PROBABILIDAD EN LOS JUEGOS DE AZAR

Autor: Raúl Toledano

Tutor: Ferran Montardit

Fecha de entrega: 01/02/2012

Colegio Mirasan, 2º de Bachillerato

"Nada sucede por casualidad, en el fondo las cosas tienen su plan secreto, aunque nosotros no lo entendamos"

Carlos Ruiz Zafón

ÍNDICE

PÁG.

1. INTRODUCCIÓN ... 6

2. HISTORIA DE LA PROBABILIDAD ... 8

2.1. Los primeros juegos de azar ... 8

2.1.1. Las tabas ... 8

2.1.2. Los dados ... 9

2.2. Precursores de la teoría de la probabilidad ... 10

2.2.1. Luca Pacioli ... 11

2.2.2. Girolamo Cardano ... 12

2.2.3. Niccolo Tartaglia ... 13

2.2.4. Galileo Galilei ... 14

2.3. Nacimiento de la teoría de la probabilidad ... 15

2.3.1. Blaise Pascal, Caballero de Méré, Pierre Fermat ... 15

2.3.2. Christiaan Huygens ... 19

2.4. Desarrollo de la teoría de la probabilidad ... 22

2.4.1. Jakob Bernoulli ... 22

2.4.2. Abraham de Moivre ... 23

2.4.3. Thomas Bayes ... 24

2.4.4. Pierre-Simon Laplace ... 28

2.5. La probabilidad moderna ... 29

2.5.1. Francis Galton ... 29

2.5.2. Karl Pearson ... 31

2.5.3. Ronald A. Fisher ... 31

2.5.4. Pafnuti Lvóvich Chebishev ... 32

2.5.5. Andréi Márkov ... 33
2.5.6. Andréi Kolmógorov ... 34
2.6. Problemas relevantes en la historia ... 35
2.6.1. La aguja de Buffon ... 35
2.6.2. El principio de Dirichlet ... 37
2.6.3. La paradoja de San Petersburgo ... 38
2.6.4. El problema de las puertas ... 40
2.6.5. Dados musicales de Mozart ... 43
3. MÉTODOS DE CONTEO ... 45
3.1. Permutaciones ... 45
3.1.1. Permutaciones ordinarias o sin repetición ... 45
3.1.2. Permutaciones con repetición ... 46
3.1.3. Permutaciones circulares ... 47
3.2. Variaciones ... 47
3.2.1. Variaciones sin repetición ... 47
3.2.2. Variaciones con repetición ... 48
3.3. Combinaciones ... 48
3.3.1. Combinaciones sin repetición ... 49
3.3.2. Combinaciones con repetición ... 49
4. CONCEPTO DE PROBABILIDAD ... 50
4.1. Definición de la probabilidad ... 50
4.2. Espacios muestrales ... 50
4.2.1. Espacios muestrales finitos ... 50
4.2.2. Espacios muestrales finitos equiprobables ... 51
4.2.3. Espacios muestrales infinitos contables ... 51

4.3. Sucesos 52

4.3.1. Tipos 52

4.3.2. Operaciones con sucesos 53

5. VARIABLE ALEATORIA 55

5.1. Definición 55

5.2. Esperanza matemática 55

5.2.1. Propiedades de la esperanza matemática 56

5.3. Varianza o desviación típica 57

5.3.1. Propiedades de la varianza 57

6. ESTUDIO DEL AZAR EN DISTINTAS SITUACIONES 58

6.1 .... El problema de los cumpleaños 58

6.2 .... Los cromos 60

6.3 .... El problema de la martingala 62

7. LA PROBABILIDAD EN LAS LOTERIAS 64

7.1 .... Lotería de Navidad 64

7.2 .... Euromillones 66

7.3 .... La Primitiva 71

7.4 .... La Quiniela 72

7.5 .... Conclusiones 74

8. CONCLUSIONES 76

9. REFERENCIAS 78

9.1. Bibliografía 78

9.2. Web grafía 78

9.3. Índice de imágenes 81

1. INTRODUCCIÓN

El trabajo está centrado especialmente en el campo de la probabilidad, una parte de las matemáticas que estudia los fenómenos aleatorios.

A lo largo de la historia, el ser humano ha estado interesado en la incerteza de algunos sucesos aleatorios. A esa incerteza de no saber que podría pasar le llamaron azar. La palabra azar etimológicamente la empezaron a usar los árabes (*az-zahr*) para denominar a una cara de un dado dibujada con una flor. Actualmente se usa la palabra azar con el significado de la palabra de origen románico "alea"

El tema de la probabilidad me ha interesado desde pequeño. Mi motivación no era buscar una estrategia ganadora para los juegos de azar, sino buscar el porqué era tan difícil de ganar. Personalmente siempre me ha costado entender por qué se podía conseguir tanto dinero en los casinos y en las loterías del estado y por qué mucha gente se ha arruinado sin éxito para alcanzar los premios soñados. Todas estas preguntas que seguramente se podrían encontrar dentro de muchas cabezas son las que me han impulsado especialmente para escribir el trabajo en el que se intentará responder a esas preguntas.

La investigación se ha llevado a cabo mezclando teoría y práctica. Teoría porque la documentación sobre los juegos ha sido muy importante para saber cómo se jugaba y práctica, por la experimentación de como la probabilidad se cumple en la mayoría de los casos.

Los objetivos que se presentan en el trabajo son, en primer lugar, el análisis de los problemas más importantes estudiados por matemáticos muy relevantes y que seguro que sonaran a más de uno; en segundo lugar, la búsqueda de las probabilidades de conocidos juegos azar y de las loterías, que tanto influyen en nuestras vidas y siempre aspiramos a que nos toque por lo menos una vez.

Durante el trabajo haremos un recorrido por la historia para ver cómo ha evolucionado la teoría de la probabilidad y los juegos de azar desde sus inicios hasta tal como los conocemos ahora. También se estudiarán diversas situaciones donde el azar puede engañar a nuestra intuición haciéndonos pensar que tenemos opciones de ganar cuando en verdad no es así y para ello se explicarán diversos métodos para poder calcular las probabilidades.

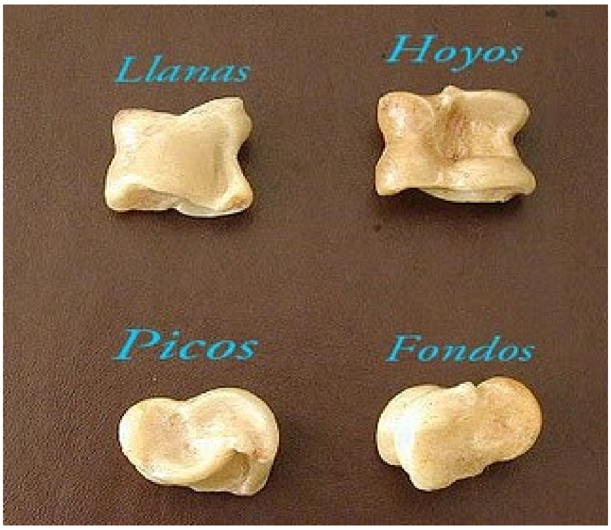
2. Historia de la probabilidad

Los historiadores están en completo desacuerdo sobre cuál fue el inicio de la teoría de la probabilidad, algunos creen que fueron Luca Pacioli, Tartaglia y Cardano, pero ellos no definieron la teoría de la probabilidad solo resolvieron problemas de juegos de azar que luego dieron lugar a ella. La idea comúnmente aceptada es que la teoría de la probabilidad fue creada en el siglo XVII por Blaise Pascal y Pierre Fermat.

2.1. Los primeros juegos de azar

Desde tiempos inmemorables el hombre ha jugado con la probabilidad para divertirse o incluso para ganar dinero. En este apartado del trabajo hablaremos de los primeros juegos de azar. ¿Eran tan perfectos como ahora o tenían sus trucos?

2.1.1. Las tabas



Fuente 1: Nombre con el cual se denominaba a cada una de las caras del hueso

Las tabas son huesos del talón de algunos animales llamados astrágalos. La taba se empezó a jugar en la época de los antiguos egipcios pero de lo que se conserva mas información es desde la civilización Griega (500 a.C.).


Fuente 2: Escultura de una niña romana jugando a las tabas.

En sus inicios en la época griega la taba se usaba como un método adivinatorio, al cual le pusieron el nombre de astragalomancia. Se usaba para prever el tiempo y también en algunos rituales de carácter religioso.
Los romanos también jugaban a las tabas, las llamaban *alea*. Los niños romanos se divertían con el juego pero los adultos, a diferencia de los griegos, la usaban para apostar.

El juego de la taba tiene muchas modalidades, de las cuales se distinguen las que son de habilidad y las que son de azar. La modalidad de habilidad consistía en lanzar una taba al aire y antes de tocar el suelo se debían colocar otras cuatro en sus distintas posiciones, tal como se ve en la imagen (fuente 1). Una de las modalidades que son de azar consiste en tirar la taba varias veces y ganaba quien sumaba la puntuación más alta. Como se puede apreciar en la imagen (fuente 1), el hueso de la taba tiene 4 caras desiguales, a las que se daba puntaciones de: 1, 3, 4, 6.

2.1.2. Los dados


Fuente 3: Juego de dados

Existen varias teorías acerca del origen de los dados pero la más antigua nos remonta hasta Egipto 2.600 años antes de Cristo. Los dados de aquella época no eran muy perfectos ya que los instrumentos que utilizaban para hacerlos eran muy rudimentarios y eso hacía que las probabilidades que salieran algunos números eran más altas que otros.

Otra teoría acerca del origen de los dados nos dice que el juego proviene de las Cruzadas del siglo XII. Tropas inglesas asediaban el castillo llamado Hazart, este nombre es el que pusieron al pasatiempo de los dados.

En cualquier caso el juego de los dados ya se había extendido por toda Europa durante el siglo XVII, y se podían encontrar jugadores en cada taberna y posada de todo el continente. Desde aquí pasó a América y allí se le dio el nombre de *craps*.

En el siglo XIX se produjo un cambio en la dinámica del juego de los dados. John H. Winn inventó el juego tal como lo conocemos actualmente y creó el tapete donde se introducirían las apuestas, el conocido "dibujo de Philadelphia".

En el siglo XX, durante la Primera Guerra Mundial se podían encontrar soldados de los dos bandos jugando a los dados. De aquí le viene la fama de que se podía jugar a los dados prácticamente en cualquier sitio.

2.2. Precursores de la teoría de la probabilidad

Uno de los primeros precursores de la probabilidad fue **Richard de Fournival** (1200-1250), filósofo y trovador francés que escribió el libro *De Vetula*. Donde postula sin demostrar empíricamente que el número de combinaciones posibles que se crean al lanzar tres dados son 216. Actualmente esto con un ordenador se puede hacer fácilmente pero en aquella época no era nada trivial, otros matemáticos fallaron al calcularlo por no tener en cuenta las distintas permutaciones de un mismo número.

2.2.1. Luca Pacioli

"Donde no hay orden hay caos"

Luca Pacioli

Fuente 4: Luca Pacioli

El segundo precursor que cabe destacar es **Luca Pacioli** (1445–1517), fue un fraile franciscano que en 1487 abordó uno de los problemas más importantes del reparto de las apuestas, es decir, la distribución de las ganancias a los jugadores cuando la partida se interrumpía antes de terminar. Para ello propuso un problema en particular:

Un juego de pelota en el cual se necesitan 60 puntos para ganar. El premio a repartir es de 22 ducados. Por algun motivo el juego se interrumpe y un jugador se queda con 50 puntos y el otro con 30. Qué partición del premio le pertenece a cada uno?

La solución de Pacioli usa lo siguientes calculos $\frac{5}{11}+\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$

$\frac{8}{11}$, equivale a 22 ducados, por lo tanto al bando que va ganando le corresponden $\frac{5}{11}$ de 22 ducados y al bando que va perdiendo le corresponden $\frac{3}{11}$ de 22 ducados.

Más tarde por parte de **Girolamo Cardano** y **Niccolo Tartaglia** se vio que la solución dada por Pacioli era errónea porque no era equitativa y estaba mal calculada.

2.2.2. Girolamo Cardano

Fuente 5: Girolamo Cardano

"A muchos perjudica la carencia de medios, como me ocurrió a mí cuando en mi pobreza me vi obligado a enseñar matemáticas. No ignoraba, en efecto, cuánto prestigio perdía yo por eso en el terreno de la medicina"

Girolamo Cardano

Girolamo Cardano (1501-1576) escribió el libro *Liber de ludo aleae (libro de los juegos de azar)* publicado póstumamente en 1663 aunque se cree que él lo escribió en 1526. En este libro Cardano define esta expresión:

$$\frac{r^n}{t^{n-r}}$$

Para medir la probabilidad de ganar un juego.

t son los casos iguales posibles

r son los casos favorables

n son las veces en que se repite un juego

Cardano, al igual que Pacioli, también se ocupó del problema del reparto de apuestas y llegó a la conclusión que Pacioli estaba equivocado.

Girolamo afirmó que Pacioli estaba equivocado porque solo contaba el número de juegos ganados por los dos participantes y no contaba el número de juegos que tenían que ganar. La solución que propuso fue esta:

$$\frac{Parte\ de\ equipo\ 1}{Parte\ de\ equipo\ 2} = \frac{1+2+...+(n-b)}{1+2+...+(n-a)}$$

n es el número total de puntos a jugar.

a y b son los puntos ganados por el equipo 1 y el equipo 2 respectivamente.

Esta expresión da la proporción correcta para el caso particular expuesto por Pacioli, no para todos los casos en general.

2.2.3. Niccolo Tartaglia

Fuente 6: Niccolo Tartaglia

Niccolo Tartaglia (1499-1557) criticó la solución dada por Pacioli poniendo el ejemplo que si un jugador había conseguido 10 puntos y el otro 0, utilizando el método de Pacioli el premio le correspondería totalmente al primer jugador descartando toda posibilidad de remontada al segundo jugador. Como eso no tenía ningún sentido, Tartaglia propuso que al jugador que vaya ganando, se le tenía que dar su apuesta más la parte proporcional que le tocaba por los puntos que había conseguido, el resto le tocaba al otro jugador. Esta es la expresión que usó

$$\left(\frac{P}{2}\right) \pm P\left[\frac{(a-b)}{n}\right]$$

P es el premio total

a son los puntos del jugador que va ganando

b puntos del jugador que va perdiendo

n puntos necesarios para ganar

± según si el jugador va ganando o va perdiendo

La idea de Tartaglia se ve claro con el ejemplo de Pacioli:

$$\left(\frac{P}{2}\right) \pm P\left[\frac{(a-b)}{n}\right] = \left(\frac{22}{2}\right) \pm 22\left[\frac{(50-30)}{60}\right] = 18{,}33 \,/\, 3{,}66$$

Por lo tanto el jugador *A* recibe 18,33 ducados y el jugador *B* recibe 3,66.

Tartaglia se basaba en la ventaja que ejercía un jugador frente al otro en el momento en que se interrumpía un juego. Tartaglia no quedo muy convencido de su solución y dejó claro que desde el punto de vista matemático la solución no era exacta porque las soluciones podían resultados con decimales periódicos, pero para repartir equitativamente las apuestas, era buena.

2.2.4. Galileo Galilei


Fuente 7: Galileo Galilei

"Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo"

Galileo Galilei

Galileo Galilei (1564-1642), fue un gran matemático y físico a la vez. De los libros que escribió, en temas de probabilidad destaca el titulado *Sopra le scoperte dei dadi (un descubrimiento concerniente a los dados).* En su libro hace un estudio sobre el número de resultados posibles que se pueden obtener al lanzar tres dados. Galileo fue el primero que mediante un simple cálculo demostró el número de combinaciones posibles que se podían conseguir con 3 dados: $6^3 = 216$. Empezó a abarcar el problema numerando los dados y calculando de cuantas maneras posibles se podían conseguir las puntuaciones entre 3 y 18. Galileo calculó los posibles resultados únicamente entre el 3 y el 10 ya que consideraba que del 11-18 se podían calcular mediante simetría, 18 igual que 3, 17 igual que 4… Porque 18 sólo se puede obtener sacando 3 seises y 3 con tres unos, y así sucesivamente. También argumentó correctamente que era preferible apostar al 10 que al 9 porque el 10 se podía obtener mediante 27 combinaciones distintas en cambio el 9 solo se podía obtener mediante 25. Aunque esto pueda parecer trivial Galileo reconoció que le costó llegar a esa conclusión.

Pero esa no fue la única y más importante aportación al mundo de la probabilidad. Galileo creó la teoría de la medida de errores, los errores de medida no se pueden evitar y los separó en dos grupos: errores sistemáticos (son debidos a los métodos de medida y a las herramientas usadas); y los errores aleatorios (los que no siguen ninguna pauta y cambian de una medida a otra). Con estas ideas que siguen en vigor actualmente contribuyó al desarrollo de la teoría de la probabilidad y puso las bases de la estadística. Llegó a una conclusión, que los errores pequeños son más frecuentes que los grandes.

2.3. Nacimiento de la teoría de la probabilidad

La idea comúnmente aceptada por la mayoría de los historiadores es que la teoría de la probabilidad se creó en la segunda mitad del siglo XVII por Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665) resolviendo problemas planteados por el Caballero de Méré.

2.3.1. Blaise Pascal, Caballero de Méré, Pierre Fermat

Fuente 8: Blaise Pascal

"El universo es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna."

Blaise Pascal

Blaise Pascal (1623-1662) fue un matemático, físico, filósofo católico y escritor

"He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de este teorema pero este margen es demasiado pequeño para contenerla".

$a^n + b^n = c^n \;\; si \;\; n \in \text{¢} > 2$ *(Teorema de Fermat)*

Pierre Fermat

Fuente 9: Pierre Fermat

Pierre Fermat (1601-1665) fue jurista y matemático francés

El Caballero de Méré, Antoine Gombaud, fue un noble escritor y filósofo que vivió durante el reinado de Luis XIV. El Caballero era un jugador empedernido de los juegos de azar y quería buscar una fórmula para hacerse rico con ellos. Para ello mantuvo correspondencia con Blaise Pascal, y este a su vez con Fermat, para que le ayudara a resolver algunos problemas sobre los juegos de azar, en concreto juegos de dados.

El primer problema que propuso el caballero estaba relacionado con el reparto de las apuesta.

Dos jugadores apuestan 32 doblones cada uno en una partida de dados que consiste en escoger un número y tirar el dado las veces necesarias para conseguir sacar el número escogido en 3 ocasiones. El primer jugador consigue que salga su número en 2 ocasiones mientras que el segundo jugador solo ha visto salir su número una vez, con las mismas tiradas. ¿Cómo se dividiría el premio de 64 doblones si el juego se tuviera que interrumpir?

Pascal sugirió que se jugara otra ronda y si el primer jugador ganaba se llevaba toda la apuesta, pero si el otro ganaba, entonces quedarían empate, en consecuencia cada uno se quedaría con su apuesta, 32 doblones. En caso de no querer jugar esta última ronda el primer jugador argumentaría "Tengo seguros 32 doblones aunque pierda y los otros 32 doblones los podría ganar o no. Como existen las mismas posibilidades de que sean para mí o que sean para ti, sugiero que tu apuesta se divida entre dos, una parte para mí y otra para ti".

Esta solución tan simple aportada por Pascal no es adecuada para usarse en casos más complejos pero supone un cambio en el razonamiento de Pacioli y Cardano, no en el caso de Tartaglia, que como hemos visto anteriormente, por una parte estaba en lo cierto pero no supo cómo resolver el problema.

Pascal envió sus argumentos a Fermat por correspondencia y Fermat le contestó con una solución más compleja exponiéndole otro problema.

Dos personajes, A y B, participan en un juego de dados. Al jugador A le faltan 2 rondas para ganar y al jugador B le faltan 3. ¿Cómo se divide la apuesta si se interrumpe el juego en ese momento?

Fermat ya no le dio importancia a los juegos ganados sino a los juegos necesarios para ganar. Antes de nada tuvo que decidir cuántas tiradas o rondas serán necesarias para decidir quién es el ganador. Fermat sentencia el juego realizando 4 tiradas más. De todas las combinaciones posibles, que se pueden dar en esas tiradas, ¿cuáles darán por ganador al primer jugador y cuáles darán por ganador al segundo? Para ello Fermat dijo que había 16 combinaciones posibles y las reflejó en esta tabla.
+ (Victorias de A)
– (Victorias de B)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	+	-
+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	-	+	-	-
+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	+	-	-	-
+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-

Fijándonos en esta tabla vemos que las primeras 11 combinaciones favorecen al jugador *A* y las restantes al *B*. En conclusión el jugador *A* tiene 11 sobre 16 posibilidades de ganar (11/16) y el jugador *B* tiene 5 sobre 16 (5/16). Por lo tanto la distribución justa de la apuesta es de 11:5.
Pascal, después de estudiar sobre el triángulo de distribución binominal, da una solución general al problema del reparto de apuestas para juegos en que participan 2 jugadores pero esa correspondencia se perdió. Así que por parte

de Pascal tenemos dos respuestas, una para casos particulares y otra general, distintas en opinión pero iguales en esencia con la solución de Fermat.

El Caballero de Méré como pretendía hacerse rico propuso el siguiente juego: arrojar un dado 4 veces seguidas y apostar para que salga al menos un 6.

Con este juego De Méré supuso que había conseguido la estrategia ganadora, tener más posibilidades de ganar que de perder, pero como no estaba seguro mandó a Pascal por correspondencia que resolviera el problema.

Pascal resolvió el problema restando de todos los casos posibles (en probabilidad es 1) los casos desfavorables en 4 tiradas y lo representó de la siguiente manera

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=0{,}518$$

Como podemos ver el resultado es superior a 0,5 eso significa que hay ventaja para el Caballero de Méré.

Para entender mejor esta ecuación explicaremos como llego Pascal a esta solución.

Teniendo en cuenta que p y q son las probabilidades de éxito y de fracaso, respectivamente, podemos deducir que $p+q=1$, y si n es el número buscado de partidas, la solución se encuentra despejando la n en la igualdad.

Así que conseguimos esta ecuación analizando todas las combinaciones posibles:

$$p+qp+q^2p+...+q^{n-1}p=\frac{1}{2}$$

El juego de las 4 tiradas le duró bien poco al Caballero, ya que, sus oponentes se dieron cuenta que jugaba con ventaja. Tuvo que inventarse un nuevo juego, que consistía en sacar un doble seis en 24 tiradas con dos dados, para seguir ganando dinero, basándose en que 4 es a 6 como 24 es a 36. Así que le planteó el problema a Pascal y éste a su vez le contestó que no tenía tiempo para mandarle la solución pero que el caballero se daría cuenta de su error.

El Caballero siguiendo los argumentos dados por Pascal consiguió percatarse de su error.

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0{,}491$$

El Caballero llegó a la conclusión que ese juego era desfavorable para su beneficio, por lo tanto tuvo que cambiar un poco las reglas del juego, de 24 a 25 tiradas, aumentando, así, sus probabilidades de ganar.

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25}=0,505$$

Con la resolución de éste y más casos propuestos por el Caballero de Méré se empezó a formalizar la teoría de la probabilidad.

Fue Pierre-Simon Laplace quien atribuyó todo el mérito de la resolución del problema del reparto a Pascal y a Fermat.

2.3.2. Christiaan Huygens

"El mundo es mi patria, la ciencia mi religión"

Christiaan Huygens

Fuente 10: Christiaan Huygens

Huygens (1629-1695) fue un científico holandés que trabajó en varios campos de física y matemáticas. En un viaje a Francia vio los problemas que había propuesto el Caballero de Méré a Pascal y se quedó impresionado, entonces decidió estudiar la probabilidad desde el inicio. El problema del reparto de las apuestas también fue abordado por Huygens llegando a la misma solución que

Pascal pero con distinto método e introduciendo un concepto nuevo en la teoría de la probabilidad, que era la esperanza matemática. Cuando volvió a Holanda escribió *De ratiociniis in ludo aleae* (Calculando en juegos de azar), un pequeño tratado donde se incluyen los problemas resueltos por los franceses y por él. Esta obra fue incorporada en el libro que escribió su maestro Frank Van Schooten.

El tratado que escribió Huygens constaba de 14 páginas en las cuales explicaba de forma detallada 14 proposiciones y 5 problemas planteados pero no resueltos. Veamos algunas proposiciones:

- **Proposición I:** si se puede obtener de igual manera dos premios entonces el *expectatio* es de

$$\frac{a+b}{2}$$

Para Huygens *expectatio* es X y puede llegar a ella mediante un juego equitativo. En el juego participa Huygens y otro oponente, los dos acuerdan mediante un pacto que quien gane se llevará todo el premio, pero le tendrá que dar una pequeña cantidad (la llamaremos a) al perdedor. Cada uno ha colocado X como apuesta, por lo tanto hay la misma probabilidad de ganar $2X-a$ (lo llamaremos b) que de ganar solo a.

Si gana Huygens se quedará con la cantidad b y su oponente a, y si pierde, él se quedará con la a y su oponente con la b. Por lo tanto está comprobado que

$\frac{a+b}{2}$ es la *expectatio*.

Huygens aplica el mismo concepto de dos jugadores a tres jugadores, cambiando la ecuación de esta forma $\frac{a+b+c}{3}$.

- **La proposición III:** Si las probabilidades de los dos oponentes son distintas entonces el valor de *expectatio* es:

$$\frac{pa+qb}{p+q}$$

Siendo p los casos probables para la victoria del jugador a y q los casos probables para la victoria del jugador b.

Desde la proposición IV hasta la IX, Huygens habla de distintos métodos para resolver el problema del reparto de las apuestas, aquí hay algunos ejemplos.

- **Proposición IV:** basándonos en el problema planteado por Pascal y Fermat, el del juego a tres rondas, donde el primer jugador había ganado ya dos mientras que el segundo solo una, llamaremos al premio total *a*. Si el primer lance lo gana el primer jugador la partida se acaba y se lleva todo el premio. Pero si lo gana el segundo quedarán empate y se tendrán que repartir el premio en partes iguales. Como el primer jugador tiene las mismas probabilidades de ganar que de perder, basándonos en la primera proposición al primer jugador le toca $\frac{3}{4}a$ y al segundo $\frac{1}{4}a$.
- **Proposición VI:** Huygens plantea cuántos serán los lances mínimos para que salga un 6 y exista ventaja para el jugador. Huygens consigue llegar a la misma solución dada por Pascal pero desde el punto de vista de la esperanza matemática.

$$e_n = \frac{6^n - 5^n}{6^n}$$

2.4. Desarrollo de la teoría de la probabilidad

2.4.1. Jakob Bernoulli


Fuente 11: Jakob Bernoulli

"La ley de grandes números es una regla que incluso la persona más estúpida conoce mediante cierto instinto natural per se y sin instrucción previa"

Jakob Bernoulli

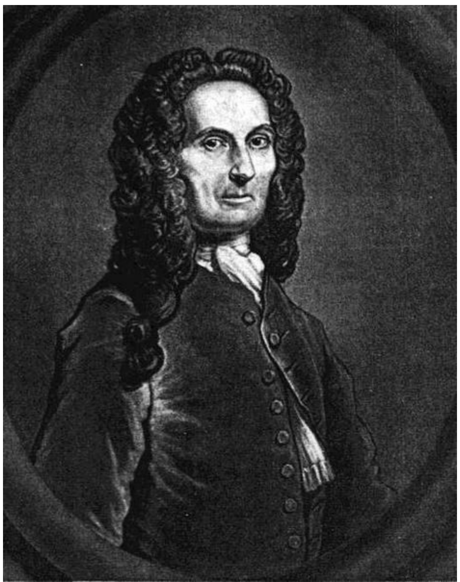
Jakob Bernoulli (1654 – 1705), nacido en Suiza fue el 5º hijo de una familia dedicada plenamente a la ciencia aportando grandes descubrimientos. Él en concreto, como matemático, escribió en su libro *Ars Conjectandi* (El arte de la conjetura) la que se conoce como primera ley de los números grandes.

En su ley de los números decía que un evento aleatorio debería ocurrir cierto número de veces en *n* rondas o tiradas de dados.

Ejemplo: Bernoulli decía que si las matemáticas no engañan, un punto en un dado debería salir por lo menos una vez en seis tiradas (6 lanzamientos del dado X 1/6 de probabilidad = 6/6 y en el caso de 12 tiradas debería salir por lo menos 2 veces, así sucesivamente.

Su formulación afirma que un evento aletorio se matiene constante sin importar el número de rondas o tiradas.

Otra cosa importante que hizo Bernoulli fue establecer que los valores matemáticos de la probabilidad se sitúen entre el 0 y el 1.



2.4.2. Abraham de Moivre

Abraham de Moivre predijo cuando se moriría a partir de las horas que dormía diariamente.

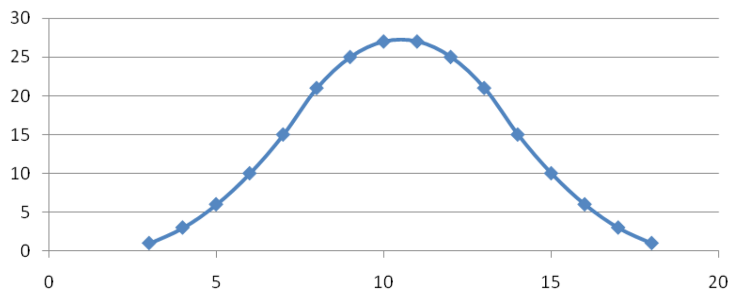
Se dio cuenta de que cada día dormía 20 minutos más y dedujo que moriría cuando durmiera 24 horas.

Fuente 12: Abraham de Moivre

Abraham de Moivre (1667-1754) fue un matemático que nació en la región francesa de Champagne. Tuvo que exiliarse en Londres en busca de protección frente una persecución religiosa que le acechaba en Francia.

En Londres, Abraham publicó el libro *The doctrine of chance* basado en los estudios sobre la teoría de la probabilidad de Pascal, Fermat y Huygens.

Posteriormente De Moivre siguió estudiando la probabilidad a partir del libro de *Ars Conjectandi*, profundizando aun más en la distribución normal y la probabilidad frecuentista. Este trabajo le permitió a Abraham sacar la conclusión de que un gran porcentaje de los resultados tienden a concentrarse en un valor medio o central de la serie, mientras que un menor porcentaje tiende a dispersarse respecto del valor medio. Con este método es como consiguió formar la actual distribución normal (fuente 13).



Fuente 13: Ejemplo grafico de la distribución normal estudiada por Abraham de Moivre

2.4.3. Thomas Bayes

Thomas Bayes (1702 – 1761) fue un clérigo presbiteriano inglés que además, se dedicaba a las matemáticas. Investigó sobre causas desconocidas, deduciéndolas de acontecimientos observados. Esta investigación fue útil para calcular el grado de acierto de un juicio.

Thomas Bayes fue el precursor de la probabilidad inversa. Explicaremos que es la probabilidad inversa con este problema:

Fuente 14: Thomas Bayes

En una urna hay *X* pelotas negras e *Y* pelotas blancas. Este problema siempre se resolvía hacia adelante, es decir, partiendo en que se conocía la cantidad exacta de pelotas blancas y negras que había en la urna. Pero Bayes enfocó de una manera distinta el problema, analizándolo hacia atrás. Teniendo en cuenta que la urna no es tranparente y no se pueden ver las pelotas que hay dentro. ¿Qué cantidad de pelotas blancas y negras quedan en la urna, sabiendo que se han extraído 3 pelotas blancas y 5 negras y que ahora solo quedan 5 pelotas en la urna?

Para resolver el problema el analista tiene que deducir a partir de unos hechos, una hipótesis para acercarle a las causas que generaron el suceso. Thomas Bayes desarrolló esta fórmula que actualmente ha tomado su nombre:

$$P(H \setminus D) = \frac{P(D \setminus H) \times P(H)}{P(D)}$$

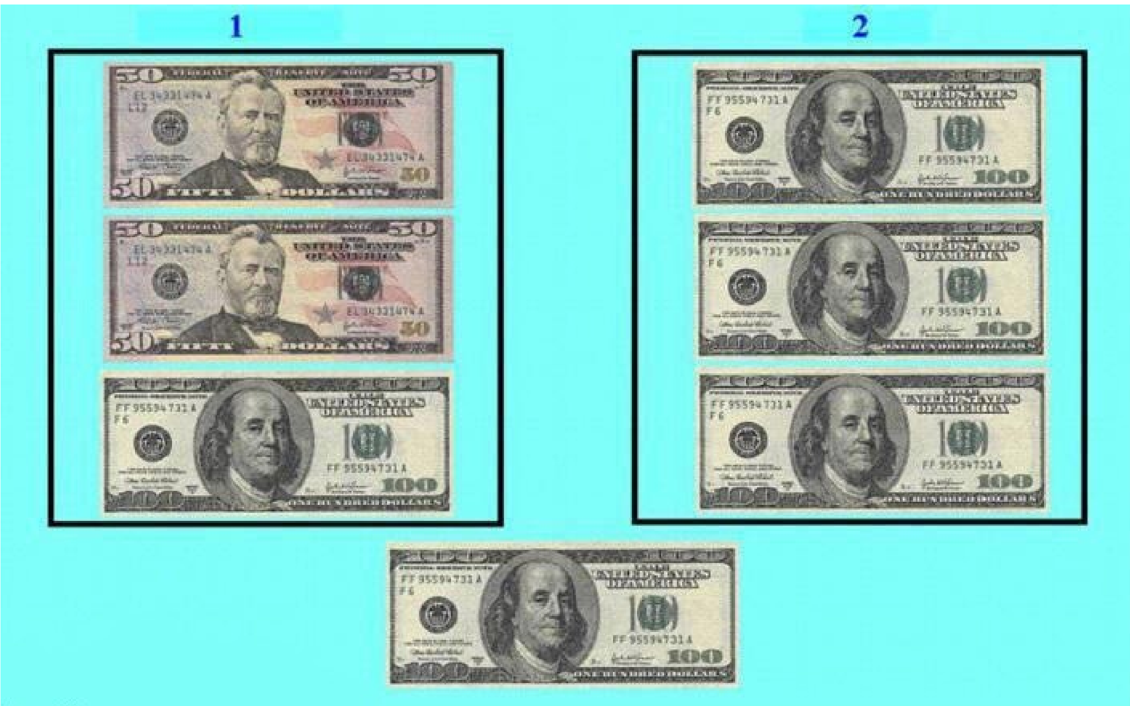
a) La expresión H representa la hipótesis y la expresión D representa el dato.
b) La expresión P (H) se denomina la probabilidad previa, es decir, la probabilidad de que la hipótesis sea cierta antes de que se observe la ocurrencia del dato analizado.
c) P(D\H) representa la denominada probabilidad condicional, es decir, la probabilidad para que sea observado el dato en la hipótesis correcta
d) La expresión P(D) es la probabilidad marginal de que el dato pueda ocurrir independientemente de que la hipótesis sea correcta o no

e) P (H\D) representa la probabilidad Posterior, es decir, la probabilidad de que la hipótesis H sea correcta dada la ocurrencia del dato a partir de la información disponible.

Pero el valor de la probabilidad marginal (P (D)) puede tener varios valores, entonces Bayes concluye que dichos valores se tendrán que multiplicar por cada posible hipótesis y luego sumarlas. Bayes creó este sumatorio:

$$\mathbf{P}(\mathbf{D}) = \mathbf{P}(\mathbf{D} \setminus \mathbf{H_1}) \times \mathbf{P}(\mathbf{H_1}) + \mathbf{P}(\mathbf{D} \setminus \mathbf{H_2}) \times \mathbf{P}(\mathbf{H_2}) + \ldots + \mathbf{P}(\mathbf{D} \setminus \mathbf{H}_n) \times \mathbf{P}(\mathbf{H}_n)$$

Veámoslo aplicado en el siguiente ejemplo:



Fuente 15: explicación gráfica del problema

En el esquema se nos presentan unos recipientes con billetes. El primer recipiente está lleno con billetes de tal forma que tiene 2/3 partes de su contenido en billetes de 50 dólares y 1/3 parte en billetes de 100. En cambio el segundo recipiente está lleno en su totalidad con billetes de 100. Pero en la mesa, fuera, entre los dos recipientes nos percatamos que hay un billete de

100. ¿Cuál es la probabilidad que el billete de 100 haya caído del primer recipiente? ¿Y del segundo?
Para resolver el problema vamos a usar el método aportado por Bayes, aunque a simple vista podamos pensar que pertenece al segundo recipiente ya que hay más cantidad de billetes de 100.

En el problema de los billetes podemos relacionar “D” con la del billete de 100 dólares situado en la mesa. Y las posibles hipótesis son:

H_1: que el billete proceda del primer recipiente

H_2: que el billete proceda del segundo recipiente

Con estos datos ya podemos abarcar el problema.

El valor P (H_1), probabilidad previa, lo calcularemos separando los billetes en grupos. En el 1.^{er} recipiente hay un 1/3 de billetes de 100 y 2/3 de billetes de 50 en cambio el 2.º recipiente está lleno de billetes de 100, por lo tanto tendremos la unidad (1). $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1=2$ Unidades. La probabilidad de que el billete proceda del primer recipiente es de $\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}=$ 0,16
El valor de P (H_2), probabilidad previa, se calcula a partir de lo calculado anteriormente, es decir del total de dos unidades sabemos que pertenecen al segundo recipiente una unidad, por lo tanto la probabilidad de que el billete venga del segundo recipiente es de $1:2=0,5$
El valor P (D/H_1), probabilidad condicional, es decir la probabilidad de que el billete proceda del primer recipiente suponiendo de que la hipótesis es cierta. Como solo hay 1/3 de billetes de 100 en el primer recipiente, podemos afirmar que hay 1/3 de probabilidades = 0,33
El valor P (D/H_2), probabilidad condicional, en el caso del segundo recipiente, es 1 ya que el recipiente está lleno en su totalidad de billetes de 100

El valor P (D), probabilidad marginal, es decir la probabilidad de que el dato (el billete) puede proceder de cualquiera de los dos recipientes se calcularía de la siguiente manera:

$$P(D) = P(D \setminus H_1) \times P(H_1) + P(D \setminus H_2) \times P(H_2) =$$
$$= (0{,}33 \times 0{,}16) + (1 \times 0{,}5) = 0{,}0528 + 0{,}5 = 0{,}5528$$

Con todos estos cálculos ya podemos usar el teorema de Bayes separando las dos hipótesis.

$$P(H_1 \setminus D) = \frac{P(D \setminus H_1) \times P(H_{1)}}{P(D)} = \frac{0{,}33 \times 0{,}16}{0{,}5528} = 0{,}0955$$

$$P(H_2 \setminus D) = \frac{P(D \setminus H_2) \times P(H_2)}{P(D)} = \frac{1 \times 0{,}5}{0{,}5528} = \frac{0{,}5}{0{,}5528} = 0{,}904$$

Mediante la probabilidad inversa podemos tener la certeza de que el billete procede del segundo recipiente con un 90,4% frente a un 9,6% de que proceda del primer recipiente. Pero estos resultados pueden cambiar si se obtiene más información del problema, en el caso de encontrarnos otro billete fuera.

2.4.4. Pierre-Simon Laplace

“En el fondo la teoría de probabilidades es sólo sentido común expresado con números”

Pierre-Simon Laplace

Fuente 16: Pierre-Simon Laplace

Laplace (1749-1827) fue un matemático y astrónomo francés nacido en Normandía que dedicó parte de su vida a estudiar la probabilidad. Se centró básicamente en los estudios que empezó a realizar Abraham de Moivre y Thomas Bayes.

Laplace sacó una regla de probabilidad apta para usarla en la mayoría de juegos de azar y eventos que no tenemos la total certeza de que pasen. Es la siguiente:

$$P(X) = \frac{\textit{número} \text{ de casos favorables}}{\textit{número} \text{ de casos posibles}}$$

Basándose y poniendo como ejemplo la salida del sol cada mañana, él dijo que la probabilidad era de (n+1)/(n+2), donde *n* es el número de días que el sol ha salido en el pasado.

En 1812, Laplace escribió un libro llamado *Teoría analítica de las probabilidades* donde resumía los trabajos que, sobre este tema, había efectuado hasta entonces. En este tratado desarrolla el cálculo que permite asignar un grado de credibilidad racional a los sucesos aleatorios.

2.5. La probabilidad moderna

2.5.1. Francis Galton

Fuente 17: Francis Galton

"La estadística es la última herramienta con la que puede abrirse una brecha a través de la espesura de dificultades que obstruyen el sendero de quienes buscan la ciencia del hombre."

Francis Galton

Sir Francis Galton (1822-1909) fue un polímata, es decir, era conocedor de muchas cosas en general sin centrarse en ninguna. A lo largo de su vida fue antropólogo, psicólogo, geógrafo, inventor y estadístico entre otras muchas cosas. Galton utilizó la ley de la probabilidad normal en la versión bivariada para estudiar el comportamiento de los errores de dos características que varían juntas. Esto ya fue estudiado con anterioridad pero Galton conocía el coeficiente de correlación que cuantifica el grado de asociación entre las dos características. Con ello pudo dar origen a la ley normal multivariada, que se ocupa del estudio de observaciones con múltiples variables.

Pero Francis Galton no se quedó con eso, también diseñó una máquina que seguro que la conocemos por algunos juegos de azar como "Quincunce" o como popularmente se dice "máquina de Galton" (fuente 18).

Su funcionamiento es muy sencillo, las bolas se colocan en la parte superior del aparato y a medida que van cayendo, van chocando contra los clavos. Cada vez que una bola impacta contra un clavo tiene la probabilidad del 50% de que se vaya hacia la derecha o hacia la izquierda.

Si nos fijamos bien en la imagen nos daremos cuenta que la quincunce es como el triángulo de Pascal cambiando números por clavos. Cada número nos dice cuántos caminos puede recorrer la bola.

Sabiendo eso podemos decir que la fórmula del triángulo de Pascal se puede usar, un poco modificada para saber que probabilidad hay de que una bola caiga en un determinado contenedor.

A partir de esta fórmula $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ y definiendo la constante de *p*

Fuente 18: quincunce

(probabilidad) que en este caso será 0,5 ya que hay las misma probabilidad de que al chocar la bola contra un clavo vaya hacia la derecha o hacia la izquierda, tendremos esta función (ley binominal):

$$f(r \setminus n \setminus p)=\binom{n}{r}p^{r}(1-p)^{n-r}$$

n = Número de filas.

r = Posición del contenedor que queremos calcular su probabilidad.

p = constante de probabilidad (0,5).

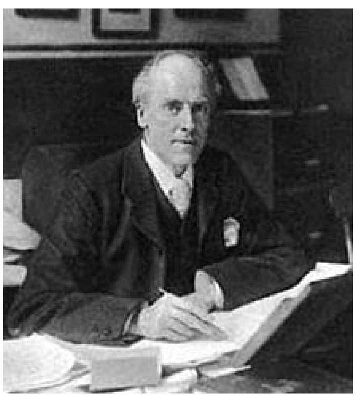
Ejemplo:

¿Qué probabilidades hay de que la bola caiga en el quinto contenedor empezando por la derecha teniendo en cuenta que nuestro quincunce tiene 15 filas?

$$f(5 \setminus 15 \setminus 0{,}5)=\binom{15}{5}0{,}5^{5}(1-0{,}5)^{15-5}=0{,}092$$

Es decir tenemos un 9,2 % de probabilidad de que la bola caiga en el contenedor 5.

2.5.2. Karl Pearson



“Todos los grandes científicos, en cierto sentido, han sido grandes artistas, el hombre sin imaginación puede recoger hechos, pero no puede hacer grandes descubrimientos.”

Karl Pearson

Fuente 19: Karl Pearson

Karl Pearson (1857-1936) fue un matemático inglés con formación en la literatura medieval alemana, derecho romano, física, biología y teoría política del socialismo. En 1890 destacó de entre todas sus cualidades la estadística y la teoría de la probabilidad al resolver diferentes problemas de la ingeniería industrial, tales como determinar la resistencia, la fuerza o la durabilidad de aleaciones, resortes, etc. En 1892 escribió el libro *Gramática de la ciencia,* donde salió a relucir su convicción de que la estadística analítica está en los fundamentos de todo el conocimiento.

2.5.3. Ronald A. Fisher

Fuente 20: Ronald A. Fisher

"Las mejores causas tienden a atraer a su apoyo los peores argumentos, lo que parece ser igualmente cierto en lo intelectual y en el sentido moral"

Ronald A. Fisher

Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) fue científico, matemático, estadístico, biólogo evolutivo y genetista inglés. En 1919 ingresó en la estación experimental de Rothamsted. Allí se dedicó al estudio de técnicas que son consideradas claves para el diseño de experimentos, sus resultados fueron incluidos en su libro *The design of experiments* (1935). Las técnicas más importantes que desarrolló fueron: la aleatorización, que constituye una protección contra la introducción de factores impredecibles, en el experimento; el diseño factorial, para el estudio del efecto de varios factores; y el análisis de la varianza, técnica de análisis de los resultados de la experimentación que permite separar las fuentes de variación, y así determinar el grado de influencia de cada factor.

2.5.4. Pafnuti Lvóvich Chebyshev

"Aislar matemáticas de las demandas prácticas de las ciencias es invitar la esterilidad de una vaca cerrada lejos de los toros. "

Pafnuti Lvóvich Chebyshev

Fuente 21: Pafnuti Lvóvich Chebishev

Chebyshev fue un matemático ruso que nació en 1821 y murió en 1894. A lo largo de su vida Chebyshev editó algunos trabajos de Leonard Euler que le hicieron interesarse en el mundo de las matemáticas. Después de ser el mejor profesor de la universidad dónde trabajaba, dedicó toda su vida a la investigación, el tema por el cual fue más conocido fue el de la probabilidad y la estadística. Diseñó la desigualdad de Chebyshev, el cual dice que la probabilidad de que una variable aleatoria esté separada de su media en más de *n* veces la desviación típica, y que esta, a su vez, es menor o igual que $\frac{1}{n^2}$. Teniendo en cuenta que E(x) es la media (o la esperanza matemática) y σ es la desviación típica, podemos establecer la relación entre los dos valores con esta fórmula:

$$P(|X - E(X)| \geq n\sigma) \leq \frac{1}{n^2}$$

Durante su época de universidad dejó un legado de excelentes estudiantes que también dedicaron su vida a la investigación, entre ellos están Aleksandr Liapunov y Andréi Márkov.

2.5.5. Andréi Márkov

Andréi Márkov fue un matemático ruso que nació en 1856 y falleció en 1922. Fue conocido básicamente por sus aportes a la teoría de la probabilidad. Revisó los trabajos de su maestro Chebyshev e incluso se puso a corregir algunos errores que había cometido. Pero no es conocido solamente por eso sino también por las cadenas de Márkov, secuencias de valores de una variable aleatoria en las que el valor de la variable en el futuro depende del valor de la variable en el presente. Este tipo de cadenas son muy utilizadas en la actualidad en áreas como la economía, juegos de azar, ingeniería.

Fuente 22: Andréi Márkov

2.5.6. Andréi Kolmógorov

“El cerebro humano es incapaz de crear algo que es realmente complejo.”

Andréi Kolmógorov

Fuente 23: Andréi Kolmógorov

Andréi Kolmógorov fue un matemático ruso que a lo largo de su vida (1903-1987) hizo grandes avances en la teoría de la probabilidad. Su gran aporte fue la axiomatización de la probabilidad, es decir, una serie de requisitos mínimos que deben verificarse para que una función definida sobre un conjunto de sucesos determine correctamente sus probabilidades.

La definición axiomática de la probabilidad es una equivalencia entre los conceptos de la teoría de la medida y los de la teoría de la probabilidad.

Ω es un conjunto de medida 1, cuyos elementos son sucesos elementales.

A es una σ–álgebra de Ω, es decir un subconjunto de *Ω*.

La función *P* asigna valores reales entre 0 y 1 a un suceso.

La unión de los tres elementos definidos se convierte en un espacio de probabilidades.

1. A un suceso aleatorio *A* hay asociado un número no–negativo P(*A*) que se llama su probabilidad.
2. P(*Ω*)=1
3. Si A_1, $A_{2...}$ son sucesos mutuamente excluyentes (incompatibles dos a dos, disjuntos o de intersección vacía dos a dos), entonces:
   $P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = \sum P(Ai)$

A partir de $\Omega = \varnothing \cup \Omega$ Kolmógorov dedujo que:

1. $P(\varnothing) = 0$ (el símbolo del conjunto vacio simboliza que es un suceso imposible)
2. $P(A) \leq 1$
3. $\forall B, P(B^c) = 1 - P(B)$
4. $\forall B, 0 \leq P(B) \leq 1$
5. $B \subseteq C \Rightarrow P(B) \leq P(C)$
6. $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$
7. $P(B_1 \cup ... \cup B_n) \leq \sum_{j=1}^{n} P(B_j)$

2.6. Problemas relevantes en la historia

2.6.1. La aguja de Buffon

“Los que escriben como hablan, por bien que hablen, escriben muy mal”.

Georges Louis Leclerc

Fuente 24: Georges Louis Leclerc

Georges Louis Leclerc (1707-1788), más conocido como Conde de Buffon, fue un polímata francés, nacido en la localidad de Montbard, que a parte de las matemáticas se interesó, también, por la botánica, la biología, cosmología y escritura entre otras muchas cosas. Centrándonos en sus aportes matemáticos, escribió una obra llamada *Ensayo de aritmética moral* donde el conde hace una introducción a un nuevo tipo de probabilidad basándose en la geometría.

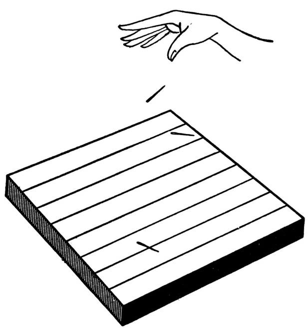
Para demostrar la relación que existía entre la teoría de la probabilidad y la geometría propuso otro método para descubrir el número π mediante un experimento peculiar, convirtiéndose en el primer problema de probabilidad donde aparecía la geometría.

El experimento consistía en que en un papel trazado con líneas paralelas equidistantes, con distancia *d*, se calculara la probabilidad de que si se lanzaba una aguja con una longitud igual a la mitad de la separación de las líneas, cruzara alguna de ellas.

Lo que demostró el Conde de Buffon era que la probabilidad de que una aguja cruzara una línea era de $\frac{2\frac{d}{2}}{d\pi}=\frac{1}{\pi}$. Si relacionamos esta fórmula con la regla de

Laplace obtendremos la división del número de veces que la aguja cruza una línea (*X*) y el número de intentos (*Y*), que sería otro método para resolver la probabilidad, y si aíslanos el número π nos encontramos con una aproximación de este.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{x}{y} \quad \Longrightarrow \quad \pi \approx \frac{y}{x}$$



Fuente 25: Experimento de la aguja de Buffon

Cuantas más veces se realice el experimento se obtendrá una aproximación más exacta del numero π. Como curiosidad el propio Buffon realizó el experimento tantas veces que consiguió aproximarse hasta con 3 decimales del número.

2.6.2. El principio de Dirichlet

Fuente 26: Peter Dirichlet Fuente 27: Palomar

Este principio fue postulado por un matemático alemán llamado Peter Dirichlet (1805-1859). Dirichlet nació en Düren pero fue educado en Francia donde pudo relacionarse con matemáticos relevantes como Fourier. Después de realizar un doctorado trabajó como profesor de universidad en Berlín, allí es donde realizó distintos aportes matemáticos que se centraron en la teoría de números. Uno de sus aportes fue en el desarrollo de las series de Fourier.

Dirichlet dijo que si un palomar tenía m huecos y había $m+1$ palomas significaba que en un hueco había 2 palomas. Esta sería una explicación muy simple del principio del palomar, pero como en matemáticas nada es tan simple como parece ahora demostraremos el principio del palomar, también llamado principio de los casilleros o de Dirichlet.

Suponiendo que tenemos n objetos y m casilleros con $n > km$, siendo k el numero de objetos que caben en cada casillero. Probemos que el principio es falso, es decir que no hay casilleros con $k + 1$ objetos. Entonces tenemos que el sumatorio de los objetos, $N_1 + N_2 + \ldots N_m$, serán los objetos que caben en el casillero. Pero como sabemos que en cada casillero caben k objetos o menos obtenemos $N_1 \leq K$, $N_2 \leq K$, $N_m \leq km$, es decir el número total de objetos es menor o igual que km $(n \leq km)$. Pero esto es falso ya que antes hemos definido el problema teniendo en cuenta que $n > km$. Por lo tanto el principio de Dirichlet es totalmente válido y cierto.

Ejemplos

- Si una persona no puede tener más de 200.000 cabellos, ¿es posible que en una ciudad de 250.000 habitantes haya 2 con el mismo número de pelos en la cabeza?

Sí, porque si las palomas son los 250.000 y los nidos son las cantidades de cabellos, habrá palomas que compartan nido. Con otras palabras habrá 50.000 personas que tengan el mismo número de cabellos que otras.

- Si la semana pasada un mensajero hizo 29 envíos urgentes, ¿es posible que hiciera los envíos en días distintos?

No, es imposible que 29 palomas duerman en huecos distintos si solo hay 7.

2.6.3. La paradoja de San Petersburgo

Esta paradoja fue planteada en 1708 en las correspondencias habidas entre Pierre Raymond de Montmort y los hermanos Bernoulli, Daniel y Nicolás. El problema que se planteó fue un juego entre dos personas, *A y B*.

El juego consiste en lanzar una moneda al aire y conseguir el máximo número de caras posible hasta que sale cruz y se deja de jugar. Cada vez que sale una nueva cara se duplica el premio, hasta que salga cruz y entonces el jugador *A* se lleva toda la ganancia acumulada. Es decir, si la primera tirada es cruz, no se ganan nada; si la primera es cara y la siguiente cruz, se ganan 2 euros; si saliesen 2 caras y una cruz, se ganan cuatro, y así sucesivamente. Por ejemplo, si hubiese alguien tan afortunado como para sacar 10 caras seguidas antes de obtener una cruz, ganaría 2^{10} euros, o sea, 1024 euros

En otras palabras:

- La probabilidad de que el jugador *A* cobre 2 euros es de $\frac{1}{4}$
- La probabilidad de que el jugador *A* cobre 2^2 euros es de $\frac{1}{2^3}$
- La probabilidad de que el jugador *A* cobre 2^n euros es de $\frac{1}{2^{n+1}}$

El problema es ¿cuánto tiene que pagar el jugador A para que el juego sea equitativo?

Basándonos en el valor esperado nos daremos cuenta de que la suma es infinita:

$$E(juego)=\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{2^3}\times 2^2+...+\frac{1}{2^{n+1}}\times 2^n=0,5+0,5+...+0,5=\infty$$

Por lo tanto, en teoría, el jugador *A* debería pagar al jugador *B* una suma infinita de dinero. Pero todos sabemos que no podemos pagar tanto y que el número de tiradas no puede ser infinito por varias limitaciones.
Daniel y Nicolás llegaron a una conclusión para resolver el problema, que el valor del juego, no es el valor esperado en términos monetarios, sino el valor esperado medido en “útiles”.
Hay que tener en cuenta que el valor del dinero no es el mismo para los matemáticos que para los demás, ya lo decía D. Bernoulli:

“Los matemáticos, en su teoría, valoran el dinero en proporción a la cantidad del mismo; la gente con sentido común, en la práctica, lo valora en proporción a la utilidad que puede obtener de él.”

Dicho en otras palabras, el valor de 100€ no es el mismo para una persona que tiene 0€ que para una persona millonaria. El pobre le dará más utilidad al dinero que el rico, que le parecerá una cantidad insignificante.

Para resolver el problema hay que medir el valor esperado del juego en utilidad esperada que llamaremos U. Si cambiamos el valor esperado por la utilidad, nos queda de la siguiente manera:

$$U=\frac{1}{4}\times 2u+\frac{1}{2^3}\times 2^2u+...+\frac{1}{2^{n+1}}\times 2^nu=\sum\frac{2^nu}{2^{n+1}}$$

Donde *U(x)* representa la utilidad de percibir *x* euros.

La elección de una función de utilidad es totalmente subjetiva por lo que hemos dicho del valor del dinero, que no es igual para todo el mundo. Pero aún así Gabriel Cramer y Bernoulli probaron con algunas funciones para acercarse lo más posible a un valor medio, ni muy conservador ni muy arriesgado. Además debía tener estas características: creciente, cóncava y nula en el origen (la utilidad que produce de tener cero euros también es cero).

oncretamente, Cramer probó con la función $\sqrt{x}$. Desarrollando la expresión,

veríamos que $U = \sum\left[\frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}}\right] = \sum\left[\frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{n+1}}\right] = \sum\left[2^{-\left(\frac{n}{2}\right)-1}\right]$. Si realizamos la suma de infinitos términos (que no tiene mayor problema, porque es geométrica y convergente), resulta que la utilidad esperada del juego es 1,207 medida en útiles.

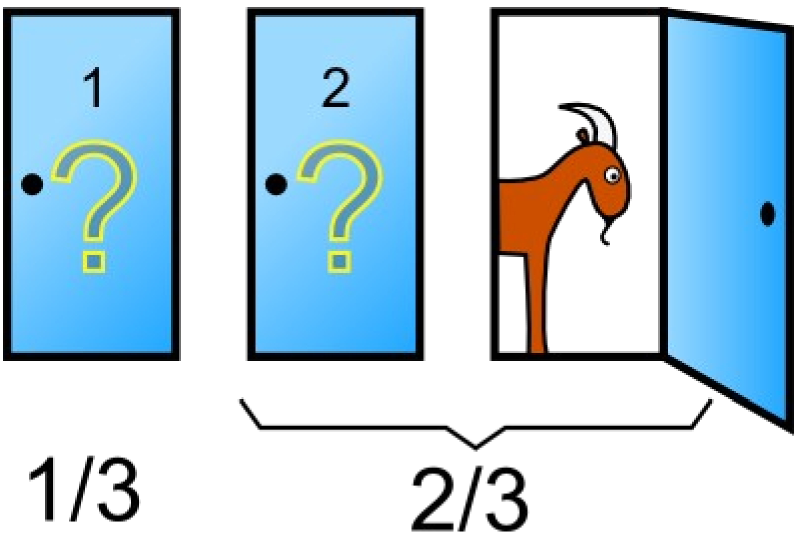
Pero como lo que nos interesa es cuanto tiene que pagar nuestro jugador

$\sqrt{x} = 1{,}207 \rightarrow x = 1{,}457€$

Esta cifra no es ni mucho menos disparatada porque tenemos un 50% de probabilidades de perder el dinero invertido.

Este caso nos enseña claramente como la intuición que teníamos con la esperanza matemática era errónea porque nos daba un resultado disparatado e imposible.

2.6.4. El problema de las puertas



Fuente 28: El problema de las puertas

Este curioso problema, también conocido como el problema de Monty Hall, está inspirado en el concurso estadounidense emitido por televisión desde

1963 al 1990, llamado *Let's make a deal (hagamos un trato) y* le pusieron el nombre de Monty Hall en honor a su presentador.

La primera persona que dio respuesta al problema fue Marilyn vos Savant.


Fuente 29: Marilyn Vos Savant

Nacida en 1946, es una columnista, escritora, conferencista y dramaturga estadounidense que pasó a ser muy conocida al ser la persona con más cociente intelectual del mundo con una puntuación de 228. Desde 1986 escribe una columna dominical llamada *Ask Marilyn (Pregunta a Marilyn)* en la revista Parade donde se dedica a responder diversas preguntas de sus lectores. Fue en esta columna cuando en 1990 Marilyn recibe una carta de *Craig F. Withaker* donde le propuso el problema de las puertas para que ella lo resolviera.

Supongamos que nos encontramos en un concurso parecido a "Let's make a deal" y nos ofrecen tres puertas, en dos de ellas hay cabras y en la otra un precioso coche. El presentador, que ya sabe lo que hay detrás de cada puerta, nos dice que escojamos una de ellas y nos decidimos por la tercera. Para dar más emoción al asunto el presentador abre la segunda y vemos que detrás hay una cabra. Para finalizar el presentador nos ofrece la posibilidad de cambiar la tercera puerta por la primera. ¿Qué es mejor, quedarnos con la tercera, aceptar la propuesta del presentador o da igual lo que escojamos ya que hay las mismas probabilidades de que el premio esté en una o en otra?

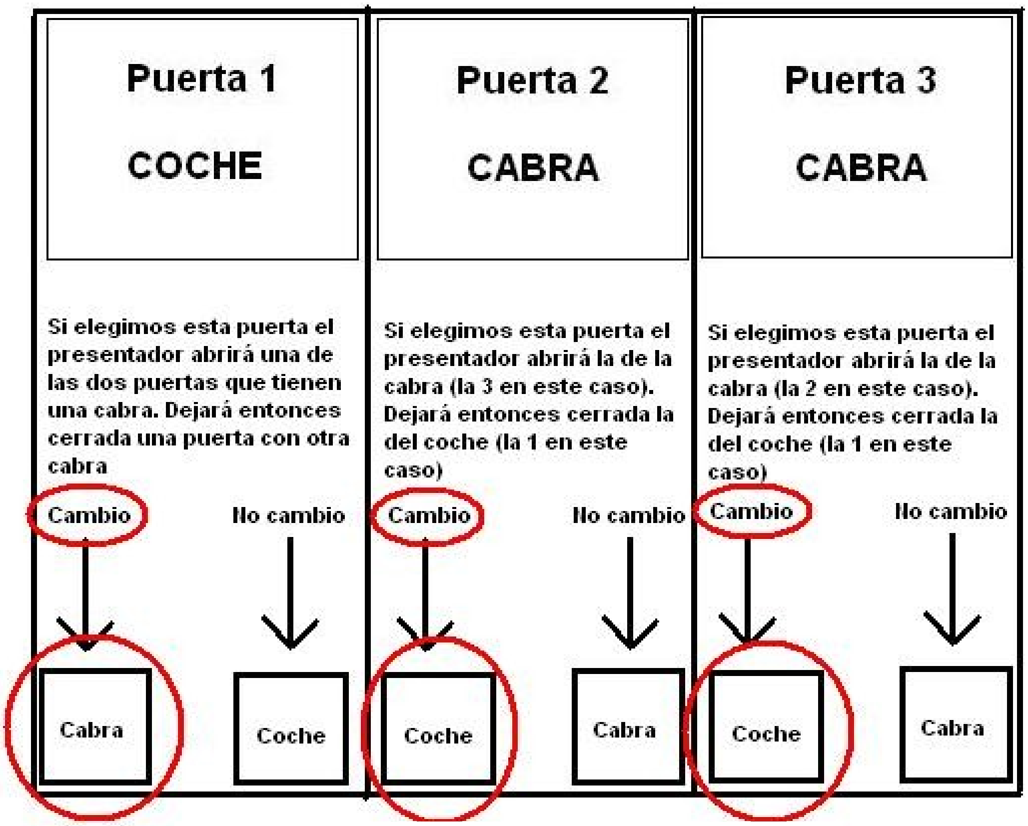
Muchos de nosotros pensaríamos que la tercera opción es la correcta, que da igual cual escojamos ya que hay 50% de probabilidades de que esté en una o en otra, pero esto no es cierto y ahora veremos por qué.

Si escogemos la opción de no cambiar de puerta la situación se nos presenta de la siguiente manera:

El presentador nos hace escoger puerta dándonos cuenta de que tenemos $\frac{1}{3}$ de probabilidades (33%) de escoger el coche y $\frac{2}{3}$ de probabilidades (66%) de

escoger las cabras. Escogemos la tercera y el presentador nos abre la segunda y vemos que hay una de las dos cabras. Como hemos escogido no cambiar nos quedamos con los mismos porcentajes que al principio un 33% de conseguir el coche y un 66% la cabra. Esto no es nada bueno.
Veamos qué ocurre si aceptamos la propuesta del presentador y decidimos cambiar de puerta:
El presentador nos dice que escojamos puerta y como hemos dicho antes hay un 66% frente a un 33% de escoger las cabras, escogemos la tercera e igual que antes el presentador abre la segunda y hay una cabra. Es decir ya solo hay una cabra y un coche. Si cambiamos a la primera las probabilidades cambian completamente y ahora tenemos un 66% de conseguir un coche frente al 33% de las cabras.

El porqué, es muy sencillo, el presentador siempre abrirá la puerta que no hayamos escogido donde habrá una cabra. Si al principio la puerta que hemos escogido tiene una cabra al cambiar de puerta nos llevaríamos el coche, no obstante, si la primera puerta que escogemos contiene el coche al cambiar de puerta nos llevaríamos la cabra. Pero como hemos dicho antes hay un 66% de escoger una cabra al principio, por lo tanto hay un 66% de llevarse el coche.



Fuente 30: Explicación gráfica del problema

2.6.5. Dados musicales de Mozart

"Nadie puede medir sus propios días, hay que resignarse. Sucederá como desee la providencia"

Wolfgang Amadeus Mozart

Fuente 31: Wolfgang Amadeus Mozart

Wolfgang Amadeus Mozart nació en Salzburgo en 1756 y falleció en Viena en 1791. Mozart fue uno de los más grandes y conocidos compositores y pianistas del mundo pero su ingenio llegó más lejos que el de cualquier otro músico. Él diseñó un generador de valses mediante un proceso aleatorio.

Mozart compuso 176 compases musicales numerados del 1 al 176 y los colocó aleatoriamente, en dos tablas de 11 filas por 8 columnas de la siguiente forma:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Fuente 32: Tablas numeradas con los compases

Como se puede ver en las imágenes, Mozart diseñó dos tablas que son las dos partes del minueto. Los números del 2 al 12 que se pueden ver en la columna de la izquierda son las sumas posibles obtenidas al lanzar dos dados y los números romanos, corresponden a los 8 compases de cada parte del minueto. Si no tenemos en cuenta de que algunos compases son casi iguales, las combinaciones que se pueden obtener son del orden de 11^{16}. El número de combinaciones es tan grande que si se tocara sin parar día y noche a la velocidad de 30 segundos cada interpretación estaríamos 728 millones de años para escuchar todos los posibles resultados.

Pero la probabilidad de que salgan las distintas sumas de los dos dados no es la misma. Saldrán más veces las composiciones con el número 7, como se ve en el cuadro de cálculo siguiente:

P (2) = $\frac{1}{36}$ => (1+1)	P (8) = $\frac{5}{36}$ => (2+6)(6+2)(3+5)(5+3)(4+4)
P (3) = $\frac{2}{36}$ => (1+2)(2+1)	P (9) = $\frac{4}{36}$ => (3+6)(6+3)(4+5)(5+4)
P (4) = $\frac{3}{36}$ => (1+3)(3+1)(2+2)	P (10) = $\frac{3}{36}$ => (4+6)(6+4)(5+5)
P (5) = $\frac{4}{36}$ => (1+4)(4+1)(2+3)(3+2)	P (11) = $\frac{2}{36}$ => (5+6)(6+5)
P (6) = $\frac{5}{36}$ => (1+5)(5+1)(2+4)(4+2)(3+3)	P (12) = $\frac{1}{36}$ => (6+6)
P (7) = $\frac{6}{36}$ => (1+6)(6+1)(2+5)(5+2)(3+4)(4+3)	

3. MÉTODOS DE CONTEO

3.1. Permutaciones

Se podría definir las permutaciones como el conjunto de formas de ordenar un conjunto finito de elementos siguiendo estas características:

1) **Sí** entran todos los elementos.

2) **Sí** importa el orden.

3) **Si/No** se repiten los elementos (dependiendo si son con repetición o sin repetición)

Ejemplo: $P_a = a! = a \times (a-1) \times (a-2) ... \times 3 \times 2 \times 1$

3.1.1. Permutaciones ordinarias o sin repetición

En el ejemplo anterior hemos denominado P_a al conjunto de los distintos grupos que se pueden formar. Los grupos solo se diferencian entre sí por el orden de los elementos, por nada más. La permutación de un grupo de n elementos se expresa de la siguiente manera: $P_n = n!$

Para calcular las permutaciones se usa el término de factorial. El factorial de un numero (*n*) se puede calcular con la multiplicación de *n* por *(n-1)*!.

Aquí algunos ejemplos:

1! = 1 = 1×1

2! = 2 = 2×1

3! = 6 = $3 \times 2 \times 1$

4! = 24 = $4 \times 3 \times 2 \times 1$

5! = 120 = $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

6! = 720 = $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Ejemplo: ¿De cuántas maneras se pueden colocar 5 libros en una estantería?

$5! = 120$

Se pueden colocar los libros de 120 maneras distintas.

3.1.2. Permutaciones con repetición

Las permutaciones con repetición son distribuciones de *n* elementos de los cuales, hay grupos de elementos iguales, en un orden concreto.

$$PR_n^{a,b,c...} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!...}$$

El método para calcular las permutaciones con repetición es el siguiente:

1) Calcular la permutación de n elementos $P_n = n!$
2) Agrupar los factoriales del número de elementos iguales en cada grupo, $a! \cdot b! \cdot c!...$
3) Calcular las permutaciones con repetición dividiendo la permutación de todos los elementos por los grupos de elementos iguales.
   La ecuación final queda así:

$$PR_n^{a,b,c...} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!...}$$

Ejemplo:

Con las cifras 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6. ¿Cuántos números de nueve cifras se pueden formar?

$a = 2$ $b = 3$ $c = 3$

$$\mathrm{PR}_9^{2,3,3} = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = 5040$$

Se pueden formar 5040 números de 9 cifras.

3.1.3. Permutaciones circulares

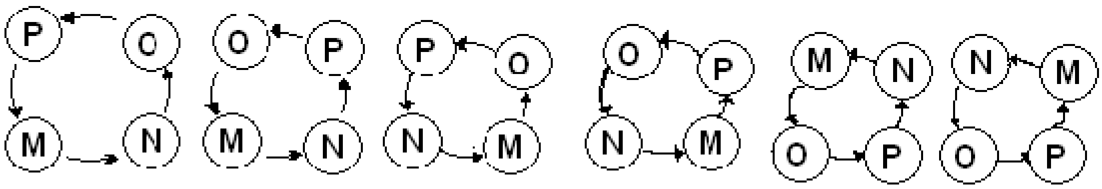
Estas permutaciones son utilizadas en el caso de que los elementos estén colocados de forma circular. Las permutaciones circulares se definen de la siguiente manera:

$PC_n = (n-1)!$

Ejemplo: ¡Cuantas permutaciones se pueden formar con las letras *P, M, O, N* colocadas de manera circular?

$Pc_4 = (4-1)! = 3! = 6$

Esta sería la representación gráfica



Fuente 33: Representación grafica de la permutación circular

3.2. Variaciones

Una variación es una modificación de los elementos que forman un grupo o del orden en que están puestos.

1) **No** entran todos los elementos.

2) **Sí** importa el orden.

3) **No/Sí** se repiten los elementos según sean ordinarias o con repetición.

3.2.1. Variaciones sin repetición

Se llama variaciones sin repetición, a los distintos grupos que se forman con los *n* elementos, de tal forma que en cada grupo entren *k* elementos distintos, diferenciados entre sí por el orden de colocación o bien por alguno de sus elementos.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo: Cuantas variaciones de 6 elementos se pueden hacer en grupos de tres.

$$V_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

3.2.2. Variaciones con repetición

Se llaman variaciones con repetición a los distintos grupos formados con los *n* elementos, de tal manera que en cada grupo entren *k* elementes iguales o distintos y que cada grupo se diferencie de los demás por el orden o bien por algún elemento.

Se representa con esta expresión:

$$VR_n^k = n^k$$

Ejemplo: ¿Cuántas quinielas de una columna se tienen que llenar para asegurarse el pleno al 15?

$$VR_3^{15} = 3^{15} = 14.348.907$$

3.3. Combinaciones

Las combinaciones son un número de elementos divididos en agrupaciones que siguen estas características:

1) **No** entran todos los elementos.

2) **No** importa el orden.

3) **No/Sí** se repiten los elementos (dependiendo si son sin repetición o con repetición respectivamente).

3.3.1. Combinaciones sin repetición

Se llaman combinaciones sin repetición a los distintos grupos de elementos que se diferencien entre sí por al menos un elemento sin importar el orden.

Se denota de la siguiente manera: $C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

Ejemplo: En un *catering* se quieren repartir los 20 canapés de 4 en 4. ¿Cuántas combinaciones de canapés podremos formar?

$$C_{20}^4 = \frac{20!}{4! \times (20-4)!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times \cancel{16!}}{4! \times \cancel{16!}} = 4.845$$

3.3.2. Combinaciones con repetición

Se llaman combinaciones con repetición a los distintos grupos de *n* elementos iguales o distintos tomados de *k* en *k* de tal forma que cada grupo se diferencie entre sí por al menos un elemento. Se representan de la siguiente manera:

$$CR_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Ejemplo: En un restaurante nos dan tres bolas de helados a escoger entre: vainilla, plátano, fresa, chocolate y melocotón. ¿Cuántas combinaciones podremos hacer?

$k = 3 \quad n = 5$

$$CR_5^3 = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = 35$$

Nos podremos comer 35 combinaciones distintas de helados.

4. CONCEPTO DE PROBABILIDAD

4.1. Definición de probabilidad

El cálculo de la probabilidad a lo largo de la historia hasta la actualidad ha sido usado para medir el grado de certidumbre de algunos sucesos o eventos. La probabilidad se mide en un intervalo de valores entre 0 y 1 de tal forma que si un suceso tiende a ocurrir muchas veces el valor se aproximara a 1; por otro lado si el suceso no ocurre muchas veces o más bien ninguna el valor se aproximará a 0.

Por lo tanto la probabilidad se podría definir como la forma de entendimiento que permite cuantificar la aleatoriedad de un fenómeno que pueda suceder.

4.2. Espacios muestrales

Para estudiar los distintos fenómenos aleatorios usaremos los espacios muestrales. Se definen como el conjunto de posibles resultados recopilados del fenómeno aleatorio.

Clasificaremos los espacios muestrales según sean:

a) Finitos
b) Finitos equiprobables
c) Infinito contable

4.2.1. Espacios muestrales finitos

Son un tipo de espacios muestrales que se obtiene al asignar a cada probabilidad un valor real llamado p_i, es decir, la probabilidad de que ocurra un suceso. En un espacio muestral de este tipo se conocen todos los posibles resultados y siguen estas dos propiedades:

1. Cada p_i es positiva
2. La suma de los p_i da como resultado 1

Ejemplo:

En una carrera de galgos participan 3 galgos *A, B, C* de tal manera que *B* tiene el doble de probabilidades de ganar que *C* y, finalmente, *A* tiene el doble de probabilidades de ganar que *B*.

$P(C) = p \qquad P(B) = 2p \qquad P(A) = 4p$

Siguiendo las propiedades anteriormente dichas podemos sacar esta ecuación

$$p + 2p + 4p = 1 \qquad \rightarrow \qquad 7p = 1 \qquad \rightarrow \qquad p = \frac{1}{7}$$

Si substituimos el valor *p* por $\frac{1}{7}$ podemos saber cuántas probabilidades de ganar tiene cada galgo

$$P(C) = \frac{1}{7} \qquad P(B) = \frac{2}{7} \qquad P(A) = \frac{4}{7}$$

4.2.2. Espacios muestrales finitos equiprobables

Los espacios muestrales finitos equiprobables presentan las mismas características que los espacios muestrales finitos, pero con la peculiaridad de que los distintos sucesos del conjunto tienen la misma probabilidad de que ocurran. Este tipo de espacio se estudiará con la regla de Laplace:

$$P(X) = \frac{\textit{número de casos favorables}}{\textit{número de casos posibles}}$$

Un ejemplo claro de este tipo de espacios es la probabilidad de que salga cara o cruz al lanzar una moneda

$$P(cara) = P(cruz) = \frac{1}{2}$$

4.2.3. Espacios muestrales infinitos contables

Los espacios muestrales infinitos presentan las mismas características que los espacios muestrales finitos, la única diferencia es que el conjunto de sucesos no será simétrico ni equiprobable por lo tanto no se podrá usar la regla de Laplace.

Supongamos que queremos saber el número de veces que tenemos que tirar una moneda al aire, hasta que salga cara. Denominaremos *n* al número de veces que tiremos la moneda

El espacio muestral es (1, 2, 3, 4,… *n*)

$$P(A)=\frac{1}{2^n}$$

4.3. Sucesos

En el apartado anterior hemos visto los espacios muestrales, pues bien, un suceso es un subconjunto de un espacio muestral.

$S \in E$ (S pertenece a E)

Un suceso es un conjunto de resultados que pueden haber ocurrido o no, en la realización de un hecho aleatorio. Un suceso puede ser descrito por una frase o por la enumeración de los resultados que lo satisfacen.

4.3.1. Tipos

Podemos tener distintos tipo de sucesos según las características que tengan:

- Suceso elemental:

  Es el tipo de suceso más simple, porque es un único subconjunto de un espacio muestral. Un ejemplo claro seria cuando jugamos al parchís y tenemos una pieza a 4 casillas para comérnosla, el suceso elemental seria sacar un 4 en el dado.
- Suceso compuesto:

  Está formado por más de un subconjunto del espacio muestral. En un juego cualquiera en el cual se gana sacando un número par del dado el suceso compuesto seria 2, 4, 6.
- Suceso seguro:

  Son sucesos que ocurren siempre, por ejemplo sacar un número $X \geq 1$ con un dado.
- Sucesos imposible:

Es justamente lo contrario que el suceso seguro. En este caso el suceso nunca ocurrirá, por ejemplo sacar un numero *X>6* en un dado. Se representa con el símbolo del conjunto vacio ($\varnothing$).

4.2.2. Operaciones con sucesos

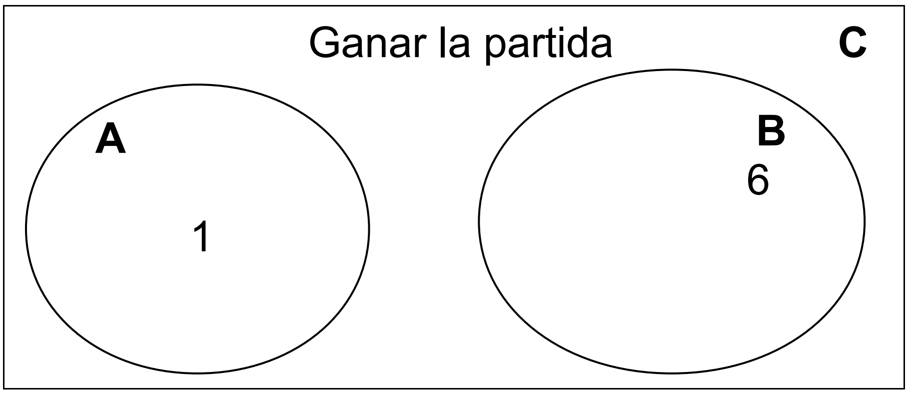
Lo que hemos visto anteriormente es aplicable únicamente a sucesos aislados, pero encontraremos situaciones en que será necesario operar con ellos.

- Unión de sucesos:

Dados dos sucesos *A* y *B* de un espacio muestral, se llama unión de sucesos *A* y *B* al suceso que ocurre cuando se confirma al menos uno de los sucesos *A* o *B.* Se denota de la siguiente manera:

$$A \cup B = C$$

Ejemplo: Llegamos a la recta final en el juego de la oca, sacando un 1 ganamos pero si sale un 6 en el dado también ganamos porque rebotando nos colocaríamos en una oca. En este caso el suceso *A* es sacar un 1, el suceso *B* es sacar un 6 y el suceso *C* es ganar la partida.



Sacando un 1 o un 6 ganaríamos igualmente la partida.

- Intersección de sucesos:

Dados dos sucesos *A* y *B* de un espacio muestral, se llama intersección de los sucesos *A* y *B* al suceso que resulta cuando se confirman simultáneamente los sucesos *A y B.* Se denota de esta forma:

$$A \cap B = C$$

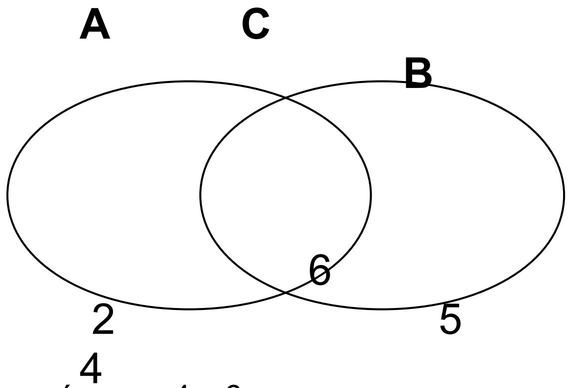
Ejemplo: Un juego de dados en el cual para ganar hay que cumplir dos condiciones:

- Sacar un número par
- Sacar un número mayor que 3

$$A = \{2,4,6\}$$

$$B = \{4,5,6\}$$

$$C = A \cap B = \{4,6\}$$



Únicamente pertenecen a *C* los números 4 y 6

Propiedades de la unión y la intersección:

	Unión	Intersección
Asociativa	*(A∪ B) ∪ C=A∪ (B∪ C)*	*(A∩ B) ∩ C=A∩ (B∩ C)*
Conmutativa	*A∪ B=B∪ A*	*A∩ B=B∩ A*
Idempotente	*A∪ A=A*	*A∩ A=A*
Simplificativa	*A∪ (A∩ B)=A*	*A∩ (A∪ B)=A*
Distributiva	*A∪ (B∩ C)=(A∪ B) ∩ (A∪ C)*	*A∩ (B∪ C)=(A∩ B) ∪ (A∩ C)*

5. VARIABLE ALEATORIA

5.1. Definición

La variable aleatoria es el conjunto de valores numéricos obtenidos en los distintos resultados de un experimento aleatorio, es decir, transforma los distintos sucesos del espacio muestral a numeros reales. Por ejemplo, en un examen tipo test el profesor puntúa con dos puntos los aciertos y quita un punto por los errores, en este caso concreto la variable aleatoria tiene los valores 2 y -1.

La función de probabilidad de una variable aleatoria *X* nos da para cada valor de *x* la probabilidad de que la variable tenga ese valor.

$$f(x) = P[X = x]$$

Si observamos la notación de la variable aleatoria nos daremos cuenta de que la variable se escribe en mayúscula *(X)* mientras que los distintos valores que se pueden llegar a obtener se escriben en minúscula *(x)* para evitar confusión.

En función de los valores que puede obtener la variable se dividen en:

- Variables aleatorias discretas: son aquellas cuyo conjunto de valores es finito o infinito contable.
- Variables aleatorias continuas son aquellas cuyo conjunto de valores es infinito.

5.2. Esperanza matemática

A lo largo de la historia, la probabilidad nació de los juegos de azar y de los jugadores que querían ganarse la vida con ellos. Por eso surgieron dos grandes inquietudes para el jugador: 1º, qué probabilidades tiene de ganar en una partida y 2º qué es lo que se espera a lo largo de varios juegos, ganar o perder. En esta última inquietud es donde entra el concepto de esperanza matemática.

Lo que se quiere conseguir con la esperanza matemática es un balance entre las probabilidades de ganar y las ganancias o pérdidas que puede tener el jugador, es decir, que aunque tengamos muchas probabilidades de ganar, quizás las ganancias no son tan suculentas como las pérdidas y eso puede llevarnos al error. Ejemplo, si un jugador tiene un 90% de probabilidades de ganar 100 € y un 10% de probabilidades de perder 1000 €, el juego seria desfavorable para el jugador. Para calcular el valor de la esperanza matemática se hace de la siguiente manera:

$$\sum de\ valores \times probabilidades$$

En el caso explicado anteriormente nos encontramos

$$100 \times 90\% - 1000 \times 10\% = -10$$

Las ganancias se suman y las pérdidas se restan. Como podemos ver, la esperanza del jugador a lo largo de muchas partidas, es perder dinero.

La esperanza matemática, también llamada valor esperado de una variable aleatoria *X*, que tiene valores *x* con probabilidad de *f(x)* es:

$$E(X) = \sum_x x \cdot f(x)$$

El valor esperado tiene la característica que de alguna manera el valor obtenido, siempre es la media entre las pérdidas y ganancias, creando un equilibrio entre ellas.

5.2.1. Propiedades de la esperanza matemática

1. En el caso que tengamos una constante como único valor, el valor esperado seria la constante misma. Una constante se puede considerar una variable aleatoria que acapare toda la probabilidad, es decir, *P = 1*
$$E(k) = \sum_x x \cdot f(x) = k \cdot 1 = k$$
2. Si una constante *k* se multiplica por una variable *X*, su esperanza matemática también se multiplica por *k*.
$$E(kX) = kE(X)$$
3. Si se suma una constante *k* a una variable aleatoria *X* el valor esperado de la variable tambe se ve aumentado en *k*.
$$E(k + X) = k + E(X)$$

5.3. Varianza o desviación típica

La esperanza matemática, como hemos visto anteriormente, busca un valor medio entre los distintos valores de la variable aleatoria. Pero qué pasa cuando los valores de la variable están muy dispersos. Pongamos como ejemplo los cambios de valor de una acción de bolsa.

a) Se compra una acción *X* a 100 euros y mañana esa misma acción puede valer 110 €, 90 €, o quedarse como estaba. Todo con probabilidad de 1/3

b) Se compra una acción *Y* a 100 euros y mañana esa misma acción puede valer 10 € o 190 €, con probabilidad de 1/2.

En los dos casos la esperanza matemática valdrá 100 € porque ese es su valor medio entre las ganancias y las pérdidas, pero como podemos ver a simple vista, el caso *b)* es más arriesgado para el comprador ya que los valores están muy dispersos del valor medio. Aquí es donde entra la varianza.

La varianza es el valor medio de las desviaciones al cuadrado, si la varianza es grande querrá decir que hay mucha dispersión entre los valores y la jugada es arriesgada.

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_x (x - E(X))^2 f(x)$$

5.3.1. Propiedades de la varianza:

1) Si la varianza de una constante llamada *k* es 0, *V(k)* = 0

$$V(k) = \sum_x (x - E(k))^2 f(x) = (k-k)^2 \cdot 1 = 0$$

2) Si una variable aleatoria *(X)* se multiplica por una constante *k*, la varianza queda multiplicada por k^2

$$V(kX) = k^2 V(X)$$

3) Cambiar de signo la variable aleatoria no cambia ni altera la varianza, ya que cambiar de signo significa multiplicar por -1 la variable aleatoria y por $(-1)^2$ la varianza.

$$V(X) = V(-X)$$

6. ESTUDIO DEL AZAR EN DISTINTAS SITUACIONES

6.1. El problema de los cumpleaños


Fuente 34: Cumpleaños


Fuente 35: Interrogante

Seguramente que todos nos hemos preguntado alguna vez, si en un espacio como una clase o un bar, habría alguna persona que cumpla años el mismo día y el mismo mes que nosotros. Si la respuesta es afirmativa nos hemos asombrado. Pues bien, eso es porque nos pensamos que la probabilidad de que en un grupo de 20 personas 2 de ellas cumplan años el mismo día es baja, pero, en realidad no es así y ahora veremos el porqué. Usando los conocimientos estudiados anteriormente como son la regla de Laplace y que el sumatorio de las probabilidades siempre da 1 podremos resolver el problema.

Al número de personas que forman el grupo lo llamaremos *n* y tomaremos como premisa de que $n < 365$ ya que si fuera igual o superior la probabilidad superaría el valor 1 y sería un valor seguro.

Empezaremos a calcular la probabilidad cuando *n=2*, ya que si empezáramos a calcular la probabilidad de que dos personas coincidan cuando *n=1* nos daría 0, para ello usaremos la regla de Laplace.

$$P_{(2)} = \frac{N^{o}\, de \text{ casos favorables}}{N^{o}\, de \text{ casos posibles}} = \frac{1}{365} = 0{,}0027$$

Existe un 0,27% de que dos personas coincidan el mismo día.

Cuando *n=3* la cosa se complica un poco más y para facilitarlo un poco, primero calcularemos la probabilidad de que no coincidan y se lo restaremos a 1 para encontrar la probabilidad de que 2 persona coincidan en su día de nacimiento.

$$P_{(3)} = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} = 1 - \frac{364 \times 363}{365^2} = 0{,}008 \rightarrow 0{,}8\%$$

Se divide 364 entre 365 porque la segunda persona puede cumplir años en cualquier día del año pero solamente en 364 días no coincidirá con la primera, lo mismo pasa con la tercera, que solo en 363 días no coincidirá ni con la primera ni con la segunda persona.

Con lo que sabemos hasta ahora ya podemos crear una idea generalizada para este problema.

Para cualquier valor de *n*:

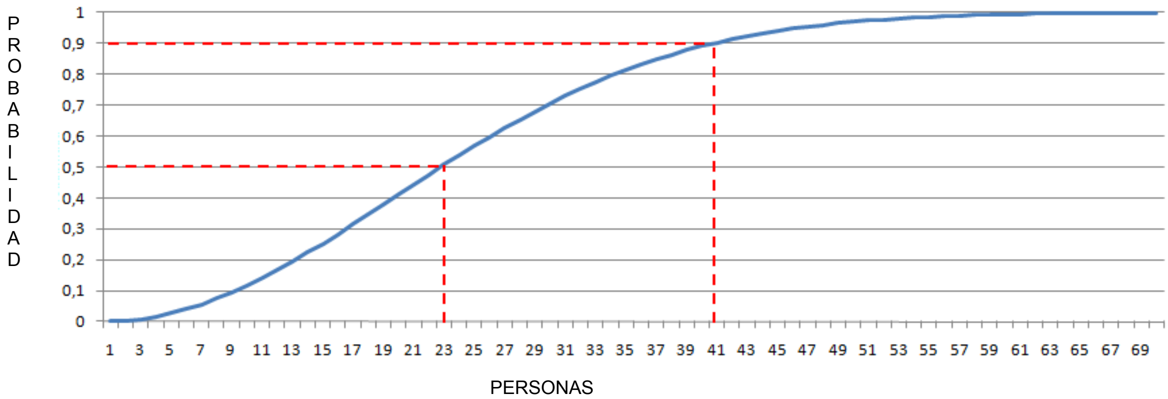
$$P_{(n)} = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \ldots \frac{365 - n + 1}{365} =$$

$$= 1 - \frac{364 \times 363 \times 362 \times \ldots (365 - n + 1)}{365^{n-1}} =$$

$$= 1 - \frac{364 \times 363 \times 362 \times \ldots (365 - n + 1)}{365^{n-1}} =$$

$$= \boxed{1 - \frac{365!}{365^n \times (365 - n)!}}$$

Esta es la gráfica que representa la función para encontrar la probabilidad:



Fuente 36: Gráfico del problema de los cumpleaños

Como podemos ver en el gráfico, con 23 personas ya tenemos un 50% de probabilidades de que dos de ellas cumplan años el mismo día y con 41 persones el 90%.

6.2. Los cromos

Fuente 37: Álbum de cromos de *Pokémon*

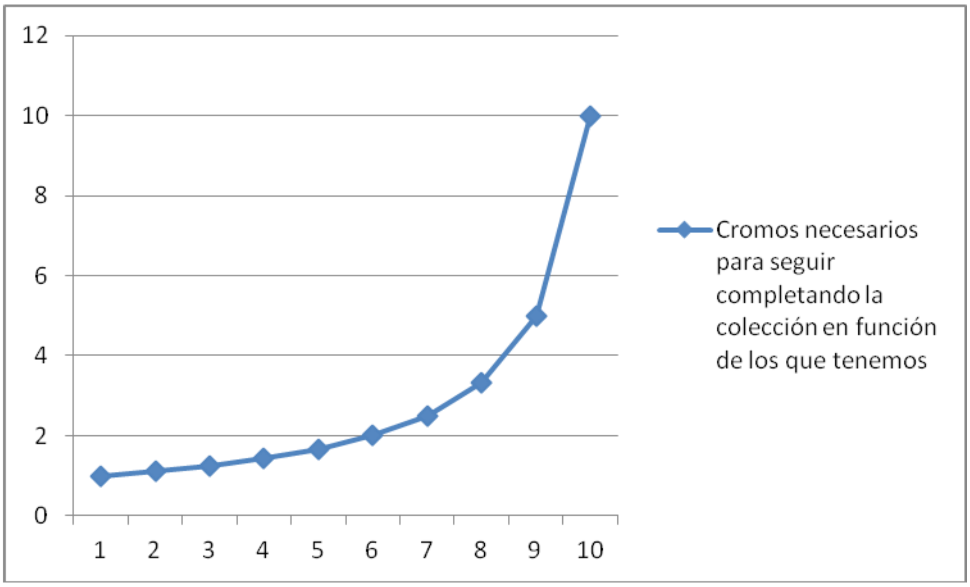
Fuente 38: Cromos de *Pokémon*

Las colecciones de cromos es una afición que siempre ha existido y que ha enganchado a jóvenes y adultos, variando únicamente, el tema al que están dedicados. A medida que íbamos avanzando en la colección teníamos el presentimiento que la terminaríamos, pero finalmente llegábamos a un punto muerto, donde no dejábamos de comprar sobres y más sobres y no salía el cromo que nos faltaba. Siempre nos da la sensación de que los fabricantes nos timan lanzando al mercado gran cantidad de ejemplares de todos los cromos excepto, de dos o tres que no hay manera de encontrar por más que se compren sobres y sobres. Dejando a un lado esta suposición que no sabemos si es cierta y que los fabricantes no creo que tengan ganas de respondérnosla, nos basaremos en que hay la misma cantidad de cromos de cada número de la colección, así la probabilidad de que aparezca cualquier cromo es la misma. Aun así, siempre es más difícil de encontrar el último que nos falta.
La pregunta es, ¿cuántos cromos hay que comprar de media para completar la colección?
Lo primero que se tiene que tener en cuenta es que cuando se empieza la colección, el cromo que compremos siempre nos faltará, a su vez el segundo, la novedad será menor porque ya tendremos un cromo y eso hará que se

pueda repetir, del mismo modo el tercero y así hasta *n*. De aquí podemos deducir que siempre habrá que comprar más cromos de los que hay en la colección y se tendrá que comprar más cromos a medida que se vaya avanzando, por ejemplo cuando sólo nos quede un cromo para acabar la colección se tendrá que multiplicar la probabilidad de que salga el cromo por el número de cromos de la colección.

Partiremos de una colección de 10 cromos y de ahí daremos la solución general para una colección de *n* cromos.

La respuesta a la pregunta: ¿cuántos cromos hacen falta aproximadamente para completar la colección de 10 cromos? es:



$$\frac{10}{10}+\frac{10}{9}+\frac{10}{8}+...+\frac{10}{1}=10\times\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{1}\right)=30$$

Hay que comprar 30 cromos para completar la colección.

Extendiendo esta situación a un caso general con una colección de n cromos nos da la siguiente solución

$$n\times\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+...+\frac{1}{1}\right)=total\ de\ cromos\ necesarios$$

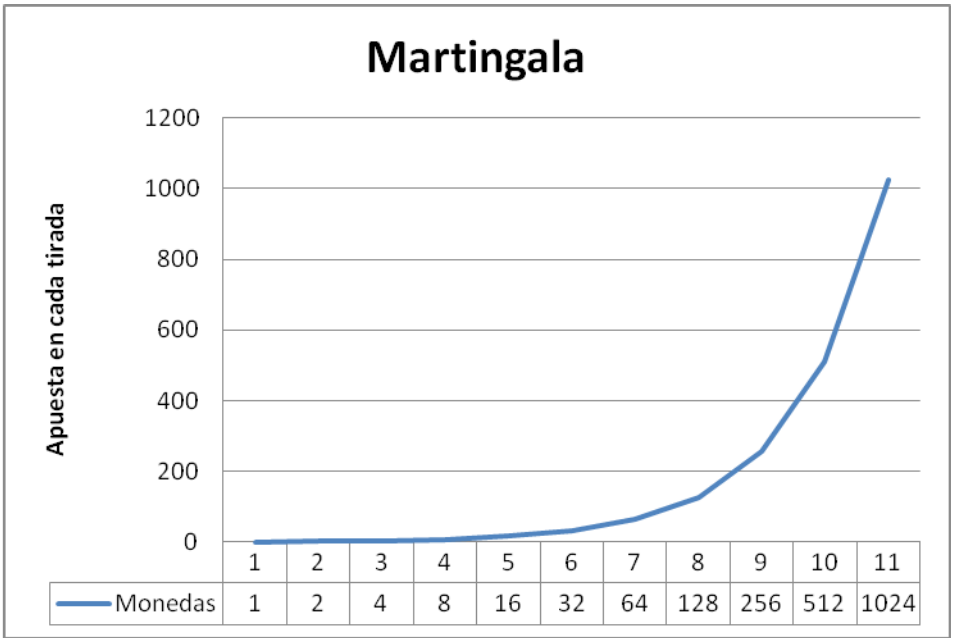
6.3. El problema de la martingala

La estrategia de jugar a la martingala nació en Francia en el siglo XVIII. Se trataba de lanzar una moneda y apostar 1 moneda a que sale cara. En caso de salir cara el jugador recibe el doble de la apuesta pero si se pierde el jugador apuesta el doble y si vuelve a perder apuesta otra vez el doble, así hasta que gane. De esta manera mientras se pierde se va apostando 2^n donde n es igual al número de la tirada (en la primera tirada n=0). Cuando el jugador gane, recuperará todas las apuestas anteriores más un beneficio igual al de la primera apuesta. Con esta estrategia te aseguras tener siempre una esperanza positiva.

$$2^{n+1} - \sum_{n=0}^{n} 2^n = 1$$

Esta estrategia nos puede parecer atractiva porque te asegura ganar dinero siempre, pero existen dos grandes problemas:

- El jugador no tiene una riqueza infinita, esto provoca que si la racha de pérdidas se alarga un poco, las apuestas crecerán exponencialmente y el jugador entrará en bancarrota sin posibilidad de recuperar el dinero.
- En algunos sitios como por ejemplo los casinos se limita la apuesta máxima. Para el remoto caso que nuestra riqueza alcance un valor muy alto y el juego se alargue, toparíamos con el límite de la apuesta máxima impuesta por el casino. Esto nos impedirá seguir con la misma estrategia y a su vez perderíamos todo el dinero anteriormente apostado.



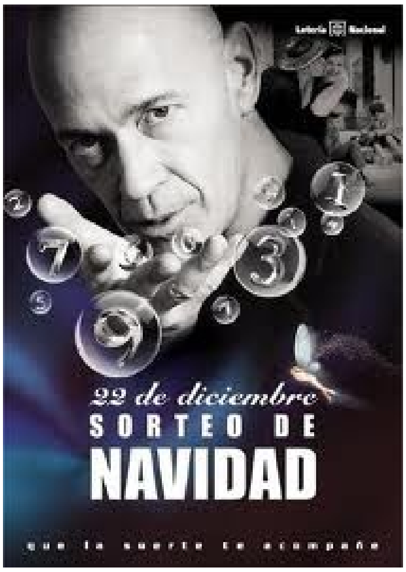
En el grafico se puede apreciar de qué manera aumentan las apuestas a medida que se alarga la racha de mala suerte.

Actualmente no se recomienda practicar esta estrategia porque es muy arriesgada y fácilmente se pueden perder los ahorros.

7. LA PROBABILIDAD EN LAS LOTERIAS

Muchas personas nos creemos que en la lotería están las soluciones a nuestros problemas, seguro que todos alguna vez hemos dicho que “cuando me toque la lotería me compraré...” pero si nos paramos a pensar, cuántos de ellos han pensado la probabilidad que tienen de que este suceso ocurra, estaríamos hablando de muy pocos. Por este motivo demostraremos, si nuestros sueños se encuentran al alcance de nosotros o simplemente son una mera ilusión.

7.1. Lotería de Navidad



Fuente 39: Anuncio del sorteo de Navidad

Fuente 40: Décimo de lotería de Navidad

El sorteo de Navidad, es uno de los sorteos más populares por sus premios tan altos. Se celebra en España cada 22 de diciembre en el salón de sorteos de Loterías y Apuestas del Estado, en Madrid. Es uno de los sorteos más vendidos en relación con otros de su categoría. Esto no es de extrañar porque su período de venta es muy largo, desde julio hasta diciembre.

El precio del décimo es de 20 € y con él se puede aspirar a ganar la décima parte de los siguientes premios:

1º premio o el 'Gordo':	4.000.000 euros
2º premio:	1.250.000 euros
3º premio:	500.000 euros
4º premio:	dos premios de 200.000 euros
5º premio:	ocho premios de 60.000 euros
Pedrea:	1.794 premios de 1.000 euros
Números anterior y posterior al 1º premio:	dos premios de 20.000 euros
Números anterior y posterior al 2º premio:	dos premios de 12.500 euros
Números anterior y posterior al 3º premio:	dos premios de 9.600 euros
Centenas del 1º, 2º, 3º y dos 4º premios:	495 premios de 1.000 euros
Con las dos últimas cifras del 1º, 2º y 3º premios:	2.997 premios de 1.000 euros
Reintegro:	9.999 premios de 200 euros

Las probabilidades de que nos toque algún premio de la lotería de Navidad son:

1º premio o el 'Gordo':	$\frac{1}{100.000}\times 100 = \boxed{0{,}001\%}$
2º premio:	$\frac{1}{100.000}\times 100 = \boxed{0{,}001\%}$
3º premio:	$\frac{1}{100.000}\times 100 = \boxed{0{,}001\%}$
4º premio:	$\frac{2}{100.000}\times 100 = \boxed{0{,}002\%}$
5º premio:	$\frac{8}{100.000}\times 100 = \boxed{0{,}008\%}$
Pedrea:	$\frac{1794}{100.000}\times 100 = \boxed{1{,}794\%}$
Números anterior y posterior al 1º premio:	$\frac{2}{100.000}\times 100 = \boxed{0{,}002\%}$
Números anterior y posterior al 2º premio:	$\frac{2}{100.000}\times 100 = \boxed{0{,}002\%}$
Números anterior y posterior al 3º premio:	$\frac{2}{100.000}\times 100 = \boxed{0{,}002\%}$
Centenas del 1º, 2º, 3º y dos 4º premios:	$\frac{495}{100.000}\times 100 = \boxed{0{,}495\%}$

Con las dos últimas cifras del 1º, 2º y 3º premios:	$\frac{2.997}{100.000}\times 100=\boxed{2{,}997\%}$
Reintegro:	$\frac{9.999}{100.000}\times 100=\boxed{9{,}999\%}$

Cuando se participa en algunos juegos de azar, suele haber un valor esperado, o lo que es lo mismo, premio que ganaríamos si jugáramos un número infinito de veces, a esto se llama esperanza matemática.

Para calcular la esperanza matemática de la Lotería de Navidad usaremos la fórmula que hemos visto anteriormente, realizando un sumatorio de las ganancias i las pérdidas multiplicadas por la probabilidad de que sucedan.

$$E_{lot}=400.000\times 0{,}001\%+125.000\times 0{,}001\%+50.000\times 0{,}001\%+20.000\times 0{,}002\%+$$
$$+6.000\times 0{,}008\%+2.000\times 0{,}002\%+1250\times 0{,}002\%+960\times 0{,}002\%+100\times 2{,}997\%+$$
$$+100\times 1{,}794\%+100\times 0{,}495\%+20\times 9.999\%-20\times 100\%=\boxed{-6\ euros}$$

En conclusión si jugamos a la Lotería de Navidad la esperanza de ganar es negativa. No por eso hay que dejar de jugar porque si no se juega seguro que no toca, simplemente hay que hacerlo con moderación.

7.2. Euromillones

Fuente 41: Euromillones

Fuente 42: Boleto del Euromillones

El Euromillones es uno de los sorteos más famosos por el suculento premio que reparte entre los países organizadores: Austria, Bélgica, España, Francia, Irlanda, Luxemburgo, Portugal, Reino Unido y Suiza. Este sorteo es similar al de la primitiva que hay en España pero al tener más participantes puede ofrecer premios más grandes.

Este sorteo consiste en marcar con el signo "*X*" la combinación ganadora compuesta por 5 números y 2 estrellas de entre los 50 números y 11 estrellas que hay. También se podrán hacer múltiples de hasta 10 números y 5 estrellas que podrán aumentar las probabilidades pero también aumentaran el coste de la apuesta. En la tabla se puede ver de cuantas combinaciones se compone nuestra apuesta a medida que se marcan más números y estrellas.

Tabla de Apuestas autorizadas.

Estrellas	**Números**					
	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	**-**	**6**	**21**	**56**	**126**	**252**
3	**3**	**18**	**63**	**168**	**378**	**756**
4	**6**	**36**	**126**	**336**	**756**	**1.512**
5	**10**	**60**	**210**	**560**	**1.260**	**2.520**

El precio mínimo de la apuesta es de 2 euros y juntando todos los euros apostados en conjunto forman la recaudación. Del total de la recaudación, se destina el 50 % a premios que se distribuyen en 13 categorías:

Categoría	**Números acertados**		**Porcentaje**
	Matriz de números	**Matriz de estrellas**	**Fondo de premios**
1ª	**5**	**2**	**32,00%**
2ª	**5**	**1**	**4,80%**
3ª	**5**	**0**	**1,60%**
4ª	**4**	**2**	**0,80%**
5ª	**4**	**1**	**0,70%**
6ª	**4**	**0**	**0,70%**
7ª	**3**	**2**	**0,50%**
8ª	**2**	**2**	**2,30%**
9ª	**3**	**1**	**2,20%**
10ª	**3**	**0**	**3,70%**
11ª	**1**	**2**	**6,50%**

Categoría	Números acertados		Porcentaje
	Matriz de números	Matriz de estrellas	Fondo de premios
12ª	2	1	17,60%
13ª	2	0	18,00%
Fondo de reserva			8,60%

La probabilidad de ganar el premio gordo es muy baja ya que el premio gordo que entrega este sorteo es el más grande en comparación con otras loterías y ahora veremos el porqué.

Como hemos comentado antes la apuesta en el Euromillones está formada por 5 números del 1 al 50 y 2 números del 1 al 11 (estrellas). Lo que vamos a hacer es contar cuántos grupos de 5 números hay entre 1 y 50 y cuántos grupos de dos números, entre 1 y 11; primero por separado y luego multiplicaremos los resultados para que nos salga el resultado total de combinaciones.

- Números del 1 al 50: teniendo en cuenta que no importa el orden y tampoco existen repeticiones de números usaremos combinaciones sin repetición de 50 elementos tomados de 5 en 5.

$$C_{50,5} = \binom{50}{5} = \frac{50!}{5! \times (50-5)!} = 2.118.760$$

Es decir existen 2.118.760 disposiciones distintas.

- Números del 1 al 11: nos encontramos en la misma situación que antes por lo que volveremos a usar combinaciones sin repetición, pero en este caso de 11 elementos tomados de 2 en 2

$$C_{11,2} = \binom{11}{2} = \frac{11!}{2! \times (11-2)!} = 55$$

En este caso existen solamente 55 formas distintas de escoger 2 números.

Si multiplicamos los resultados obtendremos la cantidad de apuestas correctas que podríamos realizar en el Euromillones:

$C_{50,5} \times C_{11,2} = 2118760 \times 55 = 116.531.800$

Esto nos da la siguiente probabilidad para acertar el premio gordo en el Euromillones.

$$P(Euromillones) = \frac{1}{116.531.800} = 8,58 \times 10^{-9} = 0,000000008$$

Si esto nos parece una probabilidad baja, una foto colgada en internet nos muestra como un portugués falló todos los números del sorteo de los Euromillones por una cifra. Ahora se verá si es más fácil acertar la combinación ganadora o fallar por un número.

Fuente 43: Combinación casi ganadora

Mirándolo desde el punto de vista condicionado, es decir, primero se tiene que acertar la combinación ganadora y luego fallar por un número, nos encontramos con esto:

$$P(Euromillones) = \frac{1}{116.531.800} = 8,58 \times 10^{-9} = 0,000000008$$

$$P(fallar \text{ por un número}) = \frac{2}{116.531.800} = 1,7 \times 10^{-8}$$

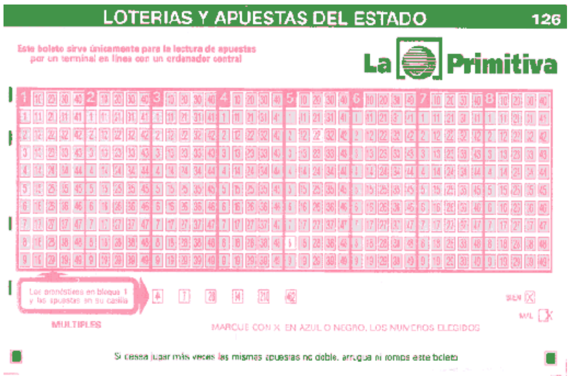
Juntamos estas dos cifras, multiplicándolas, para que nos salga la probabilidad total:

$$P(total) = \frac{1}{116.531.800} \times \frac{2}{116.531.800} = 1{,}47 \times 10^{-16}$$

Vemos que es un número muy cercano a 0. Si los encargados del sorteo vieran que es dificilísimo fallar por un número toda la combinación ganadora, seguramente pondrían un premio especial que fuera más grande todavía.

7.3. La Primitiva

Fuente 44: La Primitiva



Fuente 45: Boleto de la Primitiva

La Primitiva es un tipo de lotería que consiste en acertar la combinación ganadora formada por 6 números de entre 49.

De entre toda la recaudación únicamente se destina a premios el 55%.

Del 55% destinado a los premios hay que restarle 10% para el reintegro. Y como los de 3 aciertos cobran siempre 8 euros habría que restar la cantidad resultante de multiplicar por 8 euros el número de acertantes con 3 aciertos.

Todo lo restante se distribuirá de la siguiente manera:

A los de 6 aciertos: Se destina el 52 % a distribuir a partes iguales entre los que en una sola apuesta acierten los 6 números de la combinación ganadora.

A los de 5 aciertos más el complementario: se destina el 8% a distribuir a partes iguales entres todos los acertantes en una sola apuesta.

A los de 5 aciertos: se destina el 16% a distribuir a partes iguales entre todos los acertantes en una sola apuesta.

A los de 4 aciertos: se destina el 24% a distribuir a partes iguales entre los acertantes en una sola apuesta.

Para conseguir el premio gordo en la Primitiva, como hemos dicho anteriormente es necesario acertar los 6 números de la combinación ganadora. Ahora veremos que probabilidad hay de que eso ocurra.

Teniendo en cuenta que en este sorteo no existe la repetición de los números ni importa su orden, primero calcularemos el número de combinaciones que existen sin repetición de números tomados de 6 en 6.

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \times (49-6)!} = 13.983.816$$

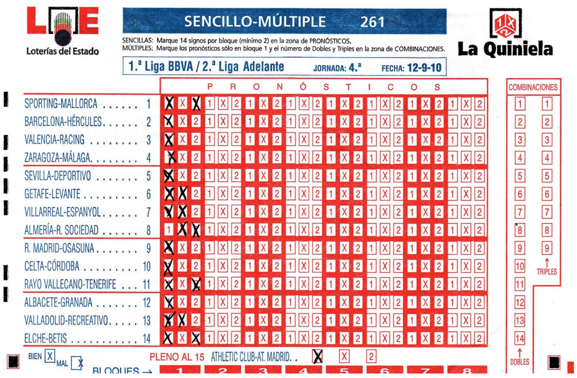
Y para calcular la probabilidad de que una de ellas sea la premiada lo calcularemos mediante la regla de Laplace.

$$P(\text{6 aciertos}) = \frac{1}{13.983.816} = 0{,}0000000715 = 7{,}15 \times 10^{-8}$$

En conclusión la probabilidad que uno acierte los 6 números es de alrededor de 1 entre 14 millones. Es decir que, si juegas 14 millones de apuestas distintas te tocará seguro.

7.4. La Quiniela

Fuente 46: La Quiniela



Fuente 47: Boleto de la Quiniela

La Quiniela es un juego de apuestas deportivas basadas en la liga española y europea donde el precio de cada apuesta es de 0,50€. Consiste en acertar el resultado de 14 o 15 partidos de futbol. El juego consta de: 14 partidos de futbol + el especial del pleno al 15 y 3 posibles resultados *(1-x-2)*.

- Se marca “1” cuando se pronostica la victoria del equipo que aparece en primer lugar o equipo local.
- Se marca “*X*” cuando se pronostica un empate a goles entre ambos equipos.
- Se marca “2” cuando se pronostica la victoria del equipo que aparece en segundo lugar o equipo visitante.

Básicamente existen 2 tipos de quinielas las sencillas y las múltiples.

En la quiniela sencilla se hace un pronóstico en cada bloque y se juega tantas apuestas como bloques se completen. El mínimo para jugar es de dos apuestas, es decir dos bloques de 14 partidos más el partido especial del pleno al 15.

En las quinielas múltiples las apuestas se realizan únicamente en el primer bloque, es decir que hay más de una combinación en un solo bloque. Hay que marcar el número de dobles y triples en una columna que se sitúa a la derecha del boleto, como mínimo hay que marcar un doble.

En la quiniela se destinan el 55% de la recaudación a premios distribuyéndose de la siguiente manera.

- **Categoría Especial:** El 10% de la recaudación íntegra a distribuir a partes iguales entre las apuestas cuyos pronósticos obtengan 14 aciertos más el partido denominado "Pleno al 15", el cual no forma parte de los 14 partidos que integran la base de los concursos. Sólo se percibirá un premio de esta categoría por cada resguardo.

- **1ª Categoría:** El 12% de la recaudación integra a distribuir a partes iguales entre las apuestas cuyos pronósticos obtengan 14 aciertos.

- **2ª Categoría:** El 8% de la recaudación integra a distribuir a partes iguales entre las apuestas cuyos pronósticos obtengan 13 aciertos.

- **3ª Categoría:** El 8% de la recaudación integra a distribuir a partes iguales entre las apuestas cuyos pronósticos obtengan 12 aciertos.

- **4ª Categoría:** El 8% de la recaudación integra a distribuir a partes iguales entre las apuestas cuyos pronósticos obtengan 11 aciertos.

- **5ª Categoría:** El 9% de la recaudación integra a distribuir a partes iguales entre las apuestas cuyos pronósticos obtengan 10 aciertos.

En el supuesto caso que no existan acertantes en alguna de las categorías ese dinero ayudará a incrementar el premio de las demás categorías o servirá para aumentar el premio en el próximo sorteo de La Quiniela.

Para calcular la probabilidad de ganar el premio gordo, partiremos del punto de que solo hay 14 partidos para ganar y veremos la cantidad de posibles resultados que puede haber. Para ello nos fijaremos en que una quiniela puede tener la siguiente forma: {*1 – 2 – X – 1 – 2 – 1 – X…*}. Vemos que los elementos se repiten y el orden, sí que importa por lo tanto se trata de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 14 en 14. El número total de posibles resultados es de:

$$VR_3^{14} = 3^{14} = 4.782.969$$

Por lo tanto la probabilidad de conseguir 14 aciertos es de:

$$P_{(14\ \text{aciertos})} = \frac{1}{4.782.969} = 0{,}000000209 = 2{,}09 \times 10^{-7}$$

Como adivinar los resultados de los 14 partidos del bloque es una condición indispensable para poder acertar el partido especial del pleno al 15, tendremos que multiplicar la probabilidad de acertar los 14 partidos con la probabilidad de acertar el partido especial:

$$P_{(15\ \text{aciertos})} = \frac{1}{4.782.969} \times \frac{1}{3} = 0{,}000000069 \approx 7 \times 10^{-8}$$

Nos sale un número muy bajo pero también hay que tener en cuenta que hay otros factores que determinan la probabilidad, como son los jugadores y el factor campo no como en otros juegos que se basan, únicamente, en el puro azar matemático.

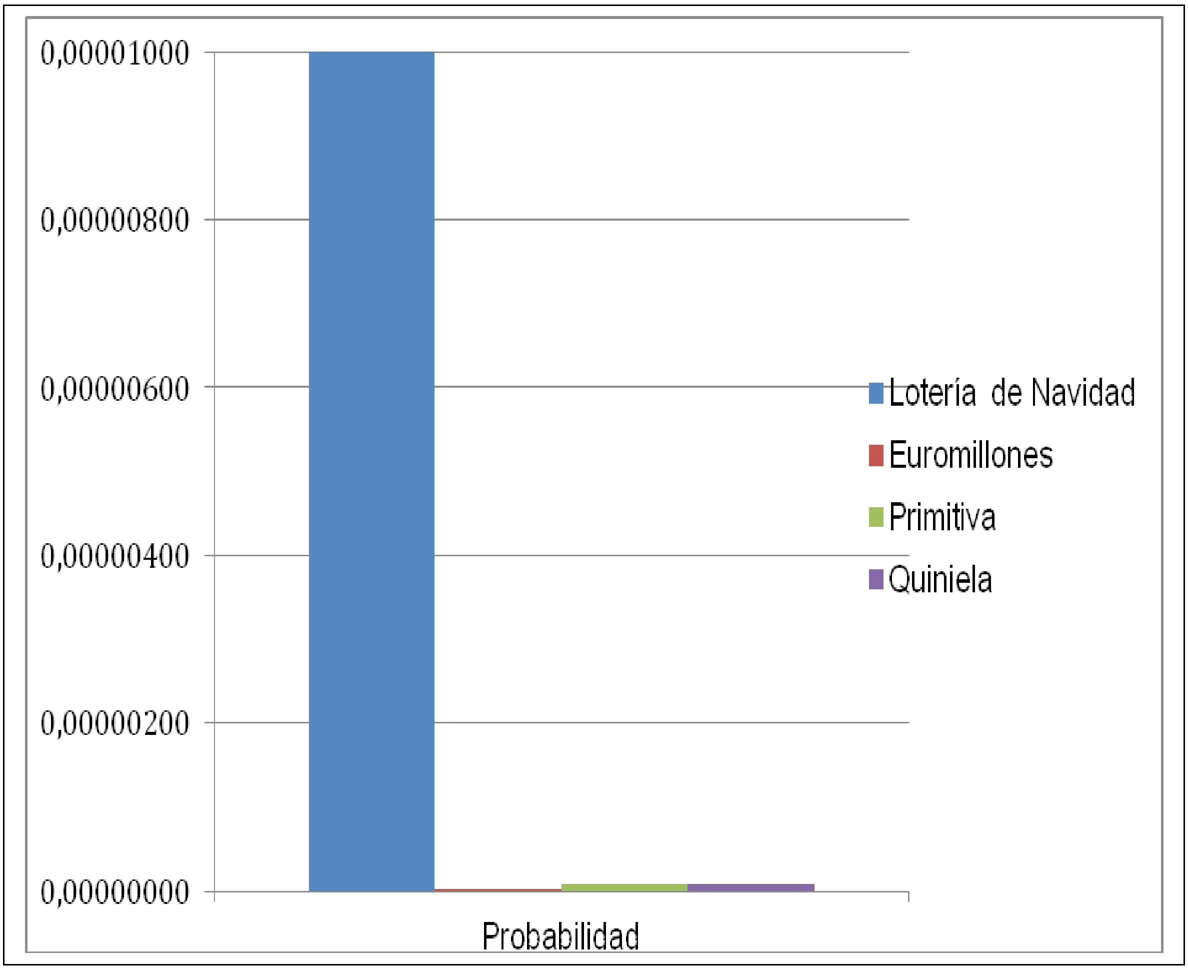
7.5. Conclusiones

En este punto hemos dado un paseo por los sorteos más relevantes en nuestras vidas. Si comparamos los resultados obtenidos entre las loterías obtenemos:

	Lotería Navidad	Euromillones	Primitiva	Quiniela
Probabilidad premio máximo	0,00001	0,00000000858	0,0000000715	0,00000007

A simple vista se ve que todas las probabilidades son bajas y es posible que con los números, una persona no sea consciente de lo difícil que es acertar la combinación ganadora. Pero si tuviéramos que elegir en que sorteo participar, parece que el premio más fácil de conseguir es el "Gordo" de la Lotería de Navidad.

Este es el gráfico comparativo:



En este gráfico se puede observar la diferencia entre la Lotería de Navidad y los demás sorteos. Eso tampoco significa que sea fácil conseguir el "Gordo", simplemente que es más fácil que las demás. Otra cosa que se puede observar, es que entre la Quiniela y la Primitiva hay muy poca diferencia, si tuviéramos que escoger nos tendríamos que fijar solamente en el premio. Finalmente se encuentra el sorteo de los Euromillones, que casi ni se ve, demostrándonos que es el más difícil de conseguir con diferencia.

En conclusión lo más inteligente sería no jugar, porque todos estos juegos están pensados para que perdamos dinero. Por otra parte estos juegos generan muchas ilusiones y el que no compra seguro que no le toca.

8. CONCLUSIONES

La probabilidad me ha parecido un tema muy interesante porque está muy presente en la vida cuotidiana. Después de este trabajo puedo decir que he aprendido mucho sobre el azar y la probabilidad, ya que antes tenía una idea general de ambas cosas, pero no conocía como se calculaban. Además he podido entender y comprobar matemáticamente el porqué, por mucho que hemos jugado a la lotería en mi familia, nunca nos ha tocado.

Me he dado cuenta que la probabilidad es un tema extenso y más complicado de lo que me parecía en un principio, pero aun así, no descarto profundizar en esta materia, con más detenimiento, en un futuro.

Gracias a este trabajo he llegado a las siguientes conclusiones:

En primer lugar, podemos decir que los juegos de azar han existido desde siempre, no es una cosa nueva, los antiguos egipcios ya los usaban aunque con una finalidad distinta a la que nosotros conocemos, esta era un método adivinatorio.

En segundo lugar, los juegos de azar han estado ligados al dinero. Desde la antigüedad las personas han querido hacerse ricas fácilmente con los juegos de azar. Este es el caso del Caballero de Méré que estudiaba e incluso creaba juegos con una probabilidad favorable a él, para ganar la mayoría de las veces. De esta forma podríamos pensar que es una manera de ganar dinero fácil, pero en verdad no es así, porque es difícil ganar en los juegos de azar.

En tercer lugar, hemos podido ver con ejemplos, que la probabilidad no es tan fácil de calcular. Aunque las personas nos hagamos una idea, que la probabilidad de ganar en un juego o en un sorteo es alta, esta intuición nos puede engañar y llevarnos por mal camino.

En cuarto lugar, nos hemos podido dar cuenta que el dinero no lo regala nadie y si los premios en los juegos de azar son altos, es también porque son muy difíciles de ganar. Además no hay que olvidar que los premios no los pagan los organizadores, sino los jugadores, es decir que para que unos ganen, muchos tienen que perder.

Por último, seguramente todos habremos escuchado alguna vez las frases: *"quien no arriesga no gana"* y *"la suerte no es para quien la busca sino para quien la encuentra".* Con ninguna de las dos frases estoy de acuerdo. En la primera habría que determinar hasta cuánto uno es capaz de arriesgar para conseguir el premio que quiere, lo más sensato es poner un límite, es decir, aunque un juego nos pueda parecer fácil y seguro, nunca hay que apostar más de lo que se gana o más de lo que se tiene, siempre con moderación. Respecto a la segunda frase, no se debería confiar tanto en los juegos de azar y se debería confiar más en el esfuerzo, el éxito no se encuentra en la suerte, sino en el trabajo y la constancia.

9.REFERENCIAS

9.1. Bibliografía

BARBANCHO, G. (1992) *ESTADÍSTICA TEÓRICA BÁSICA*. Barcelona Editorial ARIEL S.A.

GREENACRE, M.; UDINA, F. (1998) *Estadística I* Barcelona; Editoral RBA Realizaciones Editoriales, S.L.

JOHNSONBAUGH, R. (1999) *Matemáticas discretas.* México Editorial PRENTICE HALL

LIPSCHUTZ S. (1996) *Probabilidad*. México: Editorial McGRAW-HILL

PERERO, M. 1994 *Historias e historia de las matemáticas.* México Editorial Iberoamérica.

WILHELMI, M. (2004) *Combinatoria y probabilidad* España

9.2. Web grafía

ALBAIGÈS, J.M. *Tengui, falti* (artículo en línea) consultado en diciembre de 2011. Disponible en:
http://www.albaiges.com/azar/tenguifalti.htm

BASULTO, J.; CAMUÑEZ, J. *El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII* (artículo en línea) consultado en septiembre de 201. Disponible en:
http://revistasuma.es/IMG/pdf/56/043-054.pdf

Colaboradores de Estadística para todos *Primitiva* (artículo en línea) consultado en diciembre de 2011. Disponible en:
http://www.estadisticaparatodos.es/taller/loterias/primitivas.html

Colaboradores de Estadística para todos *La Quiniela* (artículo en línea) consultado en diciembre de 2011. Disponible en:
http://www.estadisticaparatodos.es/taller/loterias/quinielas.html

Colaboradores de Estadística para todos *el problema de Monty Hall* (artículo en línea) consultado en noviembre de 2011. Disponible en: http://www.estadisticaparatodos.es/taller/montyhall/montyhall.html

Colaboradores de estadística para todos. *La aguja de Buffon* (artículo en línea) consultado en septiembre de 2011. Disponible en: http://www.estadisticaparatodos.es/taller/buffon/buffon.html

Colaboradores de la web Gaussianos.com *La paradoja del cumpleaños* (artículo en línea) consultado en octubre de 2011. Disponible en: http://gaussianos.com/la-paradoja-del-cumpleanos/

Colaboradores de Gaussianos.com *Nuevo Euromillón: cómo quedan las probabilidades de acierto* (artículo en línea) consultado en diciembre de 2011. Disponible en: http://gaussianos.com/nuevo-euromillon-como-quedan-las-probabilidades-de-acierto/

Colaboradores de quierounaprimitiva.blogspot.com *Lotería primitiva probabilidad de acertar 6 números* (artículo en línea) consultado en diciembre de 2011. Disponible en: http://quierounaprimitiva.blogspot.com/2007/06/lotera-primitiva-probabilidad-de.html

Colaboradores de Wikipedia *El Sorteo Extraordinario de Navidad* (artículo en línea) consultado en diciembre de 2011. Disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Sorteo_Extraordinario_de_Navidad#cite_note-0

GALBIATI, J. *Desarrollo histórico de la estadística* (artículo en línea) consultado en enero de 2012. Disponible en: http://www.jorgegalbiati.cl/ejercicios_4/HistoriaEstadistica.pdf

GARCÍA, J.A. *Historia de un problema: el reparto de la apuesta* (artículo en línea) consultado en agosto de 201. Disponible en: http://webpages.ull.es/users/jagcruz/Articulos/historia_problema.pdf

GARCIA, M. *El surgimiento de la teoría de la probabilidad* (artículo en línea), consultado en agosto de 2011. Disponible en: http://www.uv.es/asepuma/VIII/m07/m7-04.pdf

GINER, V. *El problema del cumpleaños* (artículo en línea) consultado en 2011. Disponible en: http://personales.upv.es/~vigibos/ProblemaCumple.pdf

GÓMEZ, M.A. *Origen de la teoría de la probabilidad* (artículo en línea) consultado en agosto de 2011. Disponible en:
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/actas/actas_4_5_pdf/Act.IV-V_C001_txi_w.pdf

HERNANDEZ, P. *Las tabas* (artículo en línea) consultado en noviembre de 2011. Disponible en:
http://www.museodeljuego.org/_xmedia/contenidos/0000000680/docu1.pdf

MARAVALL, D. *el problema de la aguja de Buffon en el espacio de n dimensiones* (artículo en línea) consultado en septiembre de 2011. Disponible en:
http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETAMATEMATICA_1959_11_3-4_02.pdf

MARTINEZ, M.J. *Los dados* (artículo en línea) consultado en noviembre de 2011. Disponible en:
http://www.museodeljuego.org/_xmedia/contenidos/0000000678/docu1.pdf

MUNGUIA, I. *La paradoja de San Petersburgo: la solución* (artículo en línea) consultado en diciembre de 2011. Disponible en:
http://www.xatakaciencia.com/matematicas/la-paradoja-de-san-petersburgo-la-solucion

NELSON, L. *Aportes científicos de Abraham de Moivre* (artículo en línea) consultado en octubre de 2011. Disponible en:
http://www.eyeintheskygroup.com/Azar-Ciencia/Metodos/Abraham-de-Moivre-Distribucion-Normal.htm

NELSON, L. *La probabilidad bayesiana o probabilidad inversa: Thomas Bayes* (artículo en línea) consultado en agosto de 2011. Disponible en:
http://www.eyeintheskygroup.com/Azar-Ciencia/Metodos/Teorema-de-Bayes-Probabilidad-Bayesiana.htm

SALINERO, P. *Historia de la teoría de la probabilidad* (artículo en línea), consultado en agosto de 2011. Disponible en:
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/trabajosdehistoria/salinero_probabilidad.pdf

VEGA-AMAYA, O. *Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad* (artículo en línea) consultado en agosto de 2011. Disponible en:
http://cipri.info/resources/HIST-1-1-6-probabilidad.pdf

9.3. Índice de imágenes

Imagen portada:

http://estaticos03.cache.el-mundo.net/yodonablogs/imagenes/2006/02/27/1141030807_1.jpg

1. http://imagenes.forociudad.com/fotos/223001-moraleja-del-vino-otro-juego-de-tabas.jpg
2. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f9/Roman_statue_of_girl_playing_astragaloi_14_aC.jpg
3. http://www.kalipedia.com/kalipediamedia/matematicas/media/200709/26/estyprob/20070926klpmateyp_13.Ies.SCO.jpg
4. http://www.xtimeline.com/__UserPic_Large/84015/evt101119061400553.jpg
5. http://www.sciencephoto.com/image/224289/350wm/H4030464-Girolamo_Cardano-SPL.jpg
6. http://www.ugr.es/~eaznar/images/Tartaglia_2.jpg
7. http://www.avizora.com/publicaciones/biografias/images/GALGAL02.JPG
8. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/79/Blaise_pascal.jpg/210px-Blaise_pascal.jpg
9. http://www.publicatufoto.com/data/media/17/Pierre_de_Fermat.jpg
10. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a4/Christiaan_Huygens-painting.jpeg/220px-Christiaan_Huygens-painting.jpeg
11. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/19/Jakob_Bernoulli.jpg/200px-Jakob_Bernoulli.jpg
12. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/1b/Abraham_de_moivre.jpg/220px-Abraham_de_moivre.jpg
13. http://www.abciencia.com.ar/pics/gauss_2.png
14. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d4/Thomas_Bayes.gif/300px-Thomas_Bayes.gif
15. http://www.eyeintheskygroup.com/Azar-Ciencia/Metodos/Teorema-de-Bayes-Probabilidad-Bayesiana_archivos/ejemplo%20Teorema%20de%20Bayes.jpg
16. http://bdaugherty.tripod.com/normandie/laplace.jpg
17. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ec/Francis_Galton_1850s.jpg/225px-Francis_Galton_1850s.jpg
18. http://i1139.photobucket.com/albums/n543/vmontes23/museo%20de%20ciencia%20y%20tecnica/100_0378.jpg
19. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7f/Karl_Pearson.jpg/220px-Karl_Pearson.jpg
20. http://www.nndb.com/people/763/000196175/ronald-fisher.jpg
21. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/82/Chebyshev.jpg/220px-Chebyshev.jpg

22. http://www.ecured.cu/images/6/6d/Markov.jpg
23. http://apprendre-math.info/history/photos/Kolmogorov_7.jpeg
24. http://www.ecured.cu/images/4/48/Conde_de_Buffon.jpg
25. http://1.bp.blogspot.com/-cPi61nwdsjk/TWwhfKHiKPI/AAAAAAAAAAc/L-4jvXaGcbw/s1600/aguja%2Bde%2Bbuffon.jpg
26. http://www2.math.umd.edu/~dlevy/_Media/300px-peter_gustav_lejeune_-3.jpeg
27. http://mexicokafkiano.com/wordpress/wp-content/uploads/2010/08/palomar.jpg
28. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3f/Monty_open_door.svg/220px-Monty_open_door.svg.png
29. http://gaussianos.com/images/marilyn-vos-savant.jpg
30. http://farm8.staticflickr.com/7167/6562348723_bf01a907b7_o.jpg
31. http://1.bp.blogspot.com/_OvKGUdi_92k/TUxC-oBF5qI/AAAAAAAAABM/CBHI01reOEA/s1600/mozart.jpg
32. http://www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_06_07/io5/public_html/punto2/figura%207.2.jpg
33. http://www.monografias.com/trabajos57/esencial-combinatoria/Image17848.gif
34. http://2.bp.blogspot.com/_NRGDywtW8I8/S-qVn-ZambI/AAAAAAAAAD4/mffpGnvN67k/s1600/cumpleanos.jpg
35. http://www.stupidout.com/wp-content/uploads/2011/08/pregunta.jpg
36. http://emosqueira.files.wordpress.com/2010/05/probabilidad.png
37. http://pictures.todocoleccion.net/auto21/89838.jpg
38. http://images01.olx.pt/ui/6/89/57/1274106542_93738257_1-Cromos-pokemon-Nazare-1274106542.jpg
39. http://definanzas.com/wp-content/uploads/loteria_navidad2.jpg
40. http://3.bp.blogspot.com/-6jMawKU5uLY/TjpNLEw9qeI/AAAAAAAACSM/y8QEIQ4wyIU/s1600/loteria+2011.jpg
41. http://voyaganardinero.com/wp-content/uploads/2011/07/euromillones.jpg
42. http://www.casinos-on-line.com.es/imagenes/euromillones-dia.jpg
43. http://farm7.static.flickr.com/6212/6289346031_b432b13a02.jpg
44. http://www.metodosloteria.com/images/laprimitiva.gif
45. http://www.blogseitb.com/pamplona/wp-content/uploads/2010/05/primitiva_imagen_foto.gif
46. http://www.mi-quiniela.com/images/logo_quiniela.jpg
47. http://1.bp.blogspot.com/_X2VgS16Hvsg/TIlndJx1R0I/AAAAAAAAA7k/EbdgnWceJEo/s1600/quiniela.jpg