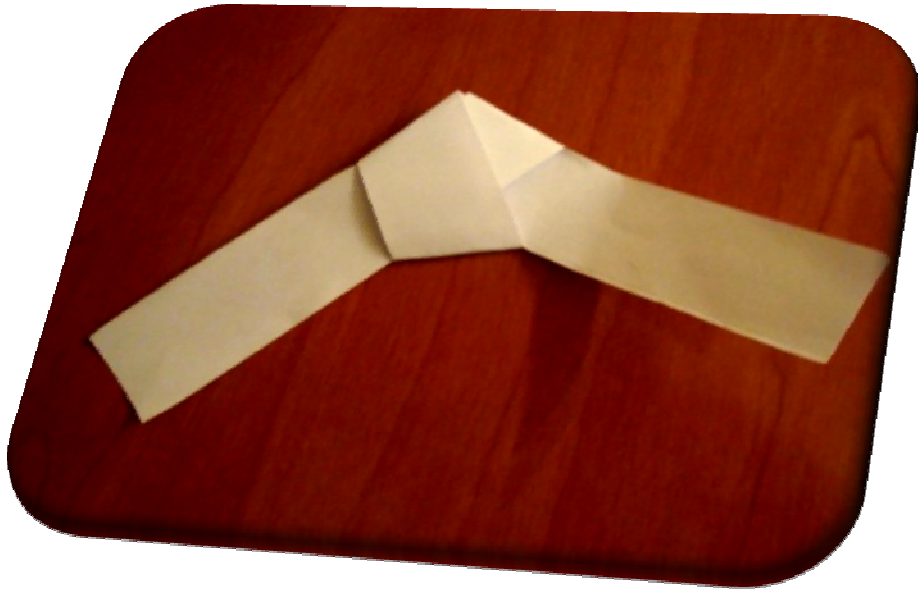


# Construint Polígons amb Paper



# ÍNDEX

0. Introducció.....	1
Capítol 1: Els nusos.....	3
1.1 El nus pentagonal.....	3
1.2 Aritmètica modular.....	7
1.3 Construccions dels nusos heptagonals i octogonals.....	8
1.3.1 Construïm el nus heptagonal.....	8
1.3.2 Construïm el nus octagonal .....	12
1.4 Què passa amb el nus hexagonal?.....	14
1.5 Funció i teorema d'Euler.....	18
Capítol 2: Polígons d'àrea màxima a partir d'un quadrat.....	21
2.1 Axiomes de Huzita-Hatori.....	21
2.2 Aplicacions de la Papiroflèxia: com trisecar un angle mitjançant la papiroflèxia.....	27
2.3 Polígons d'àrea màxima.....	29
2.3.1 Triangle.....	29
2.3.2 Pentàgon.....	32
2.3.3 Hexàgon.....	36
2.3.4 Heptàgon.....	41
Capítol 3: Conclusions i valoració personal.....	43
Bibliografia.....	45

## 0. Introducció

Quan algú ens sorprèn amb una figura de paper, sovint solem pensar que és tot una obra d'art, i en realitat és molt més. Darrere d'aquella figura hi ha tota una base geomètrica relacionada normalment amb les propietats i construcció de polígons que, de fet, són observables si ens fixem en els plecs del paper.

Aquest art és el de la Papiroflèxia, també conegut com Origami( de l'"oru" plegar i "kami" paper), procedent del Japó i conegut per tothom com aquell que es basa en construir figures amb paper sense utilitzar ni el regle ni les estisores. Però el que no tothom sap és que les seves bases són les matemàtiques i en concret la geometria. Què és possible fer amb la Papiroflèxia i impossible mitjançant el regle i el compàs? Què passa quan fem un nus amb una tira de paper com si fos el cordó d'una sabata? Com podem construir un polígon regular el més gran possible inclòs dins un quadrat de paper? Què hi ha darrere una figura de paper?

Són aquestes preguntes les que tractarem de respondre en aquest treball, analitzant les figures més senzilles i els nusos que són construïbles mitjançant la papiroflèxia.

En definitiva, els objectius principals d'aquest treball de recerca són:

- Analitzar l'aplicació pròpia de la Papiroflèxia que no és possible dur a terme utilitzant instruments com el regle i el compàs.
- Presentar diferents nusos construïbles amb tires de paper i explicar-ne el procediment de realització amb imatges il·lustratives que en facilitin la comprensió. Desenvolupar els continguts matemàtics que continguin aquests nusos construïts i justificar-ne la regularitat matemàticament. Arribar a una conclusió sobre quins nusos són construïbles o no.
- Construir els polígons regulars d'àrea màxima inclosos dins un quadrat de paper amb imatges il·lustratives i relacionar el mètode de realització

amb els axiomes bàsics de la Papiroflèxia. Calcular l'àrea dels polígons òptims esmentats.

L'estructura bàsica del treball serà:

- Inicialment, en el primer capítol, ens centrarem en els nusos de paper (pentàgon hexàgon, heptàgon i octàgon), raonarem la demostració general de la seva regularitat i finalment, mitjançant l'aritmètica modular, justificarem quins són construïbles i quins no ho són.
- En el segon capítol, després d'introduir els axiomes justificarem com es pot triseçar un angle basant-nos en aquests axiomes. Finalment i també en aquest capítol, ens centrarem en construir els polígons regulars d'àrea màxima inscrits en un quadrat. Tot seguit calcularem les seves àrees.

Cal remarcar que els nusos que realitzarem només són una part dels que es podrien dur a terme; també ens passarà el mateix amb la realització de polígons regulars d'àrea màxima ens els quals ens basarem, que només són uns quants dels molts que són possibles.

En aquest treball podem relacionar una ciència com les matemàtiques amb un art aparentment estètic, però que en realitat té una base que, tot i no haver-la de necessitar per tal de construir qualsevol figura, en el cas d'aquest treball, que agafem figures bàsiques i les condicionem sigui perquè tinguin àrea màxima o perquè siguin nusos continus, les matemàtiques són essencials.

## Capítol 1: Els nusos

En aquest capítol expliquem les diferents formes de construir pentàgons, hexàgons, heptàgons i octàgons mitjançant nusos fets amb tires de paper. Demostrarem que són polígons regulars i justificarem quines d'aquestes figures es poden obtenir fent nusos i quines no.

### 1.1 El nus pentagonal

Per construir un nus pentagonal només és necessari agafar una tira de paper amb els costats paral·lels que tingui una llargada que sigui més o menys sis vegades l'amplada (figura 1.1 a). Aleshores només cal fer un nus normal amb la tira de paper (figura 1.1 b) sense tibar fort intentant no trencar-la (figura 1.1c).

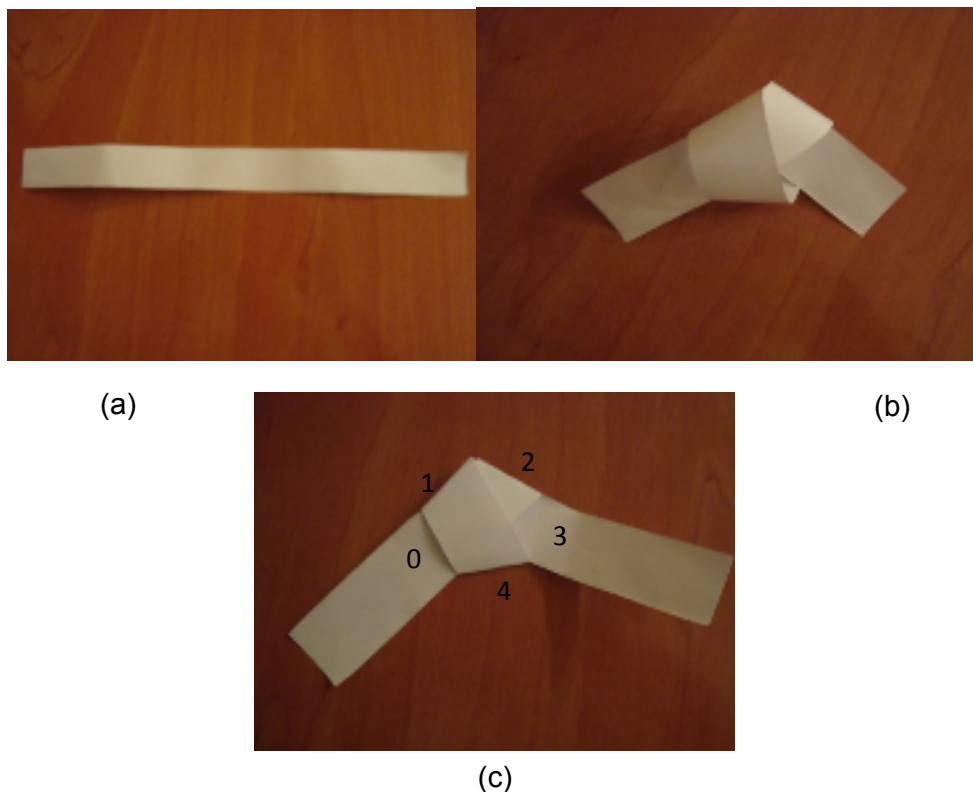


Figura 1.1

---

\*Totes les fotografies d'aquest treball són originals, fetes per l'autora.

Per demostrar que aquest pentàgon és regular ens hem de fixar amb quatre característiques (Iranzo, 2004):

1. Si dobleguem la tira de paper com a la figura 1.2 veiem que l'angle d'incidència ( $\alpha$ ) és el mateix que el de reflexió ( $\beta$ ), és a dir,  $\alpha = \beta$ . Això es produeix perquè els costats de la tira són paral·lels i per aquest motiu també podem observar que els angles  $\alpha$  i  $\beta$  marcats a la mateixa figura 1.2, són iguals. Per tant, ABC és un triangle, sent isòsceles  $AC=BC$ .

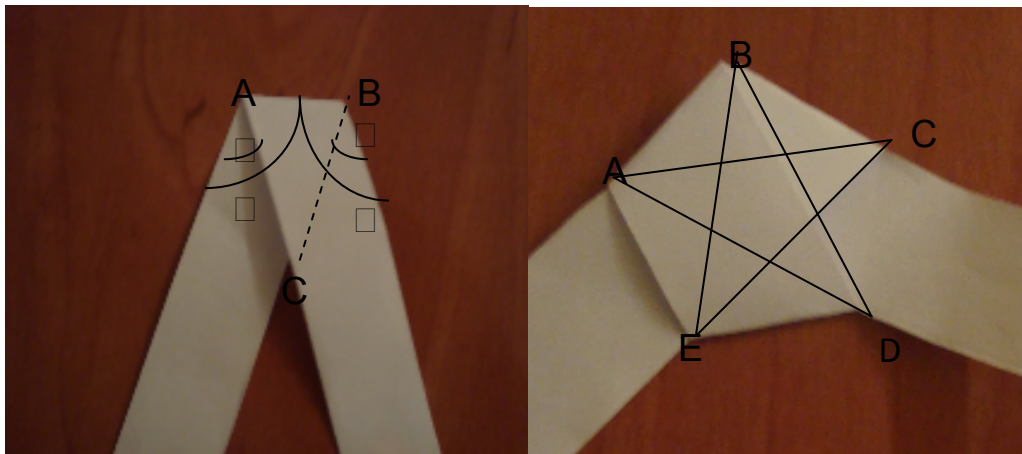


Figura 1.2

Figura 1.3

2. Si ens fixem en la figura 1.3 podem observar que està dividida en triangles i segons la figura 1.2 i el raonament anterior podem fixar-nos en que:
  - La tira entra pel costat AE sortirà pel costat ED doblegant-se per BC, per tant els angles ABC i BCD són iguals. A més els costats BE i CE seran iguals perquè BCE serà un triangle isòsceles.
  - La tira entra pel costat BC sortirà pel costat BA doblegant-se per ED, per tant els angles CDE i DEA seran iguals. A més, els costats BE i BD seran iguals perquè BDE serà el triangle isòsceles.
  - La tira de paper entra pel costat ED, sortirà pel costat CD doblegant-se per AB, per tant els angles dels vèrtex EAB i ABC seran iguals. A més els costats AD i BD seran iguals perquè ABD serà el triangle isòsceles.

Amb això hem justificat que els angles interiors del pentàgon són iguals i que els costats BE, CE, AD, BD i AC, ara falta justificar la igualtat dels costats.

3. Dividim el pentàgon en tres paral·lelograms: ABZE (figura 1.4 a), ABCY (figura 1.4 b) i BCDY (figura 1.4 c). Els paral·lelograms tenen quatre costats entre els quals els oposats són iguals perquè la tira de paper té els costats paral·lels. Per mirar si els costats continus són iguals, podem aplicar la fórmula de l'àrea del paral·lelogram de la manera següent:

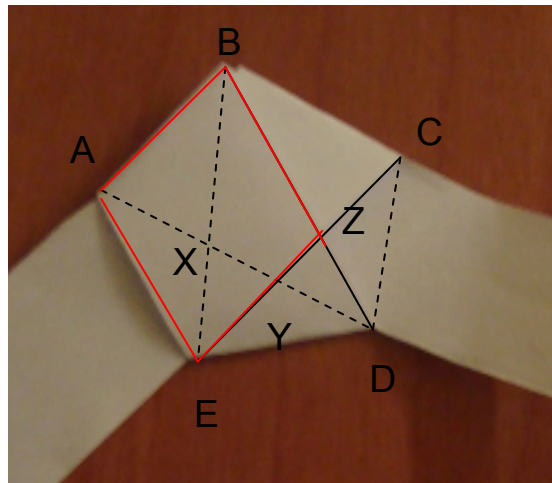
1r Rombe: Àrea ABZE =  $h \cdot AB$  o Àrea ABZE =  $h \cdot AE$

2n Rombe: Àrea ABCY =  $h \cdot AB$  o Àrea ABCY =  $h \cdot BC$

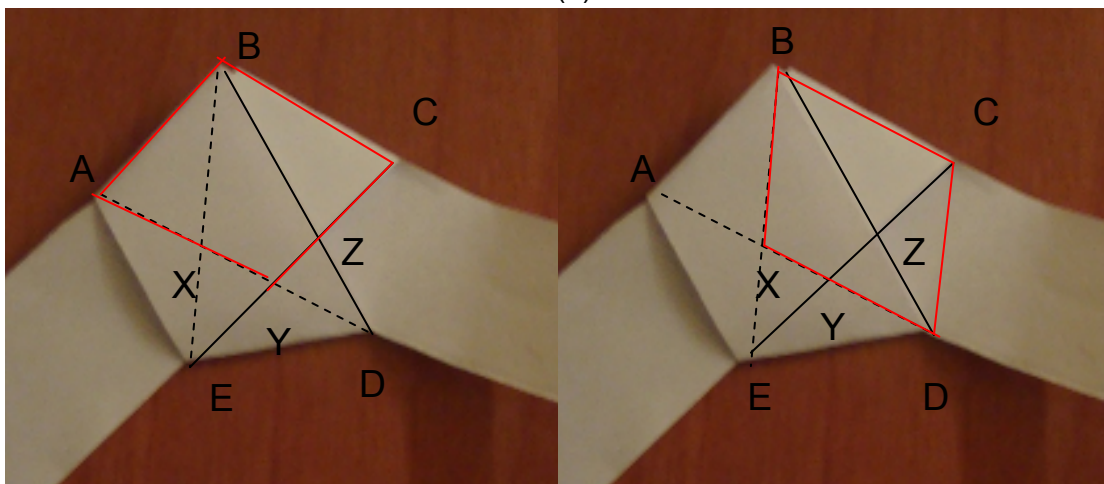
3r Rombe: Àrea BCDY =  $h \cdot BC$  o Àrea BCDY =  $h \cdot CD$

D'aquesta manera, obtenim que del primer rombe  $AB=AE$ , del segon rombe  $AB=BC$  i del tercer rombe  $BC=CD$ .

Ara només falta justificar que també és igual el costat ED.



(a)



(b)

(c)

Figura 1.4

4. Podem dividir el pentàgon en els trapezis ABDE (figura 1.5 a) i ABCE (figura 1.5 b) per tal de justificar que el costat ED que ens faltava és igual que tots els altres:

- Ja sabem que els costats AE, AB, BC i CD són iguals.
- Sabem que per l'apartat 1 en qual justificàvem els angles i la formació de triangles isòsceles, els costats BD i CE són iguals.

Així doncs, sabem que el trapezi ABCE té tres costats iguals (EA, AB i BC) i un de diferent (CE). Aleshores, coneixent que el trapezi ABDE té els costats AB i EA iguals que els corresponents del trapezi de la figura 1.5 (b) i el costat BD igual que el costat CE de la figura 1.5 (b), podem deduir que el costat ED que ens falta és igual que el EA de la segona figura i per tant, és igual a qualsevol dels costats curts dels trapezis.

Deduïm doncs que els trapezis són iguals i per tots els raonaments (1,2,3,4) el pentàgon té tots els costats i tots els angles iguals i per tant és regular.

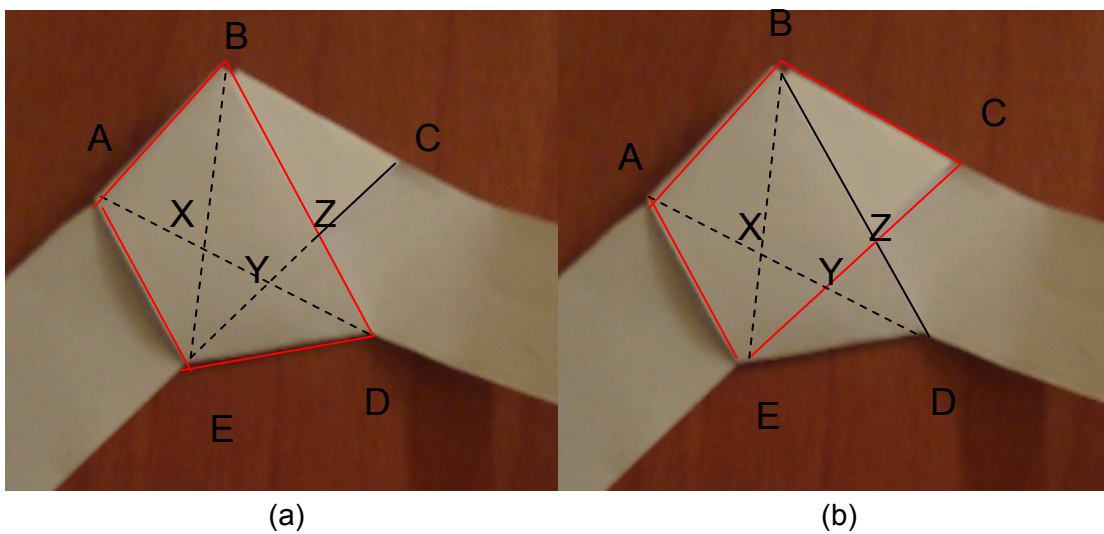


Figura 1.5



## 1.2 Aritmètica modular:

Un nus qualsevol (menys el pentàgon) té moltes possibilitats de construcció, però no totes ens fan arribar a un resultat correcte. Per trobar quines maneres són possibles i quines no, utilitzem l'aritmètica modular, que es basa en treballar sobre els residus de la divisió de determinats nombres, per un nombre anomenat mòdul.

Podem definir la congruència de dos nombres de la següent manera:

- Dos enters  $a$  i  $b$  són congruents en mòdul  $m$  si donen el mateix residu en ser dividits entre  $m$ . Es representa de la forma:  $a \equiv b$  (mòdul  $m$ )

Així doncs,  
 $a = m \cdot q + r$  (on  $q$  és el quocient de la divisió de  $a$  entre  $m$  i  $r$ , el residu)

$b = m \cdot q' + r$  ( el residu és el mateix que en la divisió anterior independentment del quocient, que pot ser diferent)

Si restem ambdues igualtats, obtenim:  $a - b = m \cdot h$

D'aquí deduïm que la diferència entre els nombres congruents sempre ha de ser un múltiple de  $m$ .

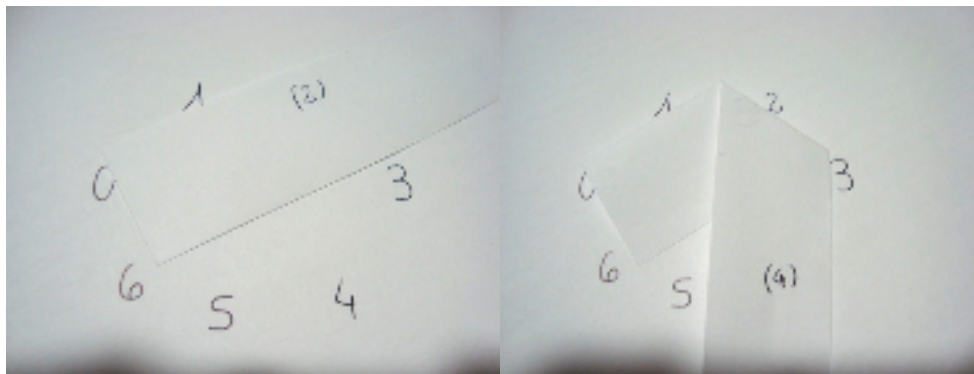
## 1.3 Construccions dels nusos heptagonals i octogonals:

### 1.3.1 Construïm el nus heptagonal:

Suposem que la tira de paper entra pel costat 0. Per poder fer un nus no és possible que la tira es doblegui pel costat 1 ni pel costat n-1 per simetria. Per tant, podrà sortir per 2,3,4 i 5.

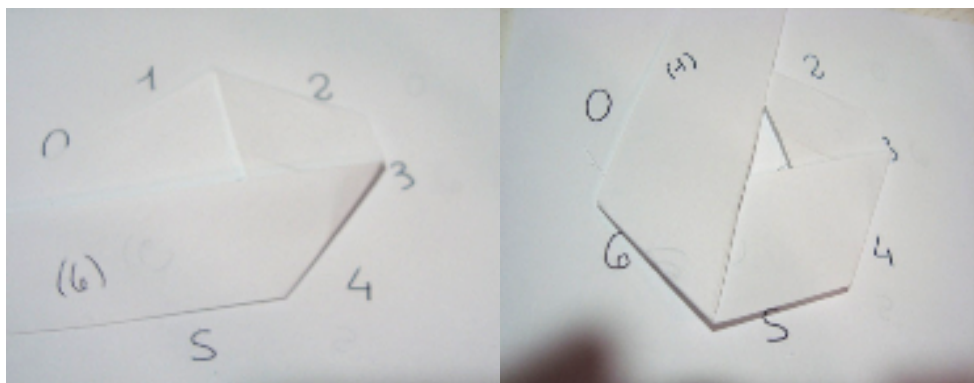
1. Si entrem pel 0 i surt pel 2 (0+2), tenim:

$0+2 \equiv 2$  (mòdul 7);  $2+2 \equiv 4$  (mòdul 7);  $4+2 \equiv 6$  (mòdul 7);  $6+2 \equiv 1$  (mòdul 7);  
 $1+2 \equiv 3$  (mòdul 7);  $3+2 \equiv 5$  (mòdul 7);  $5+2 \equiv 0$  (mòdul 7) (Veure figures 1.6 a,b,c,d,e,f)



(a)

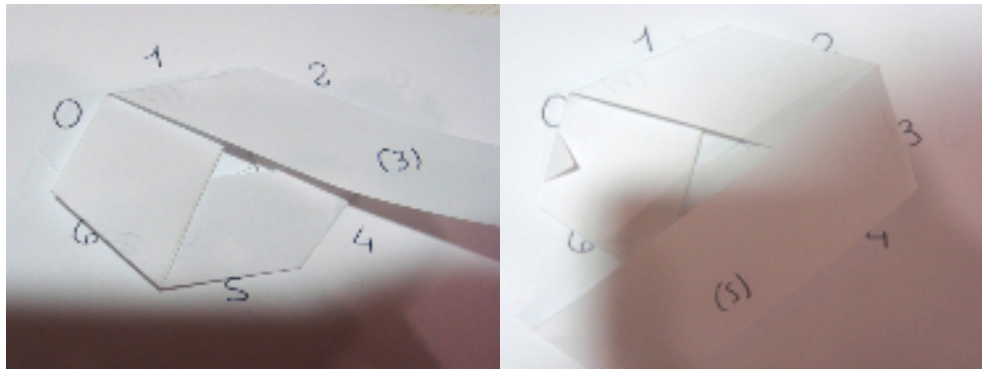
(b)



(c)

(d)

## Construint polígons amb paper



(e)

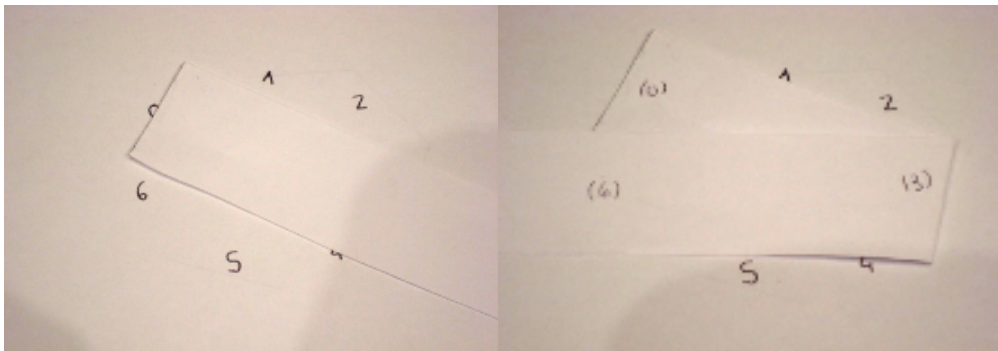
(f)

Figures 1.6

Si surt pel 2, perquè es consideri la igualtat d'angles (incidència i reflexió) hauria de continuar per 4 ( $2+2$ ), pel 6 ( $4+2$ ), per l'1 ( $6+2$ )... D'aquesta manera hem aconseguit passar per tots els 7 costats (del 0 al 6) costats de l'heptàgon. Hem pogut construir un heptàgon regular, que el diem:  $0+2$ .

2. Si entrem pel 0 i sortim pel 3, tenim:

- Inicialment passem de 0 a 3 ( $0+3 \equiv 3$ ) (mòdul 7)(figura 1.7 a)
- El següent costat serà el  $3+3 \equiv 6$  (mòdul 7)(figura 1.7 b)



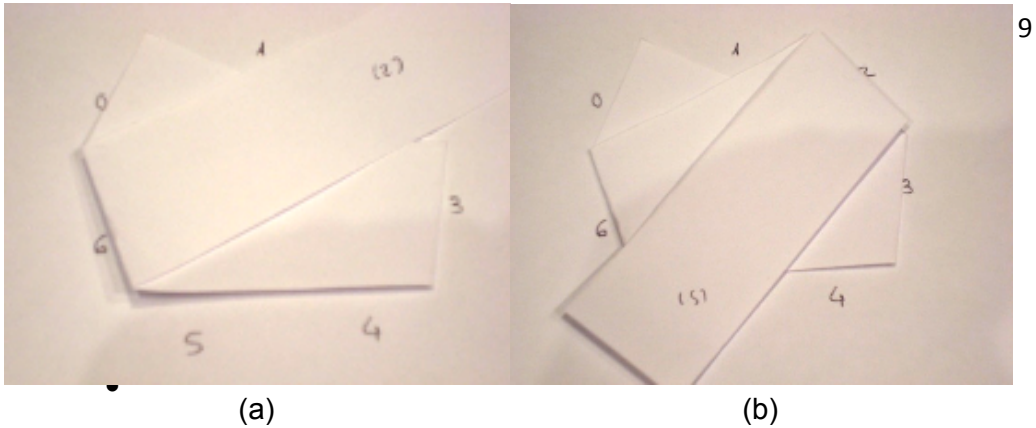
(a)

(b)

Figures 1.7

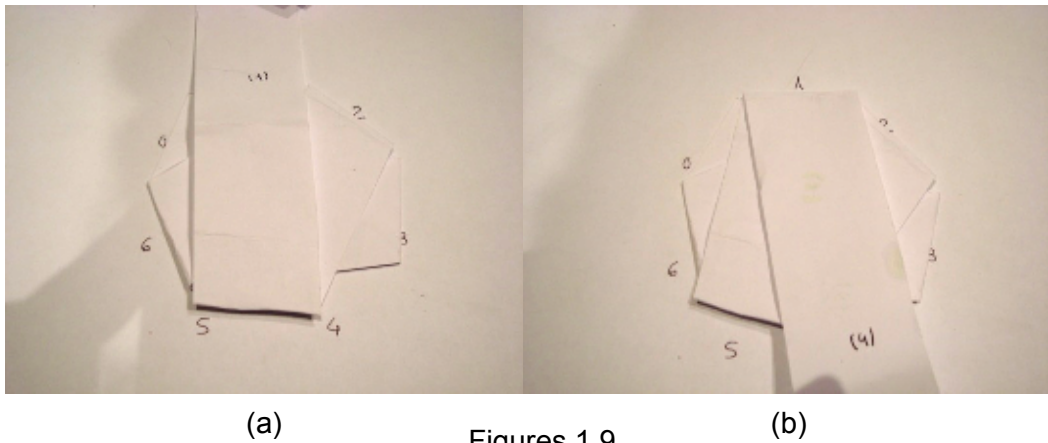
- Si fem el mateix, obtenim que el següent costat serà a  $6+3$ , però com que volem construir l'heptàgon,  $6+3 \equiv 2$  (mòdul 7) (figura 1.8 a)
- Aleshores,  $2+3 \equiv 5$  (mòdul 7)(Figura 1.8 b)

## Construint polígons amb paper



Figures 1.8

- Seguim cap el següent costat:  $5+3 \equiv 1$  (mòdul 7) (figura 1.9 a)
- I l'últim costat seria a  $1+3 \equiv 4$  (mòdul 7)(figura 1.9 b)
- 



Figures 1.9

Si ens hi fixem, hem passat per 0,3,6,2,5,1,4, que ordenat és 0,1,2,3,4,5,6. Hem generat pels set costats de l'heptàgon (figura 1.10), i per tant, generem l'heptàgon.

## Construint polígons amb paper

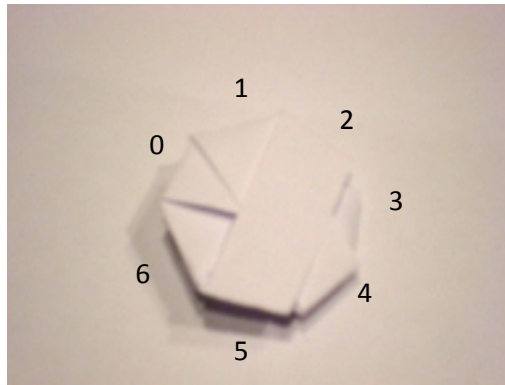


Figura 1.10

3. Ara ens toca passar del 0 al 4 (0+4). El costat 4 és simètric al 3, de manera que si amb 0+3 hem pogut construir l'heptàgon, també serà possible construir-lo passant del 0 al 4.
4. El següent que hauríem d'intentar construir és l'heptàgon 0+5. Podem deduir que construir aquest heptàgon també serà possible ja que el costat 5 és simètric al costat 2, de manera que si hem pogut construir l'heptàgon 0+2, també és possible el 0+5.

Podem treure com a conclusió que el nus heptagonal és possible de dur a terme de quatre maneres diferents (0+2, 0+3, 0+4, 0+5), però que en realitat en serien només dues ja que els costats 2 i 5 són simètrics i el 3 i el 4 també ho són. Aleshores només hi ha dues maneres (0+1 i 0+6) que no serveixen per construir l'heptàgon perquè no es pot fer el nus. Podríem dir que només hi ha una manera impossible de construir l'heptàgon ja que el costat 6 i l'1 són simètrics.

Podríem demostrar que la figura obtinguda és un heptàgon regular seguint el mateix raonament utilitzat pel pentàgon.

### 1.3.2 Construïm el nus octagonal

11

Com tots els altres nusos construïts fins ara, aquest es construeix de la mateixa manera mitjançant l'aritmètica modular. En aquest cas tenim mòdul 8  $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ . Podem intentar fer aquest octàgon de cinc maneres diferents (tenint en compte que si entrem pel 0, no podem sortir ni per l'1 ni pel 7), començant pel zero i anant cap a set costats diferents ja que el vuitè és l'inicial (el 0):

- Passem del 0 al 2:

- $0+2\equiv 2$  ;  $2+2\equiv 4$  ;  $4+2\equiv 6$  ;  $6+2\equiv 0$  (mòdul 8)

No hem pogut generar tots els elements  $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$  i per tant tampoc hem pogut passar pels vuit costats que formen l'octàgon, sinó només pels costats 2,4,6 i 0 de manera que no és possible construir l'octàgon 0+2.

- Seguidament intentem l'octàgon que passa del costat inicial 0 al costat 3:

- $0+3\equiv 3$  ;  $3+3\equiv 6$  ;  $6+3\equiv 1$  ;  $1+3\equiv 4$  ;  $4+3\equiv 7$  ;  $7+3\equiv 2$  ;  $2+3\equiv 5$  ;  $5+3\equiv 0$

Ja hem passat per tots els costats de l'octàgon  $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$  però desordenats (3,6,1,4,7,2,5,0), és possible dur a terme l'octàgon passant del costat 0 al 3. El resultat seria el següent (figura 1.11):

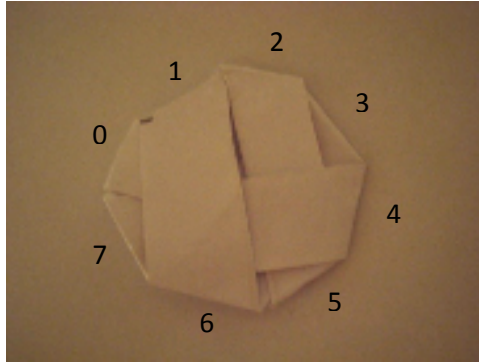


Figura 1.11

- Intentem construir l'octàgon 0+4:

12

- $0+4 \equiv 4$  ;  $4+4 \equiv 0$

No és possible construir aquest octàgon ja que només podem passar per dos costats, en comptes de vuit que hauria de tenir l'octàgon.

- La següent manera de construir un octàgon és començant pel 0 i anant cap el 5. Podem observar que el costat 3 és simètric al costat 5, de manera que si ha estat possible construir l'heptàgon 0+3 també ho és el 0+5.

- El següent octàgon per intentar és el 0+6. Si ens hi fixem, el costat 6 és simètric al costat 2, de manera que si no hem pogut construir l'octàgon 0+2 anteriorment, tampoc ho serà l'octàgon 0+6.

La conclusió és que l'octàgon es pot construir de dues maneres diferents (0+3 i 0+5). Podríem dir que només hi ha una solució ja que el costat 3 i el costat 5, com hem dit anteriorment, són simètrics. Les altres maneres de construir aquest octàgon no són possibles.

## 1.4 Què passa amb el nus hexagonal?

Veurem a continuació que no és possible construir un nus hexagonal i mitjançant l'aritmètica modular podem explicar el per què.

- Suposem que anem a fer un nus hexagonal amb una tira de paper. Per l'explicació anterior sabem que si parlem d'un hexàgon, el mòdul serà 6.
- Comencem a fer la figura entrant amb la tira pel costat 0. (figura 1.12)

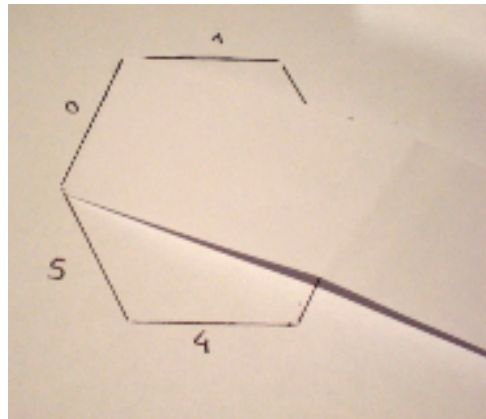


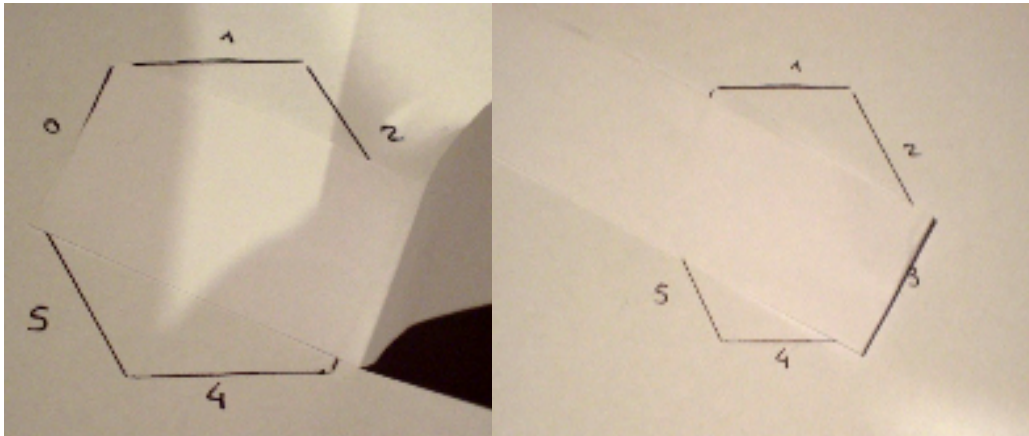
Figura 1.12

- Aleshores la tira ha de creuar cap algun costat.
- El primer pas seria provar d'anar cap el costat 2:
  - Passem del costat 0 al 2, i com que anteriorment havíem dit que l'hexàgon tenia mòdul 6, podem dir que  $0+2 \equiv 2$  (mòdul 6)
  - Hem de fer de manera que els costats siguin simètrics de manera que si som al costat 2, ara haurem d'anar cap el 4:  $2+2 \equiv 4$  (mòdul 6)
  - Ara toca anar cap el costat 6, o sigui el 0, de manera que :  $4+2 \equiv 0$  (mòdul 6)
  - Hem tornat al costat 0, de manera que ara ja hauríem d'haver passat per tots els sis costats possibles (del 0 al 5), en



canvi només hem passat per quatre costats:  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ . De manera que podem deduir que no és possible dur a terme un hexàgon començant per  $0+2$ .

- Tot seguit hem d'intentar si és possible anar cap el costat 3 seguint el mateix mètode:
  - Inicialment passem la tira de paper del costat 0 al 3, és a dir:  $0+3 \equiv 3$  (mòdul 6) (figura 1.13 a).



(a)

(b)

Figures 1.13

- Com que sabem que els plecs han de ser simètrics, sinó no obtindríem un hexàgon regular, el següent doblec ha de ser al costat 6 (figura 1.13 b), però com que hem començat al costat 0, només tenim fins el costat 5, de manera que  $3 + 3 \equiv 0$ . El costat següent on hauria d'anar la tira és el 0, però ja està ocupada per un costat. La conclusió és que no és possible dur a terme l'hexàgon començant per  $0+3$ .

- El següent intent hauria de ser cap el costat 4, però tampoc és possible ja que:

- $0+4 \equiv 4$  (mòdul 6);  $4+4 \equiv 2$  (mòdul 6);  $2+4 \equiv 0$  (mòdul 6)
- Només hem passat per tres costats, de manera que no es pot dur a terme l'hexàgon.

- L'únic que ens falta comprovar és el 0+5, però no és necessari ja que el costat 1 i el costat 5 són simètrics de manera que si en 0+1 ha estat impossible, passant del 0 al 5, també ho serà.

El resultat és que no és possible dur a terme un nus hexagonal, de cap de les maneres possibles.

Podem enunciar una possible conclusió general que ens diria en quins casos (de quines maneres) seran possibles o no de construir els nusos si partim d'un polígon de  $n$  costats  $\{0,1,\dots,n-1\}$ .

- Es podrà construir un nus que generi el polígon sempre que existeixi un nombre qualsevol que multiplicat pel costat  $k$ , al qual anem després del costat 0, tingui per resultat 1 (sempre tenint el compte el mòdul en el qual estem).

Per poder generar un polígon de  $n$  costats hem de començar anant des del costat 0 fins un costat  $k$  de forma que continuant el procés:

$$0 \rightarrow k \rightarrow k+k \rightarrow k+k+k \rightarrow \dots$$

Es passi per tots els costats del polígon, és a dir, que els elements del conjunt  $\{0, k, 2k, 3k, \dots, (n-1)k, nk\}$  siguin diferents entre si. En aquest sentit Irazo (2004) afirma que això serà possible sempre que  $k$  sigui una unitat en el conjunt  $(\{0,1,2, \dots, n-1\})$ , és a dir, que puguem trobar un nombre  $h$  tal que  $k \cdot h \equiv 1 \pmod{n}$ .

Abans de justificar aquesta propietat, podem posar alguns exemples:

- L'HEPTÀGON. Les maneres amb les quals era possible construir l'heptàgon eren: 0+2, 0+3, 0+4 i 0+5. Comprovem-ho:

- 0+2

Busquem si existeix un nombre que multiplicat per 2 sigui congruent amb 1 (mòdul 7) mitjançant l'aritmètica modular (i per tant parlem nombres enters), tenint en compte el mòdul que en aquest cas és 7.

$2 \cdot 1 \equiv 2$  ;  $2 \cdot 2 \equiv 4$  ;  $2 \cdot 3 \equiv 6$  ;  $2 \cdot 4 = 8 \equiv 1 \rightarrow$  2 multiplicat per 4  $\equiv 1$ , per tant existeix un nombre (4) que multiplicat per 2 sigui 1, doncs és possible dur a terme l'heptàgon 0+2.

- 0+3

El producte de 3 i un altre nombre ha de ser  $\equiv a 1$ .

$3 \cdot 1 \equiv 3$  ;  $3 \cdot 2 \equiv 6$  ;  $3 \cdot 3 = 9 \equiv 2$  ;  $3 \cdot 4 = 12 \equiv 5$ ;  $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \rightarrow$  existeix un nombre que multiplicat per 3 és  $\equiv 1$ , de manera que és possible construir l'heptàgon 0+3.

- 0+4

Busquem si existeix un nombre que multiplicat per 4 sigui congruent a 1.

$4 \cdot 1 \equiv 4$  ;  $4 \cdot 2 = 8 \equiv 1 \rightarrow$  hem trobat el nombre que multiplicat per 4 és  $\equiv a 1$ .

- 0+5

El producte d'un nombre i 5 ha de ser congruent a 1.

$5 \cdot 1 \equiv 5$  ;  $5 \cdot 2 = 10 \equiv 3$  ;  $5 \cdot 3 = 15 \equiv 1 \rightarrow$  el nombre que multiplicat per 5 és  $\equiv a 1$  és el 3, per tant, també és possible construir l'heptàgon 0+5.

Ara podem comprovar els resultats de l'OCTÀGON. Sabem que eren possibles les construccions dels octàgons 0+3 i 0+5.

- 0+3

Busquem el nombre que multiplicat per 3 és congruent a 1. Estem en mòdul 8 (perquè és un octàgon).

$3 \cdot 1 \equiv 3$  ;  $3 \cdot 2 \equiv 6$  ;  $3 \cdot 3 = 9 \equiv 1 \rightarrow$  el producte de 3 per 3 és 1 en el mòdul 8, així doncs sí que és possible construir l'octàgon 0+3.

- 0+5

Busquem el nombre que multiplicat per 5 és  $\equiv 1$ .

$5 \cdot 1 \equiv 5$  ;  $5 \cdot 2 = 10 \equiv 2$  ;  $5 \cdot 3 = 15 \equiv 7$  ;  $5 \cdot 4 = 20 \equiv 4$  ;  $5 \cdot 5 = 25 \equiv 1 \rightarrow$  el nombre que multiplicat per 5 és congruent a 1 és el mateix nombre 5. Aleshores, també és possible construir l'octàgon  $0+5$ .

Per justificar l'afirmació anterior hem de demostrar que si  $k$  és una unitat els elements del conjunt  $Z_n = \{0, k, 2k, \dots, (n-1)k\}$  han de ser diferents.

Suposem que  $m_1 \neq m_2$  en  $Z_n$  i hem de justificar que  $m_1 k \equiv m_2 k$  (mòdul  $n$ ).

En efecte, si suposem que  $m_1$  és diferent de  $m_2$  en  $Z_n$  i que  $m_1 k \equiv m_2 k$  (mòdul  $n$ ), aleshores  $m_1 k \cdot h \equiv m_2 k \cdot h$  (mòdul  $n$ ) i com  $k \cdot h = 1$ , seria  $m_1 \equiv m_2$  (mòdul  $n$ ), que és una contradicció, per tant, si  $m_1 \neq m_2$  en  $Z_n$ , aleshores  $m_1 k$  és diferent de  $m_2 k$  en  $Z_n$ .

Així doncs, només hem de buscar un element que sigui unitat entre els elements  $\{2, 3, 4, \dots, (n-2)\}$ , ja que l'1 i l' $n-1$  sempre són unitats. Per trobar aquests elements entren en joc la funció i el teorema d'Euler.

## 1.5 Funció i teorema d'Euler:

La funció  $\varphi$  d'Euler és important en la teoria de nombres. Si  $m$  és un nombre enter positiu, llavors  $\varphi(m)$  es defineix com el nombre d'elements del següent conjunt:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m \text{ tals que m.c.d.}(m,n) = 1\}$$

És a dir, que el nombre d'enters positius  $n$  menors o iguals que  $m$  i coprimers amb  $m$

Tenint en compte aquesta definició, veiem que:

$$\varphi(p) = p-1 \quad \text{Si } p \text{ és primer}$$

$$\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1} \quad \text{Si } p \text{ és el primer i } k \text{ és un nombre natural}$$

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \quad \text{Si } m \text{ i } n \text{ són primers relatius (coprimers)}$$

Aplicant aquestes propietats, si  $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$

$$\varphi(m) = (p_1-1)p_1^{k_1-1} \cdot (p_2-1)p_2^{k_2-1} \dots (p_r-1)p_r^{k_r-1} \quad ; \text{ aleshores es veu fàcilment que}$$

$$\varphi(m) = m \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Podem fer una taula per tal de trobar  $\varphi$  dels deu primers nombres:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi$ (m)	0	1	2	2	4	2	6	4	6	4

Podem deduir que si  $m > 6$  aleshores  $\varphi(m) \geq 3$  on  $n$  és el nombre de costats.

Per altra banda, el teorema d'Euler diu que si  $a$  i  $n$  són primers relatius.

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Seguint aquest teorema, quan parlem de nusos podrem trobar si serà possible o no la seva construcció.

Per exemple, si parlem d'un nus octogonal, sabem que té mòdul 8 i  $Z_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Els coprimers del mòdul 8 seran 1, 3, 5, 7. Aleshores hem de

mirar si el 3 i el 5 són unitats, és a dir, que siguin congruents a 1 en mòdul 8, ja que 1 i 7 sempre ho seran (1 i n-1). Apliquem la fórmula  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$  :

$$\varphi(8) = 4$$

$3^4 \equiv 1 \pmod{8}$  Així doncs el 3 és una unitat perquè  $3 \cdot 3^3 \equiv 1 \pmod{8}$ , és a dir, hem trobat  $h=3^3$  que multiplicat per 3 el resultat és congruent amb 1.

$5^4 \equiv 1 \pmod{8}$  De la mateixa manera el 5 és unitat ja que hem trobat  $h=5^3$  que multiplicat per 5 és congruent amb 1 ( $5 \cdot 5^3 \equiv 1 \pmod{8}$ ).

Així obtindríem que és possible el nus octogonal ja que 3 i 5 són congruents amb 1 mòdul 8.

Per altra banda, podem posar l'exemple de l'hexàgon. Sabem que el nus hexagonal no és possible perquè ho hem justificat anteriorment. Tindrà mòdul 6  $\{0,1,2,3,4,5\}$ , i els coprimers seran 1 i 5 ( $\varphi(6) = 2$ ). Només té dos primers relatius que són 1 i n-1 que ho són sempre. Aleshores no és possible la construcció de l'hexàgon perquè no té més primers relatius que 1 i n-1.

## **Capítol 2: Polígon regular òptim inscrit en un quadrat**

En aquest capítol relacionem els axiomes acceptats en els quals es basa la papiroflèxia. Construirem els polígons (triangle, pentàgon, hexàgon i heptàgon) d'àrea màxima construïbles en un quadrat de paper, i relacionarem el procés de realització d'aquestes figures, amb els esmentats axiomes.

### **2.1 Axiomes de Huzita-Hatori:**

La papiroflèxia és regida per unes normes que s'han estructurat en axiomes, són els anomenats axiomes de Huzita-Hatori. Aquests axiomes estableixen que qualsevol procés serà dut a terme sobre un full de paper perfecte i tots els plecs seran lineals i descriuen les operacions que es poden fer doblgant un full de paper.

No va ser Huzita-Hatori el primer de formalitzar aquests axiomes sinó Jacques Justin el 1989. Dos anys més tard els axiomes de l'1 al 6 foren redescoberts i relatats a la Primera Conferència d'origami pel matemàtic Humiaki Huzita. L'últim axioma, el 7, va ser reformulat el 2001 per Kishiro Hatori.

Els set axiomes de Huzita-Hatori són els següents (a continuació de cada axioma fem una breu traducció en geometria analítica):

**Axioma 1.** Donats dos punts,  $P_1$  i  $P_2$ , podem doblgar el paper de manera que es formi una línia que els connecti (Figura 2.1).

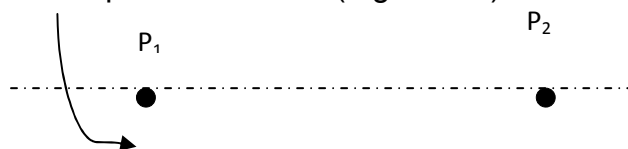


Figura 2.1

L'equació d'aquesta recta que passa per dos punts,  $P_1 = (x_1, y_1)$  i  $P_2 = (x_2, y_2)$ , seria:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

**Axioma 2.** Donats dos punts,  $P_1$  i  $P_2$ , podem doblegar el paper de manera que  $P_1$  quedi sobre  $P_2$  i al revés, i es formi una línia que equidisti dels dos punts  $P_1$  i  $P_2$  (mediatriu del segment  $\overline{P_1P_2}$ ) (Figura 2.2)

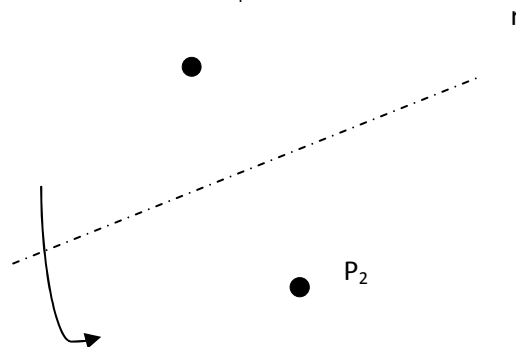


Figura 2.2

Si les coordenades dels punts són:  $P_1 = (x_1, y_1)$  i  $P_2 = (x_2, y_2)$

Aleshores el punt mitja (M) del segment  $\overline{P_1P_2}$  és:  $M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

I, per tant, l'equació de la recta r serà:  $y - \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left( x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$

**Axioma 3.** Donades dues línies,  $l_1$  i  $l_2$ , podem doblegar el paper de manera que  $l_1$  quedi sobre  $l_2$ , i al revés (Figura 2.3):

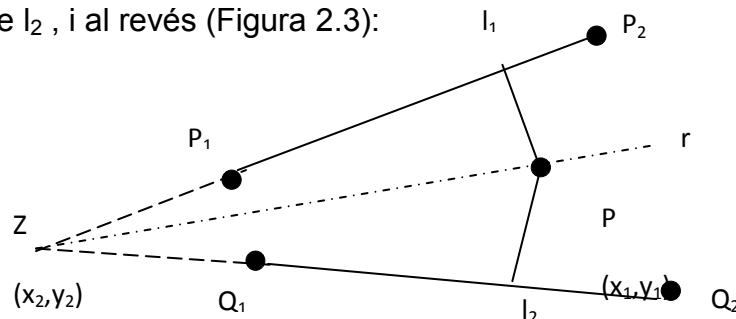


Figura 2.3



Aquest procés és equivalent a trobar la bisectriu de l'angle de costats  $l_1$  i  $l_2$ . Podem dir que  $l_1$  conté els punts  $P_1$  i  $P_2$ , i  $l_2$  conté els punts  $Q_1$  i  $Q_2$ , com està marcat a la figura. L'equació de la bisectriu és l'equació de la recta que es forma.

Donades les dues rectes:

$$l_1: Ax+By+C=0 \qquad l_2: Ax'+B'y+C'=0$$

Sabem que la distància entre les rectes i el punt  $P$  és la mateixa per les dues rectes, és a dir,  $d(P,l_1)=d(P,l_2)$ . Podem aplicar que:

$$\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|A'x+B'y+C'|}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

Aquesta és l'equació de les dues bisectrius dels angles que determinen les dues rectes.

**Axioma 4.** Donat un punt  $P_1$  i una línia  $l_1$  podem doblegar el paper de manera que la línia quedi sobre ella mateixa i que el doblec passi per  $P_1$  (Figura 2.4):

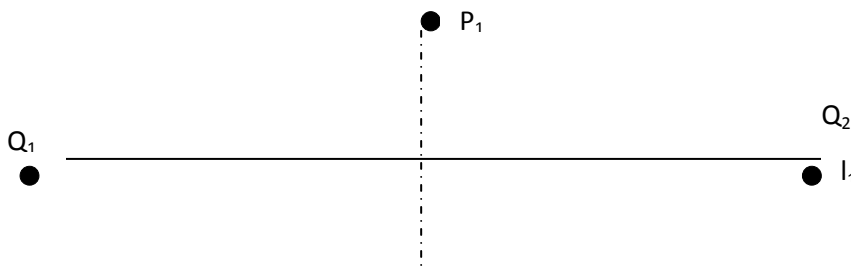


Figura 2.4

És equivalent a trobar la recta perpendicular a  $l_1$  que passi per  $P_1$ . Aquesta recta serà de la forma:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

on  $m$  serà el pendent de la recta que passa per  $P_1 = (x_1, y_1)$ , perpendicular al de la recta  $l_1$  (donada).

**Axioma 5.** Donats dos punts,  $P_1$  i  $P_2$ , i una línia  $l_1$ , podem doblegar de manera que  $P_1$  quedi sobre  $l_1$  i el doblec passi pel punt  $P_2$  (Figura 2.5).

## Construint polígons amb paper

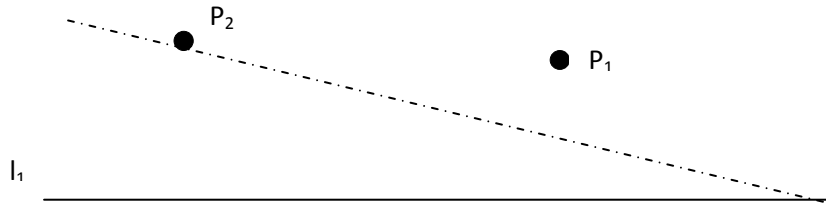


Figura 2.5

Aquest axioma és equivalent a trobar el punt on es tallen la recta  $l_1$  amb un cercle amb centre a  $P_2$  i amb radi igual a la distància entre  $P_1$  i  $P_2$ . Aquesta operació pot tenir 0, 1 o 2 solucions:

0. Quan el cercle no talla la línia  $l_1$ . (Figura 2.6)
1. Quan el cercle és tangent a la línia  $l_1$ , és a dir, que el cercle i la línia  $l_1$  tan sols es toquen per un punt. (Figura 2.7)
2. Quan el cercle talla la línia  $l_1$  en dos punts. (Figura 2.8)

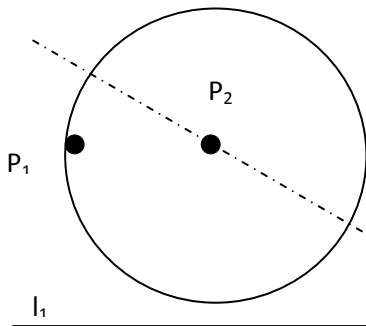


Figura 2.6

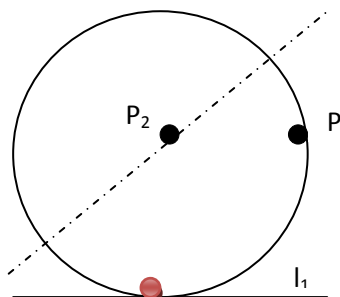


Figura 2.7

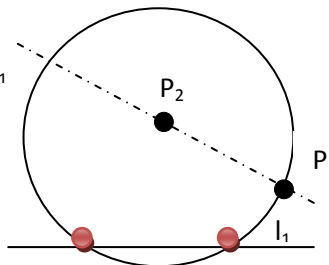


Figura 2.8

Les solucions s'obtidran de la resolució del sistema:

Equació de la recta  $l_1$

Equació del cercle de centre  $P_2 = (x_2, y_2)$  i radi  $r =$  distància de  $P_1$  a  $P_2$ .

$Ax + By + C = 0$

$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2$

**Axioma 6:** Donats dos punts  $P_1$  i  $P_2$  i dues línies  $l_1$  i  $l_2$ , és possible doblegar  $P_1$  sobre  $l_1$  i  $P_2$  sobre  $l_2$  (Figura 2.9).

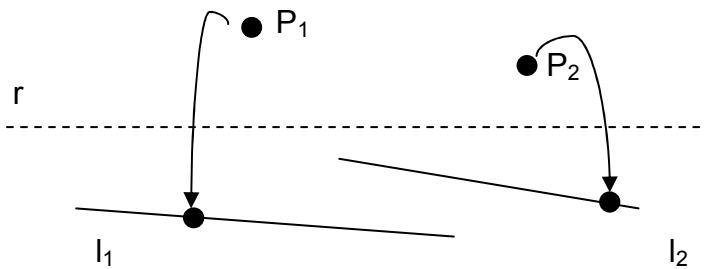


Figura 2.9

Si prenem  $l_2$  com a eix d'ordenades ( $x=0$ ) i  $P_2(x_2,0)$  sobre l'eix d'abscises. Si considerem que l'equació de la recta  $l_1$  és  $Ax+By+C=0$  i les coordenades de  $P_1=(x,y)$ , aleshores podem calcular les equacions de les paràboles:

- De directriu  $l_1$  i de focus  $P_1$  aplicant la definició de paràbola:  $d(X,P_1)=d(X,l_1)$ , sent  $X=(x,y)$  un punt qualsevol de la paràbola.
- De directriu  $l_2$  i de focus  $P_2$ , igualment  $d(X,P_2)=d(X,l_2)$

La línia  $r$  que hem aconseguit aplicant aquest axioma 6 és tangent simultàniament a les dues paràboles. Aplicant aquest axioma 6 podem resoldre equacions cúbiques (<http://origami.ausaan.com/library/conste.html>)

**Axioma 7.** Donat un punt  $P$  i dues línees  $l_1$  i  $l_2$ , podem doblegar el paper de manera que  $P$  quedi al damunt de  $l_1$  i el doblec sigui perpendicular a  $l_2$  (Figura 2.10)

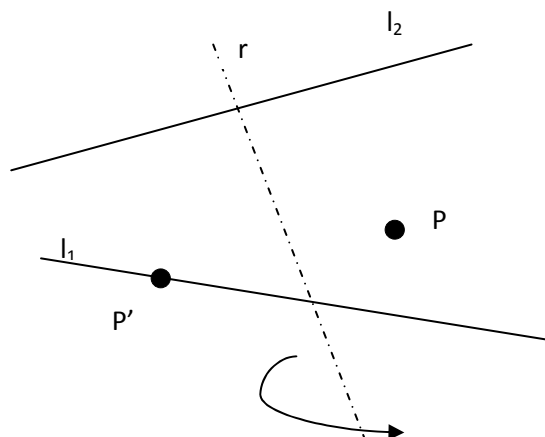


Figura 2.10

Podem trobar el punt (P') de  $l_1$  (punt on P queda al damunt de  $l_1$  quan dobleguem) de manera que la mediatriu de PP' sigui perpendicular a  $l_2$ .

Sabem que  $P = (x_1, y_1)$

I desconeixem P',  $P' = (a, b)$

Si volem que r sigui perpendicular a  $l_2$ , el pendent de  $l_2$  ha de ser el mateix que el de la recta PP'. Per tant, fent la intersecció de la recta  $l_1$  i la que passi per P i tingui el pendent de  $l_2$  obtindríem el punt P'.

Suposem que l'equació de  $l_1$  és  $Ax + By + C = 0$  i la de  $l_2$  és  $A'x + B'y + C' = 0$

El pendent de  $l_2$  ( $m_2$ ) ha de ser paral·lel al segment PP':  $m_2 = \frac{-B'}{A'}$

Per trobar el pendent de la recta PP', necessitem trobar, primer de tot, el vector d'aquesta recta:  $\overrightarrow{PP'} = P' - P \rightarrow \overrightarrow{PP'} = (a, b) - (x_1, y_1) \rightarrow \overrightarrow{PP'} = (a - x_1, b - y_1)$

El pendent d'una recta qualsevol és  $\frac{b}{a}$ , així doncs el pendent de PP' és :

$$m_1 = \frac{b - y_1}{a - x_1}$$

Com que les rectes  $l_2$  i PP' hem dit que haviem de ser paral·leles, vol dir que tenen el mateix pendent, de manera que podem igualar els pendents trobats  $\frac{-B'}{A'} = \frac{b - y_1}{a - x_1}$  i formar un sistema d'equacions amb l'equació que obtenim al

substituir les incògnites de la recta  $l_1$  per les coordenades de P':  $Aa + Bb + C = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-B'}{A'} = \frac{b - y_1}{a - x_1} \\ Aa + Bb + C = 0 \end{array} \right\} \text{Obtindríem les coordenades de P'}$$

## 2.2 Aplicacions de la Papiroflèxia: Com trisecar un angle mitjançant la papiroflèxia

Hi ha processos que són impossibles de dur a terme fent servir regle i compàs, però que sí que són possibles utilitzant la papiroflèxia. Una d'aquestes accions és, per exemple, trisecar un angle. Trisecar un angle utilitzant la papiroflèxia és ben senzill:

1. Primer hem de dibuixar o marcar, doblgant el paper, l'angle que volen trisecar en un dels vèrtexs d'un full de paper qualsevol. A aquest angle inicial l'anomenarem  $\hat{A}$ . (Figura 2.11)
2. Dibuixem dues línies  $a$  i  $b$  equidistants i paral·leles al costat curt del full de paper (Figura 2.12), per tant  $BA=AC$ .

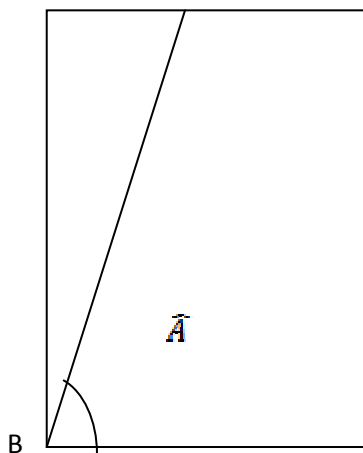


Figura 2.11

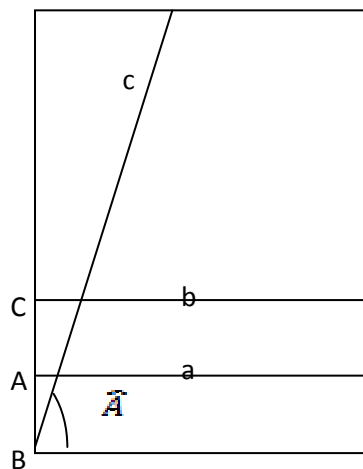


Figura 2.12

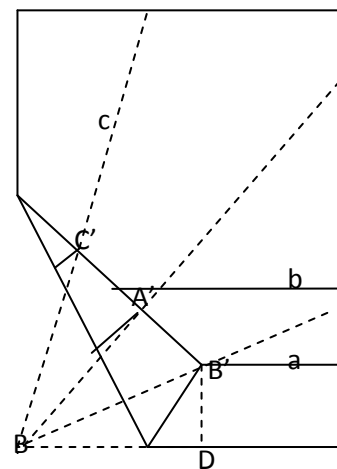


Figura 2.13

3. Ara, mitjançant l'axioma 6 dobleguem el punt B sobre la recta  $a$  i el punt C sobre la recta  $c$  i marquem els punts on C i B toquen les rectes  $c$  i  $a$ , respectivament (punts  $C'$  i  $B'$ ). També marquem el punt ( $A'$ ) on va a parar A al fer coincidir els punts C i B amb les rectes  $c$  i  $a$ . Aleshores obtenim tres punts que unirem amb el vèrtex B. Entre aquest punts hi tenim  $C'$  que està al damunt de la recta  $c$ . Les línies  $BB'$  i  $BA'$  trisequen l'angle  $\hat{A}$  (Figura 2.13).

## Construint polígons amb paper

Els triangles  $C'BA'$  i  $A'BB'$  són iguals ja que són rectangles i tenen dos costats iguals ( $BA'$ , que és comú, i  $C'A'=A'B'$  per ser  $CA=AB$ ). També el triangle  $B'AD$  és igual als anteriors perquè és rectangle en  $D$ , té el costat  $AB'$  comú i  $B'D=A'B'$  ja que  $BA$  és igual a  $AC$ . Per tant l'angle  $\hat{A}$  queda trisecat per les rectes  $BA'$  i  $BB'$ .

## 2.3 Polígons d'àrea màxima

Les finalitats d'aquest apartat són, per una banda, identificar els elements (angles i costats) que defineixen els triangles equilàters, pentàgons, hexàgons i heptàgons regulars d'àrea màxima inscrits en un quadrat, calcular aquesta àrea màxima i construir amb papiroflèxia els esmentats polígons. Per fer aquestes identifications, càlculs i construccions ens basem en el que demostra Dureisseix (1997 a,b), que fa servir procediments matemàtics fora del nivell d'aquest treball de recerca per justificar que els polígons regulars d'àrea màxima inscrits en un quadrat han de tenir almenys un vèrtex sobre el quadrat i han de ser simètrics respecte almenys una de les diagonals del quadrat.

### 2.3.1 Triangle

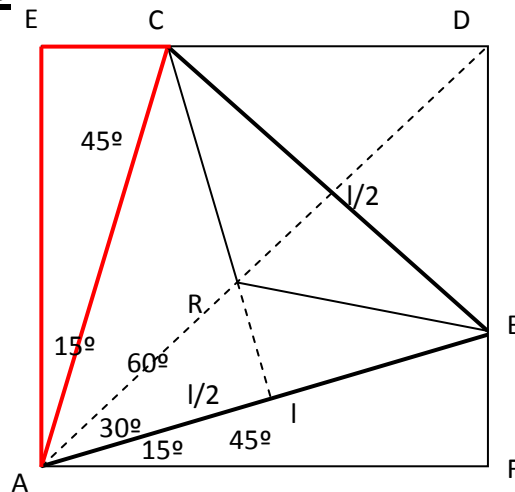


Figura 2.14

El triangle d'àrea màxima és un triangle equilàter, per tant, té tots els costats i angles iguals. Suposem que és simètric respecte de la diagonal AD.

Per trobar els angles interiors del triangle, només hem d'aplicar la fórmula  $\frac{(n-2)\pi}{n}$

on n són el nombre de costats:  $\frac{(3-2)\cdot 180}{3} = 60^\circ$

Si els angles del triangle són de  $60^\circ$  i l'angle que forma la diagonal amb la base del quadrat inicial és  $45^\circ$ , l'angle que forma BAF és de  $15^\circ$  ( $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ ). (Figura 2.14)

L'angle EAC és  $15^\circ$  per simetria amb l'angle BAF.

Per calcular l'àrea necessitem buscar el costat  $l$  i com que sabem que els costats del quadrat són 1:

29

(Triangle vermell)  $\cos 15^\circ = \frac{1}{l}$ ;  $l = \frac{1}{\cos 15^\circ}$

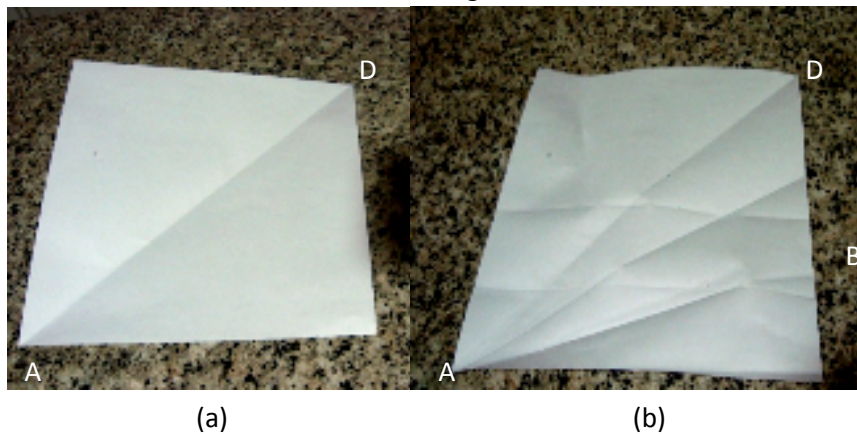
Aleshores l'àrea del triangle serà:  $A = \frac{\sin 60^\circ}{2 \cos^2 15^\circ} \rightarrow \underline{\underline{A = 0.4641}}$

### Construcció d'un triangle òptim inscrit en un quadrat:

Seguim el model dibuixat anteriorment.

1. Agafem un paper quadrat o en tallem un de forma quadrada (figura 2.15 a)
2. Senyalem una de les diagonals del quadrat formant angles de  $45^\circ$  (figura 2.15 a)
3. Mitjançant la trisecció d'un angle (explicada a la pàgina 27) trisequem un dels angles de  $45^\circ$ . (figura 2.15 b)

Figures 2.15



4. Aquesta recta obtinguda a l'unir els punts A i B serà un dels costats del triangle (Figura 2.16 a)



## Construint polígons amb paper

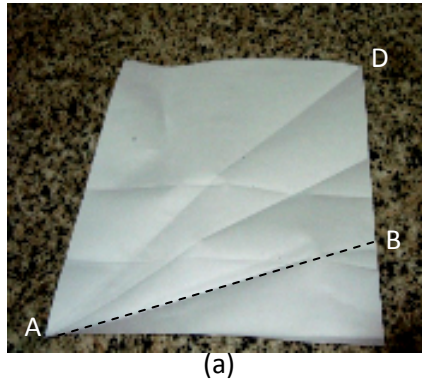


Figura 2.16

5. Per tal de trobar el punt C simètric a B podem utilitzar dues opcions: Utilitzar l'axioma 4 (ja que DA i B ja els hem obtingut) (Figura 2.17 a) o trisecar l'altre angle de  $45^\circ$  per simetria amb l'angle que hem trisecat anteriorment (Figura 2.17 b).

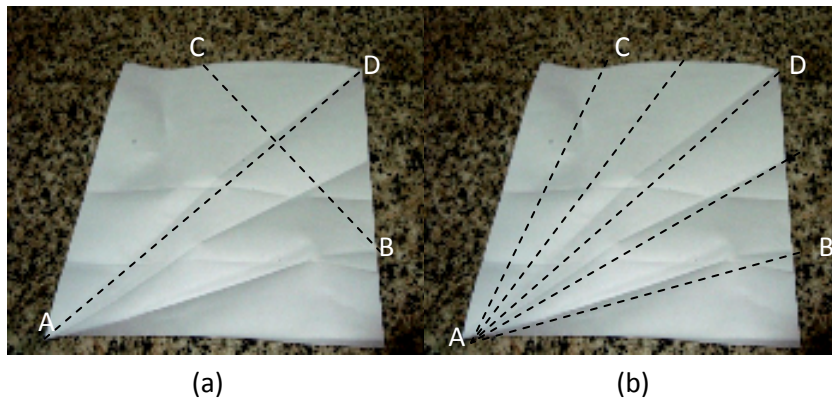


Figura 2.17

6. Un cop trobat aquest punt, formem la recta que uneix els punts B i C mitjançant l'axioma 1 i obtenim el segon costat del triangle. (Figura 2.18 a).
7. Finalment, podem unir el costat AC que ens queda per tal de formar el triangle. (Figura 2.18 b).

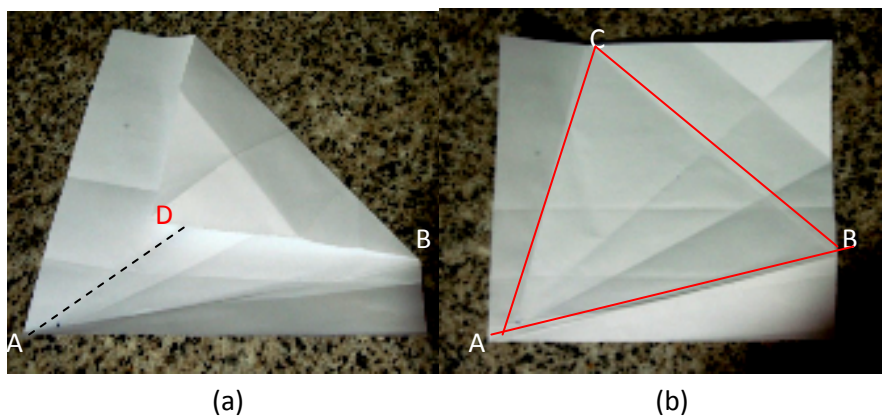


Figura 2.18

## 2.3.2 Pentàgon

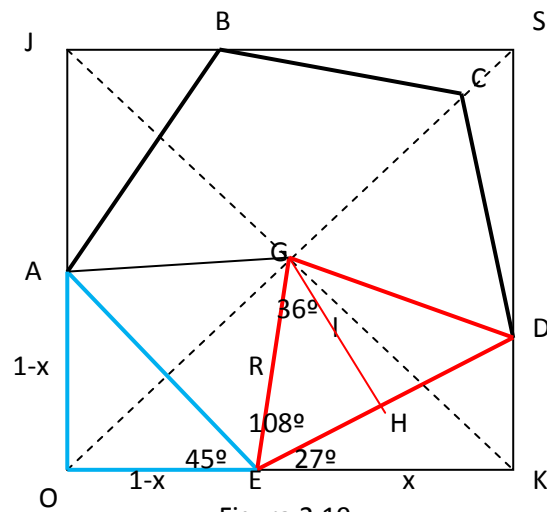


Figura 2.19

Suposem que el pentàgon d'àrea màxima inscrit en el quadrat és simètric respecte de la diagonal del quadrat OS per aquest motiu els segments AO i EO són iguals; i els angles que formen aquestes rectes amb el costat AE també són iguals. (Figura 2.19)

L'angle OEA és de  $45^\circ$  perquè el triangle rectangle OEA és isòsceles.

Els angles interiors del pentàgon són iguals perquè estem parlant d'un pentàgon regular; i aquests angles són de  $108^\circ$  perquè si apliquem la fórmula:

$$\frac{(n-2)\pi}{n} \text{ on } n \text{ és el nombre de costats i veiem que } \frac{(5-2) \cdot 180}{5} = 108^\circ$$

L'angle que formen les rectes ED i x és de  $27^\circ$  perquè sabent que un angle pla és de  $180^\circ$ , que l'angle AED és  $108^\circ$  i que l'angle OEA és  $45^\circ$ , podem dir que:  $180^\circ - 108^\circ - 45^\circ = 27^\circ$

Sabem que l'angle que formen EGH és  $36^\circ$  perquè és la meitat del EGD i aquest és  $360^\circ/5 = 72^\circ$ . (Figura 2.19, triangle vermell).

Sabent això, podem dir que:

En el triangle blau  $\sin 45^\circ = \frac{1-x}{l} \rightarrow l = \frac{1-x}{\sin 45^\circ}$

En el triangle vermell  $\cos 27^\circ = \frac{x}{l} \rightarrow l = \frac{x}{\cos 27^\circ}$

$$\begin{aligned} X \sin 45^\circ &= \cos 27^\circ - x \cos 27^\circ \rightarrow \\ x(\sin 45^\circ + \cos 27^\circ) &= \cos 27^\circ \rightarrow \mathbf{X = 0.5575} \end{aligned}$$

$$\mathbf{l = 0.6257}$$

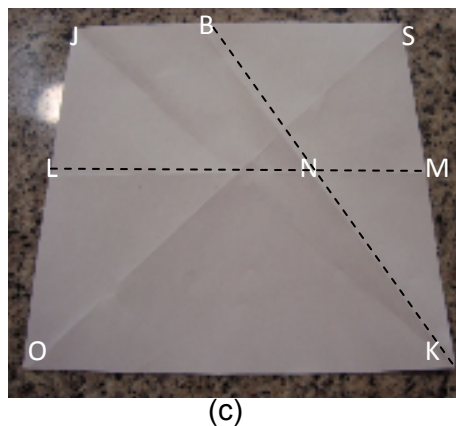
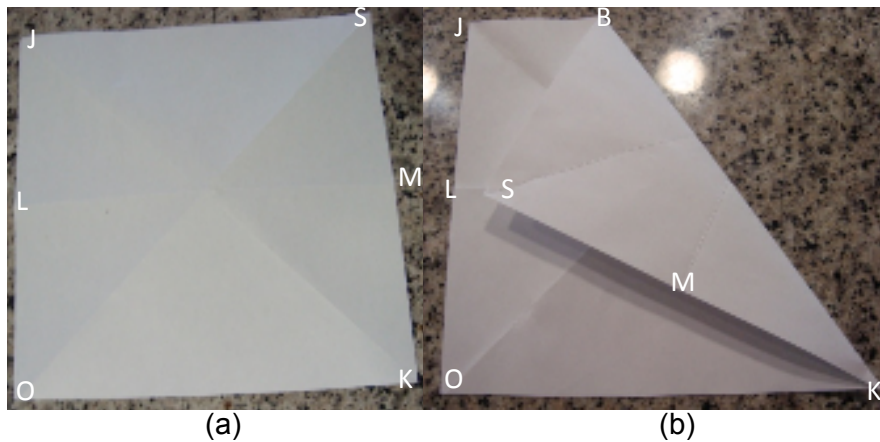
En el triangle vermell  $\sin 36^\circ = \frac{l}{2R} \rightarrow R = \frac{l}{2 \sin 36} \rightarrow \boxed{R = 0.5323}$

L'àrea del pentàgon és cinc vegades d'àrea del triangle marcat amb color vermell:  $A = \frac{5R^2 \sin 72}{2} = \frac{5 \cdot 0.5323^2 \cdot \sin 72}{2} \rightarrow \underline{\underline{A = 0.6737}}$

### Construcció del pentàgon òptim inscrit en un quadrat:

Seguim el model de la figura 2.19 i utilitzant el mètode de Dureisseix (2005):

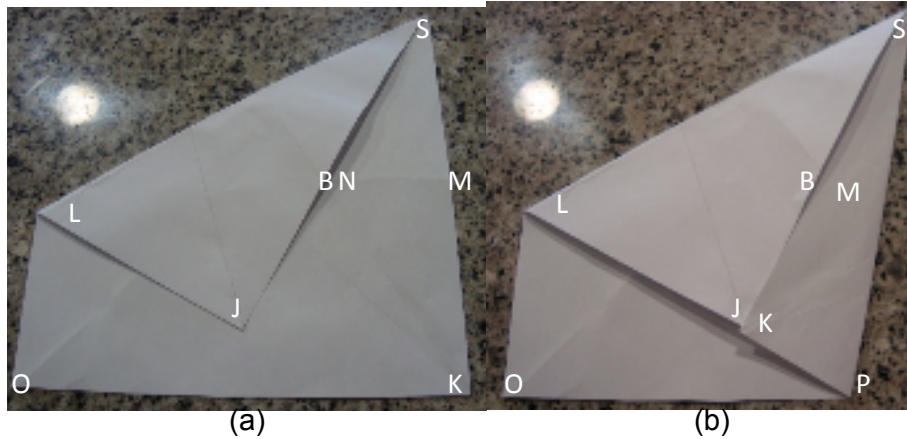
1. Agafem un quadrat de paper i en marquem les diagonals JK i OS (axioma 1) i també en marquem la recta LM que uneix els punts mitjans de dos costats. (Figura 2.20 a)
2. Portem el vèrtex S sobre L passant per K (axioma 5) i de manera que dividim el l'angle SKL en dues parts obtenint una recta que passa pels punts K i B. Anomenarem N el punt on es produeix la intersecció de les rectes BK i LM. (Figura 2.20 b i c)



Figures 2.20

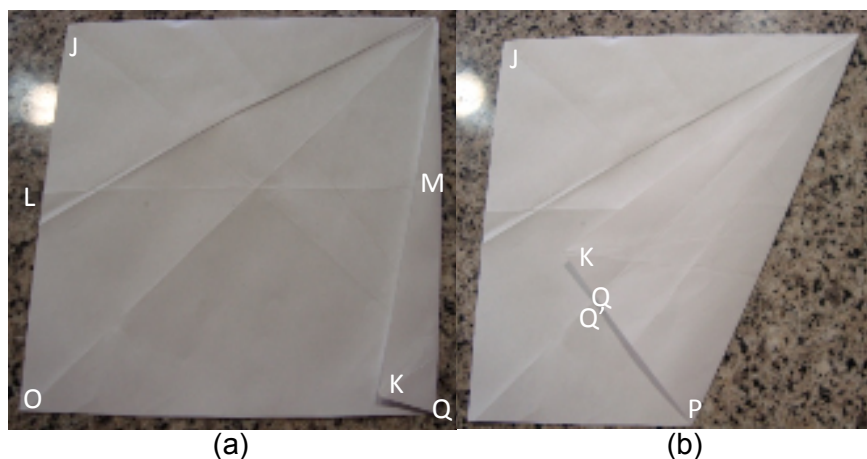
3. Portem el punt B sobre N passant per S (axioma 2)(Figura 2.21 a).
4. Sense obrir el paper, dividim en dues parts l'angle NSK (axioma 2) i obtenim la recta SP (Figura 2.21 b)

33

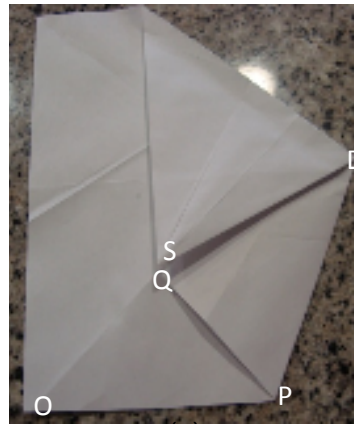


Figures 2.21

5. Obrim el full i dividim l'angle KSP en dues parts portant K sobre la recta SP passant per S. Obtenim el segment SQ (Figura 2.22 a), la longitud del qual és el costat del pentàgon estrellat.
6. Ara situem correctament aquest costat i portem Q sobre la diagonal OS passant per S. I obtenim un punt que anomenem Q'.(Figura 2.22 b)
7. Portem S sobre Q. I d'aquesta manera hem obtingut un dels costats (BD) del pentàgon estrellat.( Figura 2.22 c)

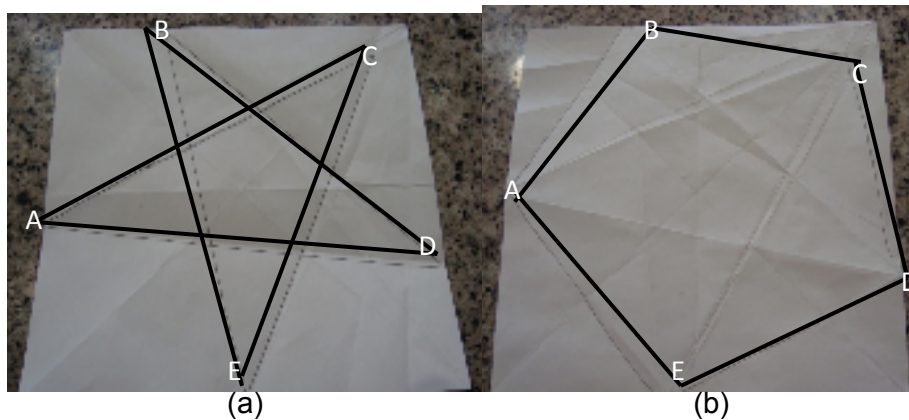


## Construint polígons amb paper



(c)  
Figures 2.22

8. A continuació, si fem el mateix procediment pels altres costats obtindríem el pentàgon estrellat (Figura 2.23 a)
9. Unim els vèrtex del pentàgon estrellat i obtenim el pentàgon d'àrea màxima (Figura 2.23 b)



(a) (b)  
Figures 2.23

### 2.3.3 Hexàgon

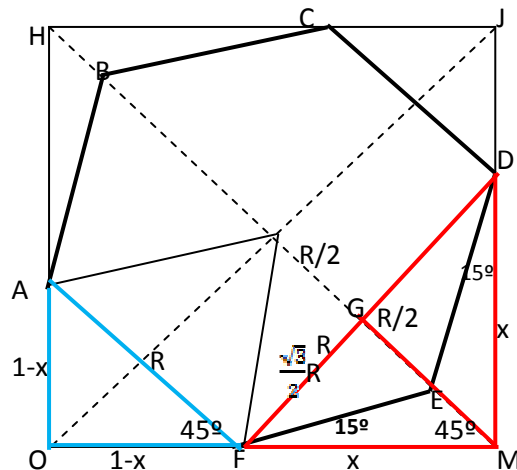


Figura 2.24

L'hexàgon és simètric a les dues diagonals del quadrat, així els segments FO i AO són iguals, i per tant els angles que formen amb el segment AF(45°) també ho seran. L'angle MFE també és igual al EDM. (Figura 2.24)

L'angle que formen les rectes FE ( o ED, per simetria) i FM és 15° perquè si utilitzem la fórmula d'angles interiors en polígons regulars  $\frac{(n-2)\pi}{n}$  on n és el nombre de cares, veiem que  $\frac{(6-2)\cdot 180}{6} = 120^\circ$ . L'angle que formen els costats de l'hexàgon regular al unir-se és de 120°, aleshores si sabem que l'angle OFA del triangle blau és 45° i que un angle pla té 180°, podem deduir que:

$$180^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 15^\circ$$

El segment FG és  $\frac{\sqrt{3}R}{2}$  perquè:  $\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}R}{2}$  (Figura 2.24)

Ja podem observar que:

(en el triangle blau)  $\sin 45^\circ = \frac{1-x}{R} \rightarrow R = \frac{1-x}{\sqrt{2}/2} \rightarrow R = \frac{2-2x}{\sqrt{2}}$

( en el triangle vermell)  $\sin 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}R} \rightarrow R = \frac{x}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}/2} \rightarrow R = \frac{2x}{\sqrt{6}}$

X= 0.6339

R= 0.5175

Finalment, com que veiem que l'hexàgon està format per 6 triangles exactament iguals, la fórmula de l'àrea és:

$$A = \frac{6 \cdot R^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 3R^2 \sin 60^\circ \rightarrow \underline{\underline{A = 0.6959}}$$

### Construcció d'un Hexàgon d'àrea màxima inscrit en un quadrat:

Mitjançant la papiroflèxia és possible construir un hexàgon regular el màxim de gran possible dins un quadrat de paper (Dureisseix, 2005), de la següent manera:

1. Agafem un quadrat de paper i en marquem les diagonals OJ i HM. En marquem, també, mitjançant l'axioma 1, una de les rectes (IK) que uneixen dos dels punts mitjans del quadrat. (Figura 2.25 a)
2. Portem el punt H al damunt de la recta IK que uneix els punts mitjans (marcada al pas 1) passant per J (axioma 5); obtenim el punt H' i el punt M', que és la intersecció del doblec que acabem de fer amb la diagonal HM (Figura 2.25 b). Forma fàcil de construir un angle de 30°.

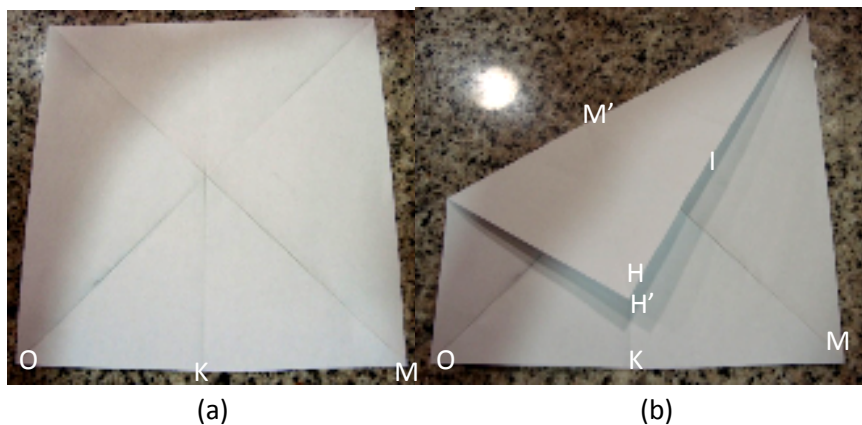


Figura 2.25

3. Girem el paper com a la figura 2.26 a i fem anar el punt M al punt M' (per obtenir la mediatriu del segment MM' (axioma 2) que l'anomenem DF. Aquesta mediatriu serà un costat de l'hexàgon òptim estrellat. (Figura 2.26 b).

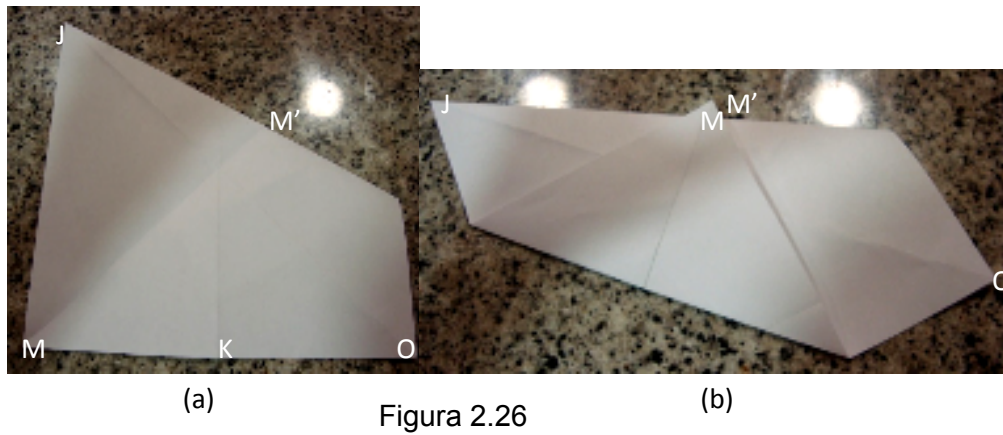


Figura 2.26

4. Per obtenir un dels triangles equilàters (DFB) que formen l'hexàgon estrellat portem el punt F a la diagonal del quadrat que passa per D mitjançant l'axioma 5 (D i F els hem obtingut, són els punts que units per l'axioma 1 formen la recta obtinguda). Marquem el punt I on va a parar F i obtenim el punt B.(Figura 2.27 a)
5. Unim els punts D, F i B de manera que obtenim un triangle equilàter.(Figura 2.27 b)

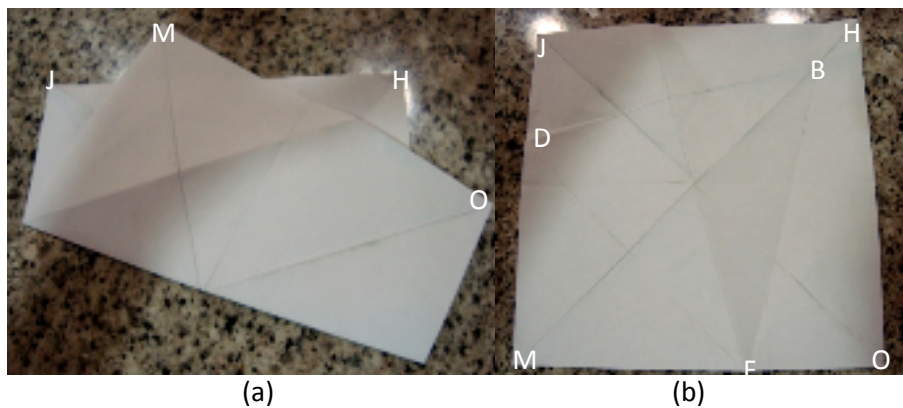


Figura 2.27

6. Per finalitzar l'hexàgon estrellat fem el mateix procés que hem fet fins ara per simetria. Obtindríem la figura 2.28 a.
7. Per últim només hem d'unir els vèrtex de l'hexàgon estrellat per tal d'obtenir l'hexàgon d'àrea màxim dins el quadrat inicial.(Figura 2.28 b)



## Construint polígons amb paper

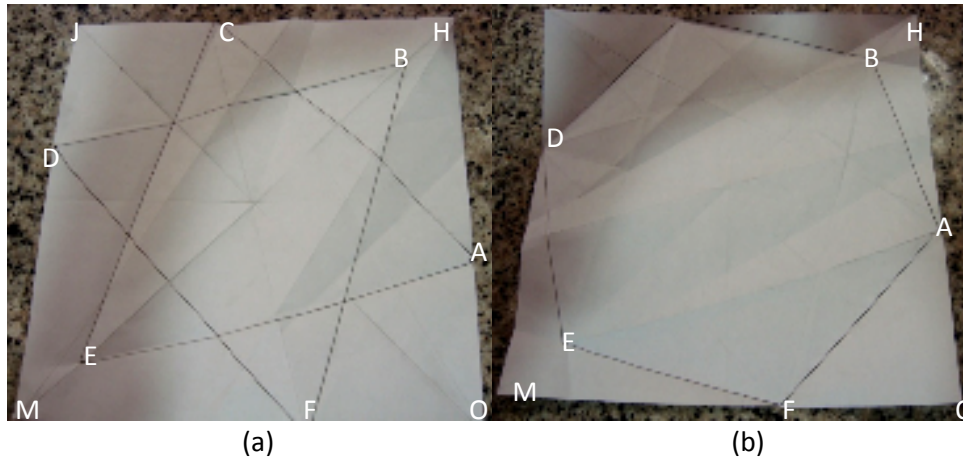


Figura 2.28

Per justificar aquesta construcció és necessari que demostrem que l'angle OFP és de  $30^\circ$  i ho farem de la manera següent: (figura 2.29)

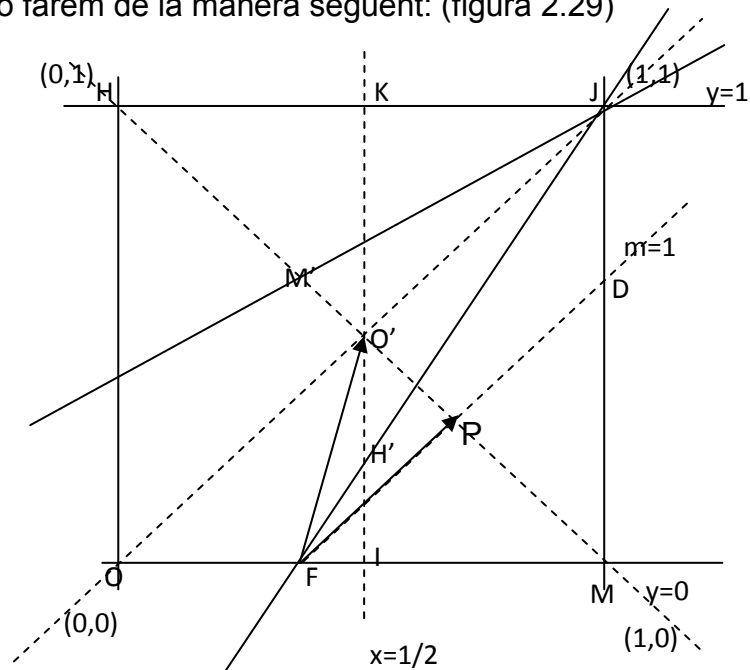


Figura 2.29

Considerem uns eixos de coordenades centrats en 0.

Busquem  $H'$  per la intersecció de la recta  $x=1/2$  i l'equació de la circumferència de centre J i radi 1 (JH).  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

$$\begin{cases} x=1/2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{Obtenim que } H' = (1/2, 0.134).$$

Busquem L per la intersecció de la recta HM ( $y=-x+1$ ) i la bisectriu de l'angle HJH' (costats HJ ( $y=1$ ) i FJ ( $y-1= 1.932(x-1)$ )).

$$\begin{cases} y=-x+1 \\ \frac{-(y-1)}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{1.932x-0.932-y}{\sqrt{1^2+1.932^2}} \end{cases} \quad \text{Obtenim que } M'=(0.366, 0.633).$$

Si busquem el punt mig entre M' i M trobarem el punt P:  $P=(0.683, 0.316)$ .

La recta FD és paral·lela a la recta OJ, per tant també és de pendent 1.

Aleshores si busquem la intersecció entre les rectes OM ( $y=0$ ) i la recta FD que passa per P i té pendent 1 ( $y-0.316=1 \cdot (x-0.683)$ ) trobarem F.

$$\begin{cases} y=0 \\ y-0.316=1 \cdot (x-0.683) \end{cases} \quad \text{Obtenim que } F=(0.367, 0).$$

Finalment, si busquem  $\cos \alpha = \frac{FO \cdot (1,1)}{\sqrt{|FO|^2} \cdot \sqrt{|(1,1)|}}$  i obtenim que  $\alpha = 30^\circ$ .

## 2.3.4 Heptàgon

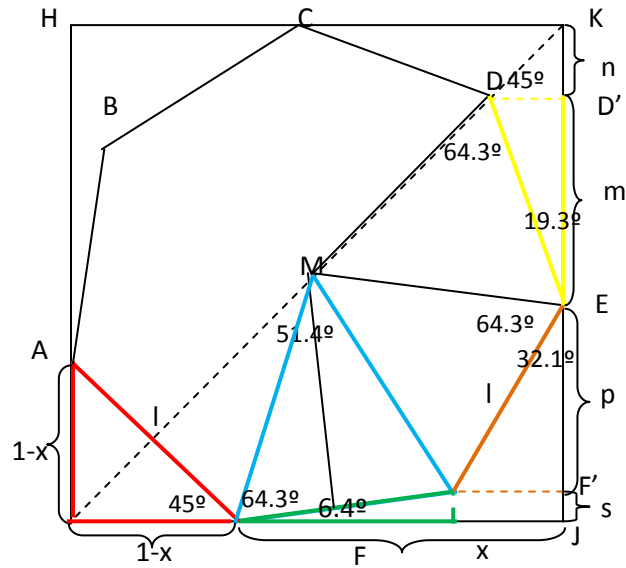


Figura 2.30

(Tracem FF' paral·lela al costat OJ i DD' paral·lela a HK)

L'heptàgon (Figura 2.30), com tots els altres polígons analitzats fins ara, és simètric respecte la diagonal del quadrat inicial. Així, per aquest motiu justifiquem que en el triangle vermell els angles GAO i AGO són iguals ( $45^\circ$  parteixen un angle de  $90^\circ$ ) i a més els costats que s'hi uneixen ( $x-1$ ) també són iguals.

L'angle interior és:  $\frac{(7-2)180^\circ}{7} = 128.6^\circ$

Diem que els angles de  $64.3^\circ$  i  $64.3^\circ$  (triangle taronja i triangle blau) tenen aquest valor, perquè són la meitat de l'angle de  $128.6^\circ$ , ja que l'heptàgon està format per 7 triangles isòsceles.

L'angle de  $6.4^\circ$  del triangle verd s'obté de la resta de l'angle pla ( $180^\circ$ ), el de  $45^\circ$  (triangle vermell) i dos cops el de  $64.3^\circ$  (triangle blau) (és a dir, un cop l'angle AGF de  $128.6^\circ$ ):  $180^\circ - [45^\circ - (2 \cdot 64.3)] = 6.4^\circ$

L'angle de  $51.4^\circ$  del triangle blau s'obté d'igualar la suma dels angles d'un triangle ( $180^\circ$ ) i la suma dels angles del triangle blau amb una incògnita:

$$180^\circ = 64.3 + 64.3 + \square \rightarrow \square = 51.4^\circ$$

Obtenim els  $19.3^\circ$  de trobar l'angle EDD' del triangle groc  $180^\circ - (45^\circ + 64.3^\circ) = 70.7^\circ$

Restem els angles que tenim del triangle groc, a  $180^\circ$  que és la suma de tots els angles d'un triangle:  $180 - (70.7 + 90^\circ) = 19.3^\circ = \text{angle DED}'$ .

Finalment, per trobar l'angle de  $32.1^\circ$  del triangle taronja només cal que restem de l'angle pla ( $180^\circ$ ) l'angle  $\hat{E}$  ( $128.6^\circ$ ) i el que hem trobat en el pas anterior ( $19.3^\circ$ ):

$$180^\circ - (128.6^\circ + 19.3^\circ) = 32.1^\circ$$

### Trobem l'àrea de l'heptàgon:

$$\text{(Triangle groc)} \cos 19.3^\circ = m/l \rightarrow m = l \cdot \cos 19.3^\circ$$

$$\text{(Triangle groc)} \sin 19.3^\circ = n/l \rightarrow n = l \sin 19.3^\circ$$

$$\text{(Triangle taronja)} \cos 32.1^\circ = p/l \rightarrow p = l \cdot \cos 32.1^\circ$$

$$\text{(Triangle verd)} \sin 6.4^\circ = s/l \rightarrow s = l \cdot \sin 6.4^\circ$$

la suma de n, m, p i s serà igual a 1 (costat del quadrat inicial)

$$l(\cos 19.3 + \sin 19.3 + \cos 32.1 + \sin 6.4) = 1 \rightarrow \boxed{l = 0.4482}$$

Trobem x:

$$\text{(Triangle vermell)} \sin 45^\circ = \frac{1-x}{l} \rightarrow \boxed{x = 0.6831}$$

Ja podem buscar R:

$$\text{(Triangle blau)} \sin \frac{51.4^\circ}{2} = \frac{l/2}{R} \rightarrow R = \frac{0.4482}{2 \cdot \sin 25.7} = 0.5167$$

Finalment substituïm pels valors trobats l'equació de l'àrea de l'heptàgon:

$$A = \frac{7 \cdot R^2 \cdot \sin 51.4}{2} = \frac{7 \cdot 0.2669 \cdot 0.7815}{2} \rightarrow \boxed{A = 0.7300}$$

## **Capítol 3: Conclusions i valoracions personals**

Seguint els objectius en els quals ens basàvem en aquest treball, que ja varen ser explicats a la introducció, podem extreure la conclusió que la papiroflèxia es basa en les matemàtiques tot i que pugui semblar que per construir una figura aquestes no són necessàries, quan condicionem aquesta figura per tal que tingui unes característiques determinades, les matemàtiques són essencials.

El primer objectiu que ens vam plantejar va ser l'anàlisi de l'aplicació pròpia de la Papiroflèxia que no es pot dur a terme utilitzant el regle i el compàs i, efectivament, l'hem estudiada i l'hem aplicat en casos on era necessari.

El segon objectiu era la presentació dels nusos construïbles amb tires de paper tot desenvolupant-ne els continguts matemàtics i explicar-ne el procediment de realització. La conclusió que ens plantejàvem en aquest objectiu era quins nusos eren possibles de ser construïts i quins no ho eren; i mitjançant l'aritmètica modular i el teorema d'Euler hem pogut extreure dos mètodes que ens diuen si el nus serà construïble o no i així hem obtingut que tots són possibles menys l'hexàgon.

Finalment, en el tercer objectiu ens plantejàvem la construcció dels polígons regulars d'àrea màxima inclosos dins un quadrat tot relacionant-ne els axiomes i finalment calcular-ne aquesta àrea. Hem analitzat aquests polígons i, partint de que tots ells es basen en la simetria que tenen amb una de les diagonals del quadrat del qual partim i que almenys un dels vèrtex del polígon ha de tocar amb la paret del quadrat, hem pogut dur a terme la construcció del triangle, el pentàgon i l'hexàgon.

Personalment, la valoració global d'aquest treball ha estat positiva. Inicialment, no sabia com encaminar el treball perquè la meva intensió era fer un tema de relació entre la música i les matemàtiques, però aconsellada pel tutor vam triar el de la Papiroflèxia i les matemàtiques. Tot i així, guiar el treball no va ser fàcil perquè podia basar-se en forces vessant. A més, encara que la informació no

era escassa en general, tampoc era molt abundant en temes concrets, com ara el que hem triat. Malgrat això, finalment vaig obtenir la informació de fonts específiques, la gran majoria pàgines web.

Quan vam començar el treball em vaig adonar que hi haurien d'aparèixer mètodes matemàtics com l'aritmètica modular i el teorema d'Euler que encara no havíem estudiat a classe, però un cop haver-los entès ja no van ser un problema.

Ha estat difícil fotografiar les figures perquè sovint no quedaven prou precises per culpa de la foscor i la claror; i sobretot ha estat difícil la realització de les figures ja que tot i saber els passos que s'havien de seguir per la construcció regular sovint quedaven irregulars per un doblec que no era exacte per culpa d'un error petit o perquè el quadrat de paper era una mica desigual.

Haver realitzat aquest treball, ha estat útil per conèixer a fons les bases matemàtiques que formen la papiroflèxia o origami i he pogut conèixer una altra visió de la papiroflèxia que no tenia fins aleshores. Amb aquest treball he passat de considerar la papiroflèxia un art estètic basat en doblegar papers per tal de fer formes, a considerar-la un art, també, però basat en les matemàtiques que encara que no es vegin, hi són.

## **BIBLIOGRAFIA:**

- Llibres:

SUNDARA ROW'S, T.(1901). Geometric Exercises in Paper Folding  
Ed. Benan and Smith

GIL MORE, E. (2007), Papiroflexia y Geometría. Ed. Salvatella.

Matemàtiques 3 Bachillerato (1977). Ed. Santillana

DUREISSEIX, (1997) "Searching for optimal polygon, application to the  
pentagon Case".

BRITISH ORIGAMI SOCIETY, (1992) "Understanding Geometry through  
Origami Axioms", Ed. J. Smith

- Pàgines web:

<ftp://ftp.rug.nl/origami/articles/polyeps.zip>

<ftp://ftp.rug.nl/origami/articles/polye.ps>

<http://origami.kvi.nl/articles/polye.ps>

<http://mathwolfram.com/fermatNumber.html>

<http://www.math.lsu.edu/~verrill/origami/pentagon/>

<http://origami.ousaan.com/library/conste.html>

<http://kahuna.merrimack.edu/~thull/omfiles/geoconst.html>

<http://www.uaq.mx/matematicas/origami/ligas.html>

[http://www.langorigami.com/science/hha/origami\\_constructions.pdf](http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf)

[http://en.wikipedia.org/wiki/huzita's\\_axioms](http://en.wikipedia.org/wiki/huzita's_axioms)

<http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15>

Construint polígons amb paper