El teorema de Pitàgores: Més de 3.000 anys

“Potser el més estrany de la ciència moderna és el seu retorn al pitagorisme”
Bertrand Russell

ÍNDEX

Índex

1. INTRODUCCIÓ

1.1. EL PERQUÈ D'AQUEST TREBALL

Tinc molt clar, des de fa molt temps, quin camí seguiré un cop acabi els estudis de batxillerat al col·legi Sant Josep: estudiar enginyeria civil.
Des de sempre, tots els àmbits de la ciència han despertat un gran interès i curiositat en mi, de manera que a l'hora d'escollir el tipus de batxillerat no vaig pensar-m'ho dues vegades i vaig escollir el tecnològic.

Un cop vaig començar el batxillerat, vaig adonar-me que les assignatures de modalitat que havia escollit eren les que més m'agradaven respecte les comunes, especialment les matemàtiques. M'adonava que eren el meu fort i que amb molt d'esforç podia aconseguir obtenir uns resultats bons i assolia els meus objectius.

D'aquesta manera, vaig pensar que a l'hora d'escollir el tema del meu treball de recerca de batxillerat, seria interessant fer-lo de quelcom relacionat amb les matemàtiques, ja que així podria ampliar una mica els meus coneixements matemàtics adquirits al col·legi i aprendre curiositats sobre la història més antiga de les matemàtiques, tot relacionant conceptes que ja sabia amb d'altres que podien ser desconeguts.

Així, vaig consultar diferents pàgines web amb la finalitat de trobar treballs de recerca realitzats per alumnes d'altres instituts, i agafar alguna idea de com encarar el meu i evitar escollir temes que ja havien estat realitzats per altres persones. D'aquesta manera, vaig trobar un treball de recerca que explicava el teorema de Fermat, el qual el coneixia per la seva relació amb el teorema de Pitàgores, i m'hi vaig interessar.

Tot seguit, vaig parlar amb el professor que vaig escollir com a tutor del meu treball de recerca, Antoni Montoliu, i vaig explicar-li les meves intencions amb aquest treball i què era allò que volia aprendre. Llavors, el tutor va recomanar-me fer un treball que parlés de Pitàgores, i de les demostracions que podia tenir el seu teorema, les quals són molt nombroses. Va semblar-me bona idea i, tot seguit, vam posar-nos a treballar.

1.2. OBJECTIUS

Amb el treball pretenia buscar molta informació sobre la història de Pitàgores, i tots allò important que va fer al llarg de la seva vida, per on va moure's i a quins personatges il·lustres va conèixer. A més, a tot això, també s'hi afegien els seus descobriments i les aportacions matemàtiques. D'aquesta manera, trobava l'origen de molta informació que avui dia és considerada general i la base de molts càlculs i descobriments que s'han fet després de trobar-la.

També, tenia pensat afegir curiositats sobre el teorema, així com demostracions i aplicacions que nosaltres mateixos podíem fer a la nostra vida quotidiana. Així, es donava al treball el caire matemàtic que en un principi era el meu tema predeterminat per al treball.

Amb això, a l'hora de fer la part pràctica del treball, tenia pensat fer algun tipus d'investigació amb equacions i càlculs matemàtics, que poguessin estar resolts per mi i treure algunes conclusions d'àmbit general.

1.3. ESTRUCTURA

El meu treball de recerca consta de dues parts principals: una part teòrica i una part pràctica.

En la part teòrica, he explicat tots els conceptes històrics que necessitava per desenvolupar el treball; la biografia de Pitàgores i l'escola que va fundar. A part d'això, hi he inclòs tota la informació teòrica que està relacionada amb la demostració del seu teorema, la qual és el treball més important que va fer, així com diferents demostracions que se n'ha fet i aplicacions que pot tenir a la vida real. Finalment, hi ha explicats conceptes generals que poden ampliar informació sobre els teoremes i els resultats matemàtics, explicats detalladament.

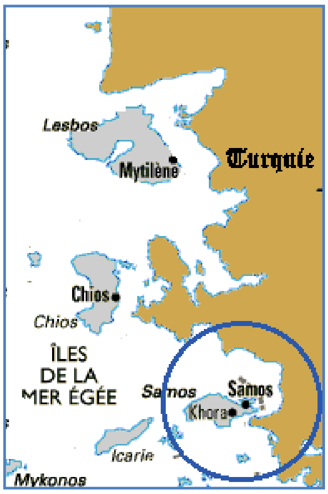
A continuació, a la part pràctica he treballat amb ternes pitagòriques, les quals són agrupacions de tres nombres naturals que compleixen el teorema de Pitàgores. Amb aquests nombres, he realitzat diferents proves, amb les quals he hagut de resoldre càlculs, i n'he extret algunes conjectures.

Amb aquesta última part, he gaudit molt treballant, ja que he pogut ampliar coneixements d'àmbit matemàtic, tot realitzant alguns dels càlculs a mà i aprenent a fer servir amb més profunditat programes informàtics, com ara els fulls de càlcul Excel. Finalment, el fet d'extreure conjectures com a conclusió del meu treball m'ha fet adonar que una persona és capaç d'aconseguir allò que es proposi tot dedicant-hi molt d'esforç.

2. BIOGRAFIA

Pitàgores és un matemàtic grec, nascut l'any 569 abans de Crist a Samos, una illa pertanyent al Dodecanès propera a Milet. Pitàgores era una persona molt sàvia, amant del coneixement i de l'experimentació.

1. Mapa de Grècia i les illes gregues

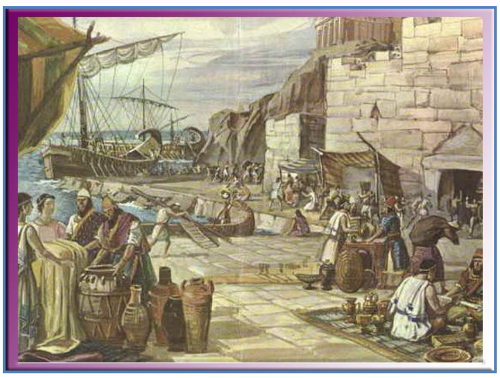


2. Ubicació de Samos

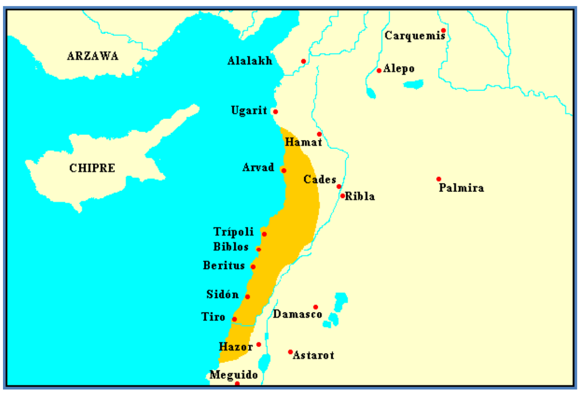
A part de tenir molts coneixements sobre matemàtiques i geometria, també tenia un gran domini sobre els camps de la psicologia i l'astronomia. Molta gent el coneixia per les seves capacitats oratòries i els discursos que havia fet davant de multituds.

El seu pare era Mnèsarc, i es tenen dubtes sobre quin era el seu verdader ofici: uns creuen que era un ric comerciant, i d'altres, que era un joier que gravava pedres precioses. La seva mare, Pítia, era procedent de Grècia.

Durant els seus anys d'adolescència, Pitàgores va fer alguns viatges cap al sud d'Itàlia i Fenícia amb el seu pare. A part d'això, va tenir el privilegi de rebre una bona educació: va aprendre a tocar la lira i recitava amb fluïdesa la poesia èpica i lírica.



3. Port d'una ciutat comercial, on arribaven vaixells procedents d'altres regions.

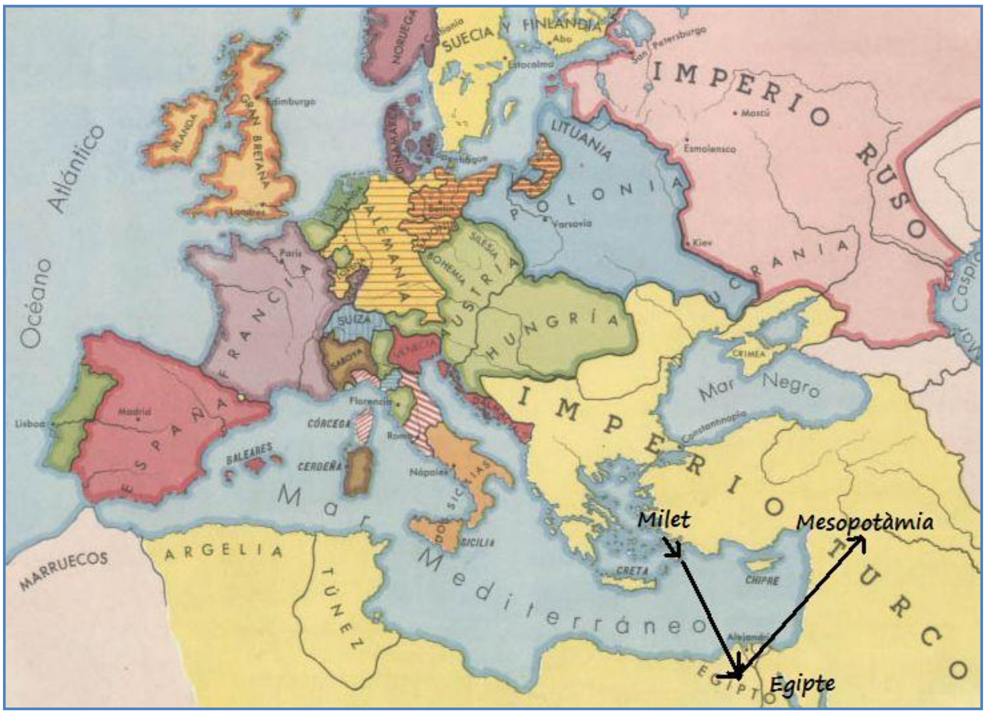


4. Situació geogràfica de Fenícia (taronja)

Els mestres que va tenir a Samos van ser: el filòsof Ferecides, el qual va orientar a Pitàgores sobre les seves creences religioses; i Hermodomes, qui va transmetre-li coneixements sobre astronomia i les matemàtiques del propi Tales de Milet. Tot i així, alguns filòsofs diuen que gràcies als viatges que Pitàgores va fer amb el seu pare, Tales de Milet va fer de professor, en algunes ocasions, a Pitàgores.

5. Gravat del filòsof Ferecides

Tal com he esmentat abans, Pitàgores va fer nombrosos viatges amb el seu pare. A part de traslladar-se fins a la propera ciutat de Milet i altres ciutats gregues, també va fer viatges a Egipte i a Mesopotàmia. Allà, va estar en contacte amb diferents sacerdots els quals van explicar a Pitàgores quines eren les seves doctrines esotèriques i la manera en com les ensenyaven als seus deixebles, a part d'adquirir molts coneixements matemàtics que, fins llavors, li eren desconeguts.



6. Viatges de Pitàgores per llocs propers a la seva terra.

També va anar fins a la Índia i van ensenyar-li la religió de la zona, a part de transmetre-li coneixements tant matemàtics com astronòmics, desconeguts per ell fins aleshores. El seu interès en la transmigració de les ànimes el va adquirir durant aquests viatges.

Després de l'Índia, va fer viatges arreu del món per tal d'aprendre i conèixer noves i diferents civilitzacions, les seves creences, la seva filosofia de vida i diferents punts de vista que podien tenir sobre un mateix tema.

Pitàgores, gràcies a tots aquests viatges, es va anar enriquint, de manera que va adquirir més experiència a l'hora de parlar en públic i transmetre els seus coneixements. Un cop va tornar a l'illa de Samos amb quaranta anys, va començar a parlar de doctrines filosòfiques i religioses a tots els seus oients. Tot i així, no van ser gaire acceptades entre el públic, ja que eren molt innovadores i s'allunyaven força del que els ciutadans estaven acostumats a sentir.

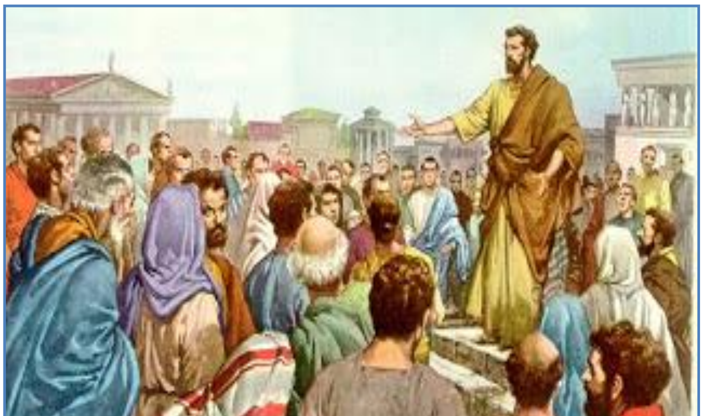
Per aquesta raó, Pitàgores es va veure obligat a traslladar-se a la colònia costanera de Crotona, dòrica, de la Grècia dels magnes i ubicada al sud-est d'Itàlia.

7. Crotona, ciutat italiana on Pitàgores es va establir i va fundar la seva escola

8. Situació geogràfica de Crotona, a la Grècia dels Magnes

Pitàgores era considerat un gran viatger, agradable i noble per la gent de Crotona, de manera que la seva arribada va causar molta sensació. Al produir aquesta gran impressió va fer admirables discursos als governants de la regió, els quals van proposar-li de fer altres discursos a la resta dels ciutadans, de manera que es va fer famós i va guanyar molts deixebles.

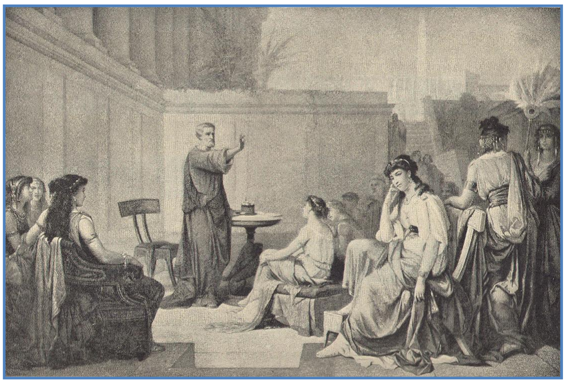
Va fer quatre discursos diferents: a les dones, als nens, als joves i als governants, per tal de transmetre'ls


9. Pitàgores fent un discurs als ciutadans de Crotona.

un seguit de valors morals i normes de comportament, ja sigui amb els altres o amb ells mateixos. Aquests discursos es basaven amb les pròpies virtuts i la seva importància en la persona, un valor que s'imposava sobre qualsevol altre.
Els seus discursos eren impactants: va aconseguir que molts ciutadans canviessin la seva manera de pensar.

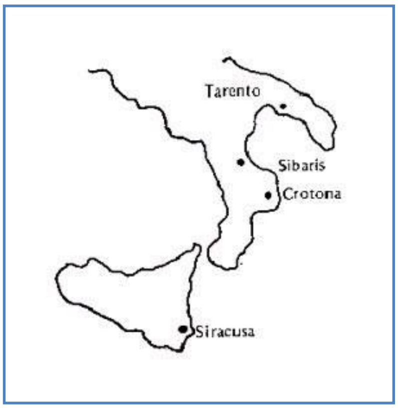

10. Escultura de Miló de Crotona, pare de Teano.

Pitàgores va ser acollit a casa de Miló de Crotona, un atleta molt fort que s'havia fet famós gràcies a les seves dues victòries olímpiques. Allà també hi vivia Teano, la filla de Miló. Aquesta va esdevenir la deixeble predilecta de Pitàgores i més tard, quan Pitàgores tenia 56, es van casar i van tenir tres fills: Damo, Myia i Telauges.


11. Pitàgores envoltat de membres de la seva comunitat, explicant

Al cap d'un temps, Pitàgores va fundar a Crotona una mena de secta de caire científic i religiós, una societat la qual rendia culte als déus Orfeu i Dionís, i només un petit grup d'escollits per Pitàgores tenia el privilegi d'entrar i ser acceptat dins aquesta comunitat. A part d'això, es treballava amb tots els misteris de les matemàtiques i la filosofia per tal d'ampliar-ne el coneixement i enriquir-se amb la veritat.

Malgrat l'estima i l'admiració que moltes persones tenien a Pitàgores, també tenia alguns enemics. Ciló n'era un exemple, ja que volia venjar-se'n a causa de no haver estat acceptat dins la comunitat pitagòrica.



12. Situació de les ciutats italianes Sibaris i Crotona

L'any 516 abans de Crist, va haver-hi una sublevació a la ciutat veïna de Sibaris, i va fracassar. Per aquest motiu, molts ciutadans van anar a buscar protecció a Crotona, amb la qual cosa, el consell de Crotona va haver de reunir-se i prendre mesures per evitar una possible i terrible guerra amb els sibarites.
En aquest consell va participar-hi Pitàgores, però els

seus esforços per a convèncer els altres assistents per a ser solidaris van ser nuls. Llavors, es va declarar la guerra entre els sibarites i Crotona, tot i que l'exèrcit de Miló, que estava molt ben preparat, va aconseguir derrotar al bàndol de Sibaris.

13. Teano, dona de Pitàgores i filla de Miló de Crotona, explicant a l'escola pitagòrica

Finalment, es creu que Pitàgores va morir en l'incendi que va haver-hi a casa de Miló poc després d'haver guanyat la batalla, causat per Ciló com a venjança. Tot i així, hi ha altres fonts d'informació que diuen que Pitàgores va aconseguir escapar de les flames i visqué durant 10 anys més; d'altres que va aconseguir fugir però que el van matar mentre escapava.

Llavors, Teano es va fer càrrec de l'escola que ell havia creat, i a Damo se li va encarregar la tasca de conservar i mantenir en secret tots i cadascun dels escrits del seu pare.

3. ESCOLA PITAGÒRICA

3.1. UBICACIÓ DE L'ESCOLA PITAGÒRICA

Pitàgores,va fer nombrosos viatges al llarg del sud d'Europa i Àsia per tal d'ampliar coneixements i veure diferents punts de vista d'un mateix concepte.

Al tornar dels seus viatges a Samos, va decidir traslladar-se a Crotona, una colònia dòrica de la Grècia dels Magnes situada a la costa sud-est d'Itàlia, entre Lòcride i Sibaris, dues ciutat molt famoses entre els grecs per les seves riqueses i la vida dissoluta i llicenciosa dels seus habitants.

14. Mapa de l'antiga Magna Grècia

15. Situació de l'escola pitagòrica

Crotona va ser fundada cap a l'any 710 aC per grecs que procedien del nord del Peloponesi. En poc temps, Crotona va adquirir una gran riquesa i molt poder militar. A més, gràcies al luxe i el refinament dels seus habitants, era molt cèlebre.

16. Quadre de Crotona en temps de Pitàgores

Crotona havia estat arruïnada i saquejada per Lòcride, la qual va derrotar Crotona en una batalla que hi havia hagut poc abans de l'arribada de Pitàgores.

Quan Pitàgores va arribar a Crotona, es diu que va tenir una recepció molt agradable i majestuosa, ja que la gent el veia com un home poc comú, que havia viatjat molt i de bon aspecte.

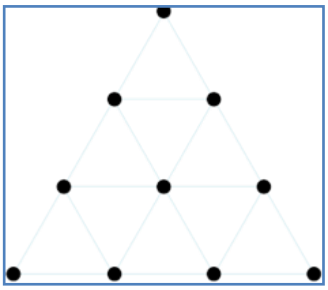
Pitàgores va causar molt bona impressió entre els habitants d'aquesta ciutat, fins al punt de que el convidessin a parlar i a donar discursos als nens i a les dones, després d'haver impressionat als savis i als governants de la ciutat amb les seves paraules.

Gràcies a aquests fets, va guanyar-se molts seguidors per a la seva escola, tant homes com dones, i amb conseqüència, va créixer molt la seva fama.

3.2. PRINCIPIS DE L'ESCOLA

Tal com he dit abans, l'escola pitagòrica estava situada a Crotona. Allà pretenia instaurar un model de vida senzill entre els seus membres, escollits amb antelació mitjançant un seguit de proves inicials.

El mètode que seguia Pitàgores era la descoberta i l'observació del cosmos veient-lo com un univers creat i estructurat a partir de nombres i relacions matemàtiques, els quals eren el principi de tot allò que existia i regia la vida de la Terra i els humans. Per als pitagòrics, el número 10 era el número bàsic, de manera que consideraven que les esferes celestes eren 10. A part, el número 10 resultava de la suma dels 4 nombres primers: 1+2+3+4=10. El "*Tetraktis*" era una figura sagrada amb la qual es demostra aquesta igualtat.



17. Distribució del nombre 10 o "Tetraktis"

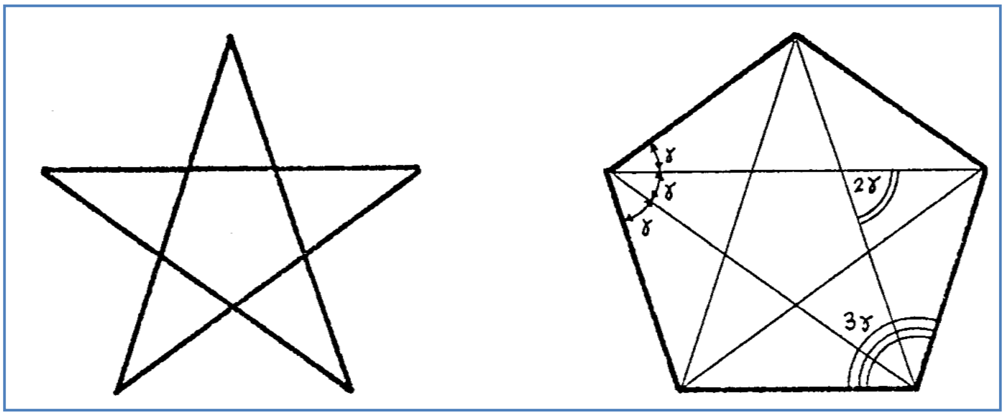
A part d'això, va crear una relació molt propera entre el objectes d'estudi científics, els quals eren majoritàriament relacionats amb l'Univers, i la religió. També, creien que les matemàtiques tractaven conceptes abstractes, diferents a la realitat, els quals es consideraven conceptes ideals que es trobaven en llocs purament imaginaris, fora de la realitat. Creien que els nombres racionals podien descriure tota la geometria del món i regien tot allò que existia.

L'objecte d'estudi més important de la doctrina pitagòrica era la catarsis (purificació de l'ànima). Explicaven l'origen de la vida dient que en un principi, hi havia una gran massa, la qual era l'ànima inicial, i en un moment determinat va trencar-se en infinits trossos, els quals van escampar-se per la superfície de la Terra. Els humans, al néixer, adquireixen una porció d'aquesta ànima mitjançant la respiració i, per tal de que cadascun d'aquests trossos pugui tornar a l'Univers (el lloc on pertany) la persona ha de poder purificar la seva ànima mitjançant l'estudi i el coneixement. Tot i així, si una persona no aconseguia purificar la seva ànima, aquesta anava transmigrant t d'uns cossos a uns altres fins purificar-se completament.

18. Pitàgores treballant, al fresc titulat "L'escola d'Atenes", pintat pel famós pintor Rafael.

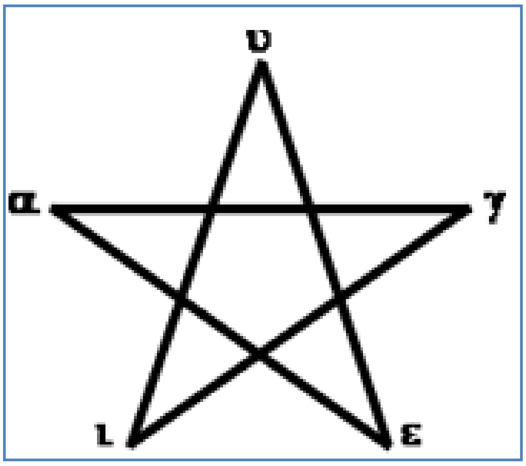
Els pitagòrics seguien un codi de regles molt ben estructurat, el qual es comprometien a seguir un cop entraven dins la comunitat. Per exemple, entre tots els membres de l'escola hi havia un comunisme de béns, i un règim físic i gastronòmic molt estricte: havien de ser vegetarians, ja que amb la transmigració de les ànimes qualsevol animal que matessin per a menjar-se'l podia tenir l'ànima d'una persona que estava en procés de purificar-se.

Els membres de l'escola pitagòrica tenien un símbol esotèric que els identificava a tots com a membres d'una mateixa comunitat: era un dibuix amb forma d'estrella de cinc puntes, anomenat "*pentacle*" o "*pentagrama místic*".
L'havien escollit a causa de les seves propietats geomètriques perfectes, obtinguda al fer una traça de les diagonals d'un pentàgon regular.



19. Dibuix del pentagrama místic, i la seva relació amb el pentàgon regular.

A part d'això, aquesta estrella es podia dibuixar d'un sol traç, sense aixecar el llapis del paper. Finalment, una altra propietat era que, al col·locar una lletra a cada punta de l'estrella, a l'unir-les formava la paraula "*higieia*", la qual significa higiene, símbol de salut. Tot i que la paraula "*higieia*" tingués 6 lletres en grec, a partir de documents escrits de l'època s'ha observat que hi havia una contracció que provocava la desaparició de la primera "i", de manera que ens quedava una paraula amb 5 lletres (la h no la utilitzaven). D'aquesta manera, en el pentagrama místic es pot veure la paraula higiene tal com es pronunciava en l'antiga Grècia. D'aquí ve el fet que quan les persones ens saludem, utilitzem l'expressió "*salut*!".



20. Pentagrama místic amb la distribució de lletres que representen "higieia"

Pitàgores va establir per primera vegada una comunitat religiosa tancada que seguís una nova forma de vida, la qual estava regida per unes normes de comportament i un objectiu comú que regia la vida de tots els membres de la comunitat.
Tot i així, les seves accions científiques són una conseqüència de les doctrines instaurades per Pitàgores i del ritme de vida que seguien.

A part de tot això, tenien un seguit de regles escrites en vers, anomenades "Versos d'Or". Aquestes regles recullen totes les doctrines pitagòriques i gràcies a elles podem fer-nos una idea del model de vida que seguien i les seves prioritats a l'hora d'actuar o de fer qualsevol activitat. Els Versos d'Or són els següents:

Honra, en primer lloc
i venera als Déus immortals,
a cadascun d'acord amb el seu rang.

Respecta, després, el jurament,
i fes una reverència als herois il·lustres,
i també als genis subterranis:
així compliràs el que les lleis manen.

Honra, després, als teus pares
i als teus parents de sang.
I dels demés, fes-te amic
d'aquell que descolli en virtut.

Tingues també com a hàbit que les teves paraules
siguin amable i els teus actes profitosos.

No guardis rancor
a l'amic a causa d'una falta lleu.

Aquestes coses fes-les
en la mesura de les teves forces
ja que allò que es possible es troba
juntament a allò que és necessari.

Aprèn a complir
aquests preceptes.

D'altra banda, acostuma't
a dominar això següent:
el teu estómac davant de tot; després, la son,
després, els desitjos
de les teves passions i de la teva ira.

No cometis mai
una acció vergonyosa,
ni amb ningú, ni a soles:
per damunt de tot,
respecta't a tu mateix.

Acte seguit, exercita't
en practicar la justícia,
amb paraules i amb obres,

Aprèn a ser raonable i sensat
en tot allò que executis,
no oblidem que la mort
és el destí de tots,

Quant a la fortuna,
tant pot augmentar
com desaparèixer.

Dels sofriments que omplen
els mortals per designes divins,
la part que a tu et correspon
Suporta-la sense indignació;
però és legítim que busquis remei
A la mesura de les teves forces:
perquè no són tantes les desgràcies
que cauen sobre els homes bons.

Pel que fa a les moltes paraules que
surten per la boca dels homes,
unes indignes, d'altres nobles,
que no et torbin ni tampoc
et giris per no escoltar-les.

Quan sentis una mentida,
aguanta-la amb calma.

I el que ara et diré
és precís que ho compleixis sempre:
que ningú, mitjançant les seves paraules
o en virtut dels seus actes,
et persuadeixi per a que facis o diguis
allò que no sigui el millor.

Reflexiona abans d'obrar
Per no cometre accions absurdes,
tenint en compte
que és propi dels homes dèbils
obrar i parlar sense discerniment.

Per la teva part, realitza sempre allò
que posteriorment no pugui afectar-te.

No entris en assumptes que ignores,
però aprèn tot allò que sigui necessari:
tal és la norma d'una vida ditxosa.

Tampoc descuidis la salut del teu cos;
tingues moderació amb el menjar, el beure
i en els exercicis físics.
Per moderació entenc
allò que no et faci mal.

Acostuma't a una vida sana sense mol·lície,
i guarda't de fer el que pugui
atreure sobre teu l'enveja.

No siguis dissipat en les teves despeses
com fan els que ignoren
l'honesta proporció d'allò que és bell.
Però no per això
deixis de ser generós:
no hi ha res millor
que la justa mesura en totes les coses.

Fes, doncs, allò que no et perjudiqui,
i reflexiona abans d'actuar.
I no deixis que el dolç somni
s'apoderi dels teus lànguids ulls
sense abans haver repassar
allò que has fet durant el dia:
Amb què he fallat? Què he fet?
He deixat de complir els meus deures?

Recorre, sense oblidar-ne cap, quantes
accions has realitzat,
començant per les primeres,
i, al punt, retreu-te els errors,
alegrant-te, en canvi, pels encerts.

Això és el que s'ha de fer.
I aquí el que hi ha
és el que t'has de proposar de practicar,
i les coses que s'han d'estimar.
Per elles ingressaràs
al diví camí de la perfecció.

T'asseguro per aquell que va transmetre al nostre enteniment la Tetraktis,
font de la naturalesa infinita!

Avança, doncs!
Però abans de començar qualsevol feina,
demana als Déus que
santifiquin el teu esforç.

Practicant aquests preceptes,
sabràs quin és el costat
que uneix els déus immortals
amb els mortals homes,
i aprendràs a conèixer els elements
que passen i els que romanen.

I sabràs, d'una manera justa de saber,
que la Naturalesa és una
i la mateixa a tot arreu,
amb la qual mai esperaràs
allò que no es pot esperar,
ni hi haurà res amagat per tu.

També sabràs que els homes
pateixen els mals
que ells mateixos s'imposen,
cecs als béns
que els rodegen,
que ni senten ni veuen,
amb la qual cosa són pocs els que saben
lliurar-se de la desgràcia.

Tal és el destí
que encega l'esperit
dels mortals.
Com comptes infantis
rodegen d'un costat a un altre,
oprimits per mals innombrables,
perquè, sense advertir-ho,
els castiga la Discòrdia,
la seva natural i trista companya,
la qual no s'ha de provocar,
sinó cedir-li el pas
i fugir d'ella.

Oh, pare Zeus!
De quants mals
lliuraries als homes
si tan sols els fessis
veure a quin dimoni obeeixen!

Però per a tu, tingues confiança,
perquè d'una divina raça
estan fets els éssers humans,
i també hi ha la sagrada Naturalesa
que els mostra
i els descobreix totes les coses.

Quan posis en pràctica això que t'ordeno,
gaudiràs dels seus beneficis,
que seran el teu remei
i lliuraran l'ànima de tots els mals.

Abstén-te dels aliments que hem assenyalat,
ja sigui per a les purificacions,
o per la llibertat de l'ànima.

Jutja i reflexiona sobre cada cosa,
prenent-te com a conductor
del carro de la teva ànima a la raó,
que és la millor de les teves guies.

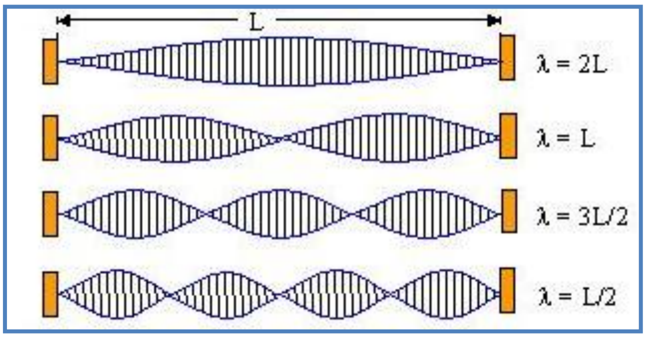
Quan estiguis lliure del
teu embolcall carnal, aniràs
fins als lliures orbes de l'èter,
i seràs un déu immortal, incorruptible,
ja no subjectat a la mort.

Els Versos d'Or són bastant semblants als manaments de la religió cristiana. Amb aquesta sèrie de normes, Pitàgores ens dóna a entendre que creia amb un Déu o una estructura superior que regia la vida de les persones.
Hi ha algunes semblances entre les doctrines seguides a la religió cristiana i les doctrines que seguien els pitagòrics, ja que aquestes van donar bastants idees morals i de ritme de vida a la ideologia cristiana.

Els Versos d'Or sempre han tingut molt prestigi i, en èpoques posteriors, van influenciar a molts il·lustrats, com Sant Jerònim, Plutarc o Clement entre altres. Aquests consideraven que els Versos d'Or eren una espècie de regles morals que es podien posar a la pràctica tant en la vida quotidiana com en la religió.

Finalment, cal dir que l'escola pitagòrica englobava diferents àmbits de la ciència i els estudiava, tot intentant trobar relacions entre ells, com la música, les matemàtiques o l'astronomia, entre altres.

En el cas de la música, van fer experiments senzills i van descobrir que si una corda polsada, al vibrar, produïa una nota d'un to particular, llavors una corda que mesurés la meitat de la longitud d'aquesta produeix una nota molt harmoniosa, i una que sigui de longitud tres quarts de la inicial, també la produeix. Aquests aspectes de la música, avui dia, estan relacionats amb la física de les cordes vibrants, les quals es mouen tot formant un moviment ondulatori.



21. Corda de longitud L, la qual es va dividint en longituds més petites proporcionals entre elles.

En el camp de l'astronomia, reconeixien l'existència de nou cossos celestes: el Sol, la Lluna, Mercuri, Venus, la Terra, Mart, Júpiter, Saturn i Urà. A part d'això, consideraven que al centre del sistema solar hi havia el "Foc Central", totalment diferent al Sol. A part d'això, consideraven que el nombre era el fonament total de l'Univers, la qual cosa, ho podien recolzar amb observacions empíriques.

22. Sistema solar que coneixien els pitagòrics.

3.3. COMPONENTS

Ja hem comentat abans que els membres de l'escola pitagòrica havien de superar un seguit de proves i ritus amb antelació per tal de formar-ne part.

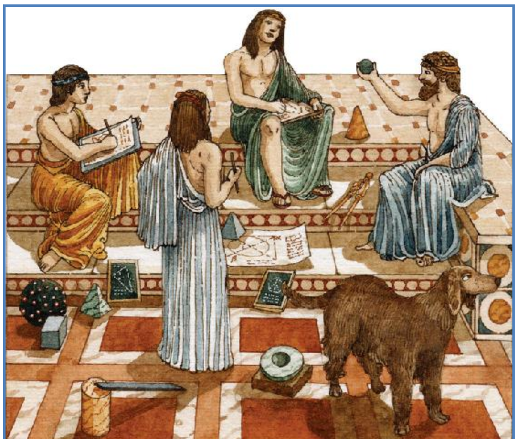
Tots aquests ritus d'iniciació, juraments i cerimònies, estaven rodejats per una atmosfera esotèrica i religiosa, amb molt entusiasme i devoció. A part d'això, una persona acostumava a preparar-se durant molt de temps per tal d'entrar a formar part de la comunitat, mitjançant experiències que permetessin la fortalesa de l'esperit i fomentar la humilitat, tot assumint de mica en mica la ideologia i la moral pitagòrica.

A part d'això, havien de jurar solemnement que mantindrien en secret tots els ensenyaments rebuts dins la comunitat pitagòrica i, tampoc, transmetre a ningú els passos i les proves que havien hagut de seguir per tal d'entrar-hi i formar-ne part.

Durant l'aprenentatge, el dia començava abans de la sortida del Sol i havien de fer nombroses pregàries i penitències religioses, amb un significat molt solemne i místic. Aquestes pregàries feien referència als Déus hel·lènics i als misteris òrfics, revelats al músic Orfeu. També feien culte a l'esperit grec, anomenat "Apol·lini" ,tot fent culte a la forma i a allò limitat que definia allò que era perfecte, i al "Dionisíac", el qual era el domini de les forces obscures de la natura i el principi indeterminat de la natura que amenaça l'ordre limitat d'allò humà. Aquestes pràctiques van oposar-se a l'humanisme grec que estava imposat en les pràctiques religioses i en l'estètica ideal, de manera que se'ls acusava de fer sacrificis cruels i practicar orgies, quelcom impossible per a la mentalitat dels grecs.

Totes aquestes pregàries anaven seguides de cants musicals acompanyats d'una poesia metafísica. També, dedicaven un temps a la meditació, la conversa i a caminades solitàries, per tal de reflexionar sobre les matemàtiques i la religió, sense deixar de banda la pràctica d'esport, sobretot l'atletisme.
Només paraven a l'hora dels àpats, els quals eren escassos, i per a dormir, en un llit de pedra.

Un cop superades totes aquestes proves, el principiant passava a ser un membre més de la comunitat pitagòrica, tot i que les rutines diàries no canviaven gaire. A part de poder arribar a formar part de l'escola, les proves d'iniciació servien per augmentar l'autodisciplina del deixeble, que fes un gran


23. Membres de l'escola pitagòrica, treballant conjuntament

esforç intel·lectual i canviar els seus hàbits, tot fent que portés una vida sana a base de fer esport i mantenir una dieta especial en el menjar.
Per a la formació íntegra, la qual era molt important pels joves, havia d'incloure consideracions científiques. Tot i així, considerava que aquests coneixements eren massa difícils per a la gent més gran, la qual es dedicava en les funcions públiques i les feines domèstiques.

Per això, Pitàgores, dins la seva escola, va organitzar dos tipus d'ensenyança diferents: els "*matemàtics*" i els "*acusmàtics*". Els *matemàtics* eren els joves que aprenien i estaven perfectament dotats per al coneixement científic i pensar d'una manera totalment abstracta. En canvi, els *acusmàtics* eren homes més simples que reconeixien la veritat de forma intuïtiva a través de creences, dogmes, principis morals...

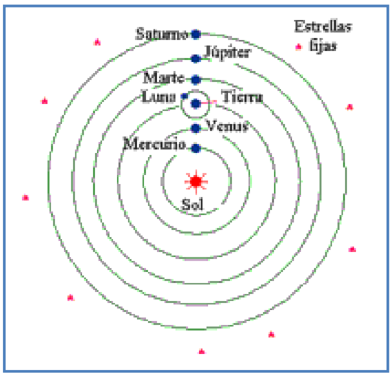
24. Els pitagòrics observaven el cosmos i la naturalesa

El primer grup tenia una tendència racional, mentre que el segon era religiosa. Els acusmàtics s'encarregaven de vetllar per la puresa del model i l'estructura de vida pitagòrica, les essències originals i la fidelitat a la doctrina de l'escola, tot remarcant els requisits que s'exigia a cadascun dels membres. En canvi, els matemàtics continuaven els coneixements i els estudis de Pitàgores, tot evolucionant i avançant amb la seva base científica.

Ben sovint hi havia discrepàncies entre les dues tendències de pitagorisme i, es diu, que aquesta és una de les nombroses raons per les quals l'escola pitagòrica es va dissoldre, després de la mort de Pitàgores.

La comunitat de Pitàgores, a part de sobresortir amb el tipus de culte que feien, també es diferenciaven amb les altres comunitats pel fet d'admetre dones a la seva escola. Se les tractava i considerava de la mateixa manera que als homes, i no hi havia cap tipus de diferència entre ells.

Alguns dels membres més importants de la comunitat pitagòrica van ser: Teano de Crotona, Filolau de Crotona, Ecfant de Siracusa, Hipàs de Metapont, Arquites de Tarento, entre altres.



25. Esbós de l'Univers de Filolau de Crotona

Filolau de Crotona va explicar la constitució de les substàncies i la relació existent entre les matemàtiques i la física, amb la qual cosa va poder formular una cosmologia que estava configurada segons l'estreta relació que hi havia entre els nombres i els cossos celestes. Afirmava que al centre de l'univers hi havia un gran foc, totalment diferent al Sol, al voltant del qual hi girava la Terra i tots els planetes coneguts fins llavors.

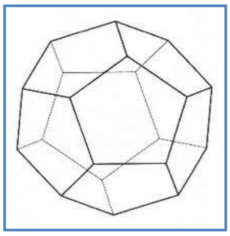
Pel que fa a Teano de Crotona, va realitzar importants estudis en el camp de la matemàtica relacionats amb la secció àuria i el políedres regulars. A part d'això, també va treballar amb medicina, i va investigar sobre el desenvolupament del fetus al ventre de la mare. Finalment va escriure un llibre, en el qual apareixen algunes relacions sobre el nombre. Teano va ser la dona de Pitàgores i, juntament amb les seves filles, van donar suport a la teoria que deia que l'home era una petita rèplica d'allò que era el macrocosmos.


26. Dibuix de Teano de Crotona


27. Moneda encunyada amb la cara d'Ecfant de Siracusa

També, un membre de la comunitat pitagòrica era Ecfant de Siracusa. Aquest va ser el primer deixeble que va afirmar que la Terra feia un moviment de rotació al voltant del seu eix, i va formular una teoria amb la qual explica que els elements que constitueixen la matèria estan formats per àtoms invisibles, separats entre sí pel buit.

Hipàs de Metapont dirigia el grup dels acusmàtics i es creu que en un moment determinat va descobrir l'existència dels nombres irracionals, amb la qual cosa hauria acabat amb la doctrina de l'escola pitagòrica, de manera que el van expulsar de l'escola per tal que no acabés amb ella.
S'atribueix a Hipàs la construcció del dodecaedre com una aproximació a una esfera.


28. Dodecaedre, construcció d' Hipàs de Metapont

3.4. APORTACIÓ MATEMÀTICA

L'escola pitagòrica va destacar pel grau elevat de coneixements que tenien el propi Pitàgores i tots els seus deixebles. Van estudiar moltes branques del coneixement i diferents àmbits de la ciència, com la biologia, la música i la cosmologia, tal com he mencionat abans.

En el camps de les matemàtiques, Pitàgores havia rebut moltes influències i nous coneixement en els seus viatges a Egipte, a partir dels quals començà a treballar i a proporcionar innovacions en la història de la matemàtica.

Pitàgores i els membres de la seva escola van establir el principi que diu que tot allò que s'aprèn gràcies a l'observació de la naturalesa s'ha d'expressar amb nombres i fórmules, els quals estiguin demostrats, en comptes de formular-ho només amb descripcions verbals, les quals ajuden a entendre i a fer-se una idea del significat dels nombres i les fórmules.

Paral·lelament a això, els pitagòrics van afegir a la idea de considerar les matemàtiques solament pel seu sentit pràctic el concepte de veure-les com una activitat intel·lectual, de manera que els seus treballs van ampliar-se més enllà de les regles pràctiques de càlcul que tenien fins aleshores.

Pel que fa a les proposicions matemàtiques, van considerar necessari el fet de demostrar-les, per tal de proporcionar resultats purament fiables i complets, en comptes d'establir només tècniques de càlcul que funcionessin i donessin els resultats esperats sense buscar explicacions de la seva certesa ni voler cercar el seu origen.

Deixant de banda els conceptes més teòrics, els membres de la comunitat Pitagòrica van fer altres descobriments més pràctics:

HARMONIA MUSICAL

Gràcies a la música, Pitàgores va veure que existeix una relació molt propera entre l'harmonia musical i l'harmonia dels nombres. Va fer l'experiment en el qual polsava una corda tibant, i veia que es produïa una nota musical. Llavors, si la longitud de la corda es disminuïa a la meitat, la nota que es produïa en polsar la corda era l'octava de la primera nota. I així successivament.

29. Dibuix on hi ha representat Pitàgores fent experiments amb cordes

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA

L'aportació més gran de Pitàgores va ser la demostració del seu teorema, el qual afirma que el quadrat de la hipotenusa d'un triangle rectangle és igual a la suma del quadrat dels seus catets.

Havia estat descobert, per a casos molt concrets, molts segles anteriors per civilitzacions antigues, com els xinesos o els egipcis. Tot i així, se li va posar el seu nom perquè va demostrar-lo i va generalitzar-lo.

TAULA DE MULTIPLICAR

També, Pitàgores va inventar una taula de multiplicar amb la finalitat d'ensenyar als nens més petits a fer multiplicacions, els quals començaven a aprendre matemàtiques.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

30. Taula de multiplicar de Pitàgores

Per a utilitzar-la correctament, es multiplica en diagonal, de manera que el resultat el trobem tot traçant rectes perpendiculars entre els dos nombres que es multipliquen, el qual es troba en el seu punt d'intersecció. Per exemple, al multiplicar 2x4, veiem que el resultat és 8.

NOMBRES PERFECTES

Va definir els nombres perfectes com aquells la suma dels divisors dels quals sigui igual al nombre. Si la suma era més gran que el nombre, aquest era abundant; en canvi, si la suma dels divisors era més petita que el nombre, aquest se'l denominava deficient.
Alguns exemples de nombres perfectes són el 6 i el 28:

$$Divisors\ de\ 6: 1,2,3 \rightarrow 1+2+3=6$$
$$Divisors\ de\ 28: 1,2,4,7,14 \rightarrow 1+2+4+7+14=28$$

NOMBRES FIGURATS

També va fer un estudi que tractava dels nombres figurats, els quals són aquells que poden representar formes geomètriques. Tot i així, es regeixen per una fórmula, la qual determina quins nombres o són i quins no. Hi ha diferents tipus de nombres figurats, alguns dels quals són els següents:

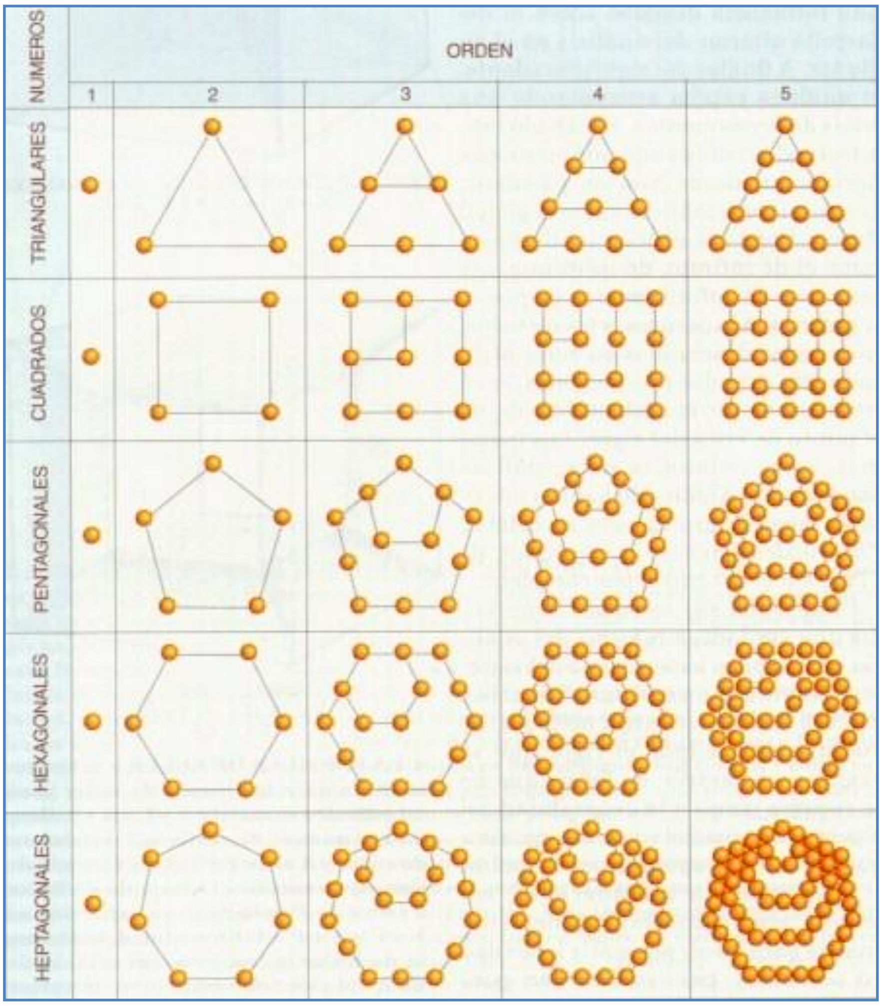
1- Triangulars: Es poden representar tot dibuixant triangles. La fórmula per a calcular-los és:

$$N = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2- Quadrats: es poden representar en forma de quadrat. La seva fórmula és:

$$N = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

A l'escola Pitagòrica només van estudiar-se aquests dos tipus de nombres. Tot i així, descobriments posteriors van permetre trobar els nombres estrellats i els pentagonals, entre altres.



31. Diferents representacions de nombres figurats

NOMBRES AMICS

Dos nombres són amics quan la suma dels divisors d'un nombre (sense comptar-se ell mateix) és igual a l'altre nombre i a l'inrevés.
Per exemple, 220 i 284 són nombres amics:

$$\begin{aligned} &Divisors\ de\ 220{:}\ 1{,}2{,}4{,}5{,}10{,}11{,}44{,}55{,}110 \\ &Divisors\ de\ 284{:}\ 1{,}2{,}4{,}71{,}142 \end{aligned}$$

$$Suma\ divisors\ de\ 220{:}\ 1+2+4+5+10+11+22+44+55+110=\mathbf{284}$$
$$Suma\ dels\ divisors\ de\ 284{:}\ 1+2+4+71+142=\mathbf{220}$$

NOMBRE D'OR

Teano, una membre de l'escola pitagòrica, va escriure el nombre d'or, el qual és el següent:

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Teano, juntament amb Pitàgores i altres matemàtics, definia aquest nombre com una constant que es reflectia sovint a la naturalesa, de manera que era el que regia alguns processos naturals. Alguns fenòmens naturals on es pot trobar aquest nombre són:

- relació entre la distància de les espirals de les closques dels cargols.
- disposició dels pètals de les flors.
- relació entre l'altura d'un humà amb l'altura a la qual es troba el melic.

Fins i tot, alguns artistes posteriors van fer servir aquest nombre a l'hora de dissenyar les seves construccions o els treballs, de manera que les obres que obtenien estaven elaborades amb la proporció més perfecta de la naturalesa i posseïen una gran bellesa.

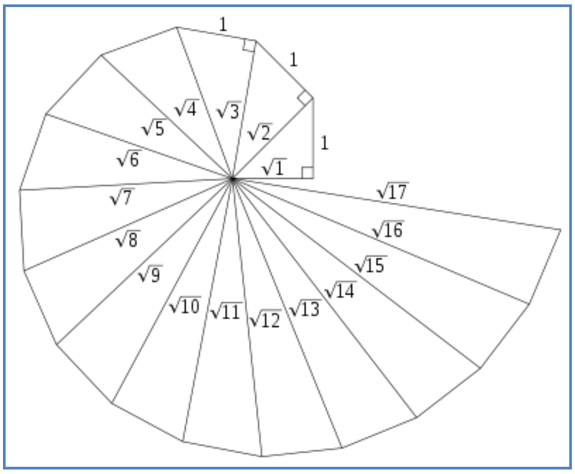
32. El Partenó d'Atenes, dividit en rectangles àurics

NOMBRES IRRACIONALS

El descobriment dels nombres irracionals va suposar una crisi entre tots els membres de la comunitat pitagòrica, i al final va suposar la seva desaparició.

Els pitagòrics van descobrir aquest tipus de nombres mentre treballaven en el teorema i en els polígons regulars.

Un matemàtic posterior, Teodoro de Sirena, va fer un estudi sobre nombres irracionals i va elaborar l'espiral de mà esquerra composta per nombre irracionals ordenats.



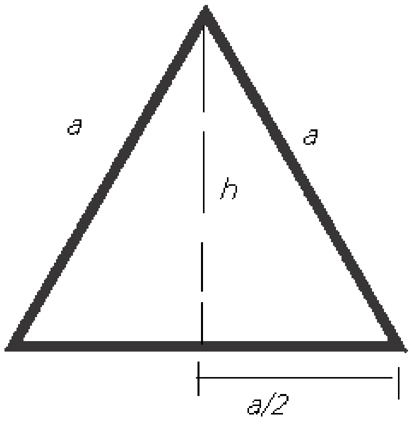
33. Distribució de nombres racionals i irracionals naturals més petits

3.5. EL DESCOBRIMENT DELS IRRACIONALS

Tal com hem explicat en l'apartat 2.2., Pitàgores i els membres de l'escola pitagòrica creien que els nombres racionals, és a dir, els que es poden explicar d'una manera natural, eren els únics que existien, amb els quals s'explicava l'origen de tot allò que existia i formava part del món on vivim.

Amb tots els descobriments que van fer els pitagòrics, es podria dir que el propi "Teorema de Pitàgores" i el "Pentagrama Místic" van comportar el descobriment dels nombres irracionals, la qual cosa suposava un trencament de totes les creences i coneixements que havien tingut fins aleshores. Això va suposar una crisi en el pensament dels pitagòrics, de manera que per salvar tots els seus treballs intentaven amagar aquesta realitat, tot fent callar de manera dràstica tots aquells que ho descobrien i pretenien donar-ho a conèixer al món.

Al considerar que els nombres eren el fonament de l'univers, la possibilitat de que existissin nombres que no eren ni enters ni fraccionaris feia que tots els seus fonaments i les seves relacions entre els nombres i les representacions geomètriques es trenquessin. Poc a poc, van anar apareixent molts casos en què hi havia nombres irracionals, com és el cas de la relació entre el costat i l'altura d'un triangle equilàter.



34. Triangle equilàter de costat a.

Per exemple, si tenim un triangle equilàter i volem saber quant mesura la seva altura, ens trobem que:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \;\rightarrow\; a^2 = \frac{a^2}{4} + h^2$$

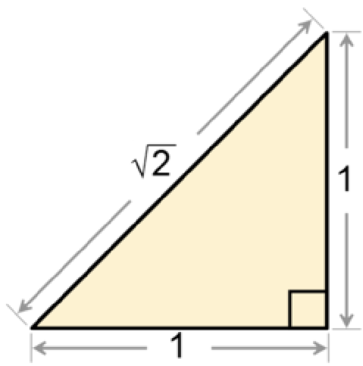
Llavors, aïllem h, de manera que ens apareix un nombre irracional a l'equació:

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \;\rightarrow\; h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Majoritàriament, s'atribueix el descobriment dels nombres irracionals a Hipàs de Metapont, un membre de l'escola Pitagòrica i un gran matemàtic.

La llegenda explica que Hipàs de Metapont estava de viatge amb vaixell, juntament amb altres membres de l'escola pitagòrica, i va dibuixar, al terra del vaixell, un triangle rectangle de costat unitari. Per tal de trobar el valor de la hipotenusa del triangle, va aplicar el teorema de Pitàgores, però va veure que el resultat no era una fracció exacta, de manera que contradeia tot el que els pitagòrics havien cregut i pensat fins llavors. Els altres membres que l'acompanyaven no van saber acceptar-ho, de manera que van agafar a Hipàs i el van tirar per la borda del vaixell, deixant-lo morir per evitar que el seu descobriment es difongués pel món i acabés amb la base de la doctrina filosòfica, la qual deia que el nombre era perfecte.


35. Retrat d' Hipàs de Metapont



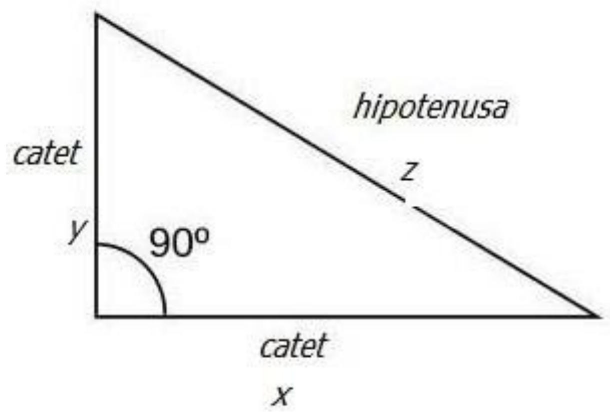
36. Triangle rectangle de costat 1, l'exemple més senzill d'aparició de nombres irracionals.

Finalment, a l'haver de revisar profundament totes les bases i fonaments matemàtics dels pitagòrics, es va produir tal escàndol lògic per la comunitat pitagòrica que va acabar posant fi a l'escola.

4. TEOREMA DE PITÀGORES

Tal com he mencionat en l'apartat 2.4., el teorema de Pitàgores és un dels descobriments més importants i innovadors de la història de la matemàtica, el qual va tenir molta repercussió en recerques matemàtiques i treballs posteriors.

El teorema de Pitàgores només serveix per a triangles rectangles:



37. Triangle rectangle

L'enunciat i la fórmula del teorema de Pitàgores seria la següent:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = z^2}$$

$$El\ quadrat\ de\ la\ hipotenusa\ d'un\ triangle\ rectangle\ \text{és}\ igual\ a$$

$$la\ suma\ del\ quadrat\ dels\ dos\ catets$$

Per exemple, si tenim un triangle rectangle els catets del qual mesuren 7cm i 4 cm, per a trobar la hipotenusa seguiríem els passos següents:

$$\boldsymbol{4^2 + 7^2 = h^2}$$

A continuació, aïllem h i podem trobar el valor de la hipotenusa:

$$\boldsymbol{h = \sqrt{4^2 + 7^2} = 8'0623cm}$$

Tot i que s'atribueix a Pitàgores el fet d'haver-lo enunciat com a fórmula per primera vegada, altres civilitzacions molt anteriors a Pitàgores, com els egipcis o els hindús ja l'utilitzaven, malgrat que només el feien servir a la pràctica, en situacions concretes, com ara a l'hora de mesurar distàncies o altures de certes construccions. És molt probable que els propis mesopotàmics desconeguessin l'existència de la fórmula del teorema, per molt que l'utilitzessin.

Al llarg dels temps, s'han trobat diverses restes arqueològiques que ens demostren el contacte d'aquestes civilitzacions antigues amb el teorema de Pitàgores.

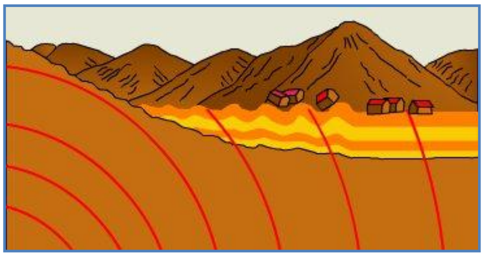
5. APLICACIONS DEL TEOREMA DE PITÀGORES

Després del seu enunciat i les demostracions que el sustentaven, el teorema de Pitàgores, a part de ser un valuós postulat geomètric, va aplicar-se en molts àmbits científics, quotidians i, fins i tot, en la construcció.

5.1. Aplicacions científiques i tècniques

El Teorema de Pitàgores, es pot aplicar en molts àmbits de la tecnologia, enginyeries, ciència, etc. Vegem-ne alguns exemples:

- En l'arquitectura i la construcció, en l'elaboració de teulades i parets.
- A la navegació, en GPS i sistemes de referència.
- La NASA, a l'hora de determinar la posició de naus espacials.
- En geologia, quan es propaga el terratrèmol.
- En enginyeria mecànica, en la descomposició de forces i el disseny de peces.
- En criminologia i milícia, per estudiar el recorregut de les bales i projectils.
- En l'enginyeria civil, a l'hora de traçar terrenys i dissenyar regs i canals.



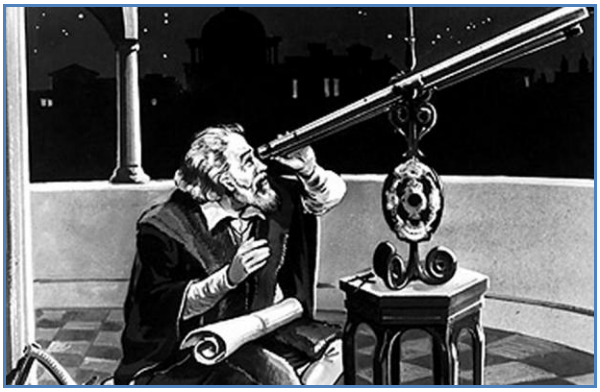
38. Ones de terratrèmols.

39. Elaboració d'una carretera.

39. Vaixell navegant.

40. Teulada d'una casa

Pel que fa a la ciència, també, es coneix que Galileu, el gran científic que investigava aspectes de l'astronomia i que va influenciar molt en matemàtics posteriors, va utilitzar el teorema per tal de mesurar les distàncies i les altures de determinades muntanyes lunars.

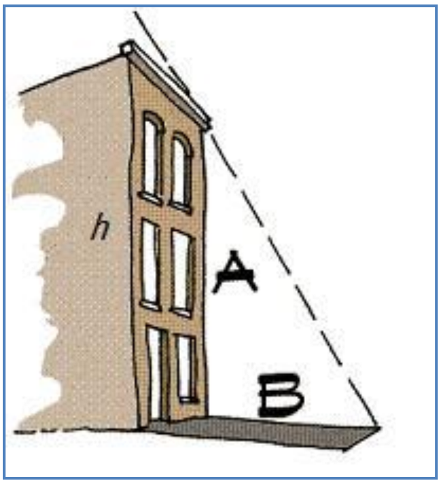


42 Galileu fent observacions astronòmiques amb telescopi

5.2. Aplicacions populars

El teorema de Pitàgores també podem trobar-lo fàcilment en alguns exemples de la nostra vida quotidiana. En aquest apartat he trobat alguns exemples d'usos que es fan del teorema de Pitàgores habitualment.

Per començar, moltes vegades ens ha agradat saber l'altura d'un edifici. Amb el teorema de Pitàgores es pot trobar: si sabem la distància a la qual ens trobem respecte el peu de l'edifici i la nostra distància respecte el seu punt més alt, podem trobar la seva altura.



43. Edifici d'altura h.

Per exemple, sigui h l'altura de l'edifici, A la distància entre el punt més alt de l'edifici i nosaltres, i B la distància a la qual ens trobem nosaltres respecte la base de l'edifici, sabem que:

$$\boldsymbol{B^2 + h^2 = A^2}$$

Llavors, si aïllem h, per a trobar-la ens queda que:

$$\boldsymbol{h = \sqrt{A^2 - B^2}}$$

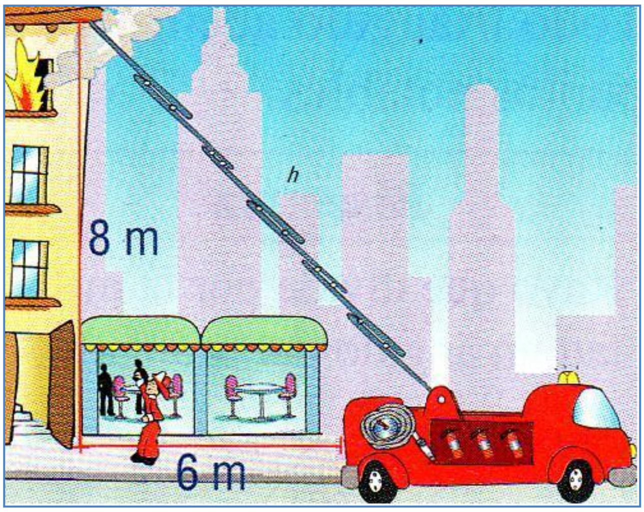
Un altre ús del teorema de Pitàgores en la vida quotidiana seria en un incendi. Els bombers necessitarien saber la llargària que hauria de fer la seva escala del camió per a poder arribar a l'altura determinada d'un edifici. Si sabem la distància del camió de bombers a l'edifici i l'altura d'aquest, podrem determinar la longitud que ha de fer la seva escala:

Si la distància del camió a la paret és de 6 metres, i l'edifici fa 8 metres d'altura, per a trobar la distància de l'escala aplicaríem el teorema de Pitàgores:

$$6^2 + 8^2 = h^2$$

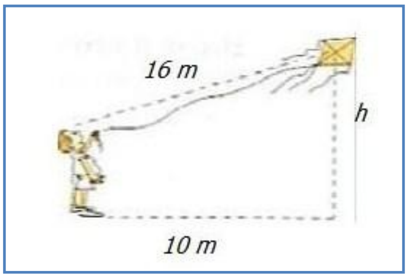
De manera que per trobar h només ens cal fer:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} \rightarrow h = 10\, metres$$



44. Dibuix d'un camió de bombers.

Un altre exemple de la vida real seria quan fem volar un estel. Tot sabent la distància a la qual ens trobem respecte la base de l'estel (traçant una línia imaginària des de l'estel fins al terra) i la mesura de la corda,a part de l'altura del nen (en aquest cas, posem que fa 1'60 metres d'alçada) podem trobar l'altura a la qual està volant.

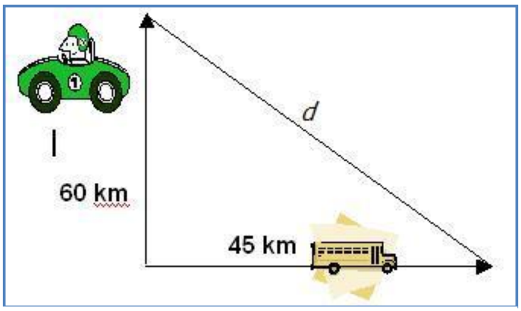


45. Noi fent volar un estel.

Si la corda de l'estel mesura 16 metres, i la distància del nen respecte la base és de 10 metres, per a trobar l'altura farem:

$$h = \sqrt{16^2 - 10^2} + 1.6 \rightarrow h = 14'089996\, metres$$

També, s'aplicaria el teorema de Pitàgores si un camió i un cotxe sortissin del mateix punt de partida i seguissin una trajectòria perpendicular entre ells. Un cop haguessin arribat al seu destí i volguéssim calcular la distància entre ells, ens quedaria que:

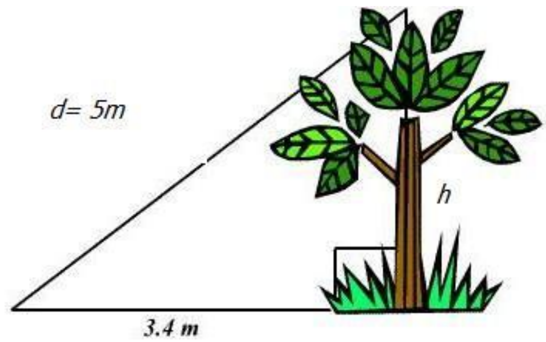


46. Autobús i cotxe que s'allunyen entre ells.

$$d^2 = 60^2 + 45^2 \rightarrow \ d = \sqrt{60^2 + 45^2}$$

Per tant, la distància final entre l'autobús i el cotxe és de 75 Km.

Fins i tot, a l'hora de calcular l'altura d'un arbre, podríem utilitzar el mateix teorema. Si coneixem la distància a la qual ens trobem del peu de l'arbre i la nostra distància respecte el punt més alt de l'arbre, ens queda l'equació següent:



47. Arbre d'altura h.

$$5^2 = 3{,}4^2 + h^2 \rightarrow \ h = \sqrt{5^2 - 3.4^2}$$

Per tant, un cop aïllada h, trobem el resultat i veiem que l'arbre mesura 3,67 metres d'altura.

Finalment, aplicaríem el teorema de Pitàgores si volguéssim calcular quan mesura l'amplada d'un senyal d' STOP. Si el costat de la senyal és a i l'amplada h, per a trobar quan mesura l'apotema (que correspon a la meitat de l'amplada) ens queda que:

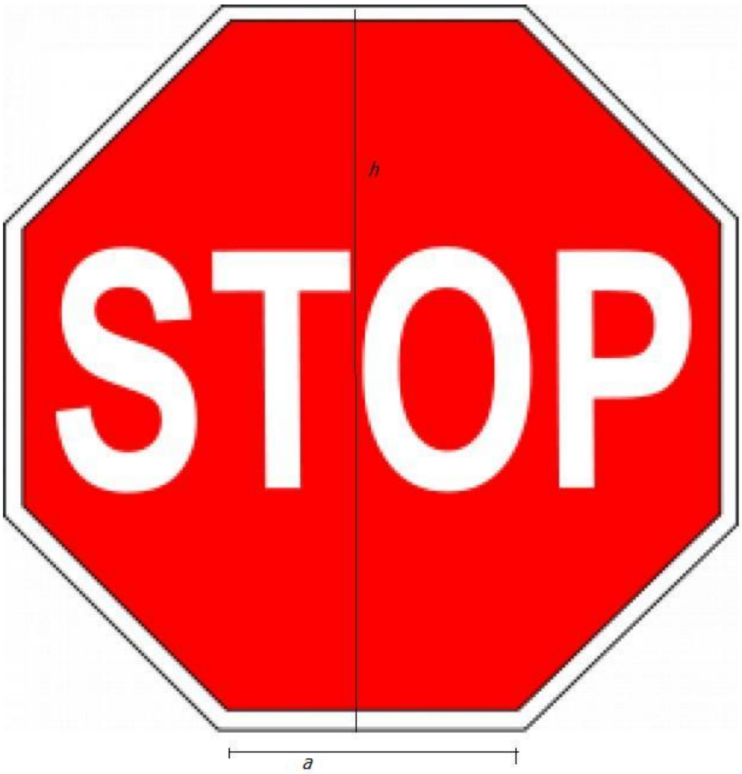
$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

Llavors, s'aïlla h i ens queda que:

$$\frac{h^2}{4} = a^2 - \frac{a^2}{4} \ \rightarrow \ \frac{h^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

Encara es pot simplificar més, de manera que l'amplada del senyal és igual a:

$$h = \sqrt{3a^2}$$



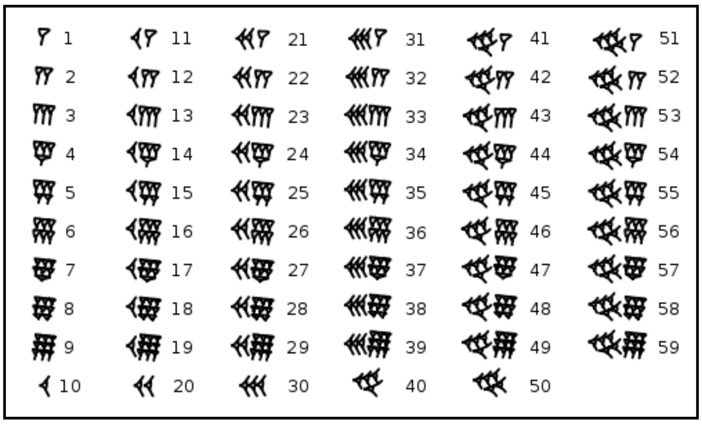
48. Senyal d'STOP de costat a.

6. DEMOSTRACIONS DEL TEOREMA DE PITÀGORES

Al llarg de tota la història de la matemàtica, hi ha hagut molts matemàtics i moltes civilitzacions antigues que han estat capaços de demostrar el teorema del propi Pitàgores de diferents maneres, algunes d'elles molt curioses. Vegem-ne algunes, ordenades de més a menys antiguitat:

BABILÒNICS

Tenien un sistema numèric sexagesimal. Utilitzaven dos tipus de símbols: un de més allargat i prim per a representar el nombre 1 i un altre d'ample per representar la desena, el nombre 10.

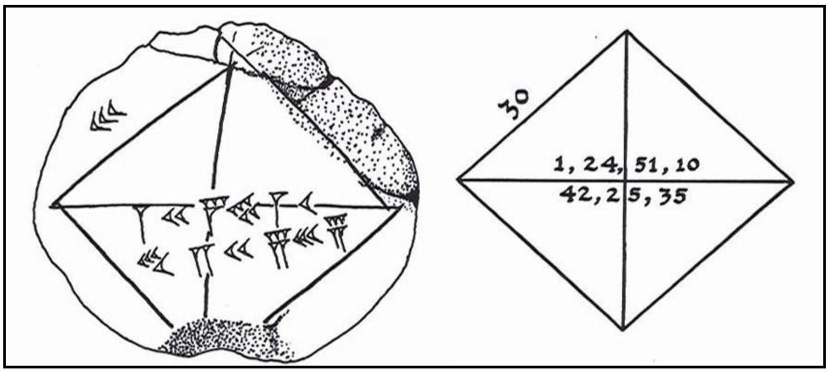


49. Escriptura babilònica.

Dels babilònics, s'han trobat diverses tauletes d'argila amb textos esculpits, i la més famosa és la tauleta Yale. En aquesta tauleta hi consta un quadrat amb els triangles rectangles que resulten de dibuixar les dues diagonals i diversos nombres escrits amb el sistema sexagesimal. Una vegada traduïts al nostre sistema decimal, es veu que en la diagonal hi ha esculpit el nombre 1;24,51,10, on el punt i coma representen la separació entre la part entera del nombre i la part decimal. Per tant, ens quedaria que aquest nombre decimal (1'245110) és el que nosaltres coneixem com √2.

A continuació, a la part superior d'aquesta tauleta d'argila apareix, transcrit, el nombre 30 i a la part inferior el 42;25,35.
Si sabem que la diagonal d'un quadrat s'obté multiplicant el costat per √2, es pot comprovar que:

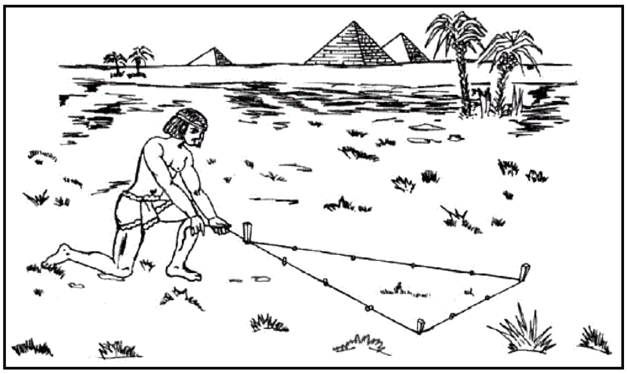
$$42;25,35 \cong 30 \cdot (1;24,51,10), \textit{és a dir}: 42.426389 \cong 30 \cdot 1'41421$$



50. Tauleta YALE, on consta la demostració del teorema de Pitàgores.

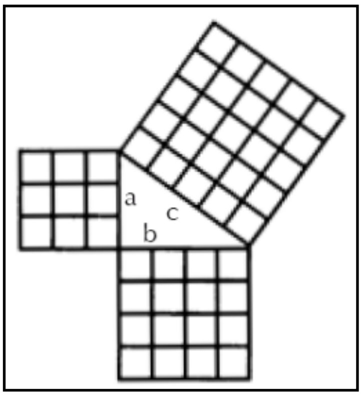
EGIPCIS

Els egipcis, malgrat no saber de l'existència del teorema de Pitàgores i de les ternes pitagòriques, coneixien i feien servir el triangle de costats 3-4-5 (o múltiples a aquests), el qual és rectangle, per traçar línies perpendiculars a altres (escaire), una pràctica comuna entre el agricultors que recuperaven les fronteres de les terres properes al Nil durant el període en què aquest augmentava de cabal.



51. Egipcis aplicant el teorema de Pitàgores.

Per als egipcis, aquest triangle també s'anomenava "*Triangle d'Isis*" i tenia un caràcter sagrat, ja que el nombre 3 representava el déu Osiris, el quatre la deessa Isis i el cinc el déu Osiris. També, aquest triangle simbolitza la fecunditat: el costat vertical significa el mascle, la base significa la femella i, la hipotenusa, significa el fill primogènit.

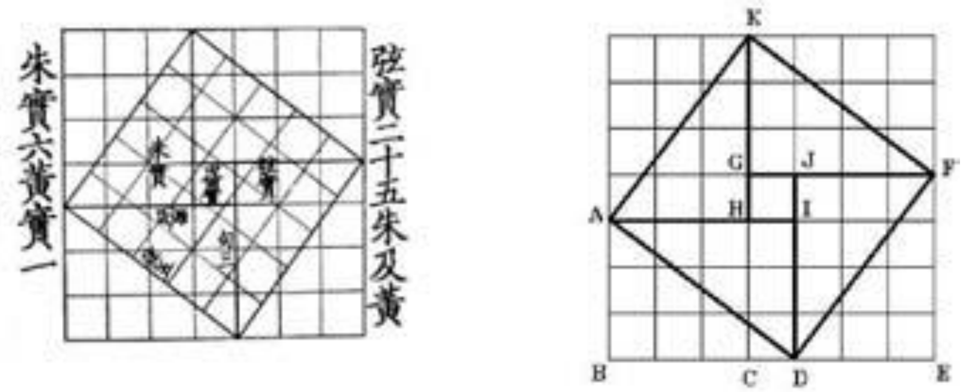


52. Triangle d'Isis.

XINESOS

A la Xina trobem dos tractats clàssics de matemàtics on s'hi relacionen aspectes vinculats amb el teorema. Un d'aquests tractats parla dels resultats numèrics concrets del teorema, mentre que l'altre tracta d'aspectes més evolucionats de la demostració.

La demostració de la imatge de l'esquerra s'explica amb què la porció interior d'aquest diagrama, hi ha un hexàgon AHGFEB, el qual es compon per dos quadrats: AXCB i CEFG. Aquests tenen per costat els catets del triangle rectangle. L'àrea de l'hexàgon és la mateixa que l'àrea del quadrat ADFK sobre la hipotenusa del triangle, per la qual resulta el teorema.



53. Demostració xinesa del teorema de Pitàgores.

L'autor d'aquest tractat, Chou-Pei, descriu la figura tot dient:

"*En cada semirrectangle d'amplada 3 i de longitud 4, la diagonal ha de valdre 5, i si es resta del quadrat total d'àrea 49 els quatre semirrectangles exteriors, els quals sumen àrea 24, el que queda és un quadrat d'àrea 25*".

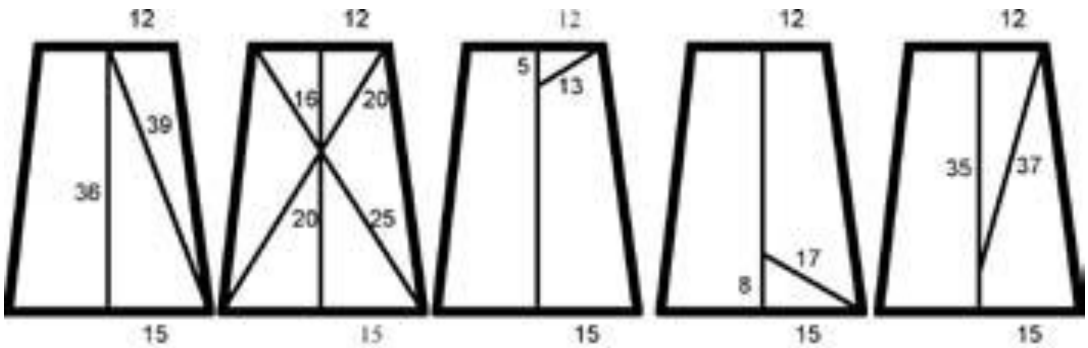
HINDÚS

A la Índia, també va sortir la necessitat de posar en pràctica el teorema de Pitàgores a la construcció d'altars i temples. Totes les regles i coneixements aritmètics i geomètrics que van anar adquirint al llarg del temps, van prendre la forma d'una doctrina la qual es coneixia amb el nom de "*Sulvasutra*", de manera que eren una mena de manuals on hi havia instruccions detallades sobre com construir ritualment altars amb unes mides i formes concretes.

En un "*Sulvasutra*" es parla de la corda utilitzada per dibuixar línies perpendiculars, mitjançant ternes de cordes la longitud de les quals fos igual ternes pitagòriques com 3-4-5, 5-12-13, 8-15-17 i 7-24-25.

Tot i així, el triangle que s'acostumava a utilitzar era el de costats 15-36-39, el qual s'anomenava "*Triangle hindú*".

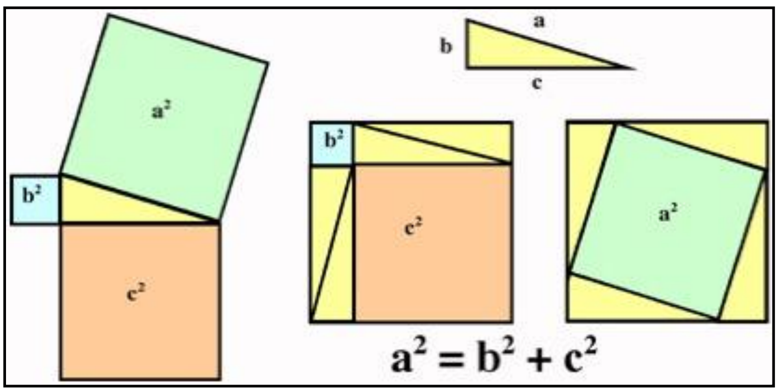
A l'hora de fer traçats a la construcció de temples i altars, utilitzaven el teorema de Pitàgores i les ternes pitagòriques de la següent manera, per mesurar distàncies:



54. Aplicacions del triangle hindú, de costats 15-36-39.

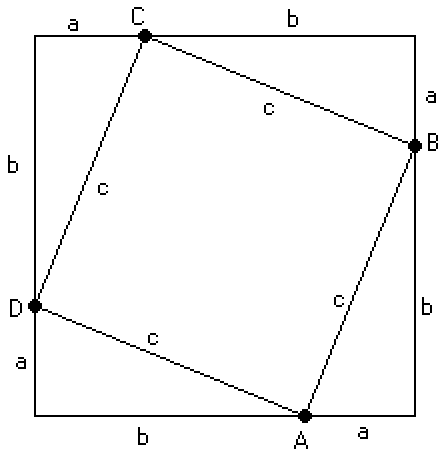
PITÀGORES

Es coneix que Pitàgores va aconseguir demostrar el seu teorema basant-se amb les figures següents:



55. Demostració de Pitàgores(1).

Amb aquesta il·lustració, Pitàgores va demostrar que es complia el seu teorema. Vegem com ho va demostrar:



56. Demostració de Pitàgores (2).

Si mirem la figura del costat, tenim un quadrat inscrit a l'interior d'un altre quadrat.

Els costats del quadrat gran mesuren (a+b), de manera que la seva àrea és igual a:

$$(a+b)(a+b)$$

A continuació, es sumen totes les àrees dels trossos més petits:

$$quadrat\ petit\colon A = c^2$$
$$quatre\ triangles\ petits, de\ la\ mateixa\ \grave{a}rea\colon\ A = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) \rightarrow A$$
$$= 2abSuma\ de\ les\ \grave{a}rees\ del\ quadrat\ i\ dels\ triangles\colon\ A$$
$$= c^2 + 2ab$$

Un cop tenim la suma de totes les àrees, deduïm que aquesta suma és igual a l'àrea del quadrat gran, la qual expressarem de la següent manera:

$$(a+b)(a+b) = c^2 + 2ab$$

Amb això, es desenvolupa la fórmula anterior, de manera que al final, ens quedarà el teorema de Pitàgores:

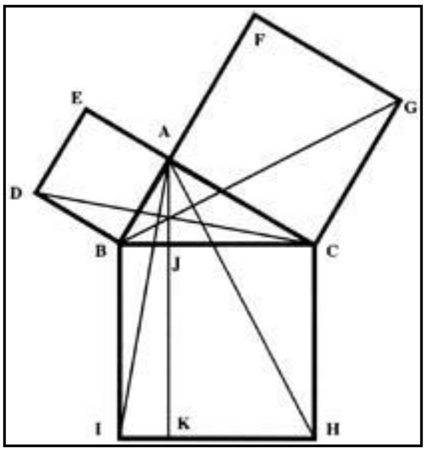
$$(a+b)(a+b) = c^2 + 2ab \rightarrow\ a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

A continuació, podem restar *2ab* dels dos cantons, de manera que obtenim que:

$$\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2} = \boldsymbol{c^2}$$

EUCLIDES (352 aC-265 aC)

A Euclides se'l considera el pare de la geometria. Va realitzar molts estudis en aquest camp i, entre altres coses, va realitzar una demostració del teorema de Pitàgores, que és la següent:



57. Demostració d'Euclides.

Els triangles DCB i ABI són iguals, perquè AB=BD, BI=BC i l'angle B del triangle DCB és igual a l'angle B del triangle ABI.

A continuació, diu que l'àrea del quadrat ABDE és igual al doble de l'àrea del triangle DCB, perquè tenen la mateixa base i els dos estan situats entre les mateixes paral·leles.
Després d'això, l'àrea del rectangle BIKJ val el doble de l'àrea del triangle ABI, ja que tenen la mateixa base i es troben situats entre les mateixes paral·leles.

Un cop es tenen totes aquestes característiques, es combinen entre elles, de manera que trobem que l'àrea del rectangle BIKJ i l'àrea del quadrat ABDE tenen el mateix valor. Raonant de la mateixa manera, trobem que l'àrea del rectangle CHKJ i l'àrea del quadrat ACGF són iguals.

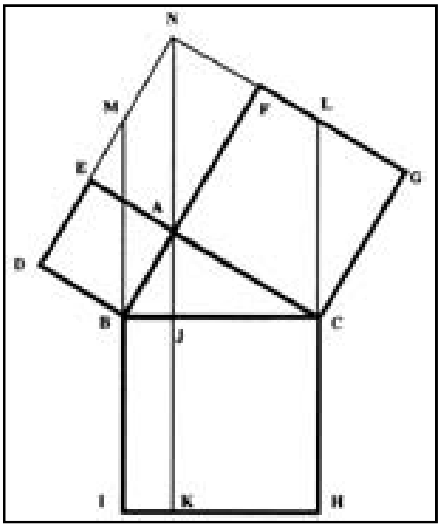
Finalment, com que l'àrea del quadrat BIHC és igual a la suma de les àrees dels rectangles BIKJ i CHKJ, i l'àrea del quadrat BIHC, és igual a la suma dels quadrats ABDE i ACGF.

PAPPUS (290-350)

Pappus era un matemàtic nascut a Alexandria. La seva demostració del teorema de Pitàgores consisteix en la següent:

El paral·lelogram NABM i el rectangle JKIB tenen la mateixa àrea, ja que els segments JK i AN són iguals.

Al mateix temps, aquest paral·lelogram (NABM) té la mateixa àrea que el quadrat ABDE. Per tant, NABM i ABDE són iguals.



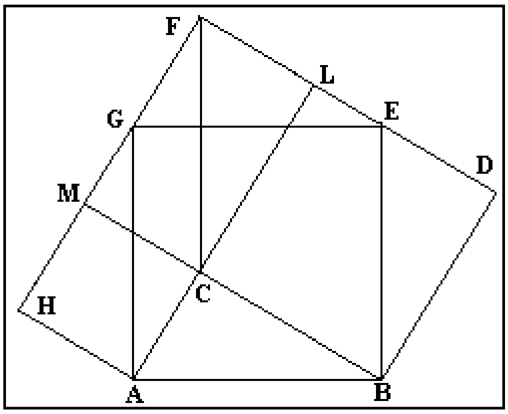
58. Demostració de Pappus.

A continuació, Pappus va comprovar que el rectangle JKHC té la mateixa àrea que el quadrat ACGF.

Per tant, l'àrea del quadrat BIHC, el qual està sobre la hipotenusa BC, és igual a la suma de les àrees dels quadrats ABDE i ACGF, els quals es troben sobre els catets AB i AC respectivament.

THÂBIT IBN QURRÁ (836-901)

Nascut a Turquia, va ser un gran astrònom i matemàtic. Tenia similituds a Pitàgores, pel que fa als nombrosos viatges que va fer al llarg de la seva vida. Va fer aquesta demostració del teorema de Pitàgores a causa de que un amic seu, el qual era coneixedor de nombres concrets que complien el teorema, va demanar-li que li enviés per carta una proba del teorema general. Una de les dues demostracions que va fer és la següent:

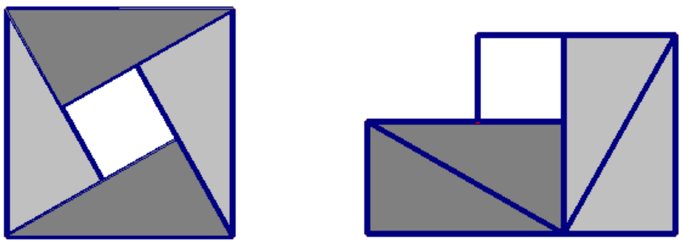


59. Demostració de Thâbit ibn Qurrá.

A la figura de l'esquerra podem veure el triangle rectangle ABC. Si en aquesta figura, la qual anomenem ABDFH, se li extreuen els triangles AHG, BDE i GEF, els quals són els mateixos que ABC, ens queda el quadrat ABEG sobre la hipotenusa (AB) del triangle ABC i el quadrat ACMH sobre el catet (AH) del triangle AHG.

BHASKARA (1114-1185)

Era un monjo d'origen hindú i també va fer una demostració del teorema de Pitàgores. Vegem-la a continuació:

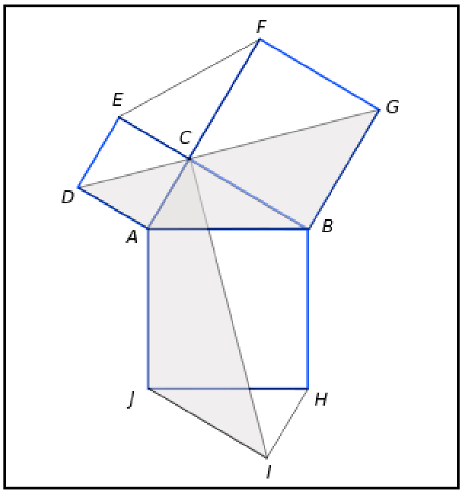

60. Demostració de Bhaskara.

Tal com podem veure en la figura, el quadrat es divideix en quatre triangles rectangles i un quadrat de costat igual a la diferència dels catets dels triangles.

L'àrea del quadrat gran és igual a la suma de les àrees de tots els triangles i la del quadrat petit. Per tant, va veure que es complia el teorema de Pitàgores amb aquesta demostració.

LEONARDO DA VINCI (1452-1519)

Leonardo da Vinci va ser un gran personatge italià, el qual va dedicar-se profundament a diversos àmbits de la ciència i la cultura: pintura, escultura, arquitectura, matemàtiques, biologia... i també va fer una demostració del teorema de Pitàgores. La demostració era la següent:



61. Demostració de Leonardo da Vinci.

Si tenim un triangle rectangle ABC amb els quadrats dels catets i la hipotenusa, se'ls afegeix els triangles ECF i HIL, idèntic al triangle ABC. El resultat d'això són dos polígons, la superfície dels quals va demostrar que són equivalents:

$$ADEFGB\text{: la línia } DG \text{ el divideix en dues meitats idèntiques, la } ADGB \text{ i la } DEFG$$
$$ACBHI\text{: la línia } CI \text{ determina } CBHI \text{ i } CIJA$$

A continuació, hem de comparar els dos polígons que, en el dibuix, estan pintats de color gris: ADGB i CIJA. Amb això, ens adonem de diverses coses:

1- Tenen tres costats iguals: AD=AC, AB=AJ, BG=BC=IJ.

2- Hi ha una igualtat d'angles en els següents vèrtexs: A de ADGB i A de CIJA, B de ADGB i J de CIJA.

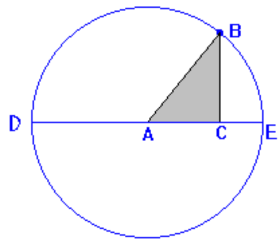
Amb això, s'afirma que ADGB i CIJA són iguals. A continuació, d'una manera similar, es comprova la igualtat entre ADGB i CBHI.

Finalment, tots els passos seguits ens demostren que ADEFGB i ACBHIJ tenen àrees equivalents. Llavors, si a cada polígon se li treu dos triangles iguals, les superfícies que es restaran seran iguals, les quals seran els quadrats dels catets del polígon ADEFGB i, al mateix temps, el quadrat de la hipotenusa del polígon ACBHIJ.

FRANÇOIS VIÈTE (1540-1610)

François Viète, un matemàtic francès el qual va dedicar-se al camp de l'àlgebra, va fer una demostració del teorema de Pitàgores molt fàcil d'entendre:
A la figura del costat, podem veure, d'entrada, que:

$$\mathrm{DC} = \mathrm{DA} + \mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$$
$$\mathrm{CE} = \mathrm{AE} - \mathrm{AC} = \mathrm{AB} - \mathrm{AC}$$



62. Demostració de Viète.

A continuació, afegeix que:

$$\mathrm{DC} \cdot \mathrm{CE} = (\mathrm{AB} + \mathrm{AC}) \cdot (\mathrm{AB} - \mathrm{AC}) = AB^2 - AC^2$$

Finalment, conclou la demostració fent el següent pas:

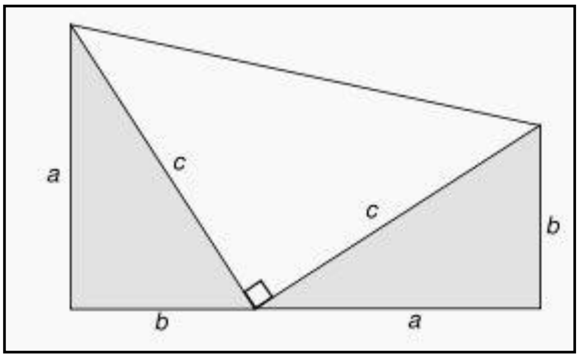
$$DC \cdot CE = CB^2$$

Per tant, si igualem les dues equacions anteriors, ens queda que:

$$\boldsymbol{AB^2 = AC^2 + CB^2}$$

JAMES ABRAHAM GARFIELD (1831-1881)

Va ser el vintè president dels Estats Units, i tenia gran admiració a les matemàtiques. Va ser capaç de desenvolupar la següent demostració del teorema de Pitàgores:



63. Demostració de Garfield.

Va construir un trapezi, les bases del qual valien a i b, i d'altures a i b, també. Aquest trapezi, si es simplifica, es veu que està format per tres triangles rectangles, un dels qual té els catets iguals (c) i els altres dos tenen els mateixos costats (a i b).
Amb aquests triangles, per determinar l'àrea del trapezi ens queda que:

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b)$$

Tot i així, el trapezi està compost per tres triangles, de manera que es pot modificar l'equació de l'àrea tot afegint-hi les fórmules de les àrees dels triangles:

$$A = 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

A continuació, s'igualen les dues fórmules de l'àrea del trapezi, i ens queda:

$$ab + \frac{c^2}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b)$$

Llavors, es va simplificant l'equació, de manera que al final s'obté la fórmula del teorema de Pitàgores:

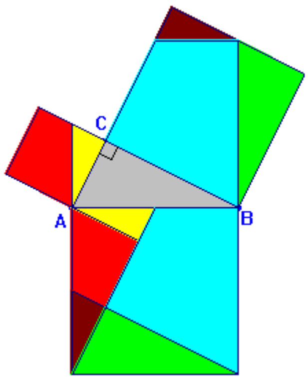
$$ab + \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot (a+b) \rightarrow \ 2ab + c^2 = (a+b)^2 \rightarrow \ 2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

ANARICIO-GÖPEL (1824)

Va fer una demostració gràfica del teorema de Pitàgores, de les que es consideren del tipus "puzle":

En aquest gràfic podem veure que el quadrat situat a la hipotenusa del triangle ABC està descompost en cinc parts, les quals ordenades novament formen els quadrats que es troben al damunt dels catets del triangle. La sumes de les àrees de les peces que formen els quadrats dels catets és igual a l'àrea del quadrat dividit en cinc peces diferents.

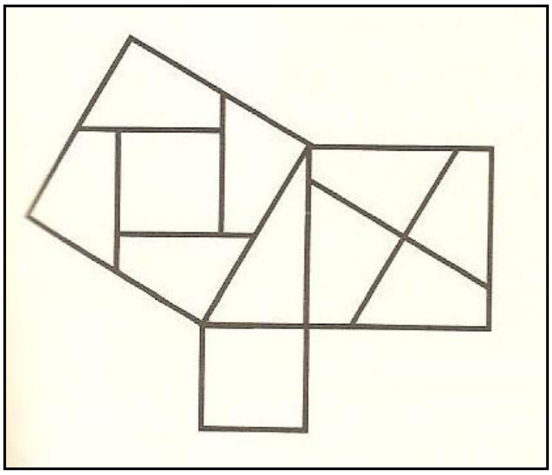


64. Demostració d'Anaricio-Göpel.

PERIGAL (1830)

Perigal era un accionista de borsa de Londres i un astrònom aficionat. L'any 1830 va fer una demostració del Teorema de Pitàgores, també gràfica.

Com que estava molt orgullós de la seva feina, Perigal va inscriure's aquesta figura a les seves targetes de visita i, també, a Londres se li va fer un monument en commemoració a la seva dedicació i interès per les matemàtiques:



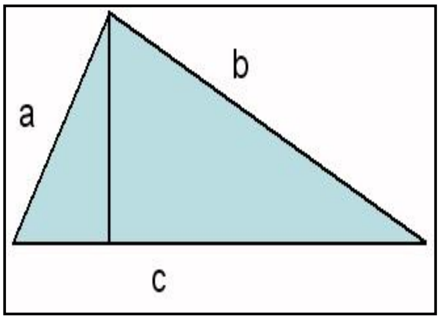
65. Demostració de Perigal.

En un triangle rectangle, en el catet més gran hi ha un quadrat, el qual es divideix en quatre parts. En el catet més petit hi ha un quadrat.

Perigal va agafar les peces dels catets, va reordenar-les i va poder formar un quadrat els costats del qual mesuraven igual que la hipotenusa del triangle.

ALBERT EINSTEIN (1879-1955)

El gran matemàtic Einstein, amb tan sols 11 anys, va idear una manera senzilla de demostrar el teorema de Pitàgores, després de que el seu tiet li ensenyés la demostració d'Euclides i cregués que era massa complicada d'entendre:



66. Demostració d'Einstein.

En la figura podem veure un triangle rectangle, en el qual s'ha traçat l'altura. D'aquesta manera, ens surten dos triangles rectangles petits: el del cantó esquerra, l'àrea del qual anomenarem S_a té d'hipotenusa a; i el de la dreta, l'àrea del qual serà S_b tindrà d'hipotenusa b. Llavors, el triangle que teníem al principi, té c per hipotenusa, i la seva superfície és S_c. Com que els tres triangles tenen els mateixos angles, són semblants.

Hi ha una norma que diu que l'àrea de qualsevol figura geomètrica és proporcional al quadrat de la seva dimensió lineal. Per tant:

$$S_a = k \cdot a^2$$
$$S_b = k \cdot b^2$$
$$S_c = k \cdot c^2$$

k és una constant igual en els tres cassos. Això passa perquè els tres triangles rectangles són semblants i agafen com a dimensió lineal les tres hipotenuses. Per tant, també es dedueix que:

$$S_c = S_a + S_b$$

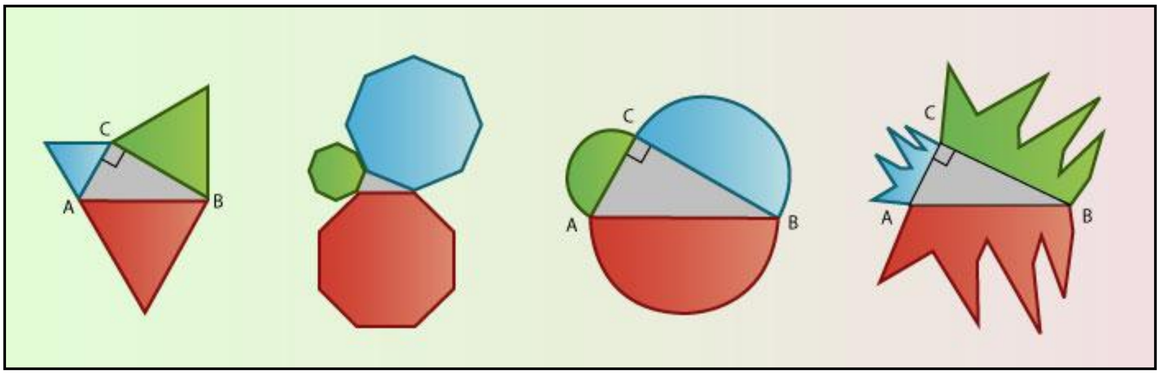
Si substituïm les equacions de les superfícies de cada triangle a l'equació anterior, finalment obtenim que:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

7. TEOREMA DE PITÀGORES GENERALITZAT

Tal com hem vist en l'apartat 5, molts matemàtics van fer demostracions del teorema de Pitàgores amb l'ajuda de quadrats que s'afegien a la hipotenusa i als catets del triangle rectangle. Havien vist que la suma de les àrees dels quadrats que estaven als catets era igual a l'àrea del quadrat que es trobava al damunt de la hipotenusa.

A partir d'aquí, altres matemàtics es van plantejar la possibilitat que el teorema de Pitàgores pogués complir-se si, en aquestes demostracions gràfiques, enlloc d'afegir-hi un quadrat hi afegien altres figures geomètriques o qualsevol figura sense una forma exacta, i seguís l'exemple de la demostració dels quadrats. Es va provar i van veure que, efectivament, el teorema de Pitàgores es complia.

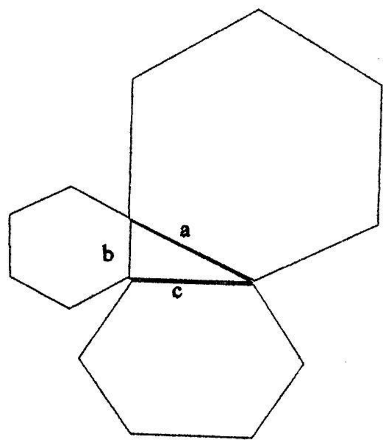


67. Exemples del teorema de Pitàgores generalitzat.

A continuació, hi ha algunes demostracions del teorema de Pitàgores explicades pas per pas, en les quals s'utilitzen diferents formes geomètriques:

En la figura de la dreta, s'ha treballat amb hexàgons. Si es dóna un valor als costats, ens queda que:

$$a = 5$$
$$b = 3$$
$$c = 4$$



68. Generalització del teorema de Pitàgores amb hexàgons.

Per trobar l'apotema dels hexàgons, s'aplica el teorema de Pitàgores:

$$apotema\ a = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 4'33$$

$$apotema\ b = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 2'598$$

$$apotema\ c = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = 3'463$$

Llavors, tot aplicant la fórmula per calcular l'àrea dels polígons regulars, es troba l'àrea de cada hexàgon de la figura:

$$A = \frac{p \cdot a}{2}$$

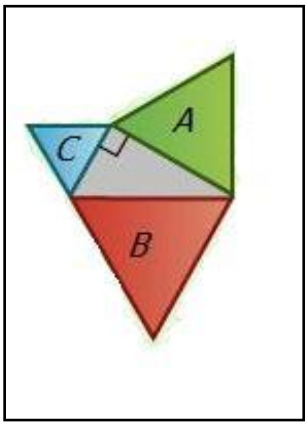
$$Àrea\ a = \frac{(5 \cdot 4'33)}{2} = 10'825$$

$$Àrea\ b = \frac{(3 \cdot 2'598)}{2} = 3'897$$

$$Àrea\ c = \frac{(4 \cdot 3'463)}{2} = 6'926$$

Ara comprovem que la suma de les àrees dels hexàgons dels catets és igual a l'àrea de l'hexàgon de la hipotenusa.

$$6'926 + 3'897 = \sim 10'825$$



69. Teorema de Pitàgores generalitzat amb triangles equilàters.

En aquest exemple, hi ha un triangle amb triangles equilàters als catets i la hipotenusa. Es dóna valor als catets i a la hipotenusa del triangle, de manera que tenim:

$$a = 24$$
$$b = 25$$
$$c = 7$$

Tot seguit, es necessita saber l'altura de cada triangle, de manera que es calcula tot aplicant el teorema de Pitàgores:

$$Altura\ A: h = \sqrt{24^2 - \left(\frac{24}{2}\right)^2} = 20'785$$

$$Altura\ B: h = \sqrt{25^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = 21'651$$

$$Altura\ C: h = \sqrt{7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = 6'062$$

A continuació, calcularem les àrees dels triangles afegits, tot aplicant la fórmula:

$$\grave{A}rea\ A: \frac{24 \cdot 20'785}{2} = 249'42$$

$$\grave{A}rea\ B: \frac{25 \cdot 21'651}{2} = 270'638$$

$$\grave{A}rea\ C: \frac{7 \cdot 6'062}{2} = 21'217$$

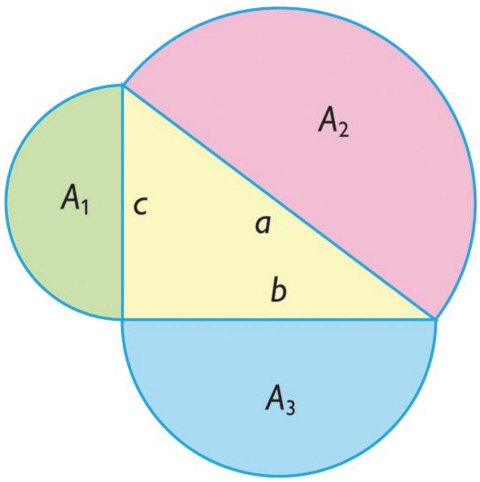
Finalment, veiem que la suma de les àrees dels triangles que es troben als catets és igual a l'àrea del triangle que està a sobre la hipotenusa:

$$249'42 + 21'217 = \sim 270'638$$

També, es va provar d'afegir-hi, enlloc de quadrats, semicircumferències.

Si sabem els valors dels catets i la hipotenusa:

$$a = 13$$
$$b = 12$$
$$c = 5$$



70. Teorema de Pitàgores generalitzat amb semicercles.

Podrem trobar, després, les àrees de cada semicircumferència:

$$\grave{A}rea\ 1: \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 19'63$$
$$\grave{A}rea\ 2: \pi \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^2 = 132'73$$
$$\grave{A}rea\ 3: \pi \cdot \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 113'097$$

Finalment, es comprova que la suma de les àrees de les semicircumferències que estan als catets és igual a l'àrea de la semicircumferència de la hipotenusa:

$$19'63 + 113'097 = \sim 132'73$$

Els resultats són aproximacions a causa dels decimals.

8. RECERCA PITAGÒRICA PRÒPIA

8.1. TERNES PITAGÒRIQUES IRREDUCTIBLES

Una terna és una agrupació de tres nombres naturals els quals estan relacionats d'alguna manera i, en aquest cas, una terna pitagòrica és una agrupació de tres nombres que compleixen el teorema de Pitàgores:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Per tal de veure quantes ternes Pitagòriques hi havia amb nombre que no superessin el 100, vaig realitzar un full de càlcul Excel, el qual em va permetre formar totes les combinacions possibles de ternes amb nombres que es troben entre l'1 i el 100.

Llavors, vaig marcar totes les ternes que m'havien resultat i en vaig obtenir un total de 50:

	a	b	c		a	b	c
1	3	4	5	**26**	24	45	51
2	5	12	13	**27**	24	70	74
3	6	8	10	**28**	25	60	65
4	7	24	25	**29**	27	36	45
5	8	15	17	**30**	28	45	53
6	9	12	15	**31**	28	96	100
7	9	40	41	**32**	30	40	50
8	20	48	52	**33**	30	72	78
9	10	24	26	**34**	32	60	68
10	11	60	61	**35**	33	44	55
11	12	16	20	**36**	35	84	91
12	12	35	37	**37**	36	48	60
13	13	84	85	**38**	36	77	85
14	14	48	50	**39**	39	52	65
15	15	20	25	**40**	39	80	89
16	15	36	39	**41**	40	42	58
17	16	30	34	**42**	40	75	85
18	16	63	65	**43**	42	56	70
19	18	24	30	**44**	45	60	75

20	18	80	82	**45**	48	64	86
21	20	21	29	**46**	51	68	85
22	60	63	87	**47**	54	72	90
23	21	28	35	**48**	57	76	95
24	21	72	75	**49**	60	80	100
25	24	32	40	**50**	62	75	97

Un cop classificades totes les ternes de l'1 al 100, vaig obtenir-ne les irreductibles, tot buscant possibles nombres que fossin el màxim comú divisor de tots els nombres d'una terna.

D'aquesta manera vaig obtenir 13 ternes irreductibles diferents, tot adonant-me que totes les ternes pitagòriques que existeixen són múltiples d'aquestes:

	a	b	c		a	b	c
1	3	4	5	**8**	13	84	85
2	5	12	13	**9**	28	45	53
3	7	24	25	**10**	20	21	29
4	8	15	17	**11**	62	75	97
5	9	40	41	**12**	36	77	85
6	11	60	61	**13**	39	80	89
7	12	35	37				

Finalment, tots els estudis de recerca sobre les ternes pitagòriques que he realitzat al llarg del meu treball estan basats amb les ternes pitagòriques irreductibles que vaig trobar, els nombres de les quals les formen es troben entre l'1 i el 100.

Per tal de demostrar i poder comprovar que les veritables ternes pitagòriques irreductibles són aquestes que he obtingut i no unes altres, hi ha una fórmula que les determina:

$$a = \tau^2 - \mu^2$$
$$b = 2\tau \cdot \mu$$
$$c = \tau^2 + \mu^2$$

μ i τ són dos nombres reals i naturals qualssevol, i es dedueix que aquests han de ser nombres de diferent paritat entre ells (que un sigui parell i l'altre senar) i que siguin primers entre sí.

Per exemple, un cas de μ i τ podrien ser 2 i 3, dos nombres de diferent paritat els quals són primers entre sí.

Si apliquem la fórmula de les ternes pitagòriques, obtenim que:

$$a = 3^2 - 2^2 = 5$$
$$b = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$
$$c = 2^2 + 3^2 = 13$$

De manera que obtenim la terna pitagòrica [5,12,13] i veiem que és irreductible.

8.2. POLINOMIS PITAGÒRICS

Els polinomis pitagòrics consisteixen en agafar les ternes irreductibles obtingudes a l'apartat anterior i aplicar-les en una fórmula, per tal d'obtenir un polinomi desenvolupat. He tingut interès en realitzar aquesta prova per veure si entre tots els polinomis pitagòrics que trobava hi havia alguna coincidència entre ells o deduir-ne alguna relació entre ells. La fórmula que utilitzarem per desenvolupar cadascuna de les ternes és la següent:

$$\boldsymbol{(x - t_1) \cdot (x - t_2) \cdot (x - t_3)}$$

Si agafo la primera terna, [3,4,5] i li aplico aquesta fórmula em queda:

$$(x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x - 5)$$

A continuació, hem de desenvolupar-la, fins arribar a un polinomi final, el qual sigui irreductible:

$$(x-3)(x-4)(x-5) = (x^2 - 4x - 3x + 12)(x-5) = (x^2 - 7x + 12)(x-5)$$
$$= x^3 - 12x^2 + 47x - 60$$

He seguit el mateix procediment per a totes les ternes que he obtingut, de manera que els polinomis pitagòrics resultants són els següents:

TERNA PITAGÒRICA	POLINOMI PITAGÒRIC
3-4-5	$x^3 - 12x^2 + 47x - 60$
5-12-13	$x^3 - 30x^2 + 281x - 780$
7-24-25	$x^3 - 56x^2 + 943x - 4200$
8-15-17	$x^3 - 40x^2 + 511x - 2040$
9-40-41	$x^3 - 90x^2 + 2369x - 14760$
11-60-61	$x^3 - 132x^2 + 4991x - 40260$
12-35-37	$x^3 - 84x^2 + 2159x - 15540$
13-84-85	$x^3 - 182x^2 + 9337x - 92820$
28-45-53	$x^3 - 126x^2 + 5129x - 66780$
20-21-29	$x^3 - 70x^2 + 1609x - 12180$
62-75-97	$x^3 - 234x^2 + 17939x - 451050$
36-77-85	$x^3 - 198x^2 + 12377x - 235620$
39-80-89	$x^3 - 208x^2 + 13711x - 277680$

A part d'aplicar aquesta fórmula, n'existeix una altra, la qual deriva de la que he aplicat i és més pràctica per calcular les ternes pitagòriques. Al principi, l'enunciat de la fórmula és el mateix que l'anterior (com bé he dit, aquesta fórmula n'és una de derivada de l'anterior):

$$\boldsymbol{(x - t_1) \cdot (x - t_2) \cdot (x - t_3)}$$

Tot i així, a l'hora de desenvolupar-la hi trobem algunes diferències:

$$x^3 - (t_1 + t_2 + t_3)x^2 + (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)x - t_1t_2t_3$$

A l'hora de simplificar-ho per a resoldre-ho, ens queda que:

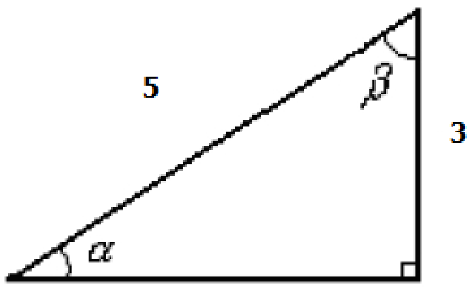
$$s_1 = t_1 + t_2 + t_3$$
$$s_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$$
$$s_3 = t_1t_2t_3$$

Els polinomis pitagòrics s'anomenen, també, *polinòmics simètrics elementals*.

8.3. ANGLES PITAGÒRICS

En aquest apartat també es treballa amb les ternes, però d'una manera diferent. Es tracta de dibuixar un triangle rectangle i aplicar les ternes als costats del triangle, de manera que puguem calcular l'angle que forma el triangle de cada terna.

En el cas de la terna 3-4-5, hem agafat el triangle i hem associat per als catets i la hipotenusa els valors següents:



71. Triangle rectangle amb els angles marcats.

A partir d'aquí, utilitzarem raons trigonomètriques per trobar els angles α i β:

$$\cos\alpha = \frac{4}{5};\ \alpha = arccos\frac{4}{5} = 36'8699°$$
$$cos\beta = \frac{3}{5};\ \beta = arccos\frac{3}{5} = 53'13°$$

Per trobar l'angle que formen totes les ternes apliquem les mateixes fórmules, de manera que els resultats que obtenim són, amb els angles α ordenats de més petit a més gran:

TERNA PITAGÒRICA	ANGLES PITAGÒRICS
13-84-85	$\alpha = 8'7974°$ $\beta = 81'2026°$
11-60-61	$\alpha = 10'3889°$ $\beta = 79'6111°$
9-40-41	$\alpha = 12'6804°$ $\beta = 77'3196°$
7-24-25	$\alpha = 16'26°$ $\beta = 73'7998°$
12-35-37	$\alpha = 18'9246°$ $\beta = 71'0754°$

5-12-13	$\alpha = 22'6199°$ $\beta = 67'3801°$
36-77-85	$\alpha = 25'0576°$ $\beta = 26'6047°$
39-80-89	$\alpha = 25'9892°$ $\beta = 64'0108°$
8-15-17	$\alpha = 28'0725°$ $\beta = 61'9275°$
28-45-53	$\alpha = 31'8908°$ $\beta = 58'1092°$
3-4-5	$\alpha = 36'8699°$ $\beta = 53'13°$
62-75-97	$\alpha = 39'3583°$ $\beta = 50'2697°$
20-21-29	$\alpha = 43'6028°$ $\beta = 46'3972°$

Vaig mirar a veure si els angles, entre tots, tenien alguna relació. Malgrat el fet que a mesura que es va augmentant el primer angle, l'altre va disminuint, es pot observar que la diferència entre el primer angle va variant a raó de 2, 3, 4 i 5 unitats, no més. Tot i així, no hi ha cap ordre estructurat ni cap relació propera entre ells.

8.4. QUATERNES PITAGÒRIQUES

En aquest apartat, he buscat agrupacions de quatre nombres, els quals es trobessin entre l'1 i el 50, que complissin l'equació:

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2$$

Aquesta equació correspondria a la d'una capsa o d'un ortoedre, en la qual la suma dels quadrats de la base, l'amplada i l'altura és igual al quadrat de la diagonal.

Per fer-ho, he utilitzat un full de càlcul Excel, igual que l'apartat 9.1. He obtingut moltes agrupacions de nombres que complissin l'equació, tot i que les quaternes irreductibles que existeixen són les següents:

1-2-2-3	3-16-24-29	6-17-30-35	12-16-21-29
1-4-8-9	3-24-28-37	6-18-43-47	12-21-28-37
1-6-18-19	4-4-7-9	6-21-22-31	12-24-31-41
1-8-32-33	4-5-20-21	6-27-38-47	12-24-41-49
1-12-12-17	4-7-32-33	7-14-22-27	12-31-36-49
1-18-30-35	4-8-19-21	7-16-28-33	13-14-34-39
2-3-6-7	4-9-48-49	7-30-30-43	13-16-40-45
2-5-14-15	4-12-39-41	8-8-31-33	14-18-21-31
2-6-9-11	4-13-16-21	8-9-12-17	14-22-29-39
2-7-26-27	4-17-28-33	8-11-16-21	15-18-26-35
2-9-42-43	4-24-33-41	8-19-40-45	15-24-40-49
2-10-11-15	4-28-35-45	8-20-25-33	16-20-37-45
2-10-25-27	4-33-36-49	8-24-27-37	17-20-20-33

2-14-23-27	5-6-30-31	9-12-20-25	18-21-38-47
2-18-39-43	5-8-44-45	9-18-38-43	18-25-30-43
2-19-34-39	6-6-7-11	9-24-32-41	18-27-34-47
2-21-42-47	6-6-17-19	9-32-36-49	19-22-26-39
2-26-29-39	6-7-42-43	10-10-23-27	20-28-29-45
3-4-12-13	6-10-15-19	10-14-35-39	23-24-24-41
3-6-22-23	6-10-33-35	11-12-24-29	23-24-36-49
3-8-36-37	6-13-18-23	1-18-42-47	
3-14-18-23	6-14-27-31	12-15-16-25	

Un cop les he vist totes, m'he fixat en què totes les quaternes estan formades per dos nombres parells i dos nombres senars (un dels quals és l'últim de totes), de manera que conjecturo:

"*Totes les quaternes pitagòriques estan formades per dos nombres parells i dos nombres senars i, l'últim nombre de les quaternes, sempre és un nombre senar*".

Tot i així, després d'elaborar la conjectura, he sabut que ja existia una conjectura que regeix les quaternes pitagòriques, de manera que he pogut comprovar-ho amb els resultats que he obtingut amb la meva recerca.

8.5. SUMES IGUALS DE QUADRATS

En aquest apartat he treballat amb ternes pitagòriques de números que es troben entre l'1 i el 50, ambdós inclosos.

L'objectiu ha estat trobar parelles de nombres que complissin l'equació següent:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

Les parelles de nombres irreductibles que he trobat gràcies al full de càlcul Excel són les següents, ordenades horitzontalment de resultat més petit a més gran:

1-7 5-5	1-8 4-7	2-9 6-7	2-11 5-10
3-11 7-9	1-12 8-9	1-13 7-11	4-13 8-11
4-13 8-11	3-14 6-13	5-14 10-11	5-15 9-13
3-16 11-12	1-17 11-13	4-17 7-16	7-17 13-13
2-19 13-14	3-19 9-17	4-19 11-16	7-19 11-17
1-21 9-19	2-21 11-18	9-20 15-16	1-22 14-17
3-22 13-18	8-21 12-19	1-23 13-19	2-23 7-22
4-23 16-17	6-23 9-22	7-23 17-17	9-23 13-21
7-24 15-20	2-25 10-23	3-26 18-19	11-24 16-21
1-27 17-21	4-27 13-24	5-27 15-23	1-28 16-23
3-28 8-27	9-28 17-24	7-29 19-23	1-30 15-26
8-29 11-28	7-30 18-25	1-31 11-29	2-31 17-26
3-31	12-29	7-31	14-29

21-23	16-27	13-29	19-26
15-29 21-25	7-32 17-28	1-33 19-27	6-33 15-30
13-31 17-29	11-32 19-28	1-34 14-31	3-34 18-29
9-33 21-27	10-33 17-30	7-34 23-26	4-35 20-29
13-33 23-27	6-35 19-30	14-33 18-31	17-32 23-28
7-36 16-33	1-37 23-29	3-37 17-33	4-37 19-32
5-37 13-35	6-37 26-27	11-36 24-29	13-36 21-32
5-38 10-37	11-37 23-31	12-37 27-28	19-34 26-29
4-39 24-31	11-38 14-37	7-39 27-29	8-39 17-36
19-35 25-31	7-40 25-32	1-41 29-29	2-41 23-34
6-41 14-39	7-41 19-37	8-41 28-31	1-42 26-33
13-40 20-37	10-41 25-34	11-41 29-31	17-39 21-37
9-42 18-39	2-43 22-37	4-43 29-32	7-43 23-37
20-39 25-36	9-43 29-33	1-44 16-41	3-44 24-37
5-44 19-40	11-43 17-41	7-44 31-32	18-41 22-39
4-45 21-40	14-43 26-37	7-45 15-43	13-44 16-43
1-46 31-34	11-45 25-39	7-46 22-41	18-43 27-38
9-46 26-39	6-47 33-34	20-43 32-35	24-41 31-36
13-46 29-38	9-47 21-43	1-48 28-39	17-45 33-35

5-48 27-40	11-47 31-37	7-48 12-47	13-47 23-43
1-48 28-39	17-45 33-35	5-48 27-40	11-47 31-37
7-48 12-47	13-47 23-43	3-49 27-41	7-49 35-35
9-49 31-39	1-50 10-49	3-50 22-45	11-49 29-41
18-47 33-38	12-49 32-39	25-44 31-40	13-49 19-47
9-50 30-41	13-50 35-38	17-49 29-43	23-47 37-37
22-49 26-47	27-47 33-43	24-49 36-41	29-47 37-41
26-49 31-46	25-50 38-41	29-48 36-43	29-50 35-46
31-49 41-41			

No estava previst, però al llarg dels càlculs m'han sortit parelles de nombres que es podien agrupar de tres en tres, és a dir, parelles que complien l'equació:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = m^2 + n^2$$

Les parelles de nombres que ho complien eren les següents:

1-18 6-17 10-15	5-20 8-19 13-16	5-25 11-23 17-19	7-26 10-25 14-23
2-29 13-26 19-22	3-29 11-27 15-25	5-30 14-27 21-22	1-32 8-31 20-25
5-35 17-31 25-25	10-35 13-34 22-29	1-38 17-34 22-31	9-37 15-35 19-33
2-39 9-38 25-30	3-41 13-39 27-31	12-41 15-40 23-36	1-43 13-41 25-35

5-45 23-39 31-33	4-47 17-44 25-40	11-48 20-45 24-43	5-50 26-43 34-37
19-48 27-44 36-37	15-50 18-49 31-42		

Finalment, un resultat curiós ha sigut trobar parelles de nombres que complissin l'equació següent:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = m^2 + n^2 = p^2 + q^2$$

Els nombres que es troben entre l'1 i el 50 que compleixen l'equació són:

4-33 9-32 12-31 23-24	5-40 16-37 20-35 28-29	6-43 11-42 21-38 27-34	3-46 10-45 19-42 30-35	1-47 19-43 23-41 29-37	2-49 14-47 17-46 31-38	8-49 16-47 23-44 28-41

8.6. EQUACIÓ $x^{-1} + y^{-1} = z^{-1}$

En aquest apartat, he intentat buscar nombres que complissin la igualtat següent:

$$x^{-1} + y^{-1} = z^{-1}$$

Els nombres no havien de ser estrictament les ternes pitagòriques, ja que la igualtat no es tracta del Teorema de Pitàgores. Per això podien canviar.

Per a fer-ho, he utilitzat un full de càlcul de l'Excel, per tal d'aconseguir-ho. He obtingut moltes ternes que complissin aquesta igualtat i, d'irreductibles, n'he obtingut un total de 23:

	x	y	z
1	2	2	1
2	3	6	2
3	4	12	3
4	5	20	4
5	6	30	5
6	7	42	6
7	8	56	7
8	9	72	8
9	10	15	6
10	10	90	9
11	14	35	10
12	18	63	14
13	21	28	12
14	22	99	18
15	24	40	15
16	30	70	21
17	33	88	24
18	35	14	10
19	36	45	20
20	44	77	28
21	55	66	30
22	60	84	35
23	78	91	42

8.7. EQUACIÓ $x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}$

Aquí, he tingut els mateixos objectius que en l'apartat 10.7., de manera que amb l'ajuda d'un full de càlcul Excel he buscat nombres de l'1 al 100 que complissin la igualtat següent:

$$x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}$$

Només he trobat una terna que fos irreductible i que complís aquesta igualtat:

[15-20-12]

8.8. EQUACIÓ $x^{-3} + y^{-3} = z^{-3}$

Aquí, de la mateixa manera que he fet a l'apartat 10.7. i 10.8., he buscat nombres que complissin la igualtat següent:

$$x^{-3} + y^{-3} = z^{-3}$$

No n'he trobat cap, de manera que he continuat buscant a veure si la igualtat també es complia si anava canviant l'equació de les següents maneres:

$$x^{-4} + y^{-4} = z^{-4}$$
$$x^{-5} + y^{-5} = z^{-5}$$
$$x^{-6} + y^{-6} = z^{-6}$$
$$x^{-7} + y^{-7} = z^{-7}$$
$$x^{-8} + y^{-8} = z^{-8}$$
$$x^{-9} + y^{-9} = z^{-9}$$
$$x^{-10} + y^{-10} = z^{-10}$$

Tot i així, he vist que a partir del nombre 3, la igualtat:

$$x^{-n} + y^{-n} = z^{-n}$$

no es compleix, de manera que a partir d'aquests càlculs i els resultats obtinguts puc conjecturar que:

$$x^{-n} + y^{-n} = z^{-n}\ no\ es\ compleix\ si\ n > 3$$

En aquesta conjectura, puc afirmar que el Teorema de Fermat també es compleix si *n* és un nombre negatiu.

8.9. EQUACIÓ $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$

En aquest apartat, tot seguint l'exemple de l'apartat 9.4., he buscat nombres enters de l'1 al 50 (ambdós inclosos) que complissin la igualtat:

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

Gràcies als fulls de càlcul Excel he pogut obtenir diferents quaternes que sí que compleixen aquesta equació.

Per tal d'assegurar els resultats obtinguts i poder elaborar una altra conjectura, he buscat més nombres naturals que complissin la següent equació:

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4$$

Finalment, amb aquesta equació no he trobat nombres que la complissin, ni una sola combinació, de manera que amb els resultats obtinguts en els dos fulls de càlcul d'Excel puc conjecturar el següent:

$$x^n + y^n + z^n = t^n \; no\ es\ compleix\ si\ n > 3$$

Amb aquesta conjectura, també es podria afegir el següent:

$$El\ teorema\ de\ Fermat\ no\ es\ compleix\ en\ les\ quaternes, \text{és}\ a\ dir, a\ l'equació x^n + y^n + z^n = t^n$$

8.10. EQUACIÓ $\boldsymbol{x^{-3}+y^{-3}+z^{-3}=t^{-3}}$

En aquest apartat he intentat trobar nombres naturals (x, y, z, t), els quals es trobessin entre els nombres 1 i 50, ambdós inclosos, que complissin l'equació següent:

$$\boldsymbol{x^{-3}+y^{-3}+z^{-3}=t^{-3}}$$

Per a fer-ho, he seguit les mateixes pautes que en els apartats 9.4. i 9.10., de manera que he fet servir un full de càlcul Excel per a fer tots els càlculs.

Amb aquesta equació, no he trobat cap quaterna que em complís la igualtat, de manera que he continuat fent la prova, amb nombres entre l'1 i el 50, també, amb les equacions següents:

$$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=t^{-1}$$
$$x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=t^{-2}$$
$$x^{-4}+y^{-4}+z^{-4}=t^{-4}$$
$$x^{-5}+y^{-5}+z^{-5}=t^{-5}$$
$$x^{-6}+y^{-6}+z^{-6}=t^{-6}$$
$$x^{-7}+y^{-7}+z^{-7}=t^{-7}$$

Un cop tinguts tots els càlculs, només he trobat ternes de nombres enters en el cas de $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=t^{-1}$, i en les altres equacions, no n'he trobat cap, de manera que, a partir d'aquests resultats obtinguts, puc conjecturar que:

$$Si\ n\in N\ i\ n>1, no\ existeixen\ nombres\ naturals\ x,y,z,t\ tals\ que$$
$$\boldsymbol{x^{-n}+y^{-n}+z^{-n}=t^{-n}}$$

Per tant, en conseqüència d'aquesta conjectura, puc afirmar la següent:

$$El\ teorema\ de\ Fermat\ no\ es\ compleix\ en\ les\ quaternes, tant\ si\ n\ \acute{e}s\ positiu\ com\ negatiu$$

9. TIPUS DE RESULTATS MATEMÀTICS

Un resultat matemàtic consta de dues parts:

1- **HIPÒTESI**: conjunt de condicions de les quals partim.

2- **TESI**: és la conclusió que s'obté després de la corresponent demostració, la qual parteix de la hipòtesi.

Hi ha diferents tipus de resultats matemàtics: les proposicions, els teoremes, els lemes i els corol·laris.

9.1. PROPOSICIONS

És el nom que té qualsevol resultat que s'obté en matemàtiques. A vegades, es canvia el nom de "proposició" per un altre de més concret, segons veurem en els següents subapartats.

9.2. TEOREMES

És un resultat molt important, ja sigui perquè és de molta aplicació o perquè permet que alguna branca determinada de la matemàtica avanci.
Alguns exemples en són el teorema de Pitàgores o el teorema de Tales.

9.3. LEMES

Un lema és un resultat que és important a causa de que facilita la demostració d'un teorema, finalitat per la qual són creats. No obstant, hi ha alguns lemes que tot i naixent per demostrar un teorema han adquirit importància per si sols, de manera que posteriorment s'han utilitzat independentment del teorema.

9.4. COROL·LARIS

Un corol·lari és la conseqüència immediata d'un teorema. Això vol dir que es demostra d'una manera molt ràpida a partir del teorema. En moltes ocasions, el corol·lari pot ser tan important com el mateix teorema.

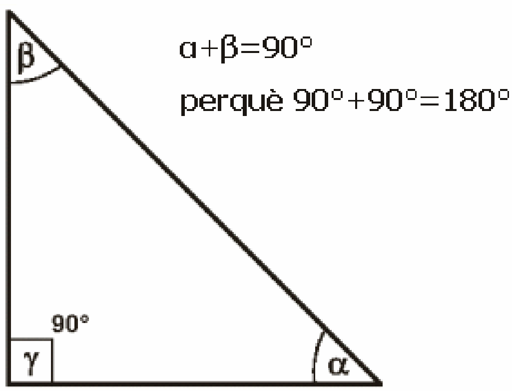
Per exemple, tenim un enunciat que ens afirma el següent:

$$La\ suma\ de\ tots\ els\ angles\ interiors\ d'un\ triangle\ \text{és}\ igual\ a\ 180°$$

Llavors, un corol·lari d'aquesta afirmació vindria a ser:

$$En\ un\ triangle\ rectangle, la\ suma\ de\ dos\ angles\ contigus\ a\ la\ hipotenusa\ val\ 90°$$

Perquè al tenir un angle rectangle (90º), ens falten 90º per sumar un total de 180º.



72. Triangle rectangle, la suma dels angles del qual és de 180º.

9.5. CONJECTURES

Les conjectures són proposicions que poden arribar a ser o no un teorema, les quals no estan demostrades: se suposa que són certes perquè els exemples que s'han trobat no la contradiuen, però no hi ha una demostració. Se'n poden veure alguns exemples en l'apartat 13.

10. DEMOSTRACIONS MATEMÀTIQUES

Segons Aristòtil, una ciència és un tipus de coneixement universal i necessari, creat i obtingut per deducció a partir de certs principis, de manera que no està afectat per cap mena de coneixement imperfecte sensorial, limitat i espontani.

És considerada ciència aquella que demarca el seu objecte d'estudi i determina el seu propi mètode.

Les matemàtiques són unes ciències formals, l'ideal metodològic de les quals és basar-se en un sistema axiomàtic.

Els elements que constitueixen el sistema axiomàtic són:

- **ELS AXIOMES O POSTULATS**: són principis fonamentals del sistema, proposicions indemostrables de les quals se'n pot deduir la resta: els teoremes.

- **REGLES DE FORMACIÓ I TRANSFORMACIÓ**: són normes que permeten extreure nous enunciats vàlids per tal d'ampliar el sistema axiomàtic. Un exemple seria totes les normes i passos que hem de seguir a l'hora de realitzar un càlcul matemàtic.

- **PROPOSICIONS I TEOREMES**: són els enunciats que obtenim de manera deductiva, a partir dels mateixos axiomes o bé d'altres teoremes que ja han estat prèviament demostrats.

Des d'un punt de vista matemàtic, una demostració, dins la matemàtica, és una sèrie acabada d'afirmacions tals que cada afirmació és un axioma o bé s'aconsegueix directament a partir d'un axioma o de regles estrictes i ben definides (les regles de formació i transformació).

Per tant, la feina dels matemàtics és extreure teoremes i conclusions a partir d'axiomes que es plantegen en un principi, tot seguint una metodologia determinada i estructurada.

10.1. TIPUS DE DEMOSTRACIONS

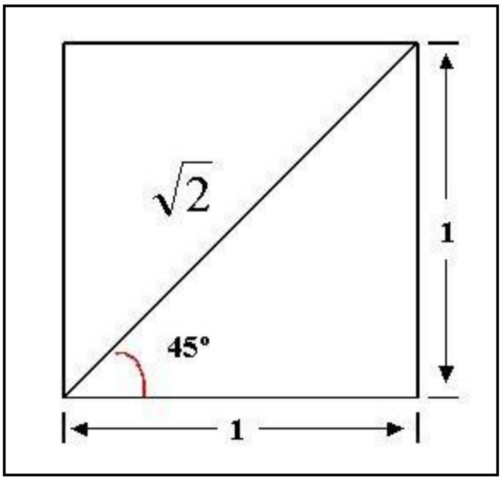
Hi ha diversos tipus de demostracions matemàtiques. Les més usuals són:

DEMOSTRACIÓ PER REDUCCIÓ A L'ABSURD

Consisteix en suposar, des del principi, que la proposició que es vol demostrar és falsa.

A partir d'aquí, s'utilitzaran deduccions i raonaments matemàtics fins arribar a una contradicció, amb la qual es podrà veure que és absurd negar-ho. Per tant, això implicarà que la proposició inicial ha de ser necessàriament certa i, negant-la, obtenim resultats completament erronis.

Un exemple seria la irracionalitat de l'arrel quadrada de 2. Com ja hem vist en apartats anteriors, el fet de descobrir els irracionals (els nombres que no es poden escriure en forma de fracció) va comportar la desaparició de l'escola pitagòrica, ja que anava en contra de tots els seus principis. En aquest cas, l'arrel de 2 és la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 1.



73. Demostració per reducció a l'absurd.

Consisteix en què, des d'un principi, se suposi que $\sqrt{2}$ és un nombre racional, de manera que ja estigui col·locat amb la seva forma de fracció x/y. Per tant, tenim que:

$$\sqrt{2} = x/y$$

A continuació, elevem la fracció al quadrat:

$$2 = \frac{x^2}{y^2} \rightarrow 2y^2 = x^2$$

Un cop tenim aquest resultat, ens queda que a la part dreta de la igualtat és parell per el número 2, la qual cosa comporta que x^2 sigui nombre parell.

Al mirar x^2, veiem que és de la forma x=2r. Per tant, x^2=$4r^2$.

Tot seguit, apliquem el mètode de substitució i ens queda:

$$2y^2=4r^2$$

de manera que al simplificar-ho tenim que: $y^2=2r^2$.

Finalment, amb aquestes igualtats, arribem a la conclusió de què y també és un nombre parell. Això és una contradicció, ja que havíem suposat que la fracció x/y era irreductible. Per tant, $\sqrt{2}$ és un nombre irracional.

DEMOSTRACIÓ PER CONTRARECÍPROCA

Aquest tipus de demostració consisteix en què, des del principi, es considera que la conclusió final és falsa i, utilitzant una hipòtesi i altres igualtats lògiques establertes amb antelació (premisses) per tal d'arribar a un resultat final, es pot afirmar que la hipòtesi és falsa.
Per tant, si la conclusió final és falsa, les premisses també ho són, de manera que si es diu que la conclusió final és certa, les premisses i la hipòtesi també ho són.

$$A = B\text{--------------}\rightarrow \neg A = \neg B$$

Un exemple seria demostrar, per a cada nombre enter n, que si el resultat de $5n$+3 és un nombre parell, llavors n hauria de ser imparell.
Primer de tot:

$$A(n) = n \text{ és } parell$$
$$B(n) = n \text{ és } imparell$$

Tot seguit, haurem de seguir un esquema del teorema proposat, el qual tindrà un valor de caire universal:

$$\forall n\ [A(5n + 3) -\!\!\rightarrow B(n)]$$

Això significa que per a cada nombre enters n, si n és imparell, $5n + 3$ és parell.
A continuació, hem de falsejar l'esquema, de manera que ens quedaria:

$$\forall n\ [\neg A(5n + 3) -\!\!\rightarrow \neg B(n)]$$

Llavors, això significa que per a cada nombre enter n, si n no és imparell, llavors $5n + 3$ no és parell.

Sigui n qualsevol nombre enter, si n no és imparell, podem considerar que per a cada nombre enter k:

$$n \neq 2k + 1$$

perquè, podem definir els nombres imparells de la següent forma:

$$per\ a\ cada\ enter\ x, x\ és\ imparell\ si, i\ només, pot\ trobar\ un\ enter\ k\ tal\ que\ x = 2k + 1$$

Per tant:

$$5n + 3 \neq 5(2k + 1) + 3, \forall k \in Z$$

I d'aquí deduirem que:

$$5n + 3 \neq 2(5k + 4), \forall k \in Z$$

Llavors, com que si k és un nombre enter, $5k + 4$ també ho és (l'anomenaré m, tindrem que

$$5n + 3 \neq 2m, \forall m \in Z$$

En conseqüència, tenim que $5n + 3$ no és un nombre parell, de manera que la demostració ja es pot donar per acabada.

DEMOSTRACIÓ DIRECTA

Aquest tipus de demostració consisteix en suposar que la hipòtesi A és certa, de manera que mitjançant un procés podem arribar a B, amb la qual cosa podem dir que B és certa.

Un exemple d'aquest tipus de demostració seria el càlcul de les solucions de l'equació de segon grau que només tenen una incògnita.

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

Ara, completarem el membre esquerre fins que obtinguem un quadrat: multiplicarem tant l'esquerra com la dreta de l'igual per a i hi sumarem $\frac{b^2}{4}$, de manera que ens quedarà:

$$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4} + ca = \frac{b^2}{4}$$

I, encara, ho podríem arreglar més, de manera que obtindríem:

$$(ax + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} \quad \rightarrow \quad (ax + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

D'aquesta equació final és d'on prové la següent:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Finalment, si aïllem la x, obtenim dues equacions, amb les quals es poden trobar dos resultats diferents:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad\qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

DEMOSTRACIÓ PER INDUCCIÓ MATEMÀTICA

És un tipus de demostració que, fonamentalment, es basa amb l'estructura dels nombres naturals.

Per tal de comprovar que la proposició $\mathrm{B(n)}$, la qual depèn del nombre natural n , es compleix per a tots els valors de:

$$n \in N \coloneqq \{1,2,3,4,5 \dots\}$$

hem de provar dues coses i aconseguir que les dues es compleixin:

1- Que $B(1)$ sigui certa.

2- Que, un cop hàgim comprovat que $B(n)$ era certa, es pot provar $B(n + 1)$. Llavors, haurem d'anar provant aquesta proposició amb diversos nombres naturals, i anar comprovant que el resultat es compleix: que $B(1)$ sigui certa per (1), que $B(2)$ sigui certa per (2), i així successivament.

Un exemple d'inducció matemàtica seria provar que per a qualsevol nombre natural n la suma dels n primers nombres naturals és:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Primer de tot, veiem que el cas de $n+1$ es pot fer de forma immediata, perquè:

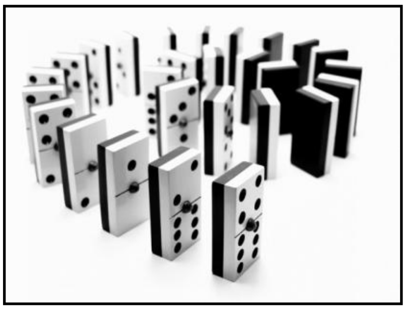
$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

A continuació, tot suposant que la fórmula inicial es compleix i és correcta per a n:

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right)$$
$$= \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

La qual és la fórmula que existeix per a $n+1$.

Alguns matemàtics comparen aquest tipus de demostració amb una recta de fitxes de dominó, les unes col·locades al darrere de les altres, de manera que només fa falta llençar la primera peça per tal de que en caigui la resta.



74. El dominó és un exemple de demostració per inducció matemàtica.

DEMOSTRACIÓ BUSCANT CONTRAEXEPLES

Finalment, aquest tipus de demostracions consisteixen en intentar comprovar que una proposició, del tipus $\forall x, p(x)$, és falsa. Llavors, haurem de contradir-la, tot buscant elements existents que compleixin la proposició que haurem considerat falsa. També es pot fer al revés, és a dir, considerant des del principi que la proposició del tipus $\forall x, p(x)$ és certa i, buscant algun element existent, puguem contradir-la, tot veient que no es compleix, almenys, sempre.

En el cas d'un teorema, la manera correcta de plantejar-lo és:

$$\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$$

I dir que és fals si existeix un element a a l'univers per el qual, la proposició:

$$p(a) \rightarrow q(a)$$

sigui falsa. De manera que ens quedi que $p(a)$ sigui veritat i, malgrat tot, $q(a)$ sigui fals.

L'element que ens contradigui la proposició inicial, s'anomena *contraexemple*.

Per exemple, fem una proposició en la qual diem que no es compleix que:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Llavors, tot fent proves, trobem que existeixen diverses combinacions de nombres, amb les quals sí que es compleix aquesta proposició.

Per exemple, una de les ternes seria:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Ja tenim el contraexemple: (3,4,5) ens ha permès veure que la proposició inicial no era veritat, ja que hem comprovat que sí que es compleix.

11. TEOREMA DE FERMAT

11.1. ENUNCIAT

El teorema de Fermat, escrit pel matemàtic francès Pierre de Fermat al segle XVII. Afirma el següent:

$$\forall\, n\ \in N, n > 2\ \rightarrow\ \nexists\, x, y, z\ N\ /\ \ x^n + y^n = z^n$$

Malgrat tot, Pierre de Fermat no va deixar-ne cap demostració escrita, la qual cosa va tenir molt ressò en matemàtics posteriors.

Actualment va sortir una terna que hagués pogut contradir el teorema de Fermat:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$$

Tot i així es va demostrar que aquesta igualtat era, tan sols, un error de les calculadores, les quals van arrodonir les potències i la igualtat només és una aproximació. Per això, és important saber que no sempre les calculadores ens proporcionen resultats exactes sobre una operació i que no se n'ha d'abusar.

Comparant-lo amb el teorema de Pitàgores, podem veure que en els dos cassos es treballa amb ternes de nombres naturals que compleixin la fórmula, els quals estan elevats a la mateixa potència. El teorema de Fermat amplia l'estudi de les ternes pitagòriques, les quals són de nombres naturals, tot elevant-les a potències diferents de 2.

11.2. HISTÒRIA


75. Retrat de Pierre de Fermat.

Pierre de Fermat va néixer a Beaumont-de-Comagne (França) el 20 d'agost de 1601. El seu pare era un prestigiós mercader i, la seva mare, era la filla d'una família d'advocats força influents.

Va estudiar la carrera de dret i, un cop acabats els estudis, va començar a treballar d'advocat al parlament de Tolosa. Va anar ascendint de càrrecs fins que arribar a obtenir un títol nobiliari.

No obstant, estava molt interessat amb la ciència: va fer experiments sobre òptica, va fer algun treball relacionat amb la mecànica... però la seva verdadera passió eren les matemàtiques.

En aquest camp, van destacar els seus nombrosos treballs sobre probabilitat i geometria. Fins i tot, va estar en contacte amb diversos intel·lectuals de l'època i ampliava els seus coneixements llegint llibres i tractats matemàtics, dels quals es basaven tots els seus descobriments posteriors.

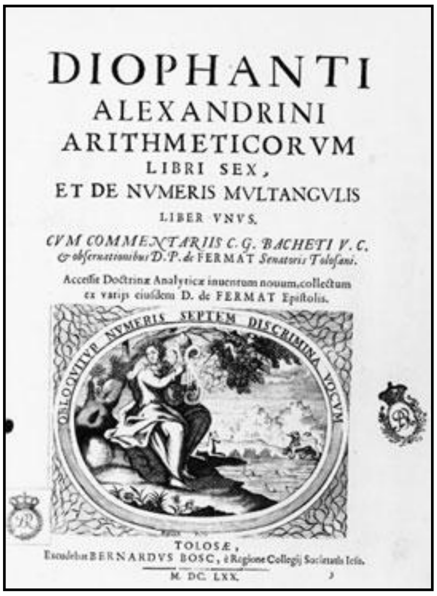
76. Segell amb la cara i el teorema de Fermat impresos.

El descobriment de Fermat amb més ressò va ser el seu famós teorema, el qual he enunciat a l'apartat 12.1. Fermat va escriure aquesta afirmació al marge d'una pàgina del seu exemplar de "L'aritmètica de Diofant", juntament amb una explicació d'aquest teorema.

Finalment, al final de l'enunciat va escriure una petita nota dient que havia trobat una demostració per a la seva conjectura, però que no la podia escriure allà mateix perquè els marges eren poc amples i no hi hagués cabut tota.

No se sap del cert si realment havia trobat aquesta demostració de la seva afirmació, o si només havia sigut una catxa. El cas és que alguns matemàtics posteriors no s'ho creien o van intentar demostrar que Fermat s'havia equivocat, però no van ser capaços, de manera que existeixen demostracions parcials que coincideixen amb allò que Fermat va escriure al seu llibre de matemàtiques.

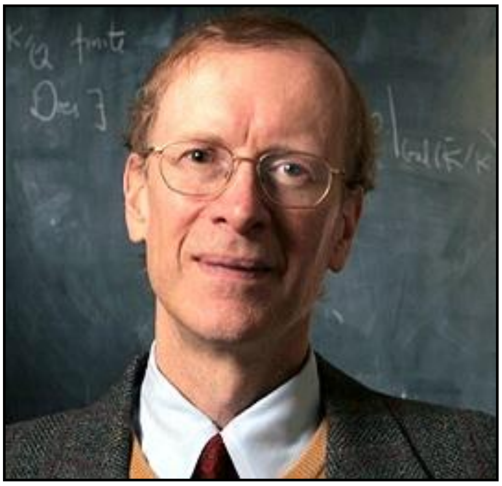
Fermat no va publicar cap dels seus treballs, ja que considerava molt valuós el temps que hagués dedicat en fer-ho. Llavors, el seu fill Clément-Samuel, una persona que reconegué el gran treball i esforços del seu pare, va fer una recopilació de tots els treballs i va publicar-los, tot afegint les anotacions que hi havia als marges del llibre del seu pare en un nou tractat de "L'aritmètica de Diofant".



77. Exemplar del llibre de "L'aritmètica de Diofant", el qual inclou les anotacions de Fermat.

Molts matemàtics posteriors van intentar demostrar aquest teorema, però a causa de la seva gran complexitat, no en van ser capaços, amb la qual cosa el teorema va romandre uns 400 anys sense demostrar.

A partir del segle XX, s'oferien grans recompenses a aquelles persones que eren capaces de demostrar i resoldre grans enigmes de les matemàtiques i de les ciències que eren desconeguts i ningú havia estat capaç d'explicar, entre ells el teorema de Fermat. Van haver-hi diversos matemàtics que van intentar-ho, però a l'hora de presentar els seus treballs en jurats de professionals, se'ls detectaven errors i no se'ls podia considerar vàlida la seva demostració. Alguns d'aquests matemàtics, avergonyits pels seus errors, se suïcidaven.



78. Andrew Wiles.

Llavors, l'any 1993, el matemàtic Andrew Wiles va fer una demostració molt complicada d'aquest teorema, però va estar de mala sort i van trobar-li un error que convertia la seva demostració en errònia. Va acceptar-ho, i va posar-se a treballar fort durant un any, juntament amb un amic seu, i van aconseguir fer-ne una altra demostració, la qual va considerar-se vàlida.

12. PROPOSICIONS OBERTES DE LA MATEMÀTICA

Tal com explico a l'apartat 12.2., el teorema de Fermat va trigar gairebé 400 anys a ser demostrat i a poder assegurar del cert que es complia. Hi ha conjectures i enunciats que encara estan per resoldre, és a dir, continuen obertes. Molts matemàtics han intentat trobar demostracions per tal d'assegurar que són certes o falses, però no ho han aconseguit.

Alguns exemples de proposicions matemàtiques obertes que existeixen són:

SUMA INFINITA

$$\sum (k = 1 \ldots \infty) \frac{1}{k^n} = ?$$

Això significa que no es pot determinar el valor del nombre on s'aproxima una sèrie, sent k un nombre que va canviat i n un nombre que es va repetint al llarg de tota la sèrie. Exemple:

n=4

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots$$

CONJECTURA DELS NOMBRES PRIMERS BESSONS

No se sap qui la va enunciar. Els nombres primers bessons són parelles de nombres primers es porten 2 unitats entre sí.

$$p\ i\ q\ (si\ p > q) són\ primers\ bessons\ si\ q = p + 2$$

Alguns exemples de primers bessons són el 101 i el 103, el 17 i el 19, el 27 i el 29, etc.

Tot i així, no està demostrat que existeixin infinits nombres primers bessons. Llavors, la conjectura dels nombres primers bessons, tot i no haver estat demostrada diu que hi ha infinits nombres primers bessons.

CONJECTURA DE GOLDBACH

Aquesta conjectura, elaborada l'any 1742 pel matemàtic alemany Christian Goldbach, diu el següent:

$$Qualsevol\ nombre\ parell > 2\ es\ pot\ escriure\ com\ a\ suma\ de\ dos\ nombres\ primers$$

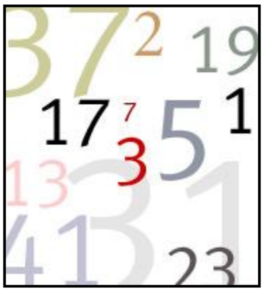
L'any 1900, es va celebrar a París el segon Congrés Internacional de Matemàtics. En aquell moment, David Hilbert era el matemàtic més important, de manera que va fer una conferència titulada "Els problemes futurs de la matemàtica", en la qual va presentar 23 conjectures, les quals estaven per resoldre.

79. El matemàtic David Hilbert.

Al llarg del temps, molts matemàtics van anar investigant sobre aquests problemes i es va trobar solució a alguns d'ells, però encara en queden uns quants per resoldre.

Un d'aquests problemes que encara estan pendents de resoldre són el següent:

EL PROBLEMA DE LA DISTRIBUCIÓ DE NOMBRES PRIMERS



80. Il·lustració amb nombres primers.

"No es coneix la distribució dels nombres primers, ja que no hi ha cap regla per saber de quina manera estan col·locats al llarg de la sèrie numèrica".

13. FRASES DE PITÀGORES

Aquest últim apartat, però no per això el menys important, ha estat dedicat per fer un recull de diverses frases que va dir Pitàgores al llarg de la seva vida, referents a les matemàtiques:

· "*Eduqueu als nens i no haureu de castigar els homes*"- Pitàgores.

· "*Ajuda als altre a carregar els seus farcells, però no els hi portis*"- Pitàgores.

·"*Aprèn allò que sigui necessari per a que la teva vida sigui més feliç. Allò que és millor en tot és la justa mesura. Reflexiona tot prenent exemple de la recta raó*"- Pitàgores.

· "*Exercita't escoltant per tal de capacitar-te a l'hora de parlar*"- Pitàgores.

· "*Procura ser tal com vulguis semblar als demés*"- Pitàgores.

· "*Tan sols l'esperit veu i comprèn ja que fora d'ell mateix tot home és sord i cec*"- Pitàgores.

· " *Només mitjançant el coneixement s'arriba a la veritat, i la veritat és l'única cosa capaç d'aproximar-nos als déus, perquè Déu té la llum com a cos i la veritat com a ànima*"- Pitàgores.

· "*Mentre l'home continuï sent el despietat destructor dels éssers vius inferiors, mai coneixerà ni la salut ni la pau. Mentre els homes continuïn massacrant animals, continuaran matant-se entre ells. Aquell que sembra la llavor de l'assassinat i el dolor, no pot recollir ni goig ni amor*"- Pitàgores.

També he aprofitat per afegir-hi cites que van fer altres autors posteriors sobre Pitàgores, els quals estaven influenciats per ell, i els seus grans esforços i treballs.

· "*Entre ells hi havia un home extraordinàriament savi que posseïa la major riquesa del pensament*"- Empèdocles.

· "*Pitàgores va ser un guia didàctic per a tots aquells que l'admiraven per la seva conversació*"- Plató (La República).

· "*Els pitagòrics van dedicar-se al cultiu de les matemàtiques i van ser els primers en fer-les progressar; absorts en el seu estudi van creure que els principis de les matemàtiques eren els principis de totes les coses*"- Aristòtil.

· "*Per a Pitàgores la norma de conducta ha de dirigir-se cap a la conformitat amb allò que és diví. [...] La totalitat de la seva vida es disposa amb miraments a seguir a Déu i aquest és el principi rector de la seva filosofia*"- Aristògens.

· "*Pitàgores va ser el primer que digué que entre els amics totes les coses han de ser comunes*"- Diògens Laerci.

· "*Per a Pitàgores, el nombre és aquell que regeix les formes i les idees, i la causa dels Déus i els dimonis*"- Jàmblic.

· "*A Roma ningú es considerava instruït si no era pitagòric*"- Ciceró.

· "*No conec cap altre home que hagi tingut major influència en el camp del pensament, perquè allò que apareix com a platonisme resulta, després d'analitzar-ho, essencialment pitagòric*"- B. Russell.

· "*Pitàgores va donar l'exemple de tal puresa i d'un tal avorriment a l'assassinat, que es s'abstingué de menjar carn animal*"- Eudoxe.

· "*Pitàgores va ser el primer en fer servir el nom de filosofia y es va anomenar a ell mateix filòsof o amant de la saviesa, ja que cap home era savi, tan sols Déu*"- Heràclides del Pont.

· "*Va ser Pitàgores el que va portar la geometria a la seva perfecció [...] Pitàgores es va dedicar particularment a l'aspecte aritmètic de la geometria, descobrint els intervals musicals i sense deixar de banda la ciència de la medicina*"- Diògens Laerci.

· "*Cap filòsof ha merescut tant com Pitàgores a l'hora de perdurar en la memòria dels homes. En les seves paraules hi havia tanta eloqüència, veritat i raó,que cada dia els habitants de Crotona acudien de pressa a escoltar aquell ancià al qual consideraven similar a un Déu. A la seva saviesa i eloqüència hi unia la puresa immaculada dels seus costums*"- Diodori de Sicília.

· "*Pitàgores va limitar l'abast del vocable filosofia a la comprensió i el coneixement de la realitat i, considerant el de la veritat com l'única saviesa, designà el desig i la investigació del coneixement com amor a ella" - Nicòmac de Gerasa*.

· "*Pitàgores va transformar la doctrina de Tales en un ensenyament liberal, va examinar profundament els principis de la geometria, va investigar els teoremes d'una manera immaterial i intel·lectual, i va descobrir la dificultat dels nombres irracionals i la construcció de les figures còsmiques (políedres)*"- Procle

"*Independentment de que Pitàgores fos un pensador o un mer transmissor, allò que és cert és que la relació establerta per la seva escola, entre les matemàtiques, la física i la filosofia, no s'ha perdut mai*"- J. Bernal

A l'analitzar cadascuna d'aquestes cites podem adonar-nos que, a part de ser un personatge molt important per la seva aportació matemàtica i filosòfica, va ser molt apreciat i valorat per molts investigadors posteriors, alguns dels quals van seguir els seus passos.

14. CONCLUSIONS

Un cop he acabat de realitzar tot el treball, m'adono que he après moltes coses que, abans de llegir tots els llibres que he tingut i buscar la informació necessària, desconeixia totalment.

Al fer la part teòrica, he vist que Pitàgores, gràcies a la seva gran capacitat intel·lectual va aconseguir realitzar, juntament amb els membres de la seva comunitat creada i establerta a Crotona, un seguit d'avenços matemàtics que van influenciar molt en matemàtics posteriors a l'hora de seguir investigant sobre el camp de la ciència i la matemàtica.

A continuació, m'he adonat que el teorema de Pitàgores, tot i que ell va generalitzar-lo, civilitzacions més antigues a Pitàgores ja l'utilitzaven tot aplicant-lo a la vida quotidiana, de manera que això ens demostra l'origen de molts dels conceptes que formen part de la ciència i la tecnologia d'avui dia és molt antic.

Caldria afegir, també, que gràcies a matemàtics posteriors que van aconseguir realitzar demostracions innovadores del teorema de Pitàgores, avui dia se'n pot entendre l'explicació sense haver adquirit uns coneixements matemàtics molt complexos.

Pel que fa al teorema de Fermat, es pot dir que té una relació amb el teorema de Pitàgores, tant per la seva similitud a l'hora d'enunciar-lo com pel fet de que tant en l'un com en l'altre es treballi amb ternes de nombres naturals. Tal com he dit al final de l'apartat 11, el teorema de Fermat és una ampliació del teorema de Pitàgores.

Les diferents conclusions que he pogut extreure després de realitzar la part pràctica del treball han estat moltes, la major part de les quals són conjectures pròpies que he pogut fer gràcies als càlculs i als diferents passos seguits:

- Hi ha 13 ternes pitagòriques irreductibles, les quals s'obtenen amb l'equació

$$a = \tau^2 - \mu^2$$
$$b = 2\tau \cdot \mu$$
$$c = \tau^2 + \mu^2$$

  Aquestes ternes estan formades, cadascuna, per un nombre parell i dos de senars. Es poden obtenir, infinites ternes pitagòriques derivades de les irreductibles.

- En els angles pitagòrics, a mesura que es construeixen triangles rectangles de costats ternes, la relació que hi ha entre els valors dels angles que els formen és de 2,3,4 i 5 unitats. Tot i així, no segueixen cap ordre rigorós.

- Gràcies a les quaternes pitagòriques, les quals estan formades per dos nombres parells i dos nombres senars, he pogut conjecturar: "*Totes les quaternes pitagòriques estan formades per dos nombres parells i dos nombres senars i, l'últim nombre de les quaternes, sempre és un nombre senar*".

- Pel que fa a les sumes iguals de quadrats, en un principi no esperava trobar tantes parelles de nombres que complissin l'equació esmentada. M'he adonat, gràcies a aquest apartat, que existeixen, a part de parelles, agrupacions de tres i de quatre que també la compleixen.

- A continuació, també he pogut conjecturar, gràcies a un seguit de càlculs matemàtics, el següent: "*l'equació $x^{-n} + y^{-n} = z^{-n}$no es compleix si n és més gran que 3*". En conseqüència d'aquesta conjectura, he pogut enunciar la següent: "*El teorema de Fermat també es compleix si n és un nombre negatiu*".

- També, a l'intentar aplicar el teorema de Fermat en quaternes, és a dir, en agrupacions de quatre nombres naturals, he pogut enunciar la següent conjectura: "*El teorema de Fermat no es compleix en les quaternes, tant si n és positiu com si és negatiu*".

La sensació final que tinc del treball és el fet d'haver-me enriquit molt amb conceptes que desconeixia fins al moment de buscar-los i aprendre de què es tractaven, al mateix temps que he pogut introduir-me al llenguatge matemàtic a l'hora de fer les conjectures i els càlculs de la part pràctica, la qual cosa em servirà de gran ajuda els propers anys universitaris.

15. RELACIÓ D'ANNEXOS

En aquest apartat podem trobar una explicació del contingut dels annexos d'aquest treball, els quals es troben en un CD a part.

ANNEX 1: TERNES PITAGÒRIQUES

En aquest annex hi ha el document Excel en el qual consten tots els càlculs realitzats per tal de trobar ternes Pitagòriques de nombres naturals que es trobessin entre l'1 i el 100, ambdós inclosos.

ANNXEX 2: POLINOMIS PITAGÒRICS

En aquest annex hi ha el document en el qual consten tots els càlculs realitzats pas per pas per tal de trobar el resultat de tots els polinòmics pitagòrics obtinguts gràcies a les ternes trobades amb el full de càlcul Excel de l'annex 1.

ANNEX 3: ANGLES PITAGÒRICS

Podem trobar, en aquest annex, els càlculs realitzats pas per pas per tal de trobar els angles dels diferents triangles que es formen amb les ternes pitagòriques naturals de l'1 al 100, trobades en l'Annex 1.

ANNEX 4: QUATERNES PITAGÒTIQUES

En aquests dos fulls de càlcul Excel consten els càlculs realitzats per tal de trobar les quaternes pitagòriques que hi ha a l'apartat 8.4.

ANNEX 5: SUMES IGUALS DE QUADRATS

En aquest llibre Excel hi un recull de tots els càlculs realitzats per tal de trobar les parelles de ternes pitagòriques naturals de l'apartat 8.5., les quals es troben entre els nombres 1 i 50, ambdós inclosos.

ANNEX 6

En aquest apartat hi ha el llibre de càlcul Excel el qual mostra tots els càlculs realitzats per tal d'obtenir els resultats que estan escrits en l'apartat 8.6.

ANNEX 7

Aquí hi ha ,també, el document Excel amb el qual he treballat per tal de realitzar els càlculs de l'equació que hi ha a l'apartat 8.7., de manera que he obtingut tots els resultats que hi ha escrits al mateix apartat.

ANNEX 8

Aquest annex està format per diferents fulls de càlcul, gràcies als quals he pogut realitzar els diferents càlculs explicats a l'apartat 8.8 i enunciar les conjectures corresponents.

ANNEX 9

Aquest apartat també es tracta de diversos fulls de càlcul Excel on consten tots els càlculs realitzats amb les quaternes indicades en l'apartat 8.9., les quals compleixen l'equació esmentada al mateix apartat.

ANNEX 10

Finalment, aquest apartat és similar a l'Annex 9. Aquí consten els diferents fulls de càlcul Excel gràcies als quals he pogut obtenir els resultats indicats en l'apartat 8.10., i, finalment, poder elaborar les conjectures que hi ha escrites.

16. BIBLIOGRAFIA

LLIBRES

- Alsina, Claudi. "*El club de la hipotenusa*". Editorial Ariel. Col·lecció Claves. Barcelona, 2008.

- Bergua, Juan B. "*Pitagoras*". Editorial Ediciones Ibéricas. Madrid, 1958.

- Berlinski, David. "*Ascenso infinito*". Editorial Debate. Col·lecció Breve historia universal. Barcelona, setembre 2006.

- Bréhier, Émile. "*Història de la filosofia 1. Antiguitat i edat mitjana*". Editorial Tecnos. Col·lecció Manuals. Bellaterra, 1998.

- González Urbaneja, Pedro Miguel. "*Pitágoras. El filósofo del número*". Editorial Nivola. Col·lecció La matemàtica en sus personajes. Tres Cantos, 2007.

- Loomis, Elisha Scott "The Pythagorean proposition". Editorial Classics in Mathematics Education. Michigan, 1940.

- Nicolau i Pous, Francesc. "*La matemàtica i els matemàtics*". Editorial Claret. Col·lecció Cultura i Pensament. Barcelona, novembre 2000.

- Stewart, Ian. "Historia de las matemáticas". Editorial Critica. Col·lecció Drakontos. Barcelona, 2008.

PÀGINES VISITADES ENTRE MARÇ DE 2012 I GENER DE 2013

WEBS

- Portal ciència. Disponible a: http://www.portalciencia.net/pitagoras.html

- Junta d'Andalusia. Disponible a: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/algebra/patrones/patrones.htm

- Materials de formació de l'Xtec. Disponible a: http://www.xtec.cat/~eguardi4/altres.htm i a http://www.xtec.cat/~fgonzal2/pitagoras1.html

BLOGS

- Imperio de la Ciencia. Disponible a: http://imperiodelaciencia.wordpress.com/2012/01/26/eso-es-absurdo/#more-1580
- Mujer y ciencia. Disponible a: http://www.mujeryciencia.es/2010/03/04/theano-de-crotona-y-la-escuela-pitagorica/
- Pseudópodo. Disponible a: http://pseudopodo.wordpress.com/2008/11/28/pitagoras-segun-einstein/

UNIVERSITATS

- Universitat Politècnica de Madrid. Apunts per l'assignatura d'Estructures Deductives. Disponible a: http://www.eui.upm.es/~jigomez/MD/EstructurasDeductivas.pdf
- Universitat de Sevilla. Exemples de demostració. Disponible a: http://www.sav.us.es/ensenanzavirtual/normas/estilos/ejemplo_demostracion.htm

ARTICLES I TREBALLS

- Becerra Esponosa, José Manuel. "Facultat de Comptabilitat i Administració UNAM.
- Crespo, Rafael. 2002-2003, "*Requisitos Básicos, Matemáticas (12907)*", Universitat de València.
- Fiol, M.A. "*Problemas y demostraciones*". ETSE de Telecomunicació, departamento de Matemàtica aplicada IV, Universitat politècnica de Catalunya.

- González Gutiérrez, Francisco José. Octubre 2004, "*Apuntes de Matemática Discreta 11. Teorema Fundamental de la Aritmética*", Universitat de Cádiz, Escola Superior d'Enginyeria, Departament de Matemàtiques.

- González Gutiérrez, Francisco José. Abril de 2005. "*Apuntes de Lógica matemática. 3. Razonamiento y demostraciones*", Universitat de Cádiz, Escola Superior d'Enginyeria, Departament de matemàtiques.

- González Pérez, Juan Carlos. 2009/10, "*Tema 3: Las demostraciones en matemáticas*", Maturita Matemáticas.

- González Urbaneja, Pedro Miguel. Novembre 2008. "*El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años*", Revista Sigma, 32.

- Haldane Acevedo, Patricio. 2001, "*El teorema de Pitágoras. Construcción de algunos recursos didácticos*", Universitat Nacional de Colòmbia, Facultat de Ciències, Màster en Ensenyança de les Ciències Exactes i Naturals.

- Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste. "*El papel de las conjeturas en el avance de las matemáticas: vueltas y revueltas con ayuda de ejemplos*", Institut de matemàtiques de Tolouse.

- Jans, Sebastian. Maig de 2002, "El *teorema de Pitágoras y los pitagóricos*", Lògica d'Investigació i Estudis Massònics "Pentalpha.

- Riera, Arnau. 5 d'abril de 2004, "Física *i matemàtiques*", Història de la Física, Universitat de Barcelona.

- Rodríguez, Adolfo. Octubre 2005, "*Reducción al Absurdo*".

- Urriola, Francisco Javier. 2011, "Los teorema de Fermat, Wilson y Euler", Facultat de Ciències Naturals y Exactes, Llicenciatura de Matemàtiques, Treball de Graduació, Universitat de Panamà.