àuria en l'arquitectura» i amb ell pretenc realitzar un estudi sobre la proporció àuria i com influeix estèticament en l'arquitectura. Per fer-ho, m'endinso en el món de l'arquitectura analitzant i tornant a dissenyar un edifici per tal que les proporcions d'aquest siguin àuries amb la metodologia el més propera possible a la d'un arquitecte real.

En un inici, tenia clar que el meu treball de recerca tractaria sobre l'arquitectura, ja que això és el que vull estudiar pròximament, però triar el tema no va ser una tasca fàcil. Després de pensar i descartar moltes altres idees, em vaig decantar per barrejar l'arquitectura amb un altre àmbit que també m'apassiona, les matemàtiques. Aquestes últimes però, són un àmbit molt extens com per realitzar-ne un treball de recerca. Després de setmanes pensant sobre el tema, em va venir al cap una classe de matemàtiques realitzada dos cursos enrere on vam tractar el tema de la proporció àuria i el nombre d'or. Des de llavors em va encuriosir el tema.

L'objectiu principal del treball és esbrinar com influeix visualment en un edifici la proporció àuria. Hi ha una infinitat d'objectes que utilitzem a diari que mantenen aquestes proporcions i resulta curiós d'esbrinar si realment les construccions i edificacions proporcionades àuriament són més harmòniques o agradables que les altres. De tota manera el treball també conté un objectiu més personal: vaig decidir fer el treball sobre l'arquitectura seguint els metodologia emprada pels arquitectes ja que era una forma de valorar i comprovar si aquest és el camí que vull seguir després de l'institut o no.

Per realitzar el treball vaig partir d'una gran cerca d'informació sobre la proporció àuria, a causa del desconeixement que tenia sobre el tema. La informació està extreta gran part d'internet, ja que hi ha una infinitat d'espais web on tracten el tema, cosa que em va facilitar la cerca d'informació. L'altra part de la informació està extreta de llibres i elements audiovisuals. Tot i que la cerca d'informació va resultar una feina fàcil, la informació trobada era tant abundant que la síntesi d'aquesta se'm va fer molt difícil.

El treball està dividit en dues parts. La primera part, que és la part teòrica, ens mostra què és la proporció àuria i la seva implicació en les matemàtiques, la natura i la humanitat. Per altra banda, en la segona part, que és la part pràctica, s'apliquen els àmbits tractats en la primera part per tal de redissenyar un edifici en proporció àuria.

A continuació, hi ha representat tot allò que he après i en el que he estat treballant durant aquest últim any, amb esforç i il·lusió. Espero aconseguir que el tema us apassioni i que us sentiu de la mateixa manera que jo al descobrir tot el món místic que s'amaga darrera el nombre d'or i la proporció àuria.

1 Proporció àuria

1.1 Història de Phi

El nombre d'or ha estat sempre present en l'univers físic. Durant tota la història de la humanitat, l'home ha descobert el nombre d'or en diferents ocasions. Com molts dels altres descobriments científics de l'Antiga Grècia, va quedar oblidat per ser redescobert posteriorment. Aquest és un dels motius pel que el nombre d'or i la proporció àuria tenen una varietat de denominacions diferents.

La primera representació de proporció àuria i nombre d'or en la humanitat la trobem a l'Antic Egipte, concretament en la coneguda piràmide de Kheops. Aquesta construcció de l'any 2550-2570 aC, construïda com a tomba per al faraó Kheops, és la més gran de les tres piràmides del complex arqueològic de Giza.

Les mesures de la piràmide de Kheops han estat estudiades en innombrables ocasions. Amb les dades obtingudes podem afirmar que els egipcis no van construir la piràmide amb mesures agafades a l'atzar. A l'analitzar les dades es pot trobar representada la proporció àuria en el quocient de la divisió de l'alçada d'una de les cares triangulars i la meitat d'un costat de la base.

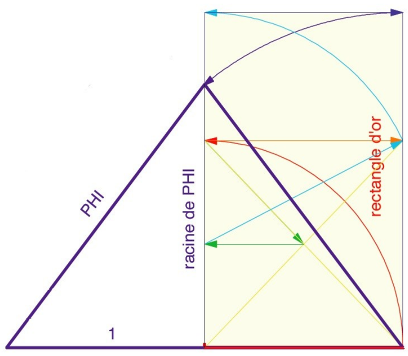


Figura 1: Proporcions de la piràmide de Kheops

Actualment existeix un debat sobre si aquesta proporció divina a la piràmide de Kheops va ser intencionada o simplement casualitat, ja que no hi ha cap altra mostra de que els arquitectes i/o matemàtics egipcis sabessin de l'existència d'aquesta proporció o nombre.

La primera vegada que es fa referència al nombre d'or intencionadament va ser a l'Antiga Grècia, començant per l'escola pitagòrica. L'escola pitagòrica va descobrir els segments immesurables, i sembla ser que els van descobrir recolzant-se sens dubte en la proporció àuria.

No obstant, a l'Antiga Grècia, l'escultor grec per excel·lència Fídies (490-432 aC) va dissenyar i esculpir la primera obra arquitectònica coneguda que manté la proporció àuria en tot el seu disseny. Es tracta del Partenó d'Atenes. En el temple, a part d'estar inscrit dins un rectangle perfectament auri, es pot apreciar que la distribució de tots els elements arquitectònics (columnes, estàtues, etc.) estan en una excel·lent proporció àuria (Fig. 2). Sembla ser que els grecs ja coneixien les propietats del nombre d'or i la famosa proporció.

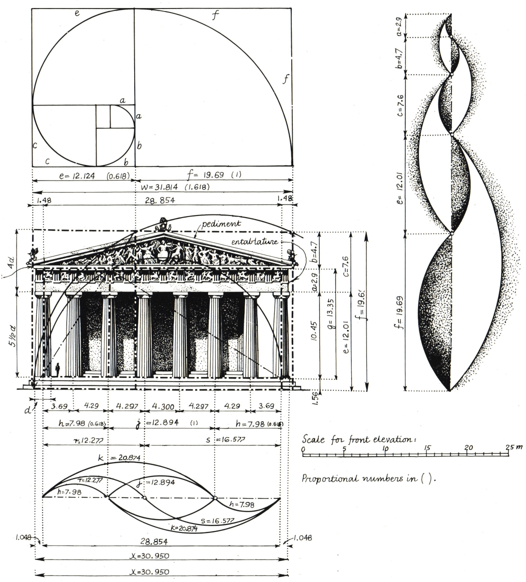


Figura 2: Proporcions del Partenó

Alhora que Fídies construïa el Partenó, Plató (427-347 aC), filòsof de gran influència en la Grècia clàssica, va descriure cinc possibles cossos regulars que, en la seva opinió, podrien constituir la base de l'estructura harmoniosa de l'univers. Aquests cossos que per a Plató van ser motiu d'estudi, es coneixen actualment pel nom de sòlids platònics, i la proporció àuria determina les dimensions i la formació d'alguns d'ells.

Vora el 300 aC, Euclides, el conegut matemàtic grec, defineix la proporció corresponent al nombre d'or en els seus *Elements de Geometria.* Tot i que en fa un ampli estudi, Euclides no relaciona en cap moment aquesta proporció amb cap raó estètica ni divina, simplement en fa un estudi ampli sense sortir dels termes matemàtics. Euclides també estudia el comportament de la proporció àuria en figures i cossos geomètrics com el pentàgon i l'icosaedre. El fet de que la definició d'Euclides sigui la més antiga que es conserva en medi escrit, dificulta molt saber si les cultures anteriors, com els egipcis, utilitzaven la proporció conscientment alhora de realitzar elements arquitectònics i coneixien les seves propietats estètiques i matemàtiques, o simplement era una qüestió d'atzar.

Dos segles més endavant, Vitruvi (100 aC), arquitecte i autor de *De Architectura,* encara un gran estudi sobre les proporcions en l'arquitectura i la importància visual d'aquestes, però sense fer referència a la proporció àuria. No obstant, sí que cita la divina proporció en el seu estudi sobre les proporcions humanes i elabora un disseny del cos humà que posteriorment, il·lustrat per Leonardo da Vinci, es convertirà en el famós *Home de Vitruvi*.

Una vegada acabada l'Antiga Grècia, els coneixements nous sobre la proporció àuria varen caure en picat fins a l'Edat Mitjana, on l'únic descobriment transcendental sobre la proporció àuria va venir en mans de Leonardo Pisano, conegut com a Fibonacci. Aquest va descobrir una successió numèrica de nombres naturals tal que cada nombre de la successió equival a la suma dels dos nombres anteriors. El nombre d'or apareix en el resultat de la divisió de cada nombre pel nombre anterior a la successió.

Al arribar al Renaixement, retornen les idees de la Grècia clàssica i, amb aquestes, l'interès per la proporció àuria torna a la comunitat matemàtica. Luca Pacioli fa referència al nombre d'or en el seu llibre *De divina proportione*, on descriu i analitza geomètricament la proporció àuria i realitza un ampli estudi sobre les representacions geomètriques on hi apareix l'esmentat nombre. El llibre *De divina proportione* conté il·lustracions de Leonardo da Vinci.

Seguidament, Leonardo da Vinci va ser la primera persona que va reflexionar sobre la presencia del nombre d'or en el món animal. Fins ara, només Vitruvi havia estudiat les proporcions del cos humà, creant el famós *home de Vitruvi*, aquest va donar referències sobre la figura humana basada en proporcions i raons simples. Va dir que l'altura del cos humà equival a l'embergadura del mateix amb els braços oberts, i que un home estirat sobre una superfície plana amb braços i cames estirades descriu un cercle. Molts varen ser els artistes que varen intentar il·lustrar un una mateixa imatge les tres formes: la figura humana, la circular i la quadrada, però no sempre amb resultats afortunats. Leonardo da Vinci va trobar la solució i la forma d'il·lustrar les tres formes alhora, basada en que el quadrat i la circumferència tenen centres diferents. Els genitals són el centre del quadrat, i el melic és el centre de la circumferència. Les proporcions ideals que Leonardo va representar corresponen a la proporció àuria que conté un costat el quadrat i el radi de la circumferència. D'aquesta manera, es varen ajuntar la perfecció humana amb la geometria a partir de la raó àuria.

Durant el segle XX, Martin Ohm, matemàtic alemany, va ser el primer en denominar el nombre d'or com a phi en honor a Fídies, en el seu llibre "Die reine elementar-mathematik".

Posteriorment Adolf Zeising, doctor en filosofia, parla de la proporció àuria però no des d'un punt matemàtic ni geomètric, sinó de la bellesa estètica i la arquitectura. Realitza un estudi sobre la aparició d'aquest nombre en monuments clàssics. Adolf, esquematitza l'aparició de la proporció àuria en l'ésser humà a partir de valors de la successió de Fibonacci. Aquest també introdueix el nombre phi en la mística.

El romanès Matila Ghyka, troba la proporció àuria en una àmplia multitud de monuments i, alhora, és un dels primers en cercar la mística proporció a la natura.

Finalment, en l'àmbit de l'arquitectura, l'arquitecte francès Le Corbusier inventa el «modulor» que és un conjunt de proporcions arquitectòniques, basades en la famosa proporció, de gran rapidesa de construcció.

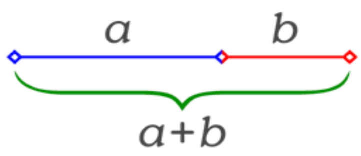
1.2 Definició

1.2.1 Secció àuria

Actualment vivim en un món en que tot el que existeix gira al voltant de nombres, però n'hi ha que destaquen per sobre dels altres i que inclús tenen un nom propi: el nombre pi (π), el nombre e... Dins del món dels nombres, n'hi ha un que és especialment interessant i que el seu valor numèric és: 1,6180339887... És curiós pensar que aquest nombre ha fascinat durant la història de les matemàtiques a moltíssimes ments brillants, fins i tot més que el nombre pi. El nombre en concret es representa amb la lletra grega Φ (phi, llegiu *fi*) en honor a Fídies (escultor i arquitecte grec del Partenó), i és la representació matemàtica de la proporció àuria. Per poder expressar el nombre d'una forma precisa i més manejable existeix la notació aritmètica:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}6180339887.$$

Euclides, famós matemàtic grec que va posar per primera vegada la proporció àuria en paraules al seu llibre *Elements de Geometria*, escrit al voltant de l'any 300 abans de Jesucrist. Euclides va dividir una línia en dos seccions de manera que la relació entre la línia sencera i la secció major fos igual que la relació entre la secció major i la secció menor (Fig. 3).

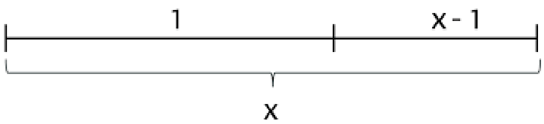


$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\Phi \quad , \quad a>b$$

Figura 3: Divisió segment en proporció àuria

1.2.2 Càlcul de Φ

A continuació calcularem al valor de Φ. Donada una línia dividida en dos segments proporcionals en mitjana i extrema raó (Fig. 4), podem afirmar que:



$$\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}$$

Figura 4: Divisió segment en proporció àuria

Com que la igualtat que hem obtingut aplicant la definició és entre dues fraccions, apliquem la propietat que diu que dues fraccions són equivalents quan el producte dels extrems és igual al producte dels mitjos ($\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$), obtenint així la equació de segon grau:

$$x\cdot(x-1)=1\cdot 1x^2-x=1 \quad \rightarrow \quad x^2-x=1$$

equivalent a:

$$x^2-x-1=0. \qquad (1)$$

Al resoldre l'equació ens trobem amb dues solucions i la positiva, que és la que ens interessa, és:

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1{,}6180339887=\Phi .$$

Aquesta és la notació aritmètica que hem vist en l'apartat anterior.

1.2.3 Propietats de Φ

1.2.3.1 Potències de Φ

Cal recordar que Φ és la solució de l'equació:

$$x^2-x-1=0 \qquad (1)$$

Per tant, la igualtat es compleix per aquest valor.

$$\Phi^2-\Phi-1=0 \;\rightarrow\; \Phi^2=\Phi+1 \qquad (2)$$

A partir d'aquesta última igualtat (2), al ser multiplicada varies vegades per Φ trobem que:

$$\Phi^2=\Phi+1$$
$$\Phi^3=\Phi^2+\Phi$$
$$\Phi^4=\Phi^3+\Phi^2$$
$$\Phi^5=\Phi^4+\Phi^3$$
$$\ldots$$

Qualsevol potència de Φ equival a la suma de les dues potències anteriors.

Així doncs, veiem que a partir d'aquestes igualtats, totes les potències de Φ poden ser simplificades:

$$\Phi^1 = 1\Phi$$
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2$$
$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3$$

...

1.2.3.2 La irracionalitat de Φ

Per a demostrar la irracionalitat de Φ utilitzarem la reducció a l'absurd a partir de la definició matemàtica de qualsevol nombre racional.

Imaginem que Φ és racional. Això suposaria que Φ es pot expressar com una divisió de dos nombres naturals sense cap factor comú entre ells:

$$\Phi = \frac{p}{q}.$$

Sent *p* i *q* enters i primers entre sí (sense factors comuns). La fracció hauria de complir l'equació quadràtica (2). Per tant:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{p}{q} = 1 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} - \frac{p}{q} = 1.$$

Multipliquem tota l'expressió per q^2 i extraiem *p* com a factor comú:

$$p^2 - pq = q^2 \quad \rightarrow \quad p(p-q) = q^2.$$

Cosa que significa que *p* és un divisor de *q*, mentre que el $mcd(p,q)=1$. Així doncs, afirmem que Φ és un nombre irracional.

Ara que ja hem vist que el nombre d'or és un nombre irracional, podem veure dues propietats que ens representen aquesta incommensurabilitat de Φ.

A partir d'expressions utilitzades anteriorment tenim:

$$\Phi^2-\Phi-1=0 \quad \rightarrow \quad \Phi^2=\Phi+1. \tag{2}$$

Aïllem Φ de manera que: $\Phi=\sqrt{\Phi+1}$. Si ara substituïm Φ pel seu valor obtenim la successió:

$$\Phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$$

Podem obtenir una altra expressió del nombre d'or utilitzant la mateixa equació que acabem d'utilitzar (2). Si la dividim tota per Φ tenim que:

$$\frac{\Phi^2}{\Phi}=\frac{\Phi+1}{\Phi} \quad \rightarrow \quad \Phi=1+\frac{1}{\Phi}.$$

Substituint Φ de forma reiterada, tenim:

$$\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}}=1+\ldots \quad \rightarrow \quad \Phi=1\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}.$$

1.3 El nombre d'or en geometria

Anteriorment hem vist de quina manera ha estat presentada tradicionalment la proporció àuria, amb la definició d'Euclides. Ara veurem de quina manera podem dividir un segment amb mitja i extrema raó de forma gràfica.

1.3.1 Divisió d'un segment en mitja i extrema raó

A partir d'un segment *AB* de longitud *a* volem trobar el punt X que divideixi el segment en dos parts, la proporció de les quals sigui ϕ.

Primerament, tracem la mediatriu del segment *AB*, de manera que tinguem la longitud equivalent a *a/2*, a continuació construïm un triangle rectangle on els catets d'aquest siguin *a* i *a/2* (Fig. 5).

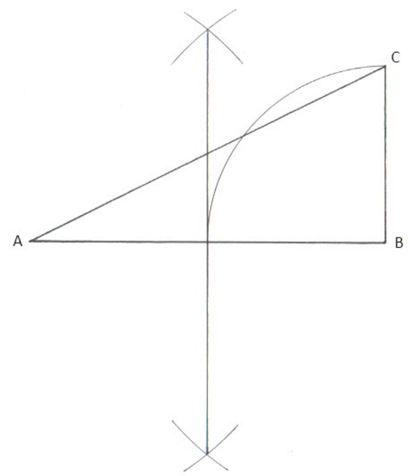


Figura 5: Primer pas per dividir un segment en proporció àuria

Un cop construït el triangle rectangle, en centre a *C* i radi *CB* (equivalent a *a/2*), tracem un arc de circumferència que talli *AC* trobant el punt *S* (Fig 6).

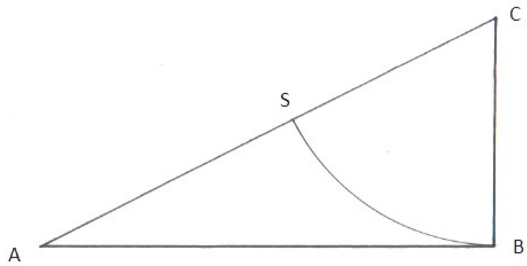


Figura 6: Segon pas per dividir un segment en proporció àuria

Seguidament amb centre a A i radi AS, es traça un arc que talli AB en el punt X (Fig 7).

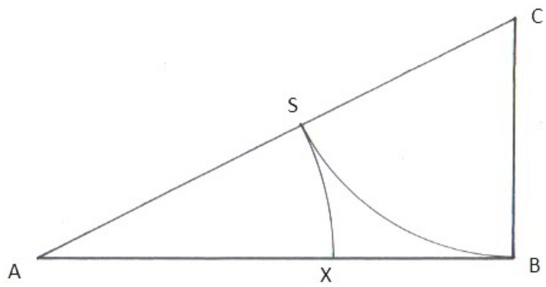


Figura 7: Tercer pas per dividir un segment en proporció àuria

D'aquesta manera, tenim el segment AB tallat pel punt X de manera que:

$$\frac{AB}{AX}=\frac{AX}{XB}=\phi.$$

1.3.2 Triangle auri

El triangle auri és un triangle isòsceles en el que la proporció del costat major i del costat menor equival a ϕ. Hi ha dos tipus de triangles auris diferents, el primer té angles de 36º, 36º i 108º, mentre que el segon té angles de 36º, 72º i 72º. En ocasions se'ls atribueix noms diferents per a cada un: rep el nom de triangle auri el d'angles 36º, 72º i 72º, mentre que l'altre de 36º, 36º i 108º rep el nom de gnòmon auri.

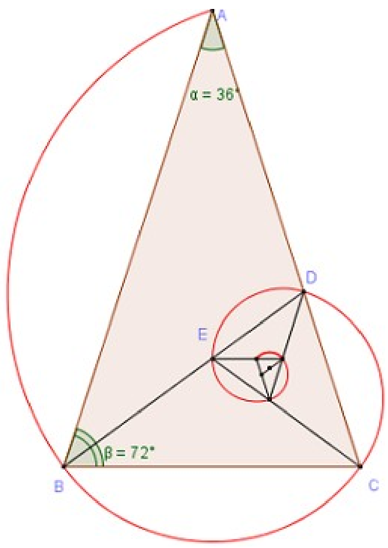


Figura 8: Espiral auri en el triangle

Algunes de les manifestacions més prodigioses de ϕ les trobem en les espirals, en les que ϕ té un comportament curiós. Suposem que partim d'un triangle auri d'angles 36º, 72º i 72º. Al realitzar la bisectriu d'aquest pel punt *B*, obtindrem els triangles: *DAB* i *BCD*. El primer és un triangle auri d'angles 36º, 36º i 108º, mentre que el segon és semblant al triangle de partida. Si continuem realitzant una bisectriu a l'angle *C*, obtindrem *CDE*, que torna a ser semblant als dos anteriors. D'aquesta manera si continuem realitzant bisectrius, anirem obtenint triangles auris més reduïts dins l'original. Amb això obtenim una successió de triangles auris en espiral. Aquesta espiral rep el nom d'espiral àuria (Fig. 8).

1.3.3 Rectangle auri

En les carteres dels ciutadans d'avui en dia s'hi acumulen documents identificatius i targetes de tot tipus. Els utilitzem a diari, però no prestem massa atenció en la forma que tenen. La majoria d'aquests documents tenen les mateixes mides i forma, o, com a mínim, la mateixa proporció.

Comprovar quina proporció mantenen les nostres targetes és tant fàcil com comparar els seus costats: el quocient entre les longituds dels costats major i menor és, en la gran majoria dels casos, una aproximació a 1,618, el nombre ϕ.

Per construir un rectangle auri partim d'un quadrat *ABCD*, on el costat d'aquest serà equivalent al costat petit del rectangle que construirem. Marquem el punt mig *M* del costat *CD*. Amb centre a *M* i radi *MB* tracem un arc que talli la prolongació de *CD*. Anomenarem *F* el punt on es talla l'arc amb la prolongació. La longitud *CF* és la longitud del costat major del rectangle auri. A partir d'aquí només cal realitzar una perpendicular a *CF* pel punt *F* que talli amb la prolongació d'*AB*. Així, aconseguirem el nostre rectangle *AEFD*, el nostre rectangle auri (Fig. 9)

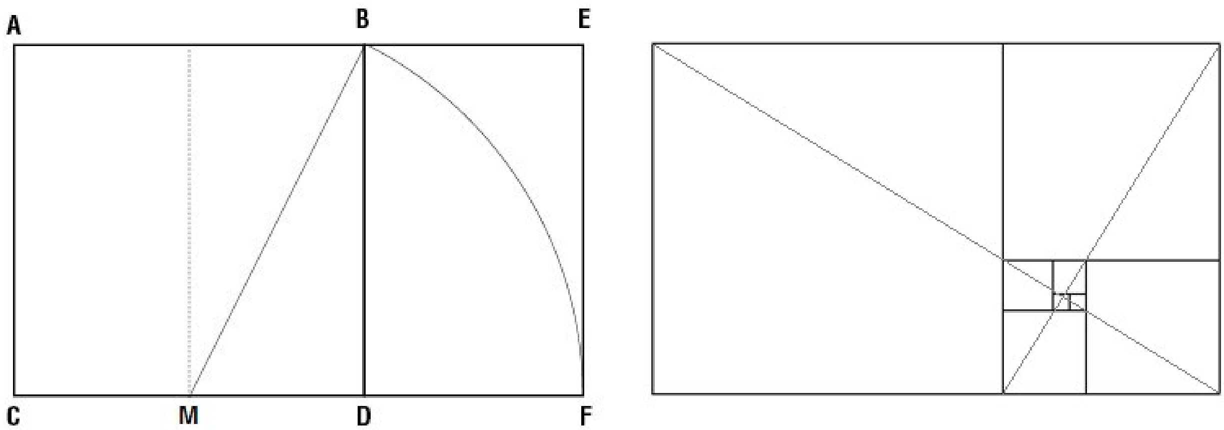


Figura 9: Propietats del rectangle auri

Un cop construït el nostre rectangle auri, analitzem les seves propietats. Per començar, podem apreciar que el rectangle BEFD també és un rectangle auri. Si realitzem les diagonals dels dos rectangles auris, comprovem que sempre es tallen en un angle recte (Fig. 9).

Si a partir del nostre rectangle auri anem buscant altres rectangles auris en el seu interior a través de successives sostraccions de quadrats, i en cadascun d'ells tracem les pertinents diagonals, veiem que totes coincideixen en el mateix punt que abans (Fig. 9).

Anteriorment havíem parlat de l'espiral àuria continguda dins la successió de triangles auris. Ara, parlarem de la mateixa espiral àuria a partir de la successió de rectangles auris que acabem de veure.

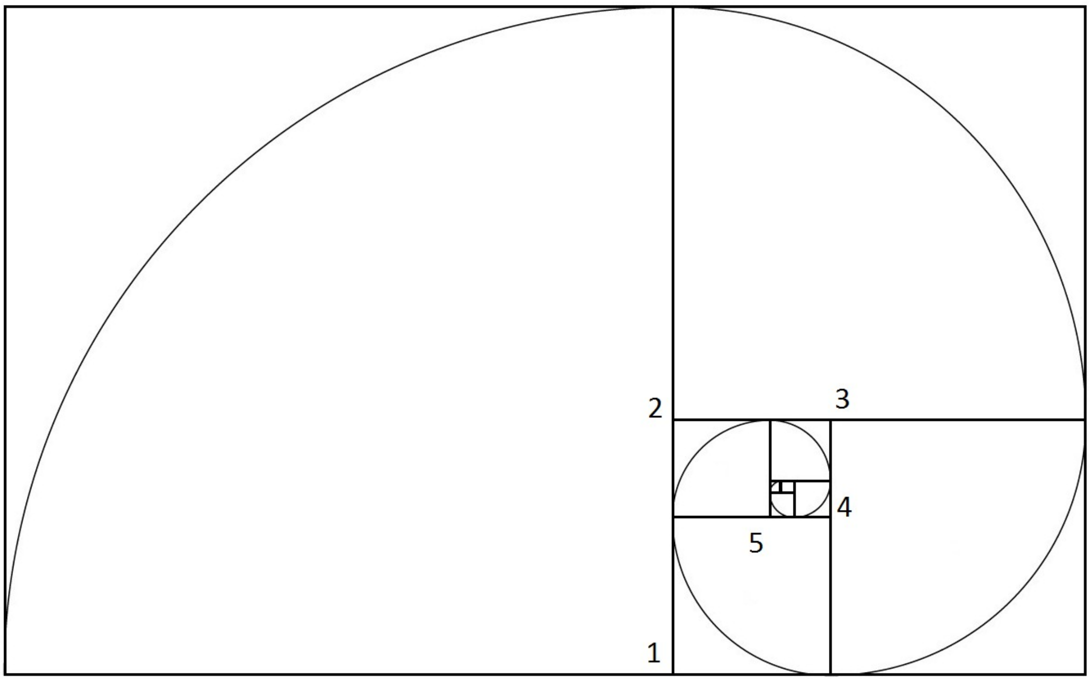


Figura 10: Espiral àuria a partir del rectangle auri

A cada quadrat que hem sostret, tracem quadrants de circumferència de radi equivalent al costat de cada quadrat i centre en el vèrtex de cadascun d'aquests. És a dir, en els punts 1, 2, 3, 4, 5, etc. (Fig 10).

Si continuem l'espiral de forma indefinida amb la successió de quadrants, s'obté l'anomenada espiral logarítmica. El centre de l'espiral equival al punt on es creuen les diagonals dels rectangles auris vistes anteriorment (Fig. 9).

1.3.4 El nombre d'or i el pentàgon

Els pentàgons són formes poligonals de cinc costats. En el cas que aquest sigui regular, la longitud dels cinc costats serà la mateixa. El pentàgon regular es pot traçar indirectament amb regle i compàs amb l'ajuda de ϕ. Això va ser descobert per matemàtics de la l'Antiga Grècia, que a partir d'aquesta troballa varen crear interès en ϕ dins la geometria grega.

Ara, considerem un pentàgon regular en el que s'hi han dibuixat les diagonals. Considerem el triangle de color vermell un triangle auri d'angles 36º, 72º i 72º, i el triangle blau un gnòmon auri d'angles 36º, 36º i 108º. Així doncs, afirmem que el pentàgon està constituït per cinc triangles auris i cinc gnòmons auris (Fig. 11)

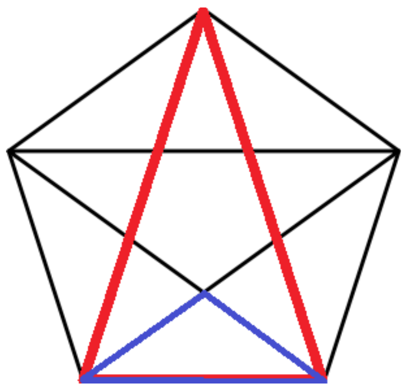


Figura 11: Pentàgon estrellat

Tot i això, el pentàgon manté més relacions amb ϕ:

$$CF/AB=\phi$$
$$AB/CD=\phi$$
$$CF/CE=\phi$$
$$CD/DE=\phi$$

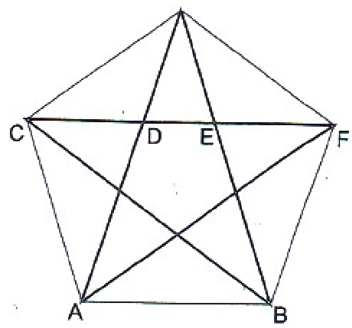


Figura 12: Pentàgon estrellat

El pentàgon va ser tant místic que els pitagòrics el varen mantenir en secret utilitzant-lo com a símbol per comunicar-se. No obstant, pròximament veurem que el pentàgon és una forma recorrent a la natura.

1.3.5 L'hexàgon i el decàgon

L'hexàgon és el polígon resultant de la unió de sis triangles equilàters. Té la propietat de que la mesura dels seus costats equivalen al radi de la circumferència que el circumscriu, que facilita la seva construcció. Dins l'hexàgon podem traçar sis diagonals que formen una estrella de sis puntes, símbol que realitza un paper important en la mística i en l'art decoratiu jueu (Fig. 13).

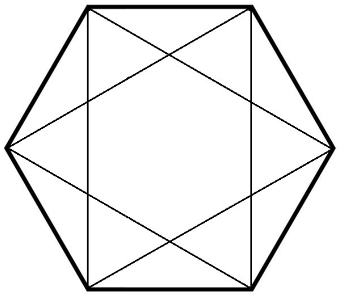


Figura 13: Hexàgon regular estrellat

Quan relacionem aquest polígon amb el decàgon, obtenim una relació àuria: al dividir el costat de l'hexàgon pel costat del decàgon (els dos circumscrits dins la mateixa circumferència), obtenim el nombre d'or, així podem afirmar que l'hexàgon i el decàgon estan en relació àuria.

$$\frac{l_{hexàgon}}{l_{decàgon}} = \phi$$

1.3.6 Poliedres regulars

Fins ara totes les figures que hem vist relacionades amb la proporció àuria estan dibuixades en dues dimensions. Ara, estudiarem una sèrie de casos en que les figures es troben representades en tres dimensions, aquest conjunt de cossos s'anomenen poliedres regulars, i tots ells tenen polígons regulars com a cares. Una propietat dels cinc cossos que analitzarem és que tots ells es poden inscriure dins una esfera.

Figura 14: Poliedres regulars

El cos més simple dels cinc és el tetraedre, format per quatre triangles equilàters. Seguidament el cub està format per sis cares que equivalen a quadrats. El pròxim en mida és el octaedre, format per vuit triangles equilàters. El següent en complexitat és l'icosaedre, format per dotze triangles equilàters. Finalment, el dodecaedre format per dotze cares en forma de pentàgon regular (Fig. 14).

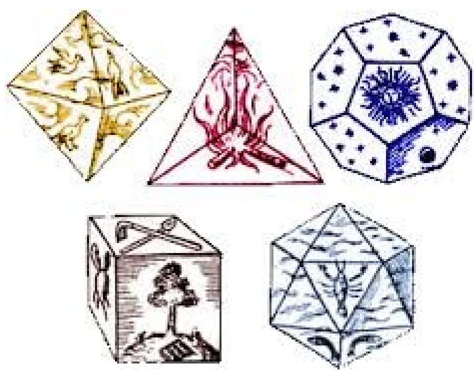


Figura 15: Concepció platònica dels poliedres regulars

Aquestes poliedres regulars també reben el nom de sòlids platònics, ja que van ser mencionats per Plató a *Timeo*, aquest els relacionava amb els quatre elements dels quals va sorgir la natura: foc, aire, terra i aigua, l'element que falta és la cinquena essència, de la qual varen sortir les altres quatre (Fig. 15). Plató també va relacionar els cinc poliedres regulars amb la proporció àuria. Segles més tard, Luca Pacioli reprèn aquesta idea dient: «el dodecaedre... que l'antic Plató en el seu *Timeo* el denominava com a expressió de la cinquena essència. Sense aquesta proporció no es poden obtenir els cinc cossos regulars, dels que el més complex és el cinquè». Luca Pacioli analitza en varis capítols la dependència que tenen aquest cossos amb la proporció àuria.

Una de les característiques més sorprenents dels sòlids platònics és que cada cos està comprès dins el següent, de manera que l'últim els conté tots (Fig. 16).

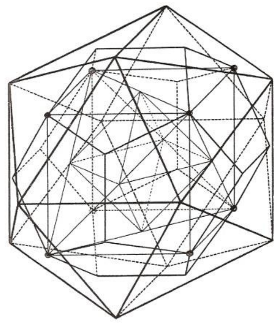


Figura 16: Poliedres inscrits entre ells

En el dodecaedre i l'icosaedre el pentàgon hi està físicament representat (en el dodecaedre en forma de cara i en l'icosaedre en les arestes que degeneren dels triangles equilàters partint d'un vèrtex) per tant, en els dos cossos la proporció àuria és la raó essencial d'aquests.

Altres propietats captivadores dels poliedres regulars són narrades pel *Teorema de poliedres d'Euler*. Aquest teorema formulat l'any 1750, relaciona la proporció entre cares *C*, arestes *A* i vèrtex *V* que pot tenir un poliedre simple. El teorema diu que sent *P* un poliedre regular qualsevol, siguin *C*, *A* i *V* respectivament el nombre de cares, arestes i vèrtexs de *P*. Es compleix la relació:

$$C - A + V = 2.$$

1.4 Successió de Fibonacci

Segles després de que Euclides descrivís per primera vegada la proporció àuria en paraules, al seu llibre *Elements de Geometria*, el nombre d'or va tornar a aparèixer en un conjunt de fraccions d'una successió aparentment aritmètica. L'autor de la famosa successió va ser Leonardo Pisano, Fibonacci, matemàtic italià del segle XII-XIII després de Crist.

Fibonacci, sense saber-ho, va realitzar una gran contribució en la comprensió de la proporció àuria a partir d'un problema enunciat en un dels seus llibres. El problema es plantejava de la forma: *Quantes parelles de conills tindrem al cap d'un any si comencem amb una parella que produeix cada mes una altra parella que procrea al mateix temps als dos mesos de vida?* Fibonacci va resoldre el problema fent una taula (Taula 1), en aquesta ell va apuntar les parelles de conills que tenia en funció dels mesos que passaven. La columna final de la taula mostra el total de parelles de conills.

Generació Mes	1a	2a	3a	4a	5a	6a	Total de parelles
1r	1						1
2n	1						1
3r	1	1					2
4t	1	2					3
5è	1	3	1				5
6è	1	4	3				8
7è	1	5	6	1			13
8è	1	6	10	4			21
9è	1	7	15	10	1		34
10è	1	8	21	20	5		55
11è	1	9	28	35	15	1	89
12è	1	10	36	56	35	6	144

Taula 1: Desenvolupament de les parelles de conills segons l'experiment de Fibonacci

Com es pot apreciar en la columna final de la taula (Taula 1), cada nombre és igual a la suma dels dos nombres que el procedeixen. I aquests són els nombres que conté la successió de Fibonacci. Aquesta successió, va deixar bocabadats a posteriors matemàtics que van descobrir la seva relació amb la proporció àuria. El quocient entre dos nombres contigus de la serie s'aproxima cada vegada més a Φ, el nombre d'or (Taula 2):

Lloc	Nombre	F_n / F_{n-1}	Diferència amb Φ
1	1		
2	1	1,000000000000000	-0,618033988749895
3	2	2,000000000000000	+0,381966011250105
4	3	1,500000000000000	-0,118033988749895
5	5	1,666666666666667	+0,048632677916772
6	8	1,600000000000000	-0,018033988749895
7	13	1,625000000000000	+0,006966011250105
8	21	1,615384615384615	-0,002649373365279
9	34	1,619047619047619	+0,001013630297724
10	55	1,617647058823529	-0,000386929926365
11	89	1,618181818181818	+0,000147829431923
12	144	1,617977528089888	-0,000056460660007
13	233	1,618055555555556	+0,000021566805661
14	377	1,678025751072961	-0,000008237676933
15	610	1,618037135278515	+0,000003146528620
16	987	1,618032786885246	-0,000001201864649
17	1597	1,618034447821682	+0,000000459071787
18	2584	1,618033813400125	-0,000000175349770
19	4181	1,618034055727554	+0,000000066977659
20	6765	1,618033963166707	-0,000000025583188

Taula 2: Quocients dels nombres de la successió de Fibonacci i la seva proximitat amb Φ

Veient doncs aquesta relació entre els nombres de la successió de Fibonacci podem afirmar l'expressió següent:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi$$

Anteriorment, quan parlàvem de les propietats del nombre d'or, hem parlat de les potències de Φ, en que:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi^1 &= 1\Phi \\
\Phi^2 &= 1\Phi + 1 \\
\Phi^3 &= 2\Phi + 1 \\
\Phi^4 &= 3\Phi + 2 \\
\Phi^5 &= 5\Phi + 3
\end{aligned}\right\} \qquad \Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}$$

La successió de Fibonacci és un dels pocs àmbits on la presència del nombre d'or és indiscutible.

2 Proporció àuria en la natura

Què tenen en comú els enormes braços de les galàxies amb la disposició de les llavors en una flor de gira-sol, o les espirals dibuixades a les closques d'alguns mol·luscs? És possible que la natura segueixi una raó matemàtica a l'hora de créixer? La resposta és sorprenent i captivadora, ja que és afirmativa. La natura creix seguint patrons entre els quals podem trobar representats la proporció àuria, i més en contret el nombre d'or.

A la natura, apareixen proporcions, formes geomètriques i patrons que es repeteixen constantment. Costa de creure que nosaltres mateixos, també formem part d'aquests conjunts de matèria amb formes i proporcions predeterminades, on només la natura decideix la forma en que creixem.

2.1 La proporció àuria en el cos humà

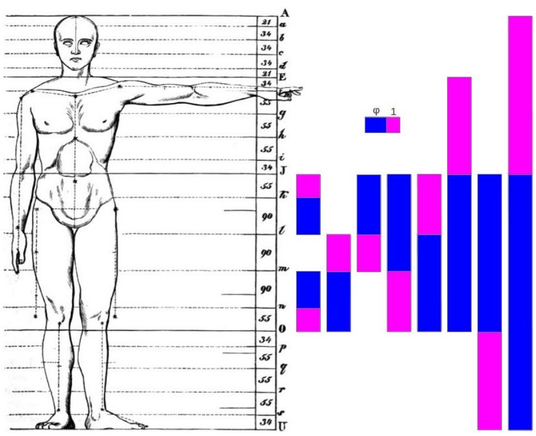


Figura 17: Proporcions humanes segons Zeising

Adolf Zeising, filòsof i matemàtic dels segle XIX, va estudiar el comportament de phi en les mesures del cos humà. Zeising va dividir l'alçada humana en quatre parts: del cap a les espatlles, de les espatlles al melic, del melic als genolls i d'aquests als peus. Zeising va subdividir aquestes quatre parts en cinc apartats més, aquests subapartats no eren iguals, sinó que 3 d'aquests tenien una longitud i 2 una altra, de tal manera que sempre hi havien 3 subapartats grans i 3 subapartats petits.

A la part dreta de la imatge (Fig. 17) es poden veure les proporcions àuries en funció de 1 i Φ. D'aquesta manera podem apreciar de quina manera la natura crea l'ésser humà aproximant-lo a la proporció àuria mitjançant mesures de la Successió de Fibonacci.

2.2 La fil·lotaxis i la proporció àuria

La fil·lotaxis, és una paraula d'origen grec, composta per *phyllon*, que significa «fulla» i *taxis*, que significa «ordre», amb la que es defineix la disciplina de la botànica encarregada d'estudiar la disposició de les fulles de les plantes respecte la tija. Mitjançant aquesta disciplina, hem pogut descobrir una multitud de relacions sorprenents entre la natura i la intel·ligència del seu creixement.

No us heu preguntat mai per què les fulles d'una planta mai creixen una sobre les altres? Si ho fessin, una fulla faria ombra sobre l'altre i els necessaris raigs solars no hi arribarien. Un cop dit això, simplement sembla una raó lògica de supervivència, però en realitat, darrera la disposició de les fulles en qualsevol planta hi ha un patró que sempre es repeteix.

A la Grècia clàssica ja es preguntaven sobre la raó que seguien les plantes a l'hora de créixer, més endavant, Leonardo seria el primer en extreure les claus d'aquesta disposició. Aquest es va adonar que les fulles creixien seguint espirals durant tota la tija de la planta en grups de cinc. Per tant, l'angle en que creixen les fulles té a veure amb múltiples d'1/5. Kepler, més endavant es va adonar de l'implicació del pentàgon en les flors i les fruites, on sovint la distribució dels pètals o les llavors segueixen aquesta forma.

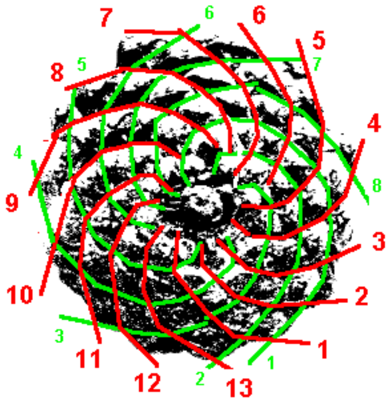


Figura 18: Nombres de Fibonacci en les espirals que genera una pinya

Els naturalistes Karl Schimper (1803-1867) i Auguste Bravais (1811-1863), van advertir de la implicació dels nombres de la successió de Fibonacci a les pinyes (Fig. 18). A partir de llavors, la famosa successió i la botànica varen quedar unides. Al 1968, Alfred Brosseau va realitzar un estudi sobre la teoria de Karl i Auguste, on va demostrar que un 98,3% de les pinyes que ell va analitzar seguien la successió de Fibonacci.

Les fulles de les plantes de tija alta surten d'aquesta seguint un espiral, amb el mateix desviament, aquest angle constant s'anomena angle de divergència. Aquest angle s'expressa en graus, amb la fracció que té com a numerador el nombre de voltes que hi ha entre una fulla i la següent, i el denominador, el nombre de fulles que hi ha en aquest recorregut.

La serie de Schimper-Braun, que està formada pels quocients entre un dels termes de la successió de Fibonacci i el de dos posicions més endavant: a_n/a_{n+2} , anteriorment hem parlat sobre el quocient entre dos nombres consecutius de la successió de Fibonacci, a_{n+1}/a_n , tendeix a Φ, així que aquesta nova sèrie tendirà a:

$$\frac{a_n}{a_{n+2}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \quad\rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}=\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{1}{\Phi}=\frac{1}{\Phi^2}.$$

Arribats a aquest punt, tothom es pregunta si les plantes «saben» realment com han de créixer i posicionar les seves fulles. Doncs bé, Bravais va descobrir que les fulles de les plantes creixien unes separades de les altres amb un angle de 137,5º. De manera que:

$$360^o\cdot\frac{1}{\Phi^2}=\frac{360^o}{\Phi^2}=137{,}5^o$$

El que va fer Brevais va ser multiplicar els graus que conté una volta sencera pel límit al que tendeix la successió anterior. Aquest angle, sovint, rep el nom d'angle auri.

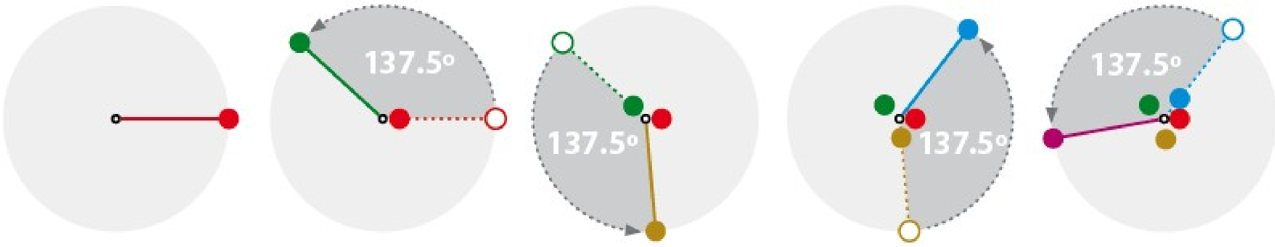


Figura 19: Angle en que creixen les fulles respecte la mateixa tija

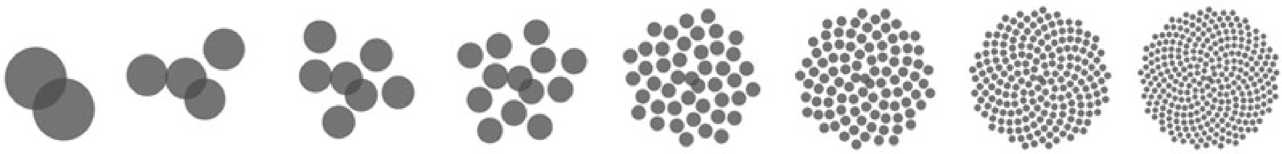


Figura 20: Distribució dels elements a partir de la figura 19

Similar a les fulles, les branques d'una multitud d'arbustos creixen en espiral. Quan un arbre o arbust creix, la seva mida varia, mentre que les proporcions del mateix es mantenen. Hi ha una relació entre les branques i les fulles dels arbustos, i com és d'esperar, també té a veure amb phi. La relació entre el nombre de branques i les fulles que té l'arbre segueix els nombres de la successió de Fibonacci.

2.3 Flors i pètals

En les flors, el nombre de pètals que té cada flor també acostuma a ser algun dels nombres de la successió de Fibonacci, com ara la lila (3), la flor del gessamí (5), la caputxina (8), la calèndula que en té (13) o l'aster que en té (21). Les margarites, depenent del tipus que sigui, tenen diferent nombre de pètals, però sempre són nombres de Fibonacci (21, 34, 55, 89).

Igual que en l'arquitectura, l'aparició de phi en la natura por ser en ocasions més forçada que natural, però els casos que són estudiats exhaustivament no només són harmònics i de gran bellesa, sinó que també són molt sorprenents.

2.4 L'espiral equiangular a la natura

L'espiral equiangular o àuria dóna forma a tota una sèrie d'animals anomenats cargols, l'espècie que millor representa aquesta espiral és el *Nautilus pompilius.* L'estructura en forma d'espiral de la seva closca genera perfectament l'espiral divina. La seva estructura interna està formada per cambres cada vegada més grans però sempre conservant la forma.

Figura 21: Closca de Nautilus

Aquesta però, no és la única representació de l'espiral equiangular a la natura, els matemàtics tenen un nom per designar el centre o ull d'un espiral àuria: asímptota, un lloc al que sempre ens hi estem apropant però que mai arribem. Quan apliquem aquesta teoria a la natura trobem l'ull dels huracans, el centre de gravetat en el que l'aigua i el vent s'expandeixen i es contrauen de tal manera que en aquest punt tot està en equilibri. El centre de tota espiral és sempre un lloc dinàmic, on s'ajunta tots els oposats i on la vida i la mort són el mateix fenomen. Es diu que en l'ull dels huracans és un lloc segur, protegit per parets immenses de núvols i on tot està en equilibri.

Figura 22: Espirals de les galàxies

A l'espai, hi ha centenars de milers de milions de galàxies, i és en el seu centre on es concentra el major nombre d'estrelles. Aquest equilibri del que abans parlàvem, el trobem també en algunes galàxies, on les espirals que degeneren del seu centre gravitacional formen espirals àuries (Fig. 22).

2.5 Geometria divina a la natura

Anteriorment hem parlat de les propietats àuries del pentàgon, la natura és sorprenent, ja que en ocasions inclou la més perfecta geometria en el seu desenvolupament visual.

El pentàgon està present en la natura en infinitats d'ocasions, aquest és el cas de les llavors de les pomes i les peres (Fig. 23), on la disposició d'aquestes sempre forma un pentàgon, el mateix passa amb les estrelles de mar, les flors de cinc pètals, etc. No se sap la raó per la que la natura es desenvolupa d'aquesta forma, seguint patrons geomètrics, però no només el pentàgon realitza la seva tasca en el desenvolupament de la natura, sinó que l'hexàgon també hi apareix sovint representat (Fig. 24). Al cap i a la fi, la natura ha anat variant en funció de la comoditat o la supervivència de les espècies, resulta curiós pensar que la proporció àuria està involucrada en l'equilibri terrestre.

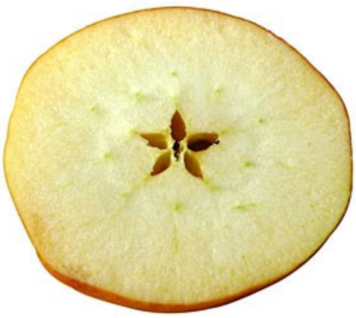


Figura 23: Pentàgon en les llavors de les pomes

Figura 24: Hexàgons a la natura

3 La proporció àuria i les arts

En la majoria de les arts, ja siguin visuals o sonores, sempre s'ha intentat buscar la bellesa, l'harmonia i el màgic equilibri que fa que una obra sigui atractiva. Molts artistes afirmen que l'art no és simple atzar, ni és literalment una còpia de la realitat. Durant el pas dels segles, els artistes han hagut que buscar formes de modificar l'art per tal de que fos flexible i s'adaptés als ideals de bellesa del moment. No obstant, hi ha patrons estètics que es mantenen des de l'Antiga Grècia. Gustav Theodor Fechner (1801-1887), l'inventor de la filosofia física, va realitzar un estudi estadístic amb persones sense experiència artística, i els va demanar quin dels rectangles que veien era el més harmoniós. El resultat de la prova va indicar que el rectangle auri i els rectangles que s'aproximaven més a aquest eren els més agradables a la vista de les persones. Aquest estudi realitzat al segle XIX mostra l'harmonia estètica de la proporció àuria, més concret del rectangle auri, el mateix element estètic que va resultar agradable a Fídies per a construir el Partenó al segle V aC.

3.1 La proporció àuria i la música

De totes les arts, la música és l'àmbit on menys ús s'ha fet de la proporció àuria. No obstant, és un dels àmbits més interessants, ja que s'allunya de la proporció àuria plàstica. Ara bé, en termes plàstics, si ens fixem en les tecles d'un piano, podem apreciar fàcilment la proporció àuria: Hi ha 8 tecles blanques i 5 de negres, i aquestes apareixen en grups de 2 i 3. Si ens hi fixem la sèrie 2, 3, 5, 8 és part de l'inici de la Successió de Fibonacci. Aprofundint més, les notes de l'escala musical són 8 (do, re, mi, fa, sol, la, si, do), i existeix un total de 5 alteracions donades per les tecles negres del piano, si els sumem tots dos $(5+8=13)$ ens dóna un total de 13 notes en el piano (do, do#, re, re#, mi, fa, fa#, sol, sol#, la, la#, si, do). I el 13 és el nombre consecutiu al 8 en la successió de Fibonacci.

Parlant de la construcció d'instruments, no ens podem oblidar els famosos violins Stradivarius, valorats per la seva harmoniosa forma i el prodigiós afinament. Aquests estan construïts seguint proporcions àuries, les seves parts disten entre elles perfectament amb aquesta proporció (Fig. 25).

Figura 25: Violí Stradivarius

Hi ha una varietat d'obres musicals on hi apareix la proporció àuria, entre les més conegudes destaquen la *Cinquena Simfonia* de Beethoven, les obres de Schubert, Debussý i Bartok.

Beethoven, va compondre la *Cinquena Simfonia* de la mateixa manera que dividim un segment en proporció àuria. La primera part de l'obra, que equivaldria al 61,8%, marca un ritme mentre que la segona, que equival al 38,2%, en marca un altre.

Michael John Blake es va preguntar com sonaria ϕ, a simple vista sembla una pregunta molt ambiciosa, però Michael va atribuir a cada xifra del nombre phi una nota diferent.

Recordem que phi equival a: 1,61803398874989484820458683436563811772... . Per tal de que la melodia tingués un ritme determinat, va decidir prendre 161,8 pulsacions per minut.

Per concloure, tal com expressa el concepte pitagòric, la proporció àuria a la música s'ha usat per crear harmonia i bellesa en les obres, de tal manera que una obra sigui harmònica o deixi de ser-ho només depèn de la seva bellesa auditiva, per tant, la proporció àuria en aporta els requisits per aconseguir-ho.

3.2 La proporció àuria i la pintura

Durant el Renaixement, la cerca de les proporcions perfectes i el desenvolupament de la perspectiva va fer que els artistes es convertissin en veritables científics. En aquest mateix moment en que s'elaboraven els tractats de perspectiva, a Itàlia començava a forjar-se l'inici de la geometria projectiva, que finament els pintors renaixentistes van desenvolupar plasmant de manera realista objectes tridimensionals en els seus quadres. Leonardo da Vinci, que és el prototip d'home del renaixement, se li deuen tots aquests assoliments, a l'igual que Rafael o Durero.

Leon Battista Alberti, va escriure *Tratado de la pintura* (1435), on s'explicaven els mètodes per representar la realitat. Amb la publicació d'aquest llibre, les regles de pintura van canviar, així com la mentalitat dels pintors. Això significa que a partir de llavors un bon pintor no era aquell que il·lustrava millor la realitat per mitjà de l'experiència artística, sinó que era aquell que sabia de geometria i l'aplicava en les seves obres.

Leonardo va seguir investigant sobre la forma de representar un objecte tridimensional en perspectiva i les proporcions perfectes. Tot i que no es disposa d'un testimoni directe de l'ús de la proporció àuria en les obres de Leonardo, les composicions d'aquestes es troben inscrites en sorprenents formes generades per ϕ. Aquest és el cas de *La Gioconda o El Sant Sopar* (Fig. 26 i 27).

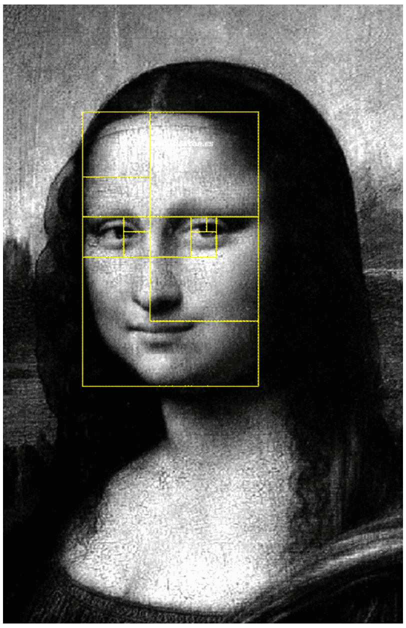


Figura 26: La Gioconda

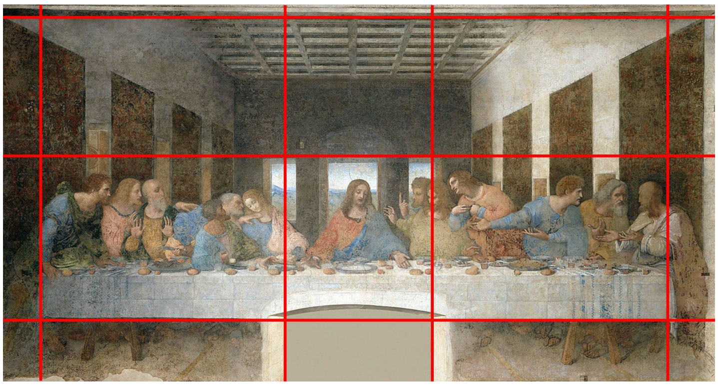


Figura 27: El Sant Sopar

En les dues obres, el rectangle auri predomina en la composició dels elements. En el cas de *El Sant Sopar*, els rectangles auris defineixen les dimensions de la taula i la distribució de Crist i els seus deixebles (Fig. 27). Igualment, en el cas de *La Gioconda*, els rectangles auris defineixen els trets facials així com el conjunt de detalls del quadre (Fig. 26).

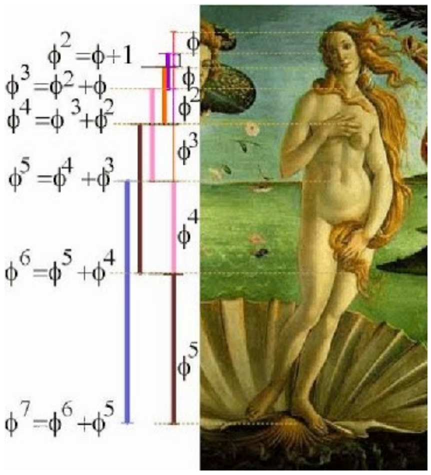


Figura 28: El naixement de Venus

De la mateixa manera en que les dues obres anteriors queden compostes mitjançant figures geomètriques àuries, altres obres estan proporcionades àuriament. Aquest és el cas de *La Sagrada Família* de Miquel Àngel, on el conjunt de persones que hi apareixen es troben inscrites dins un pentàgon regular.

Un altre cas notable on la proporció àuria en determina la composició és *El naixement de Venus* de Sandro Botticelli (Fig. 28), on hi apareix Venus sobre una petxina. Les proporcions del cos de Venus són les de l'home perfecte que havia estudiat Vitruvi segles abans.

3.3 La proporció àuria i l'escultura

Una de les primeres aparicions de la divina proporció en l'obra humana va ser en l'escultura. La primera escultura dissenyada en proporció àuria la trobem a Egipte, l'escultura en concret s'anomena *Dama d'Auxerre*. En aquesta obra egípcia, l'altura de la figura manté relació directa amb la proporció àuria. Tot i que a Egipte hi trobem la primera escultura, no hi ha cap altra escultura egípcia en que el nombre d'or hi aparegui.

L'època en que la proporció àuria pren força és l'Antiga Grècia. Existeix un gran nombre d'estàtues d'aquesta època en que la proporció àuria és la relació fonamental en el conjunt de l'obra. La més coneguda però és la *Venus de Milo*.

També Fídies, el famós arquitecte del Partenó, va utilitzar aquesta proporció en les seves estàtues.

Seguint en l'escultura clàssica, a Roma, l'estàtua d'*Hermes amb Dionís infant* de Praxíteles representa l'home en la seva perfecció.

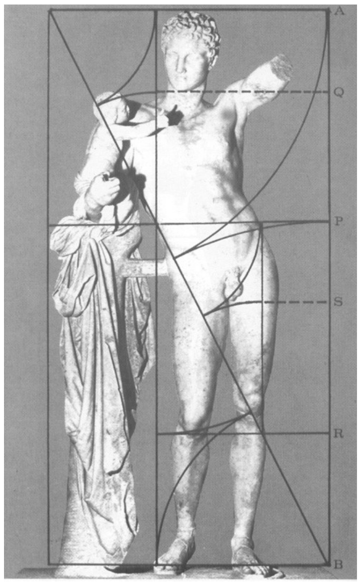


Figura 29: Hermes amb Dionís infant

Altres civilitzacions molt apartades del món clàssic també van coincidir en l'ús de la proporció àuria en les seves construccions. Molt a prop de la capital de Bolívia, La Paz, es troba la Porta del Sol de Tiwanaku, monument d'una cultura prèvia als inques regit completament per Φ.

Un cop acabat l'art clàssic ja no trobem gaires obres escultòriques amb la raó àuria, no obstant, durant el Renaixement es realitzen reproduccions i còpies d'obres clàssiques amb aquesta proporció.

4 La proporció àuria i l'arquitectura

La proporció àuria s'intueix en construccions realitzades per l'home des d'antigues civilitzacions com és el cas de l'egípcia. Un cas exemplar n'és la piràmide de Keops, anomenada anteriorment. L'altura i la base d'aquesta gran piràmide guarden entre sí un lligam amb Φ.

Els arcs de triomf construïts en la Roma clàssica estan definits per la proporció àuria a l'igual que ho fan tombes lícies de l'antiga ciutat de Mira (actual Derme a Turquia).

Com ja s'ha mencionat amb anterioritat, l'exemple més representatiu d'una construcció antiga basada en Φ, és el Partenó d'Atenes. Tan important va ser aquesta construcció en la història de la proporció àuria que es va donar el nom de *phi* al nombre d'or en honor a Fídies, arquitecte del Partenó. Actualment aquest monument es troba en el punt de mira dels experts. Una presa de mesures sobre el terreny expressa una quantitat d'inexactituds sorprenent. Per això, ara, els experts es demanen si realment el Partenó va ser dissenyat en la divina proporció, o si per altra banda és possible que en la història de la cultura occidental hi hagi hagut un intent de trobar relació entre Φ i el Partenó sense que Fídies en fes un ús conscient.

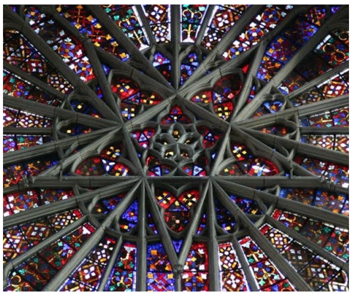


Figura 30: Rosetó

Pel contrari, durant l'Edat Mitjana podem afirmar que es va fer ús de la proporció àuria a l'arquitectura voluntàriament, ja que hi ha documents realitzats pels mateixos arquitectes que ho demostren. Durant aquesta època el pentàgon i el pentàgon estrellat passen a ser un recurs constructiu, un exemple en són els rosetons de les catedrals gòtiques, i les plantes d'aquestes (Fig. 30).

Més endavant, després de les edicions traduïdes de Vitruvi, els arquitectes renaixentistes varen reivindicar la necessitat de la construcció harmònica per crear bellesa visual. En el llibre *De re aedificatoria*, Leon Battista Alberti (1404-1472) afirma que la bellesa «és el valor absolut d'un organisme estètic, que irradia a l'ànima humana una alegria interior, suscitant un acord irreemplaçable entre l'home i l'univers mitjançant el càlcul matemàtic, el joc de les proporcions, o en termes tractats al *Timeo* de Plató, de les mesures pitagòriques».

L'ús de la proporció àuria durant el Renaixement no només es manté a Itàlia. La Universitat de Salamanca, que és la més antiga de l'Estat Espanyol i la primera d'Europa en tenir el títol d'universitat, data de 1218. La façana principal d'aquesta va ser reconstruïda durant el segle XV i va ser una fusió d'estils mudèjars i gòtics. Tal com s'aprecia en la fotografia, la proporció àuria es troba en diversos rectangles auris on s'hi inscriuen parts decoratives de la façana (Fig. 31).

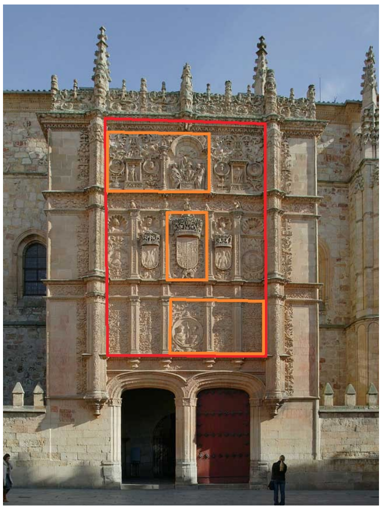


Figura 31: Universitat de Salamanca

Un cop arribats a l'arquitectura contemporània, els avenços tècnics de construcció va fer esclatar la imaginació dels arquitectes del segle XX. El nord-americà Frank Lloyd Wright (1867-1959) va dissenyar una espectacular rampa pel museu Guggenheim de Nova York seguint la forma de l'espiral àuria.

Seguidament, l'arquitecte polonès Zvi Hecker (1931) va utilitzar l'espiral àuria per donar forma a les escoles Heinz-Galinsky de Berlín. Hercker es va inspirar en la flor del gira-sol, a partir d'un cercle central al seu voltant hi sorgeixen tots els elements arquitectònics que generen l'edifici.

Figura 32: Escoles Heinz-Galinsky

Un exemple molt clar de l'ús de la proporció àuria a l'arquitectura és l'edifici de les Nacions Unides de Nova York. L'edifici està construït a partir de quatre rectangles auris que en formen l'estructura exterior.

Un dels arquitectes més coneguts de l'època contemporània és Le Corbusier. És impossible pensar en la proporció àuria sense fer-ne referència. Le Corbusier va aspirar a fer la seva pròpia aportació a la proporció àuria, i ho va aconseguir. Es va queixar del sistema mètric, dient que aquest havia despersonalitzat es instruments de mesura, i per tant, s'havia perdut l'escala humana. Per solucionar-ho, va inventar una escala basada en la proporció àuria. En resposta a l'home de Vitruvi, Le Corbusier va idear l'*home modulor*. Ell mateix va escriure el següent sobre aquest descobriment:

«El metre, el centímetre i el decímetre no són l'escala humana, el modulor, sí. Vaig prendre les proporcions des del plexe solar (planta dels peus) fins el cap i el braç i allà hi vaig trobar la successió d'or, vaig crear un sistema de dimensionament que dóna resposta a les dimensions del cos humà. El vaig descobrir sense adornar-me'n. No sóc precís, però és important que obri a la indústria enormes possibilitats: és útil i modern..., és una innovació sensacional».

Fins llavors, Le Corbusier havia dissenyat les construccions, de la mateixa manera que els arquitectes anteriors; a partir de figures geomètriques que continguessin Φ. Quan va dissenyar el *Mundaneum* de Ginebra, ell mateix va explicar que havia concebut la idea pensant en una ciutat rectangular, on tot estigués basant en rectangles en que la relació dels seus costats fos el nombre d'or.

Durant el període de la Segona Guerra Mundial, Le Corbusier es va dedicar a desenvolupar el *modulor*, un sistema de mesures per la construcció i edificació, tanmateix com pel disseny de mobiliari domèstic basat en la proporció àuria i en les mesures del cos humà (Fig. 34).

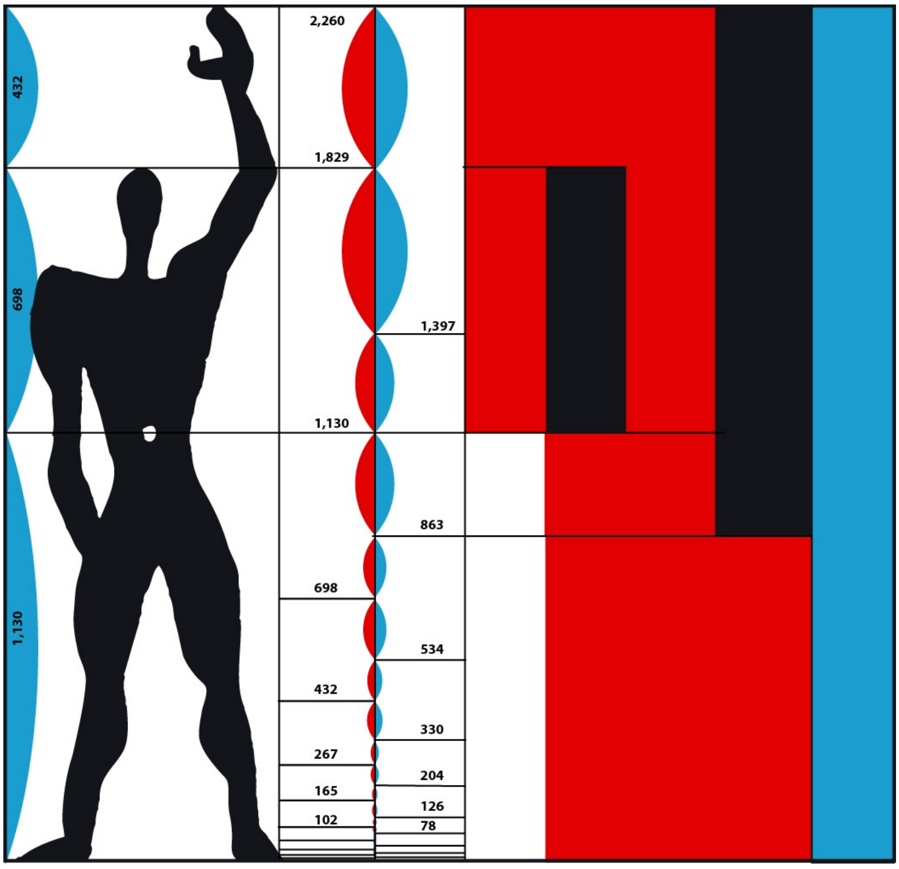


Figura 33: L'home modulor

5 Disseny i construcció d'un edifici en divina proporció

A l'hora de plantejar-me la part pràctica del treball, vaig estar pensant en realitzar un estudi sobre l'estètica i la proporció àuria, per tal de veure si realment aquesta proporció era agradable a l'ull humà. Hauria estat una bona part pràctica, però se m'escapava de l'àmbit arquitectònic en que volia que estigués relacionada. Per tant, vaig pensar en dissenyar alguna construcció en proporció àuria. Primerament, se'm va ocórrer de dissenyar una façana en proporció àuria, en estil renaixentista, i vaig pensar en redissenyar la façana principal de l'església de Moià, el meu poble, per tal de que la part pràctica fos més vistosa per a la gent. No obstant a que era una bona idea, era una construcció plana i poc elaborada, així que vaig decidir dissenyar un edifici. Seguint amb la idea anterior, l'edifici triat per a ser redissenyat en proporció àuria va ser l'església de Moià.

5.1 Anàlisi de l'edifici

La tria de l'edifici a dissenyar no va ser una tasca fàcil, vaig estar buscant edificacions que pogués redissenyar i que fossin atractives. Finalment vaig analitzar les proporcions de l'església de Moià, i els resultats varen mostrar que l'edifici en qüestió no era auri, per tant era vàlid per a ser redissenyat. Per analitzar l'edifici, vaig utilitzar diversos plànols de l'església a escala publicats en un llibre titulat *Modilianum 8-9. L'església de Moià i els seus constructors (1673-1749)* de 1993. Les mesures principals varen ser preses en l'alçat i la planta de l'edifici, ja que a partir d'aquestes dues vistes venen donades totes les mesures de l'edifici. Vaig estar cercant rectangles auris continguts en l'estructura, així com proporcions àuries entre alçades, amplades i fondàries. Només vaig trobar una aproximació a phi en la proporció de dues dimensions de la planta de l'edifici, com que no era una aproximació exacte, vaig arribar a la conclusió de que era una casualitat.

5.2 *Criteris proporcionals a seguir per dissenyar l'edifici*

A l'hora de dissenyar l'edifici, havia de seguir una sèrie de condicions o criteris per tal de que la construcció resultant fos vàlida, referint-me a que l'edifici resultant continuï semblant l'església de Moià però amb proporcions diferents.

Per tal de complir aquest requisit, vaig decidir que no modificaria cap element arquitectònic de l'església, sinó que utilitzaria els mateixos elements però proporcionats de diferents maneres. Això vol dir, que si a la façana de l'església hi ha sis finestres, al redissenyar la façana, aquestes sis finestres hi continuarien sent, però en llocs i proporcions diferents.

Un cop vaig començar a dissenyar l'edifici, em vaig topar en un problema, no tenia suficient coneixement sobre les escales de construcció per tal de que l'edifici i els plànols de l'església encaixessin en l'espai on actualment hi ha l'església. A partir de plànols de l'església real vaig poder calcular l'amplària que hauria de tenir l'església, ja que en un dels costats d'aquesta hi ha cases. Així que l'església redissenyada coincidiria amb l'amplada de l'església real.

Finalment, l'últim criteri imposat prèviament va ser que la maqueta de l'edifici hauria d'estar feta a partir dels mètodes i materials que s'utilitzen en les maquetes dels projectes arquitectònics reals. L'escala de la maqueta hauria d'estar dins de les escales internacionals de construcció però amb les mesures suficients que permetessin passar la maqueta per una porta estàndard.

5.3 Disseny de l'edifici

Per dissenyar l'edifici, vaig partir d'un estudi previ de les proporcions de l'actual església, com he mencionat anteriorment. Seguidament vaig decidir que proporcionaria l'edifici a partir de mesures directes de Φ, ja sigui a partir de decimals d'aquest o a patir d'expressions geomètriques com les que hem vist anteriorment. Cada plànol que comentaré a continuació conté la seva pròpia escala de mesura, per tant quan ens referim a la unitat (1) o a Φ, ho fem amb el mateix valor des de l'inici.

El primer que vaig dissenyar va ser la façana principal (Fig. 34). Vaig començar el disseny d'un rectangle on hi estaria continguda tota la façana, en la imatge s'aprecia el rectangle, que té com a costats la longitud de la base de la façana (línia vermella) i l'alçada d'aquesta (línia de color verd fosc). Els costats d'aquest rectangle equivalen a Φ i 2 respectivament, el que fa que la façana estigui continguda dins de dos rectangles auris. Un cop decidit el rectangle que contindria la façana vaig anar pujant mesures. La meitat de l'alçada (línia blava) correspondria amb l'alçada de la portalada, tanmateix coincidiria amb la posició de les finestres rectangulars. La façana està dividida verticalment en tres segments, dos d'ells (línies taronges) equivalen a Φ/4, i l'altre (línia groga) equival a Φ/2. Vaig decidir que els angles de la teulada serien de 45º, fet que resultava més agradable a la vista. Les tres finestres circulars petites tenen un diàmetre (línies liles) equivalent a 1/6, i el rosetó principal té un diàmetre de Φ/5. Finalment, la col·locació de les finestres ve donada per fraccions d'1, per exemple, les dues finestres circulars inferiors, el seu centre es troba a 1/2 comptant des de la base de l'església.

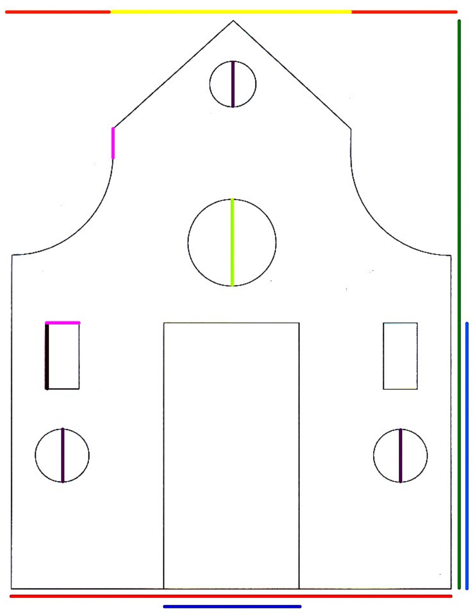


Figura 34: Disseny de la façana

Després de dissenyar la façana, vaig dissenyar l'alçat de l'edifici (Fig. 35). A l'alçat de l'edifici hi ha continguda la façana que anteriorment he comentat, així que part de les mesures veien donades per aquesta. Crec que cal recordar que en aquest plànol quan em refereixi a Φ i a la unitat (1) no estaré utilitzant la mateixa magnitud que en el plànol anterior.

En aquest plànol només comentarem les alçades que he atribuït a l'edifici, ja que més endavant quan analitzi la planta ja comentaré les amplades.

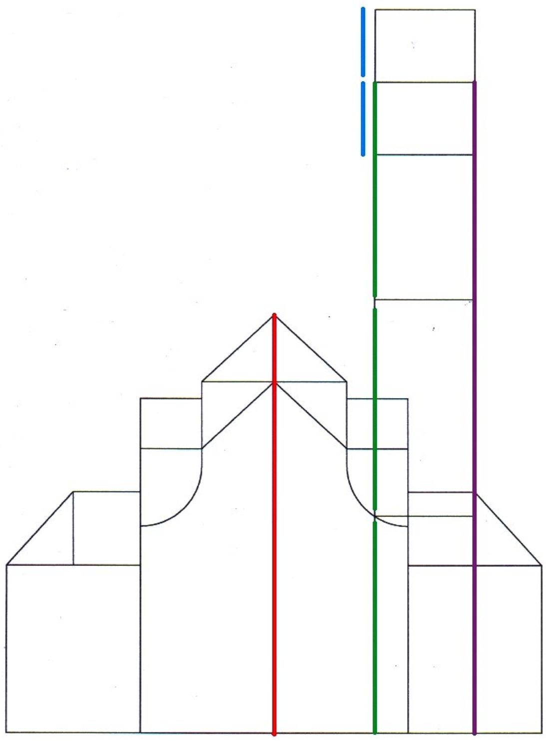


Figura 35: Disseny de l'alçat

Primerament estableixo que l'alçada de l'església (línia vermella) equival a la unitat (1), i l'alçada del campanar (línia lila) equival a Φ, això significa que l'alçada de l'església i la del campanar es troben directament en proporció àuria, ja que el quocient de l'alçada del campanar entre la de l'església és Φ. Seguidament vaig dividir el campanar en tres parts (línies verdes) que equivalen a Φ/3. En la primera d'aquestes parts, el campanar és de planta quadrada, i és a partir de la segona part que el campanar agafa forma octagonal. La última d'aquestes tres parts, conté les obertures del campanar. Com podem apreciar a la imatge, a la part superior del campanar hi ha dos rectangles de costat Φ/6 (línies blaves). El rectangle inferior delimita el que serà l'alçada de les obertures del campanar, i el superior, l'alçada dels arcs del campanar.

Així és com he dissenyat les alçades de l'església i el campanar.

Per acabar el disseny de l'església, analitzarem la planta (Fig. 36). Hi ha proporcions en aquest plànol que coincideixen amb proporcions que anteriorment ja he comentat en els altres plànols, com per exemple la divisió de la nau central de l'església en 3 parts verticals. Aquesta divisió és la mateixa que la de les línies taronges i grogues del primer plànol (Fig. 34).

Per dissenyar la planta de l'església, vaig pensar que tota ella partiria d'un rectangle auri. Aquest rectangle té com a base la línia vermella i com a alçada la línia verda. Un cop fet el rectangle auri, em vaig trobar que la base d'aquest (línia vermella) coincidia amb la base de la façana (línia vermella a la figura 34), així que ja tenia la divisió vertical de la que us he parlat anteriorment. A partir de la divisió, vaig dissenyar la cúpula central, aquesta cúpula es troba inscrita dins un quadrat, el costat d'aquest és 1/2 de la línia vermella. A partir del quadrat vaig elaborar la forma de creu de la planta, prolongant els costats d'aquest cap a la part superior i cap als costats. A la part superior del quadrat, que és on es troba l'altar, hi ha un altre rectangle auri, de base equivalent a un costat del quadrat i alçada la línia negra. Finalment, vaig acabar les prolongacions laterals amb una meitat d'hexàgon.

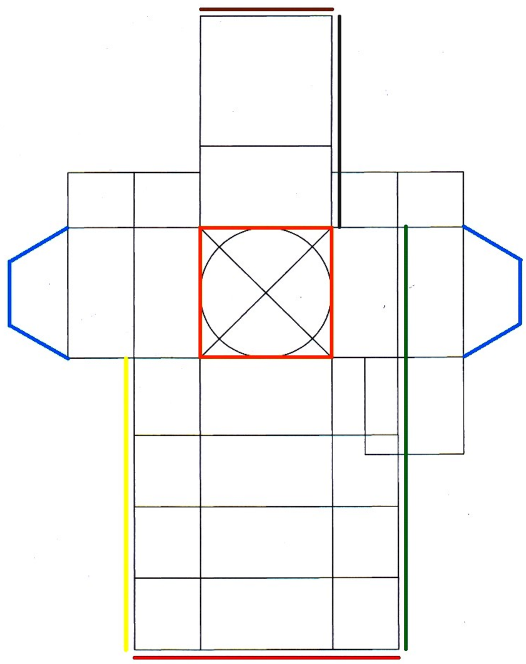


Figura 36: Disseny de la Planta

5.4 Dibuix dels plànols

Inicialment vaig esbossar el que acabarien sent els plànols definitius a mà. Això em va facilitar el fet d'expressar gràficament i fer-me una idea de com volia que fos el disseny de la nova església.

Un cop esbossats els plànols, vaig estar cercant una eina informàtica que em permetés passar aquests esbossos a net. Finalment em vaig decantar per l'AutoCAD Architecture, ja que m'ajudava a complir un dels objectius, el d'aproximar-me tant com pogués a la metodologia emprada pels arquitectes. Vaig informar-me sobre com usar el programa i així poder obtenir els plànols en format digital mitjançant un programari professional.

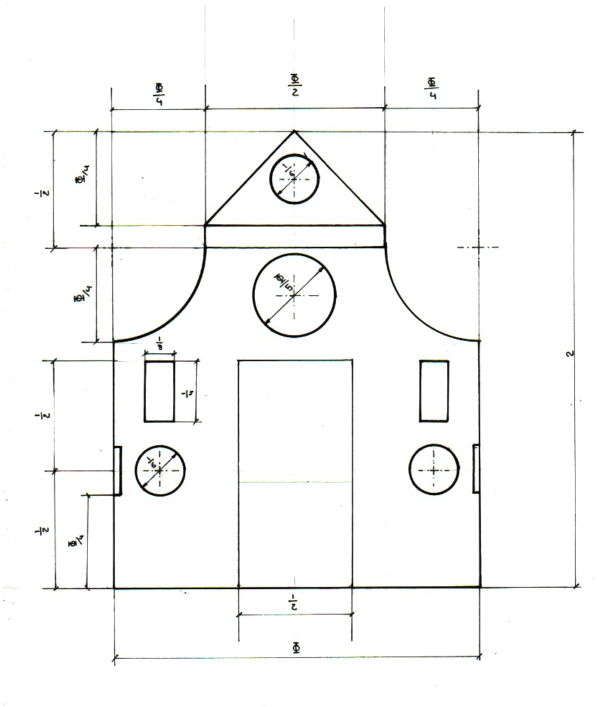


Figura 37: Esbós façana

5.5 Construcció de la maqueta

Per començar a construir la maqueta necessitava tenir definida l'escala en la que la volia representar. L'amplada màxima real de la nau, que és la magnitud que vaig prendre com a referència, és de 48 metres. Tenint en compte que la maqueta hauria de poder passar per una porta estàndard, per poder-la mostrar el dia de la presentació, vaig decantar-me per utilitzar l'escala 1:100. D'aquesta manera, la maqueta de l'església no sobrepassava els 60 centímetres d'amplada comptant la base.

Seguint amb l'objectiu d'aproximar-me tant com pogués a la metodologia d'un arquitecte, vaig cercar materials que s'usen en les maquetes arquitectòniques. La fusta de balsa i el cartró ploma van ser els més destacats. Cadascun d'aquests dos materials tenien característiques que em van posar difícil l'elecció, la fusta de balsa és un tipus de fusta que s'utilitza en el món de la maqueteria i destaca pel seu gruix mínim i la facilitat de tallat, no obstat, la fusta de balsa és un material molt car. Per altra banda, el cartró ploma està format per una fina capa d'espuma recoberta per una làmina de paper a cada costat que proporciona una gran facilitat a l'hora de ser treballat. La decisió final va caure en mans del pressupost, la fusta de balsa era un material massa car pel pressupost que estava disposat a assumir amb el treball així que vaig triar el cartró ploma com a material principal.

La maqueta està formada per una base de fusta de dimensions 60x80 centímetres, on a sobre hi ha la maqueta de l'església a escala 1:100 construïda amb cartró ploma.

Abans de començar a treballar amb el cartró ploma, vaig informar-me de les tècniques que s'usen a l'hora de tallar i donar forma el material, mitjançant el document *Maquetas, modelos y moldes: materiales y técnicas para dar forma a las ideas.* Un cop interioritzades les tècniques em vaig posar a treballar en la seva construcció.

Conclusions

Un cop acabat el treball, concloc amb una idea clara i crec que encertada sobre el que he estat treballant aquest últim any. Penso que la proporció àuria és un àmbit enorme molt valuós pel seu caràcter místic i meravellós, però que per desgràcia, és un àmbit molt allunyat del coneixement actual de la gent comparat amb la importància d'aquest durant l'Antiga Grècia o el Renaixement. Quan vaig començar a buscar informació sobre el tema, no hi havia dada que em sorprengués menys que l'anterior, com he dit a la introducció, durant els últims anys he estat atret per la mística de les matemàtiques fet que m'ha permès gaudir molt del treball.

Pel que fa a l'àmbit de l'aparició de la proporció àuria tant en la natura com en creacions humanes, he arribat a la conclusió que el nombre d'or pot estar representat en qualsevol situació, ja sigui a la natura o en qualsevol expressió realitzada per l'home, però on realment hem de buscar la importància és en aquelles situacions on hi apareix de forma voluntària i amb intencionalitat de l'autor o en el cas de la natura, la pròpia natura.

Durant el procés de disseny de l'edifici, he comprovat que la proporció àuria ens aporta una visió més harmònica de la composició dels elements arquitectònics. En el canvi de proporcions que he fet de l'església es veu un edifici de planta simètrica, i on la majoria de les seves proporcions es basen en Φ. No obstant, també he arribat a la conclusió de que el mateix edifici redissenyat per una altra persona seguint la proporció àuria seria completament diferent ja que cadascú relacionaria les proporcions dels elements de forma diferent. Però el que és interessant d'això és que tot i que serien construccions estèticament diferents, les dues serien àuries i per tant harmòniques i agradables per l'ull humà.

Bibliografia

Llibres

CORBALÁN, Fernando: *La Proporción Áurea. El lenguaje matemático de la belleza*. RBA Coleccionables S.A., Espanya, 2010, 158 pàgines.

GALOBART I SOLER, Josep: *Modilianum 8-9. L'església de Moià i els seus constructors (1673-1749)*. Autor, Moià, 1993, 150 pàgines.

HEMENWAY, Priya: *El Código Secreto*. *La misteriosa fórmula que rige el arte, la naturaleza y la ciencia*. Sterling Publishing Co., Inc., Lugano, Suïssa, 2008, 203 pàgines.

HUNTLEY, H. E.: *The Divine Proportion. A study in Mathematical Beauty*. Dover Publications, Inc., New York, 1970, 205 pàgines.

LAWLOR, Robert: *Geometría Sagrada*. Editorial Debate, S.A., Madrid, 1996, 112 pàgines.

PEDOE, Dan: *La Geometría en el Arte*. Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona, 1976, 289 pàgines.

Treballs

MENÉNDEZ AUCKLAND, David (2009): *El nombre d'or i l'arquitectura modernista a Catalunya*. Cerdanyola del Vallès, Espanya, IES Jaume Mimó.

TOLEDO AGÜERO, Yolanda: *Sección áurea en arte, arquitectura y música*.

NAVARRO LIZANDRA, José Luís: *Maquetas, modelos y moldes: materiales y técnicas para dar forma a las ideas*.

Informació d'internet

ARQ.COM.MX: *Diseño y Dibujo: La proporción áurea en la arquitectura contemporánea.* http://noticias.arq.com.mx/Detalles/15866.html#.VlI9pPkve01 (consulta: 20/03/2015)

PAULO PORTA: La Proporción Áurea. http://www.pauloporta.com/Fotografia/Artigos/epropaurea1.htm (consulta: 20/03/2015)

BLOG DE JOSEP FONTS: *Església de Moià – Reproducció*. http://jfontscanellas.blogspot.com.es/p/el-campanar.html (consulta: 02/04/2015)

GEOMETRÍA SAGRADA: La Proporción Áurea. http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/la-proporción-aurea (consulta: 06/05/2015)

CASTOR: La historia del número Phi. http://www.castor.es/phi_historia.html (consulta: 27/08/2015)

WIKIARQUITECTURA: Gran pirámide de Keops. http://es.wikiarquitectura.com/index.php/Gran_Pirámide_de_Keops (consulta: 15/09/2015)

UN GEEK EN COLOMBIA: El arte de π, Φ y e, los números irracionales. http://www.ungeekencolombia.com/el-arte-de-π-φ-y-e-los-numeros-irracionales/

(consulta: 17/09/2015)

MATEMATICAS VISUALES: La proporción áurea. http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/proporcionaurea/goldensection.html (consulta: 22/09/2015)

NAVEGANDO EN UN MAR DE NÚMEROS: Divina proporción en la naturaleza. http://navegandoentrenumeros.blogspot.com.es/2011/03/divina-proporcion-en-la-naturaleza.html (consulta: 22/09/2015)

NÚMERO ÁUREO: Naturaleza. http://aureo.webgarden.es/menu/naturaleza (consulta: 22/09/2015)

GEOMETRÍA SAGRADA: Phi en el cuerpo humano. http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/phi-en-el-cuerpo-humano (consulta: 29/09/2015)

EL MATENAVEGANTE: La Gran Pirámide de Keops: pi por la raíz de fi es casi cuatro. http://elmatenavegante.blogspot.com.es/2010/01/la-gran-piramide-de-keops-pi-por-la.html (consulta: 02/10/2015)

LA NUBE ARTÍSTICA: El secreto de la belleza: el número de oro. http://www.lanubeartistica.es/dibujo_artistico_1/Unidad3/DA1_U3_T3_Contenidos_v02/3_el_secreto_de_la_belleza_el_nmero_de_oro.html (consulta: 02/10/2015)

RECUROSOTIC.EDUCACIÓN: La proporción áurea. http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/aritmetica/irracionales/metalicos1/actividad.html (consulta: 02/10/2015)

SLIDESHARE: La proporción áurea. http://es.slideshare.net/angustiaschia/la-proporcin-urea-2591755 (consulta: 03/10/2015)

CONVERGENCIA ARMÓNICA: Numerología – Proporción Áurea – Sólidos Platónicos. http://convergenciarmonica.com/2012/04/09/numerologia-proporcion-aurea-solidos-platonicos/ (consulta: 03/10/2015)

ACTIVIDADES MATEMÁTICAS: División de un segmento en proporción áurea. http://www.iessandoval.net/sandoval/aplica/activi_mate/actividades/teano/marco_teano2.htm (consulta: 04/10/2015)

SLIDESHARE: Phi en la historia. http://es.slideshare.net/maritaheredia/phi-en-la-historia (consulta: 05/10/2015)

CASTOR: El número áureo o Phi. http://www.castor.es/numero_phi.html#fibonacci (consulta: 05/10/2015)

MATEMÁTICA INTERACTIVA: Triángulo áureo y su espiral equiangular. http://www.matematicainteractiva.com/triangulo-aureo-y-su-espiral-equiangular-no-aurea (consulta: 07/10/2015)

NEXUS NETWORK JOURNAL: Spirals and the Golden Section. http://www.emis.de/journals/NNJ/Sharp_v4n1-pt03.html (consulta: 07/10/2015)

LA PROPORCIÓN PERFECTA: Número de oro. http://laproporcionperfecta.blogspot.com.es/2011/06/numero-de-oro.html (consulta: 10/10/2015)

TOT ASTRONOMIA: Las proporciones divinas de las galaxias espirales. http://www.totastronomia.com/2012/07/las-proporciones-divinas-de-las.html (consulta: 12/10/2015)

PIZIADAS: Geometría en la naturaleza: Pentágono regular. http://piziadas.com/2011/07/geometria-en-la-naturaleza-pentagono-regular-adelfa.html (consulta: 12/10/2015)

ETÉREA ESTUDIOS: Nature by numbers: the theory behind this movie. http://www.etereaestudios.com/docs_html/nbyn_htm/about_index.htm (consulta: 12/10/2015)

ARTESANIAS Y MANUALIDADES: La sección áurea aplicada al arte. http://www.artesaniasymanualidades.com/tecnicas/la-seccion-aurea-aplicada-al-arte.php (consulta: 13/10/2015)

SLIDESHARE: La proporción áurea en el arte. http://es.slideshare.net/fernandoiesalarcos/la-proporcin-urea-en-el-arte (consulta: 15/10/2015)

DECORAR CON ARTE: La proporción áurea en la escultura y el arte clásico. http://www.decorarconarte.com/epages/61552482.sf/es_ES/?ObjectPath=/Shops/61552482/Categories/Blog/Proporci_n_urea_en_la_escultura_y_el_arte_cl_sico (consulta: 15/10/2015)

RECUROSOTIC.EDUCACIÓN: La belleza en la escultura clásica. http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/belleza/eclasica.htm (consulta: 15/10/2015)

TARINGA: La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza. http://www.taringa.net/posts/ciencia-educacion/17443152/La-proporcion-aurea-el-lenguaje-matematico-de-la-belleza.html (consulta: 19/10/2015)

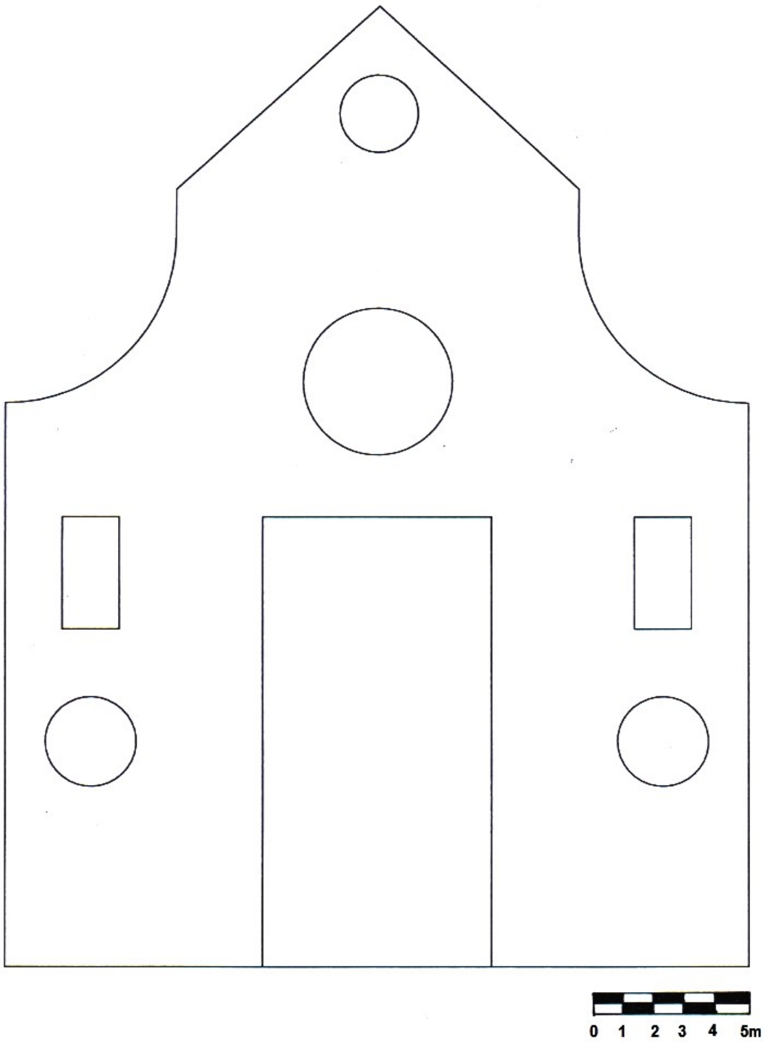
Índexs de figures i taules

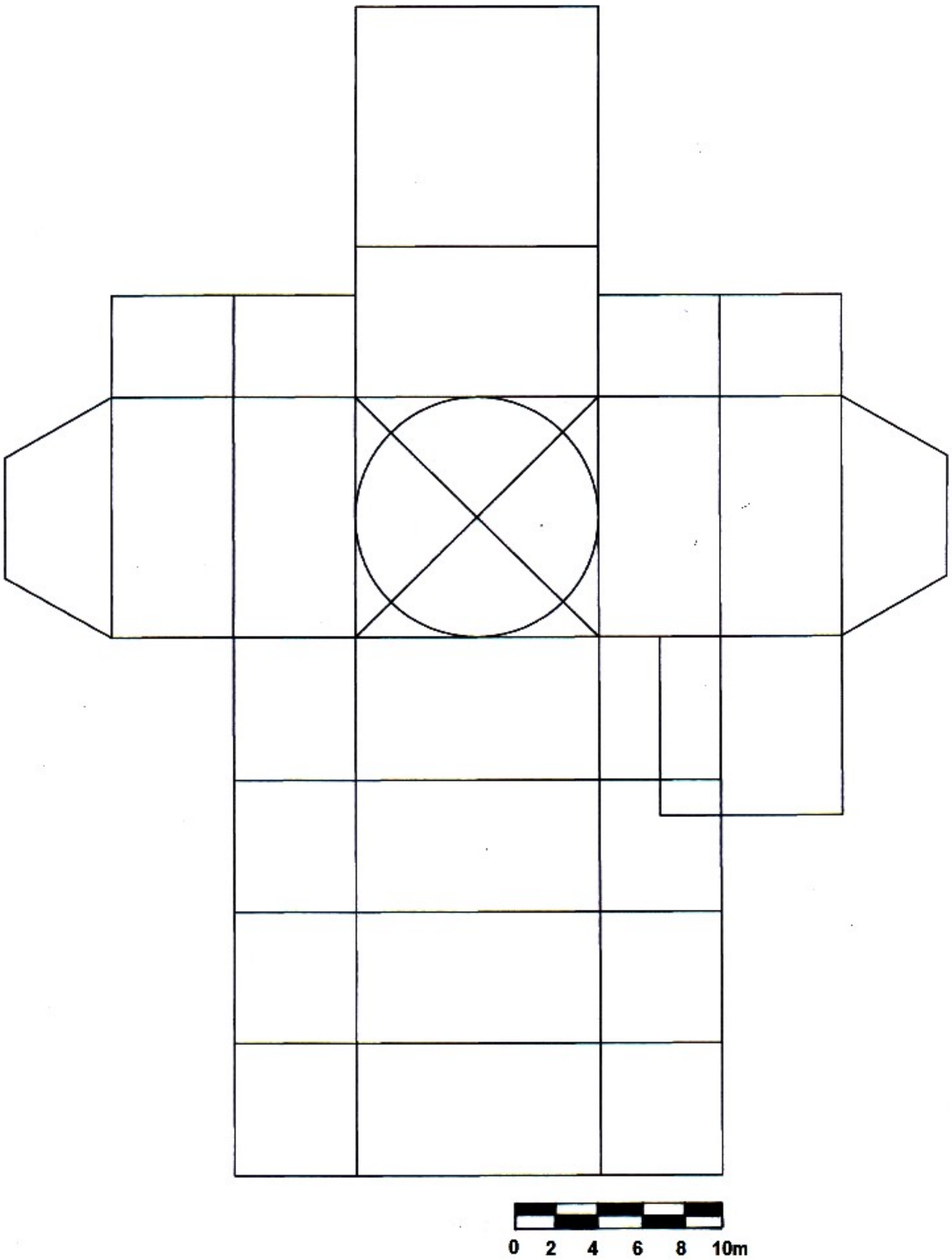
Índex d'il·lustracions

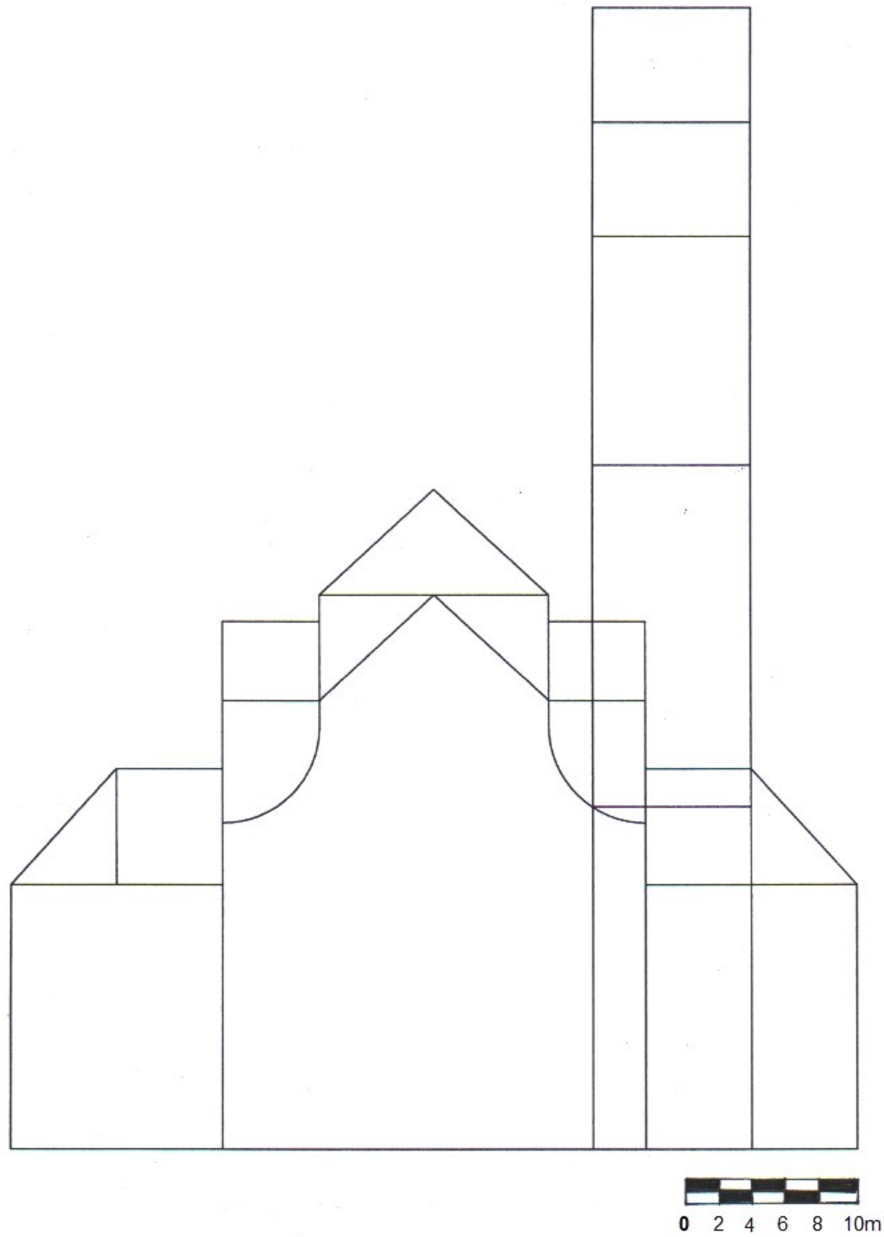
Índex de taules

Annexos

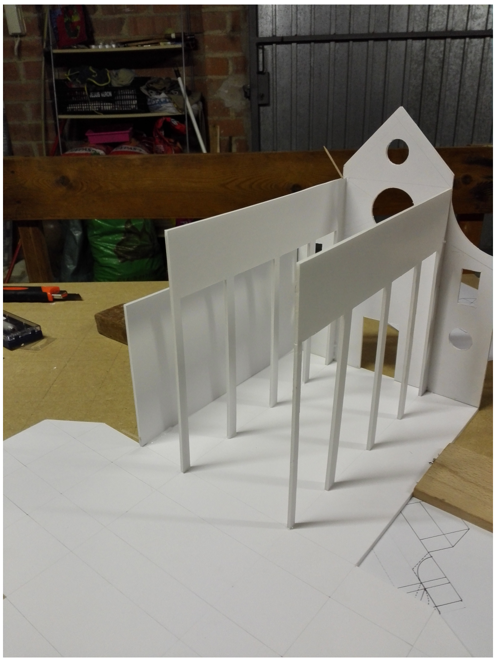
Annex 1: Plànols

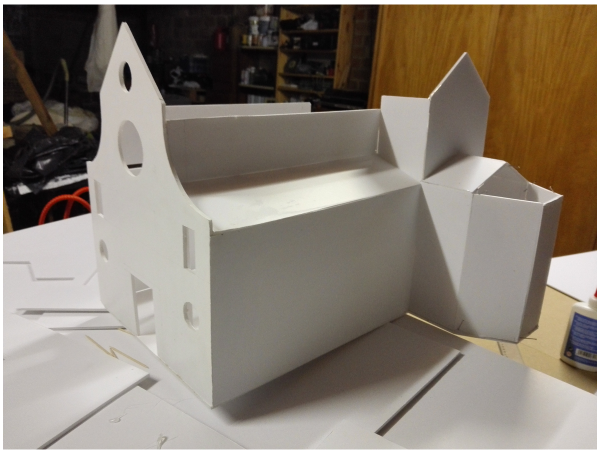

0 1 2 3 4 5m

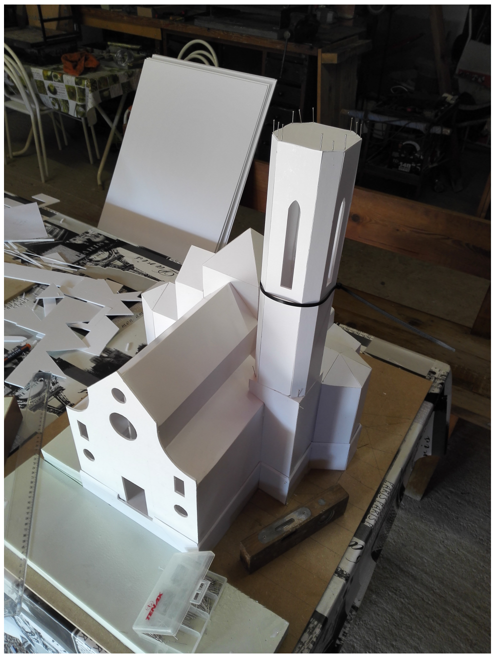

0 2 4 6 8 10m


0 2 4 6 8 10m

Annex 2: Procés de construcció de la maqueta







Annex 3: Pressupost de construcció de la maqueta

Data	Establiment	Concepte	Import
28/07/2015	FES MÉS Subministraments, S.L.	Taulell de fusta (1200X600X10)	7,25 €
28/07/2015	ABACUS, SCCL	Cola blanca i cartró ploma	20,06 €
31/07/2015	AKI Bricolaje España, S.L.U.	Kit bisturí i fulles DEXTER (18mm)	6,48 €
03/08/2015	Amazon.com, Inc	Compàs de tall circular	8,98 €
08/10/2015	ABACUS, SCCL	Cartró ploma	29,50 €
30/11/2015	Amazon.com, Inc	Figures escala 1:100	3,99 €
Total			**76,26 €**