$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

L'atzar i la probabilitat

$$p(A_i|B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B|A_i)p(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(B|A_j)p(A_j)}$$

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}$$

Índex

Introducció

Al començar batxillerat, ja anava pensant sobre quin tema podria fer el treball de recerca i ho tenia molt clar, sobre robòtica.

Quan ens van dir als alumnes que miréssim les propostes que van proposar alguns professors a la plataforma moodle, el primer que vaig mirar va ser l'apartat de tecnologia i, per curiositat vaig mirar el de matemàtiques, ja que és una assignatura que sempre m'ha interessat. Em va cridar molt l'atenció el treball anomenat "problemes famosos de probabilitat" i vaig informar-me sobre els problemes que es citaven en la seva explicació. Tot i no entendre'ls massa, ja que només vaig fer probabilitat a 4t d'ESO, van agradar-me. Finalment vaig escollir aquest treball i, me'l van assignar.

Sincerament, el món de la probabilitat és difícil per a mi però, cercant informació i amb material que m'ha proporcionat la meva tutora del treball de recerca, crec que em serà fàcil entendre`l millor, no solament en conceptes sinó també en història. Abans d'endinsar-me en l'elaboració del treball haig d'estudiar conceptes nous i recordar alguns que ja havia estudiat fa un temps.

L'objectiu d'aquest treball és cercar informació sobre les matemàtiques i la seva branca de la probabilitat i atzar. Així mateix, al primer bloc d'aquest treball hi constarà la història de la probabilitat: com va sorgir, els seus precursors, primers teoremes, definicions, etc. Fins a arribar als nostres dies.
Seguidament, al segon bloc del meu treball introduiré alguns conceptes probabilístics. L'objectiu d'aquest bloc serà entendre la probabilitat, amb els seus conceptes i saber aplicar aquests.
Finalment, sabent com han evolucionat la probabilitat i l'atzar i havent estudiat aquests, m'endinsaré en el que seria el tercer bloc d'aquest treball: problemes famosos de probabilitat. Aquests problemes els he trobat gràcies a una llista que m'ha proporcionat la meva tutora del treball de recerca. He triat els tres que més em cridaven l'atenció: el problema del cavaller de Méré, el problema dels punts i el problema dels aniversaris. Dins d'aquest bloc, també hi haurà una simulació del problema del cavaller de Méré.

L’objectiu de fer aquests problemes serà acabar d’entendre la probabilitat, veure com han evolucionat els problemes juntament amb l’evolució de la teoria de l’atzar, mirar les diverses solucions que s’han donat i saber resoldre’ls.

Abans de començar, però, voldria agrair a la meva tutora de recerca el seu suport i seguiment, que m’ha ajudat a planificar el treball de millor manera. També agrair l’ajuda a les persones que s’han interessat pel meu treball aportant-me idees o millores.

Probabilitat al llarg dels anys

L'atzar i els seus precursors

L'atzar, no té un inici històric, i, òbviament, tampoc un final. El que sí és històric és el moment en que l'home comença a interessar-se per l'atzar com a fet desconegut.
La incertesa ha estat considerada i tractada en gran part de les cultures al llarg de la història. Malgrat això, no és fins el renaixement que l'home realment pren contacte directe amb l'atzar i quan en conseqüència, n'inicia l'estudi.
El renaixement (com a període històric) sorgeix en acabar l'edat mitjana (el 1453, amb la caiguda de l'imperi romà d'orient), i aporta a la cultura occidental canvis espectaculars en les concepcions artístiques, culturals, filosòfiques, arquitectòniques, mercants, industrials, intel·lectuals i científiques de l'època.
Durant el renaixement, neix una nova relació entre l'home i la natura. En aquesta nova relació, l'individu humà concep la ciència des d'un punt de vista ideal i realista, reconeixent la capacitat per explicar els fenòmens naturals.
Es dóna, per tant, un clar avenç en les matemàtiques i en la filosofia, i les dues ciències comencen a proporcionar explicacions coherents per a fenòmens que abans s'explicaven en funció de la situació (es podien donar explicacions diferents per a fenòmens iguals que es produïssin en un moment o en un altre).Això , va fer néixer l'interès per a intentar determinar el que aparentment era indeterminable: l'atzar.
La probabilitat neix més tard, però ja en aquest període es comencen a abordar qüestions relacionades amb la incertesa, que es concreten en gran majoria en els jocs d'atzar de l'època, concretament als jocs de daus. La pròpia paraula atzar ve de l'àrab *az-zahr*, que vol dir "el dau". Inicialment es jugava amb uns ossos petits, amb les dues cares dels extrems bombades, el que fa que, sigui un dau de quatre cares completament diferents entre sí (el dau cúbic més antic se situa a l'any 2750 AC. a l'antiga Mesopotàmia).

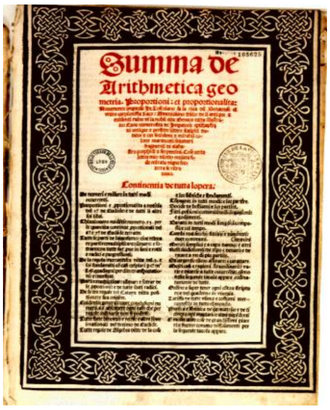
Comencen a sorgir, doncs, dubtes com per exemple com comptabilitzar el nombre de possibles resultats al llançar un dau diverses vegades o com repartir els guanys d'un joc quan aquests és interromput abans que finalitzi. Veiem, per tant, que l'atzar s'estudia primer en qüestions "quotidianes" o trivials.

Pacioli, Tartaglia, Cardano i Galileu

Els problemes que ocupaven els científics del renaixement estaven, sobretot, relacionats amb els jocs d'atzar. Una de les principals incògnites que diversos intel·lectuals van intentar resoldre era el repartiment de guanys en un joc d'atzar quan aquest era interromput, abans que finalitzés.

Les respostes eren tan diverses com incorrectes (com més tard es va comprovar), però el més destacat va ser que matemàtics i jugadors s'interessessin per la qüestió, fet que va donar lloc als inicis de les teories probabilístiques.

Luca Pacioli



El primer matemàtic conegut que aborda el problema del repartiment de guanys és **Fra Luca Pacioli** (1445-1514). En la seva obra central, "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*", Pacioli planteja un problema com aquests:

- *Dos bàndols juguen a la pilota de tal manera que es necessiten 60 punts per a guanyar el premi, que és de 44* ducats* *(22 aportats per cada jugador). Per algun incident no poden acabar el joc i un bàndol queda amb 50 punts i l'altre* amb 30*. Es pretén saber la forma correcta de repartir els guanys entre ambdós bàndols.*

Pacioli suposa que a cada bàndol li pertany un determinat percentatge de la meitat del premi, ja que són dos bàndols; i proposa el següent càlcul:

$\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=\frac{8}{8}$ per tant $\frac{8}{8}$ equivalen a 44 ducats, i a cada jugador pertoquen en conseqüència $\frac{5}{8}$ de 44 ducats (27,5 ducats) i $\frac{3}{8}$ de 44 ducats (16,5 ducats),

Observem que Pacioli planteja el problema sense tenir en compte l'atzar. Organitza un repartiment des del punt de vista aritmètic, on no intervé l'atzar. El matemàtic parteix de la idea que el premi total s'ha de dividir segons els punts que porti cada equip o bàndol en el moment en que el joc s'interromp, però aquest argument només

Fra Luca Pacioli

El* ***Ducat* *era la moneda de referència a Nàpols, a l'arribada de Carles de Borbó, al 1734. Es dividia en 10 carlins, aquests en 12 blats i aquests alhora en 12 cavalls.*

té en compte el que succeeix en el joc fins que s'atura, sense considerar que si el joc no fos interromput, aquest podria tendir cap a un bàndol o un altre sense cap més distinció que la de l'atzar.
El bàndol amb més punts (quan el joc s'atura) no pot defensar un repartiment proporcional dels guanys, ja que la diferencia de puntuació en el moment de la interrupció és difícilment la mateixa que en el moment final acordat.

Niccolo Tartaglia

Més tard és **Niccolo Tartaglia** (1499-1557) qui reprèn la qüestió en la seva obra "*Trattato generale di numeri et misure*". Tartaglia es basa en la solució proposada per Pacioli i objecta el següent punt:

"**Si un jugador ha guanyat 10 punts i l'altre cap, en el moment de la interrupció, tot el premi de l'aposta hauria de decantar-se cap un dels jugadors**".

Això, des del punt de vista de l'atzar, no té sentit. Tartaglia també mostra el seu nou mètode de resolució en el mateix problema que planteja Pacioli, que és el següent:

$50-30=20$; $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$; $\frac{22}{3}=7{,}33$ducats. El jugador A, per tant, rep $22+7{,}33$ ducats (29,33 ducats) i el jugador B rep $22-7{,}33$ ducats (14,33 ducats)

Niccolo Tartaglia

Aquest mètode, en definitiva, proposa que "el jugador que porta avantatge en el joc rep la seva part de l'aposta* més la part que queda proporcional al seu avantatge" (tenint en compte que la diferencia de punts es 50-30=20, és a dir 1/3 dels punts necessaris per a guanyar els 22 ducats, el jugador amb 50 punts rebrà 22 ducats de la seva aposta més 1/3 dels 22 ducats corresponents al seu avantatge). Aquest argument guanya força enfront al de Pacioli pel que fa al repartiment de guanys, però altre cop es

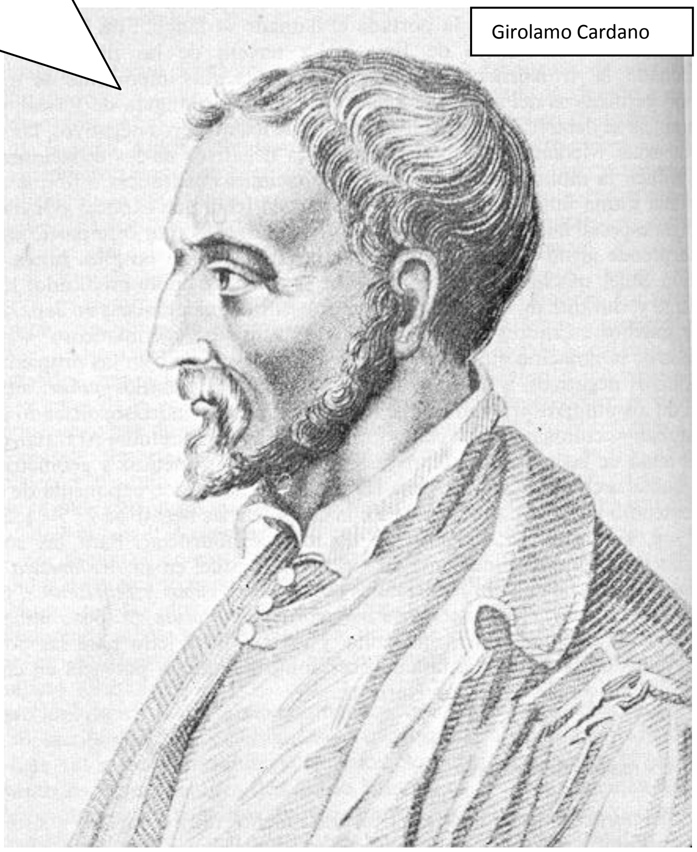
Els jocs d'atzar de l'època consistien fonamentalment en l'aportació en igualtat, de cada jugador que es constituïa com a premi (Aposta**), i el repartiment d'aquest entre els diferents bàndols o jugadors en funció dels avantatges o desavantatges de cadascú.*

planteja una incoherència similar: el joc només té en compte l'avantatge d'un bàndol respecte l'altre en el moment de l'aturada del joc, però cal remarcar que tal avantatge podria variar en continuar el joc, o inclús podria guanyar el bàndol en desavantatge.

Girolamo Cardano

El següent en reprendre el primer enigma probabilístic conegut fou **Girolamo Cardano** (1501-1576), que aporta una nova resolució per al problema del repartiment de guanys. Amb la seva obra "*Practica arithmeticae generalis*" demostra l'error de Pacioli i Tartaglia alhora que proposa un sistema de resolució que sí té en compte el factor atzar, és a dir, la part del joc que mai s'arriba a jugar degut a la interrupció. Cardano proposa el càlcul següent, però, tampoc és correcte des del punt de vista probabilístic:

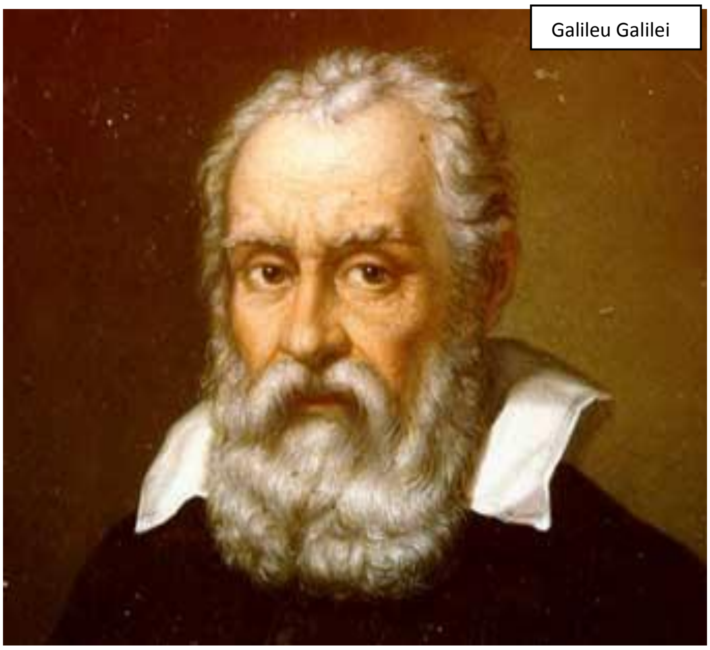
Part d'A = [1+2+3+...+(n-q)] i Part de B = [1+2+3+...+(n-p)]; on "n" és el nombre de punts a jugar (en aquest cas 60) i "p" i "q" són el nombre de punts guanyats pels jugadors A i B, respectivament (50 i 30), on $\frac{part\ A}{part\ B}$ dona la proporció correcta del repartiment.



Posteriorment, Cardano va escriure un llibre titulat "*Liber de ludo aleae*", un dels primers llibres coneguts dedicat exclusivament a l'estudi probabilístic dels jocs d'atzar i de problemes relacionats, com l'esmentat per Pacioli o Tartaglia. Les conclusions en aquest llibre reflecteixen que Cardano confon probabilitat i esperança matemàtica. Malgrat això assimila correctament el que és un joc just, derivat d'un dau honest, i també el fet que les apostes poden variar seguint unes pautes de probabilitat partint de la igualtat o equiprobabilitat.

Galileu Galilei

Galileu Galilei (1564-1642) va ser un dels principals científics del segle XVII, se'l considera un dels pares de la física i l'astronomia modernes, tenint en compte les grans aportacions que va fer en aquests camps, com també en les matemàtiques. Galileu també es va ocupar de trobar solucions coherents als problemes proposats pels seus precursors respecte al repartiment d'apostes i les tirades de daus. Així, en un dels seus llibres titulat "*Sobre les puntuacions en llançament de daus*", aborda, com calcular el nombre de resultats possibles al llançar tres daus. Malgrat ja era conegut el resultat (216 resultats diferents), Galileu va ser el primer en arribar al resultat amb el simple càlcul de 6^3=216. També va proposar maneres diverses de saber quines combinacions de daus eren més probables i quantes formes diferents d'aconseguir-les existien. La seva aportació més important a les primeres teories probabilístiques va ser el que ell mateix anomenà "**la teoria de la mesura d'errors**". Galileu deia que els errors de mesura son inevitables i, va classificar aquests errors en dos tipus:



Galileu Galilei

-**Errors sistemàtics**: donats per la imprecisió del mètode o els estris de mesura
- **Errors aleatoris**: donats per successos impossibles de controlar.

Aquesta classificació, segueix vigent en l'actualitat. També va observar que els errors petits són més probables que els grans i que la majoria de les mesures donen valors propers a la certesa. Amb aquests i molts altres estudis, Galileu va contribuir a les primeres teories de la probabilitat, i també va fixar les arrels de la estadística moderna.

Naixement de la teoria de la probabilitat

Blaise Pascal i Pierre de Fermat

La primera teoria de la probabilitat va sorgir com a fruit de la compenetració de dos intel·lectuals francesos del segle XVII: **Blaise Pascal (1623–1662)** i **Pierre de Fermat (1601- 1665)**. Aquests trobaren, de forma independent i paral·lela, respostes matemàtiques per diversos problemes que se'ls va plantejar.

Sembla ser que cap a 1652, durant un viatge , Pascal va coincidir amb el jugador professional de jocs d'atzar **Antoine Gombaud**, més conegut com el **Cavaller de Méré (1607-1684)**. Gombaud, reflexionant molt sobre els jocs d'atzar, va entendre que tenir un millor coneixement d'aquests li proporcionaria avantatges.

Va proposar a Pascal una sèrie de problemes que van captivar a aquest i els quals l'any 1654 van fer partidari a Pierre de Fermat (1601-1665). A la correspondència entre Pascal i Fermat es van potenciar les intel·ligències i va donar lloc a l'inici del càlcul de probabilitats. Cal destacar que Fermat i Pascal, tot i ser els dos francesos i estar a una distància que ara trobem propera (uns 600km més o menys) mai van arribar a conèixer-se personalment. Només es relacionaven amb cartes i escrits, una cosa molt important per a la època ja que era molt difícil comunicar-se d'aquesta manera.

Blaise Pascal (1623-1662)

Aquest filòsof, matemàtic i científic francès va realitzar diverses contribucions en els camps de la ciència i el pensament. Amb 11 anys ja participava en reunions científiques. A 1642 va dissenyar una màquina de calcular. Va ser anomenada Pascalina, una de les primeres calculadores mecàniques que va funcionar realment. L'any 1654 va analitzar y demostrar les propietats del triangle aritmètic o "triangle de Pascal", el qual els seus termes corresponen als nombres combinatoris.
En 1655 es va retirar a un convent per dedicar la resta de la seva vida a la filosofia i la religió.

Pierre de Fermat (1601-1665)

Es tracta d'un dels grans matemàtics de l'història. El seu principal interès y la seva principal aportació dins de les matemàtiques va ser la teoria dels nombres (l'equació $x^n + y^n = z^n$ no te solucions enteres pera $n > 2$). També va fer contribucions importants al camp de la geometria i a la determinació dels extrems d'una funció per resoldre problemes d'optimització abans de l'existència del càlcul diferencial.

El cavaller de Méré proposà a Pascal aquests tres problemes:

1-Suposem que tenim dos jugadors, A i B, participen en una aposta de 64$. El jugador que aconsegueixi abans 3 punts guanyarà tota la aposta, però, quan A ha guanyat 2 punts i B ha guanyat 1, decideixen deixar el joc. Com haurien de repartir-se l'aposta?

2-En el llançament de 3 daus, qui té mes possibilitats de guanyar el que aposta al número 9 o el que aposta al número 10?

3- Què és millor, apostar a que almenys surt un 6 llençant 4 vegades un dau, o apostar a que surt un doble sis llençant 24 vegades dos daus?

Malgrat que aquests problemes ara pugui semblar qüestions trivials, en aquells temps no ho eren, i tan un científic com l'altre van haver de servir-se de procediments matemàtics complexes per trobar solucions coherents al problema. Aquests científics van fer aportacions de gran importància als camps matemàtics de la combinatòria, l'estadística, i sobretot a la branca que es va anar coneixent amb el nom de probabilitat i atzar.

Christiaan Huygens


Christiaan Huygens

Huygens (1629-1695) va basar les seves deduccions en els estudis previs de Pascal i Fermat, donant així certa continuïtat i evolució a les teories d'aquests dos predecessors.

Pascal i Fermat havien començat a posar en pràctica aquestes "solucions" relatives als jocs d'atzar de l'època, fet que va incitar a Huygens (en un viatge que aquest va realitzar i que el va posar en contacte amb científics que tractaven qüestions d'atzar proposades per Pascal i Fermat.) a iniciar un intens estudi pel que fa a la resolució dels problemes en jocs d'atzar. Aquest estudi, que deixà per escrit en la seva obra "*Sobre els raonaments relatius als jocs de daus*", introdueix per primera vegada el concepte d'esperança matemàtica per a variables aleatòries que prenen dos o tres valors.

Juntament amb aquesta aportació, Huygens també va proposar formes de resolució per als problemes iniciats per Pascal i Fermat, però a més va dur els casos a situacions encara més complexes, com per exemple introduir un tercer jugador. Aportant així, no tan sols una solució als problemes tractats, sinó també un mètode capaç de donar solucions precises per a gran part dels problemes d'atzar proposats fins llavors.

Evolució de la teoria de la probabilitat

Primeres definicions de probabilitat

Les definicions inicials de la probabilitat sorgiren quan es van anar deixant de banda els casos particulars per començar la recerca de teories generals. En aquest procés, que ja va iniciar **Christiaan Huygens**, van trobar-se les primeres definicions de probabilitat. El primer a donar una definició formal del concepte va ser **Jakob Bernoulli (1654–1705)**, que en el seu llibre "*L'Art de la conjetura*" , explica en termes més o menys moderns la definició de probabilitat que ell va aconseguir. Uns anys més tard, **Abraham De Moivre** acceptà la definició del seu predecessor i la va modificar dient una cosa així: "*Probabilitat: Una fracció en la que el numerador és igual al nombre d'aparicions del succés i el denominador és igual al nombre total de casos en els quals el dit succés pugui i no ocórrer. Aquesta fracció expressa la probabilitat que el succés ocorri.*" Una altra gran aportació de Bernoulli va ser que deduí la forma de trobar la probabilitat d'un succés malgrat la impossibilitat de comptar els casos favorables. Per a fer-ho es va basar en el recompte de resultats que li eren favorables davant dels que li eren adversos després de que el succés hagués tingut lloc. D'aquesta manera va introduir el concepte de **probabilitat estadística.**

Abraham de Moivre

Jakob Bernoulli

Teoremes bàsics de la probabilitat

Durant primer quart del segle XVIII es van proposar, desenvolupar i formalitzar el que actualment s'anomenen **teoremes de la probabilitat clàssica**. Aquests teoremes, que principalment són tres, van ser proposats per diversos autors d'aquest segle.

Malgrat ni Pascal ni Fermat ni Huygens van ser capaços de formalitzar aquests teoremes, sí es cert que els teoremes apareixen de forma implícita en les resolucions d'aquests autors i utilitzats de forma correcta.

Els tres principis fonamentals, són els següents:

Teorema de la suma: El teorema de la suma va ser correctament aplicat per Pascal i també Bernoulli el desenvolupà sense trobar resposta a les paradoxes que sorgien de la seva aplicació. Va ser finalment **Thomas Bayes (1702-1761)** qui va formular el teorema de la suma de probabilitats i també qui va enunciar la fórmula que actualment segueix vigent:

- Per a conjunts amb intersecció: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Per a conjunts mútuament excloents: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Teorema de la multiplicació: Com en el teorema anterior, la multiplicació de probabilitats era ja coneguda per quasi tots els científics anteriors, a través de resultats concrets. No obstant, va ser **Abraham De Moivre** el primer que el va estudiar rigorosament. Així, en la seva obra "*Doctrina de les probabilitats*" l'autor va introduir i escriure d'aquesta forma la definició de successos independents: "Direm que dos successos són independents si un d'aquests no té cap mena de relació amb l'altre", i també la de successos dependents: "Dos successos són dependents si la probabilitat d'ocórrer d'un d'ells influeix en la probabilitat d'ocórrer de l'altre."

Amb aquesta deducció, De Moivre assentà una relació matemàtica entre els diversos successos, és el que actualment es coneix com a teorema de la multiplicació.

-El teorema ens diu que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot\ P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$

-En cas de que A i B siguin independents: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Teorema de Bayes: Els fonaments que va proposar De Moivre van obtenir una gran difusió, fet que va induir a altres científics a ampliar alguns dels teoremes que s'havien anat desenvolupant. **Thomas Bayes (1702-1761)**, alumne de De moivre, va expressar la probabilitat condicional en funció de la probabilitat de la intersecció. De totes maneres, l'honor del teorema que porta el seu nom no és únicament seu, ja que va ser **Pierre-Simon Laplace (1749- 1827)** qui va desenvolupar gran part del teorema en la seva "*Experiència amb la filosofia de la teoria de la probabilitat*". Al igual que els altres dos teoremes, el Teorema de Bayes ja era usat anteriorment, encara que mai abans havia estat formulat. El teorema de Bayes ens diu que, si tenim una sèrie d'esdeveniments,A_1,A_2...A_n, de manera que:

-Són incompatibles entre ells: $A_i \cap A_j = \emptyset, si\ i \neq j$

-La seva unió és l'espai mostral: $A_1 \cup A_2 \cup ... A_n = \Omega$

I sabent que s'ha donat un esdeveniment B, es compleix que:

$$P\,(A_j/B) = \frac{P(A_j)\,P(B/A_J)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B/A_i)}$$

Pierre-Simon Laplace

Thomas Bayes

Probabilitat moderna

Teoria de la mesura d'errors

La teoria de la mesura d'errors va iniciar-la Galileo Galilei i la van continuar molts altres científics, com, per exemple, **Ticho Brahe (1546–1601)**. Brahe deia que:

"*Cada mesura té un possible error i que la precisió de la mesura pot augmentar si es realitzen vàries acotacions i es calcula la mitjana aritmètica"*

Els primers intents de construir la teoria de mesura d'errors van aparèixer de científics com **Roger Cotes (1682–1716)**, **Thomas Simpson (1710–1761)** i **Daniel Bernoulli**. Aquests autors van mantenir certes discussions y desacords sobre la classificació dels errors, la freqüència i la probabilitat amb que ocorren o tenen tendència a ocórrer, etc.

L'interès per resoldre les qüestions sobre la probabilitat era col·lectiu, això, ho demostra el nombre de científics que van estudiar els assumptes de l'època: **P. Chebyshev (1821–1894)**, **A. Markov (1856–1922)**, **A. Cauchy (1789–1857)**, **Simeon Poisson (1781–1840)**, **K. Gauss (1777–1855)** i **A. Legendre (1752–1833)**.

D'aquesta manera, gràcies a Bernoulli, es va introduir en la teoria de la probabilitat la **llei dels Grans Nombres**, un dels conceptes més importants en el càlcul de probabilitats i amb àmplies aplicacions en molts camps de l'estadística i de les matemàtiques.

Dins de la llei dels Grans Nombres s'engloben diversos teoremes que escriuen el comportament de la mitjana d'una successió de **variables aleatòries** conforme augmenta el seu número d'assajos:

Concepte de variable aleatòria: En la recerca matemàtica, sorgeixen nous conceptes de forma espontània. El concepte de variable aleatòria és un dels pilars fonamentals de la probabilitat moderna. De fet, aquest concepte apareixia encobert en gran part dels estudis anteriors (Com els de Huygens, o Galileu). Els primers passos per a definir les variables aleatòries, però, els va fer Poisson el 1832. En el seu llibre "*Sobre la probabilitat dels resultats promitjos d'observacions*". La paraula "variable" va ser utilitzada per primera vegada per **Chebyshev**, qui assumí implícitament que totes las variables aleatòries eren independents i va ser **A. Liapunov (1857-1918)** el primer en usar el terme "variable aleatòria" i va especificar que serien independents quan fos necessari.

La probabilitat i els seus conceptes

La teoria de la probabilitat es troba relacionada amb altres branques, gèneres o subgèneres que li són propers. Des dels inicis, els problemes de probabilitat requerien altres eines per poder resoldre'ls i, aquí és on prenen part l'**estadística** i la **combinatòria**.

Estadística: consisteix a la recopilació, anàlisi, interpretació i representació de dades. Per tant, una aportació molt important de l'estadística a la probabilitat és la d'un suport sobre el qual es permet analitzar les dades que han estat recollides prèviament, i la representació d'aquestes de forma instructiva.

Combinatòria: una part d'aquesta, inclou el "comptar" el nombre d'objectes que satisfan un criteri (combinatòria enumerativa), decidir quan aquest criteri es compleix, i construir i analitzar els objectes que el compleixen. Per a determinar una probabilitat o definir un atzar, per exemple, és fonamental recopilar i conèixer quin conjunt sotmetrem a observació o saber quants resultats ens afavoreixen enfront el total que poden succeir realment.
En definitiva, les variacions, permutacions o combinacions esdevenen un pilar bàsic per a les operacions en l'àmbit de la probabilitat.

Concepte de probabilitat

La probabilitat és la característica d'un succés, quan existeixen raons per a que aquest es realitzi. La probabilitat **p** de que succeeixi un succés **S** d'un total de **n** casos possibles igualment probables és igual al quocient entre el número d'ocurrències **h** del succés(casos favorables) i el número total de casos possibles **n**.

$$p = P\{S\} = \frac{h}{n}$$

La probabilitat és un número (valor) que varia entre 0 i 1. Quan el succés és impossible direm que la seva probabilitat és 0. Si l'esdeveniment és cert i sempre ocorre la seva probabilitat és 1.

Per a endinsar-nos més a la definició de probabilitat, farem servir un exemple: *Imaginem que tenim un dau i volem treure: a) Un 6; b) Un 5 o un 6; c) Un nombre parell, quina probabilitat d'ocórrer té cada esdeveniment?*

a) P(treure un 6)= $\frac{casos\ favorables\ a\ treure\ un\ 6}{nre.\ casos\ possibles} = \frac{1}{6}$

b)P(treure 5 o 6)= $\frac{2}{6}$, ja que ara no només volem treure un sol valor, sinó que ens serveixen dos (el 5 i el 6).

c)P(treure nre. parell)= $\frac{3}{6}$, ja que dins de tots els casos possibles, només hi ha 3 nombres que siguin parells.

Elements de la probabilitat

Conceptes bàsics

Cal fer una diferenciació entre els diversos tipus d'experiments. Els experiments es poden dividir en molts grups, però, ara n'exposarem només dos:

Tipus d'experiments:

-Experiments deterministes: Són els experiments dels quals coneixem el resultat abans de realitzar-ho. Com per exemple mesurar la temperatura d'ebullició de l'aigua destil·lada.

-Experiments aleatoris: Són els experiments dels quals sabem tots els possibles resultats però, no podem predir el resultat que sortirà, és a dir, que depenen de l'atzar o la sort. Com per exemple llençar un dau i anotar la puntuació que surt a la cara superior.

Un cop explicats els dos tipus d'experiments, podem veure una relació en front a la manera de veure la realitat, uns la veuen basada en tot allò que és físicament perceptible i conegut. En canvi els altres, s'associen a la permanent incertesa que engloba totes les coses.

Esdeveniments o successos

En tot experiment aleatori, cadascun dels possibles resultats que poden ocórrer s'anomena **esdeveniment elemental**.

Per exemple: Quan llancem un dau, trobem 6 possibles esdeveniments elementals: Treure un 1, un 2, un 3, un 4, un 5 o un 6.

També en tot experiment on intervé la probabilitat, és necessari conèixer el conjunt de tots els resultats possibles, és a dir, el conjunt de tots els esdeveniments elementals. Aquest conjunt és anomenat **espai mostral.** Es denota amb el signe Ω.

Per exemple: Quan llancem un dau, l'espai mostral correspondria a tots els resultats possibles, s'expressaria $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Dins aquest espai mostral, trobem subgrups o subconjunts, que no deixen de ser una unió
de diversos esdeveniments elementals. Qualsevol d'aquests subconjunts dins l'espai mostral s'anomena **esdeveniment compost**. Hem de tenir en compte que un esdeveniment compost no pot estar format per més esdeveniments elementals dels que hi ha dins de l'espai mostral.

Per exemple: a l'experiment de llençar un dau, un esdeveniment compost seria preveure que sortirà un nombre parell. Estaria format pels esdeveniments elementals de treure un 2, un 4 o un 6.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3)(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{matrix} \right\}$$

-Exemple de l'espai mostral a l'experiment del llançament de dos daus.

Tipus d'esdeveniments

Esdeveniment segur: aquest tipus d'esdeveniment representa una realitat que sempre es verifica i que sempre ocorre. Per tan, coincideix amb l'espai mostral Ω. La seva probabilitat és 1.

-Per exemple: un esdeveniment segur seria llençar un dau i que surti un nombre entre 1 i 6.

Esdeveniment impossible: És l'oposat a l'anterior. Aquest esdeveniment no té cap possibilitat d'ocórrer. La seva probabilitat és 0. Per tant coincideix amb el conjunt buit, que és el conjunt que no té elements. Es denota amb Ø.

-Per exemple: Seguint amb l'experiment de llançar un dau, un esdeveniment impossible seria treure un 7. Ja que aquest valor es troba fora de l'espai mostral.

Esdeveniment probable: És aquell que la seva probabilitat d'ocórrer és més gran que la probabilitat que no ocorri.

-Per exemple: En el llançament d'un dau, un esdeveniment probable seria treure un 1, un 2, un 3 o un 4. Ja que, és més probable que surti un d'aquests quatre valors que els dos restants.

Esdeveniment improbable: És l'oposat a l'anterior, aquell que té més opcions de no ocórrer que no pas de fer-ho.

-Per exemple: Seguint l'exemple anterior, l'esdeveniment improbable seria treure un 5 o un 6.

Esdeveniment equiprobable: Dos esdeveniments o més són equiprobables quan tenen les mateixes probabilitats de succeir.

-Per exemple: Si llancem un dau, hi hauria la mateixa probabilitat de treure par, que de treure senar.

Relacions entre esdeveniments

Els esdeveniments es relacionen de forma inevitable entre ells. Existeixen diversos tipus de relació que uneixen i exclouen els diversos esdeveniments que es proposen. Algunes d'aquestes formes de relacions es plantegen a continuació:

Esdeveniments iguals: Dos esdeveniments A i B són iguals si sempre que es verifica A també es verifica B i a l'inrevés. A i B, doncs, tenen els mateixos punts mostrals. Pel fet de ser iguals, sovint aquests esdeveniments representen la mateixa realitat (A=B).

Esdeveniments complementaris o contraris: Es diu que l'esdeveniment A és complementari de B si A conté tots els elements de Ω que no pertanyen a B. És a dir, A representa una part de l'espai mostral i B la resta. L'esdeveniment complementari d'A, es anomenat $\bar{A}$, de manera que $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Inclusió d'esdeveniments: Diem que A està contingut en B si sempre que es verifica A també es verifica B. Es diferencien dels esdeveniments iguals perquè en aquest cas no sempre que es verifica B es verifica necessàriament A.

Successos incompatibles: Donats els esdeveniments A i B, es consideren incompatibles si no contenen cap punt de l'espai mostral en comú. En canvi, seran compatibles si comparteixen una part de l'espai mostral.

Operacions amb esdeveniments

Unió d'esdeveniments: la unió de dos esdeveniments A i B, és un altre esdeveniment format pels esdeveniments elementals que hi ha en A i B, s'escriu AUB. Per a calcular l'esdeveniment format per A i B, es sumen els elements que pertanyen a A i B.

Intersecció de dos esdeveniments: la intersecció de dos esdeveniments A i B, és un altre esdeveniment format pels esdeveniments elementals comuns de A i B, s'escriu A∩B. Per a calcular la intersecció de dos successos cal trobar els seus elements comuns.

Propietats de les operacions amb esdeveniments

Les dues operacions que acabem de veure, tenen una sèrie de propietats que faciliten el càlcul:

1.Idempotent

$A \cup A = A$ i $A \cap A = A$

2.Commutativa

$A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$

3.Associativa

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4.Distributiva

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5.Dels elements neutres i

$A \cup \emptyset = A$; $A \cap \Omega = A$;
$A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \emptyset = \emptyset$

6.De la complementació

$A \cup \bar{A} = \Omega$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$; $\bar{\bar{A}} = A$

7. Lleis de Morgan

$\bar{\bar{A}} = A$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\bar{A} \cap A = \emptyset$

$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B} \quad \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

Probabilitat d'esdeveniments

Freqüències i les seves propietats

- Freqüència absoluta: S'anomena freqüència absoluta d'un esdeveniment A el nombre de vegades (n_A) que es verifica aquest esdeveniment, quan es realitzen un número qualsevol (n) de repeticions d'un determinat experiment aleatori.

- Freqüència relativa: Es dona el nom de freqüència relativa d'un esdeveniment A al quocient entre la freqüència absoluta de A i el nombre de vegades (n) que es repeteix l'experiment.

-**Propietats de la freqüència relativa:**

1. $0 \leq F(A) \leq 1$ per a qualsevol succés

2. $f(\Omega)=1$ i $f(\emptyset)=0$

3. Si A i B són esdeveniments incompatibles, $f(A \cup B)= f(A) + f(B)$

Probabilitat d'un esdeveniment equiprobable

Un cop tractats els diversos tipus de successos que existeixen, les relacions entre aquests i les operacions que se'n deriven, cal conèixer, per exemple, quina és la probabilitat pràctica de que un succés arribi mai a succeir, o quina és la probabilitat que succeeixin dos successos a la vegada, etc.

Regla de Laplace

Per a poder aplicar aquesta regla hi ha d'haver una condició:

-Els esdeveniments elementals han de ser regulars, és a dir, equiprobables.

Laplace ens diu que, en un experiment aleatori equiprobable, la probabilitat d'un esdeveniment A, és:

$$P(A) = \frac{nre.\, casos\ favorables\ a\ A}{nre.\, de\ casos\ possibles}$$

Per exemple: *imaginem-nos que tenim una urna amb cinc boles de colors diferents a dins. Volem agafar a cegues una d'aquestes boles, es podria aplicar la Regal de Laplace? Quina probabilitat hi hauria de treure cada bola?*

- En aquest cas, sí que es podria aplicar la Regla de Laplace, ja que qualsevol de les cinc boles te les mateixes opcions de ser escollida.

-Aplicant la regla de Laplace obtindrem la probabilitat de treure cada bola: $P(treure\ qualsevol\ bola) = \frac{1}{5} = 0'2$, ja que totes les boles tenen la mateixa probabilitat de sortir.

Propietats de la probabilitat

La probabilitat té una sèrie de propietats, que estableixen com calcular la probabilitat de determinats esdeveniments en funció de com es relacionen o de quin tipus són. Les propietats són les següents:

1. La probabilitat de qualsevol esdeveniment és més gran o igual que zero i més petita o igual que 1.

$$\mathbf{0 \leq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \leq 1}$$

2. La probabilitat de l'esdeveniment segur és 1 i la probabilitat de l'esdeveniment impossible és 0.

$$\boldsymbol{P(\Omega) = 1} \qquad\qquad \boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$$

3. La probabilitat de qualsevol esdeveniment és igual a 1 menys la probabilitat del seu contrari.

$$\boldsymbol{P(A) = 1 - P(\overline{A})}$$

4. Quan dos esdeveniments són incompatibles, la probabilitat de la seva unió és la suma de les seves probabilitats.

$$\boldsymbol{P(A\ U\ B) = P(A) + \ P(B)}$$

5. Per a dos esdeveniments qualsevol, A i B, sempre es verifica que la probabilitat de la seva unió és igual a la suma de les probabilitats menys la de la intersecció.

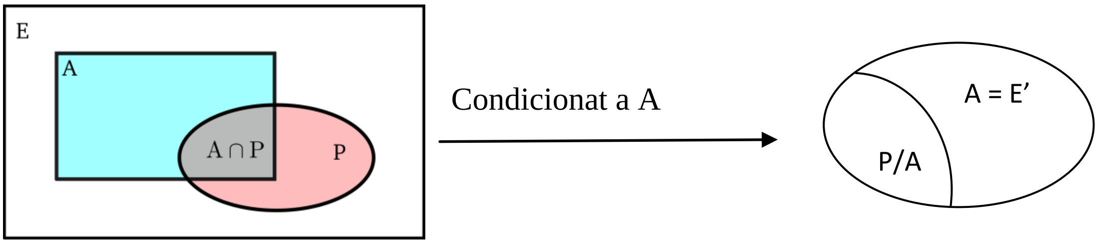
$$\boldsymbol{P(A\ U\ B) = P(A) + \ P(B) - \ P(A\ \cap B)}$$

Probabilitat condicionada

En els experiments aleatoris, els esdeveniments, com ja hem vist, tenen diferents relacions segons els casos. Doncs bé, la probabilitat condicionada és la probabilitat d'un esdeveniment B quan sabem que ha passat un altre esdeveniment A. *S'escriu P(B/A) i es llegeix "probabilitat de B condicionat a A".*

Quan calculem probabilitats condicionades hem de tenir en compte que el nou espai mostral E', coincideix amb l'esdeveniment A.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Teorema de la intersecció o de la multiplicació

Tot i que ja hem explicat alguna cosa d'aquest teorema a la pàgina 11, cal tornar a explicar-lo en aquest bloc de conceptes. En aquest teorema diferenciem dues fórmules depenent de si els successos són dependents o independents. Fem un recordatori:

-Direm que dos successos són independents si un d'aquests no té cap mena de relació amb l'altre.

-Dos successos són dependents si la probabilitat d'ocórrer d'un d'ells influeix en la probabilitat d'ocórrer de l'altre.

Un cop fet aquest recordatori, continuem amb les fórmules:

-Si són dependents: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$

-Si són independents: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Teorema de la probabilitat total

El teorema de la probabilitat total ens permet calcular la probabilitat d'un esdeveniment a partir de probabilitats condicionades. Si tenim una sèrie d'esdeveniments, A_1, A_2,...,A_n, de manera que:

- Són incompatibles entre ells: $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$.
- La seva unió és l'espai mostral: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

Aleshores podem calcular la probabilitat de qualsevol esdeveniment B com:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B/A_j)$$

Teorema de Bayes

Tot i haver explicat aquest teorema anteriorment (pàgina 11), és necessari mencionar-lo a la part de conceptes. El teorema de Bayes ens diu que, si tenim una sèrie d'esdeveniments, A_1, A_2,...A_n, de manera que:

- Són incompatibles entre ells: $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$.
- La seva unió és l'espai mostral: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

Sabent que s'ha donat un esdeveniment B, es compleix que:

$$P\,(A_j/B) = \frac{P\left(A_j\right) P(B/A_J)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B/A_i)}$$

Problemes famosos de probabilitat

Com ja hem esmentat al primer bloc d'aquest treball, més concretament a les pàgines 8 i 9, el jugador professional de jocs d'atzar Antoine Gombaud va reflexionar molt sobre concretes situacions i va proposar 3 problemes a Pascal, qui els va resoldre juntament amb Fermat. Seguidament explicarem diversos aspectes sobre dos d'aquests problemes.

El problema del cavaller de Méré

Antoine Gombaud (cavaller de Méré) havia experimentat, a partir de la seva gran experiència, que era millor apostar a favor d'obtenir almenys un 6 en llançar 4 vegades un dau, mentre que apostar per almenys un doble 6 en llançar 24 vegades dos daus no ho era. Aparentment, contradiu l'aritmètica, ja que 6 resultats possibles en llançar un dau és a 4 vegades que es llança un dau, com 36 resultats possibles en llançar dos daus és a 24 vegades que es llancen dos daus.

$$\frac{6}{4} = \frac{36}{24}$$

La seva curiositat el va dur a cartejar-se amb Blaise Pascal l'any 1654, demanant-li el perquè d'aquesta contradicció. Aquest fet es coneix amb el nom del **Problema del cavaller de Méré** o en molt pocs casos com "el problema de les apostes avantatjoses".

Plantejament i resolució

Tal i com es pot analitzar, el problema està format per successos equiprobables i per tant, es podria resoldre utilitzant la regla de Laplace, però en aquella època no es va resoldre així, o sigui que ho farem tal i com es va fer anys enrere:

Per començar, cal calcular la probabilitat del succés A = "Almenys un 6 en llançar 4 vegades un dau". En llançar 4 vegades un dau, es poden obtenir 1296 resultats diferents, ja que es poden obtenir 6 resultats possibles per cada un dels 4 llançaments, és a dir: $6·6·6·6=6^4=1296$ resultats possibles.

D'aquests 1296 resultats, cal saber quants contenen almenys un 6, però per saber-ho, és més fàcil buscar el succés contrari, és a dir, quants resultats no contenen cap 6, per després restar-ho als 1296 resultats possibles. Per tant, calculem quants resultats hi ha que tinguin tan sols números de l'1 al 5 i arribem a aquest resultat $5·5·5·5=5^4=625$ resultats que no contenen cap 6.

D'aquesta manera restant el número de casos que no conté cap 6, al número de casos possibles total, trobem que: 1296-625=671 resultats contenen almenys un 6. Així que, en 4 llançaments d'un dau hi ha més resultats que contenen un 6 (671) que resultats amb cap 6 (625), per això és avantatjós apostar a que sortirà un 6. Si calculem els percentatges, ens surt que:

Resultats que no contenen un 6 en 4 llançaments amb un dau= $\frac{625}{1296} = 0{,}4822 = 48{,}2\%$
Resultats que contenen un 6 en 4 llançaments amb un dau= $100\% - 48{,}2\% = 51{,}8\%$

Ara bé, aquí és on comença el problema del cavaller de Méré:

A partir d'aquests càlculs, suposava que també seria avantatjós apostar pel resultat d'obtenir almenys un doble sis en una sèrie de 24 llançaments amb dos daus. No coneixia altres matemàtiques que la Regla de Tres i la va utilitzar aquí, tot i que no hi hagués proporcionalitat.

Per trobar la solució, hem de pensar també de quantes formes possibles es pot desenvolupar el joc:

en un dau --> 6 cares.

en dos daus -->6·6=36 resultats.

en 24 llançaments amb dos daus --> són 36 resultats possibles en 24 partides, per tant, 36^{24} partides possibles.

Calculem quantes d'aquestes partides no són favorables a l'aposta d'obtenir almenys un doble 6:

amb dos daus --> 36-1= 35 resultats que no són doble sis.

en 24 llançaments amb dos daus --> són 35 resultats possibles en 24 tirades, per tant, 35^{24} amb cap doble sis.

Com que obtenim nombres més grans, treballarem amb els percentatges:

Proporció de partides amb cap doble sis -->

$$\frac{nre.\, resultats\ que\ no\ són\ doble\ 6}{nre.\, de\ casos\ totals} = \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0{,}50859 = 50{,}86\%$$

Proporció de partides amb almenys un doble sis --> 100% - 50,86%= 49,14%

Com que 49,14%< 50,86%, no és favorable apostar a que surt un doble 6 en 24 tirades amb dos daus davant de l'opció de que surt un 6 en almenys 4 tirades amb un dau.

La diferència és molt petita, sí, però si jugues moltes vegades com el jugador professional Antoine Gombauld, ho acabaràs notant perquè perdràs diners.

Què hem aconseguit gràcies a aquest problema?

A la solució d'aquest problema, com en els que tractarem seguidament van aparèixer ja alguns conceptes que serien importants en aquest tipus de situacions:

El número de possibles partides diferents --> nombre de casos possibles.

El número d'aquestes partides en les que guanyaríem --> nombre de casos favorables.

El percentatge de partides guanyades --> freqüència relativa.

Aquest problema va donar un benefici molt major que l'esperat pel jugador, va obrir nous camins a la comprensió racional del que fins llavors semblava impossible de comprendre, l'atzar.

Simulació

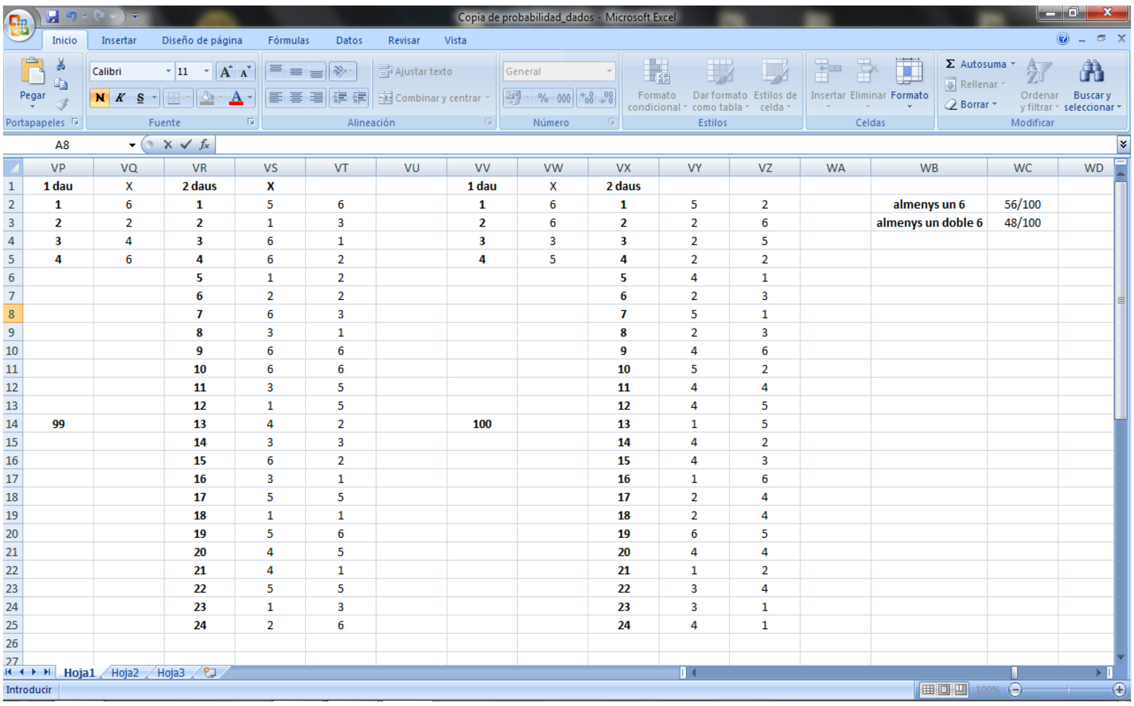
En aquest apartat farem una simulació de les tirades del problema del cavaller de Méré per tal de comprovar si els resultats teòrics, s'apropen als pràctics. La simulació consisteix a fer sèries de tirades de daus, per veure si ens apropem als resultats que van proposar Pascal i Fermat a la solució d'aquest problema.

Podríem dividir aquesta simulació en dos parts:

-Sèries de 4 tirades amb un dau i veure en quantes surt almenys un 6.

-Sèries de 24 tirades amb dos daus i veure en quantes surt almenys un doble 6.

Vaig fer 100 sèries de cada part, el que equival a unes 5200 tirades amb un dau. Però, no vaig llençar un dau 5200 vegades i vaig anar apuntant els resultats, sinó que amb un *Excel*, vaig fer una taula i vaig posar "valors aleatoris", seguidament explicaré el procediment.

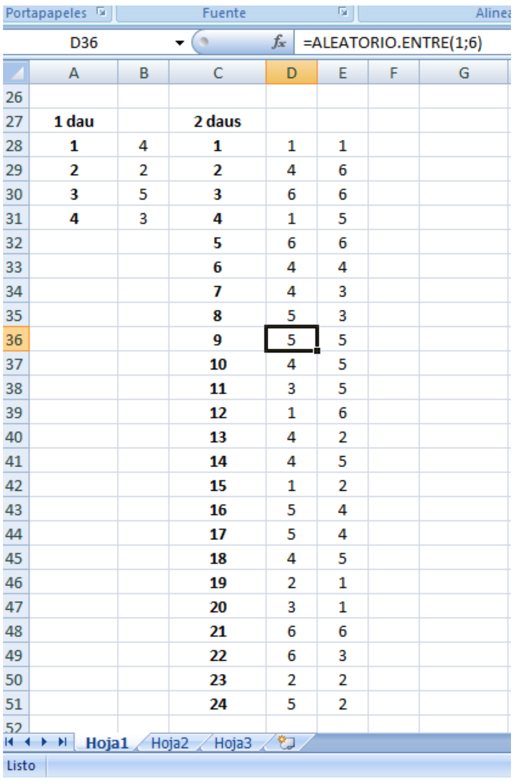


	VP	VQ	VR	VS	VT	VU	VV	VW	VX	VY	VZ	WA	WB	WC	WD
1	1 dau	X	2 daus	X			1 dau	X	2 daus						
2	1	6	1	5	6		1	6	1	5	2		almenys un 6	56/100	
3	2	2	2	1	3		2	6	2	2	6		almenys un doble 6	48/100	
4	3	4	3	6	1		3	3	3	2	5				
5	4	6	4	6	2		4	5	4	2	2				
6			5	1	2				5	4	1				
7			6	2	2				6	2	3				
8			7	6	3				7	5	1				
9			8	3	1				8	2	3				
10			9	6	6				9	4	6				
11			10	6	6				10	5	2				
12			11	3	5				11	4	4				
13			12	1	5				12	4	5				
14	99		13	4	2		100		13	1	5				
15			14	3	3				14	4	2				
16			15	6	2				15	4	3				
17			16	3	1				16	1	6				
18			17	5	5				17	2	4				
19			18	1	1				18	2	4				
20			19	5	6				19	6	5				
21			20	4	5				20	4	4				
22			21	4	1				21	1	2				
23			22	5	5				22	3	4				
24			23	1	3				23	3	1				
25			24	2	6				24	4	1				
26															
27															

A la taula podem observar unes files on posa “1 dau” i a sota una sèrie de números de l’1 al 4; cada número d’aquests pertany a un llançament amb un dau on, al costat hem apuntat el resultat que ha sortit. Hi ha un altre tipus de files, que posa “2 daus”, consisteixen completament en el mateix que les altres, la diferència és que en comptes de fer 4 llançaments amb un dau, fem 24 llançaments amb dos daus, apuntant també els resultats.

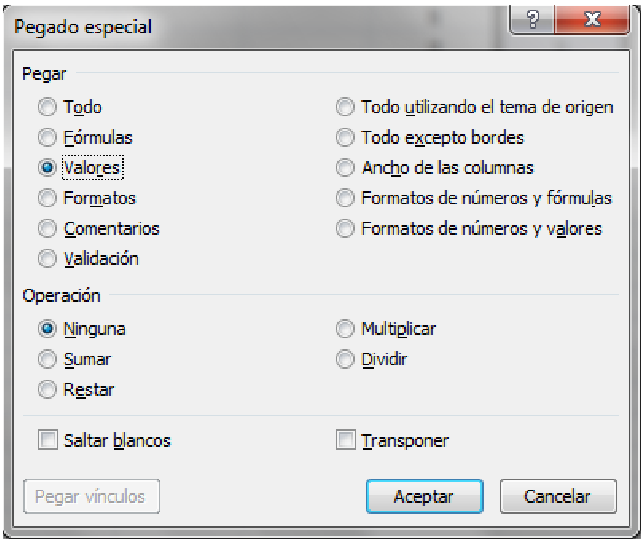
Si ens fixem, veure’m unes “X” al costat dels títols d’“1 dau” o de “2 daus”, això vol dir que ha aparegut almenys un 6 o un doble 6, en aquella sèrie. En cas de que no hi hagi cap 6 o cap doble 6, no es posa la X, com és el cas de l’ultima sèrie amb 2 daus de la fotografia.

Per fer els valors aleatoris, he hagut de fer una sèrie de cada a mà i introduir la “formula”: =ALEATORIO.ENTRE(1;6), així ens donarà aleatòriament valors entre 1 i 6 a les caselles que nosaltres marquem (ho podem veure a la imatge de sota.)



	A	B	C	D	E	F	G
26							
27	1 dau		2 daus				
28	1	4	1	1	1		
29	2	2	2	4	6		
30	3	5	3	6	6		
31	4	3	4	1	5		
32			5	6	6		
33			6	4	4		
34			7	4	3		
35			8	5	3		
36			9	5	5		
37			10	4	5		
38			11	3	5		
39			12	1	6		
40			13	4	2		
41			14	4	5		
42			15	1	2		
43			16	5	4		
44			17	5	4		
45			18	4	5		
46			19	2	1		
47			20	3	1		
48			21	6	6		
49			22	6	3		
50			23	2	2		
51			24	5	2		
52							

Ara només vaig haver de copiar aquesta estructura de la imatge 100 vegades per fer les sèries que vaig proposar-me. Hi havia un inconvenient, cada vegada que copiava una sèrie o posava una “X” per marcar que havien sortit els valors que volia, es canviaven tots els valors de les demés sèries automàticament. Llavors, havia d’anar sèrie per sèrie fent un “enganxat especial” per a que els valors es quedessin fixes.



Conclusió: Hem pogut comprovar que els resultats, més enllà de lo esperat, s'apropen molt només fent 100 tirades. Per una banda hem obtingut que a les sèries de 4 tirades amb un dau de 6 cares, un 56% de les sèries conté almenys un 6, valor que no s'allunya del resultat proposat per Pascal i Fermat a la resolució del problema. En el cas de les sèries de 24 tirades amb dos daus de 6 cares, ens hem trobat amb que un 48% de les sèries conté almenys un doble sis, valor que també s'apropa als resultats teòrics.

	Resultat teòric	Resultat pràctic
4 tirades amb un dau	51,8%	56%
24 tirades amb dos daus	49,14%	48%

Aquests resultats pràctics podrien apropar-se molt més als teòrics si féssim més sèries a la simulació. Però ja hem pogut comprovar que és favorable apostar a treure almenys un sis en quatre tirades amb un dau a l'opció de treure almenys un doble sis en 24 tirades amb dos daus.

Problema dels punts

Juntament amb el problema del Cavaller de Méré, el problema dels punts és un dels altres problemes que Gombauld va proposar a Fermat i que tractarem.

Situació: Dos jugadors A i B juguen a un joc, en què, per cada partida guanyada s'obté 1 punt. El primer que arriba a 6 punts s'emporta el premi, que són 24 ducats. De sobte, el joc s'interromp per causes desconegudes en el moment en que el jugador A té 5 punts i el jugador B, en té 3. Davant la impossibilitat de continuar i acabar la partida, quina seria la manera més justa de repartir el premi?

Plantejament i solució

Dins d'aquest problema, hi ha 3 plantejaments i solucions diferents: una solució va ser proposada per Luca Pacioli, una altra per Niccolo Tartaglia i la tercera i més acceptada, per Pascal i Fermat.

Solució proposada per Luca Pacioli

Luca Pacioli va considerar un problema semblant a aquest en el seu llibre "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità"* . El seu mètode consistia a dividir l'aposta en proporció al número de partides guanyades de cada jugador. Pacioli va tenir un error, i és que no va tenir en compte el número de rondes necessàries per guanyar.

Seguint el mètode de Pacioli, trobem aquest procés:

- El jugador A ha guanyat 5 partides i el jugador B n'ha guanyat 3, per tant, el número total de partides guanyades és: $5+3=8$ partides guanyades. Com que el premi total són 24 ducats, llavors, les 8 partides totals guanyades equivalen a 24 ducats. Però un jugador n'ha guanyat 5 i l'altre 3, o sigui que, al jugador A li pertoquen $\frac{5}{8} del\ premi$ i al jugador B $\frac{3}{8} del\ premi$. És a dir, que cada jugador s'emportarà:

$$Jugador\ A: \frac{5}{8} de\ 24, per\ tant\ guanyarà\ 15\ ducats.$$

$$Jugador\ B: \frac{3}{8} de\ 24, per\ tant\ guanyarà\ 9\ ducats.$$

Solució proposada per Niccolo Tartaglia

Més tard Tartaglia va proposar un altre mètode seguint la resolució basada per Pacioli a la seva obra "Trattato generale di numeri et misure". Proposa repartir el premi de manera proporcional als punts que ha guanyat cada jugador.

Seguint el mètode de Tartaglia, trobem aquests resultats:

-Primer calcula la diferència de punts que hi ha entre els dos jugadors: $5-3=2$ punts de diferència. Seguidament, divideix aquesta diferència entre els punts que fan falta per guanyar la partida, és a dir: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Aquest resultat el multiplica per la part de l'aposta que ha proporcionat cada jugador, que aquesta part és 12 ducats --> $\frac{12}{3}=4 ducats.$ Per tant, el jugador A rebrà la seva aposta més 1/3 dels 12 ducats corresponents al seu avantatge i el jugador B a l'inrevés. És a dir, que cada jugador s'emportarà:

$$Jugador\ A: 12+4=16\ ducats$$

$$Jugador\ B: 12-4=8\ ducats$$

L'argument de Tartaglia guanya força enfront al de Pacioli pel que fa al repartiment de guanys, però altre cop només es té en compte l'avantatge d'un bàndol respecte a l'altre en el moment de l'aturada del joc.

Solució proposada per Blaise Pascal i Pierre de Fermat

Aquests dos pensadors, van proposar repartir el premi 7 a 1. Vegem l'argumentació:

Pascal: Com que el joc es pot allargar com a màxim tres partides més, el jugador A s'emportaria el premi si guanyés la partida següent (1/2 de possibilitats de que ocorri), o si perdés la següent i guanyés l'altra (1/4 de possibilitats de que ocorri) o si perdés les dues següents i guanyés la tercera (1/8 de possibilitats de que ocorri). Per tant, la probabilitat de que A guanyi és: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ i la probabilitat de que guanyi B és de: $1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$.

Fermat: Com que el joc es pot allargar com a màxim tres partides més es consideren tots el resultats de jugar les tres partides i es compten els casos favorables a cada jugador.El jugador A tan sols necessita guanyar una partida per guanyar el joc. En la taula es representa els possibles esdeveniments que poden ocórrer:

$$\begin{matrix} A & B & A & A & A & B & B & B \\ A & A & B & A & B & A & B & B \\ A & A & A & B & B & B & A & B \end{matrix}$$

D'acord amb la taula, el jugador A compta amb 7 de les 8 possibilitats mentre que B, 1 de les 8. Per tant la distribució justa dels ducats, ja que aquesta solució és considerada la correcta, seria la següent:

$$Jugador\ A: \frac{7}{8} de\ 24, per\ tant\ guanyarà\ 21\ ducats.$$

$$Jugador\ B: \frac{1}{8} de\ 24, per\ tant\ guanyarà\ 3\ ducats.$$

Problema dels aniversaris

L'objectiu del problema o paradoxa dels aniversaris és determinar la probabilitat que hi ha en un grup de *n* persones de que almenys dues coincideixin en la data de naixement.

Per exemple, el problema ens diu que si hi ha 23 persones reunides, hi ha una probabilitat del 50,7% de que almenys dos d'aquestes persones facin anys el mateix dia. Per a 57 persones o més la probabilitat es major del 99%.

En un sentit estricte això no és una paradoxa, ja que no és una contradicció lògica; és una paradoxa en el sentit de que és una veritat matemàtica que contradiu la intuïció. Seguint la intuïció pensem que la probabilitat és molt més baixa i que fan falta moltes més persones per a arribar a la probabilitat del 50%. Si a una habitació tinguéssim 367 persones, lògicament hi hauria almenys dues persones que farien anys el mateix dia, tenint en compte que un any té 365 dies o 366 si és any de traspàs.

Com arribem a aquestes probabilitats?

Calculant les probabilitats és on comença el problema dels aniversaris. La teoria va ser descrita l'any 1938, en la teoria de l'Estimació del total de la població de peixos a un llac, de Zoe Emily Schnabel.

Hem d'entendre que si una persona entrés dins una habitació amb 22 persones, la probabilitat de que qualsevol faci anys el mateix dia que la persona que entra, no seria del 50%, sinó molt més baixa. El problema real d'aquesta paradoxa consisteix a preguntar-nos si l'aniversari de qualsevol de les 23 persones coincideix amb l'aniversari d'alguna de les altres.

Calculem la probabilitat de que, en una habitació amb *n* persones, almenys dues facin anys el mateix dia, excloent anys de traspàs i persones bessones, i tenint en compte que existeixen 365 aniversaris que tenen la mateixa probabilitat. Hem de calcular primer la probabilitat de que *n* aniversaris siguin diferents. La probabilitat de que cap persona faci anys el mateix dia ve donada per:

$$p = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - n + 1}{365}$$

Ja que la segona persona no pot tenir el mateix aniversari que el primer (364/365), la tercera no pot tenir el mateix aniversari que el segon (363/365), etc. Si utilitzem notació factorial, podem escriure-la com:

$$p = \begin{cases} \dfrac{365!}{365^n (365 - n)!}, & 1 \leq n \leq 365 \\ 0, & 365 < n \end{cases}$$

Ara, $1 - p$ és la probabilitat de que almenys dues persones facin anys el mateix dia.

$$1 - p = \begin{cases} 1 - \dfrac{365!}{365^n (365-n)!}, & 1 \leq n \leq 365 \\ 1, & 365 < n \end{cases}$$

Si fem els càlculs amb n=23, que és l'exemple que hem seguit abans, en surt que:

$$1 - \frac{365!}{365^{23}(365-23)!} \approx 0{,}507$$

És a dir, un 50,7% tal i com havíem dit al principi.

Com puc calcular la probabilitat de que algú faci anys el mateix dia que jo?

La probabilitat de que qualsevol en una habitació de n persones (excloent a vostè mateix) facin anys el mateix dia que vostè ve donada per:

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

On es necessitaria almenys una n de 253 per trobar un valor superior a 0'5, és a dir, del 50%.

Si provem de fer el problema amb n=23, com anteriorment hem fet, ens surt:

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{23} \approx 0{,}061$$

Es a dir, un 6,1% de probabilitats de que algú faci anys el mateix dia que vostè en una habitació on hi ha 23 persones a dins.

Conclusió

Un cop acabat el treball, cal tornar als objectius que vaig proposar-me quan vaig iniciar aquest treball.

En primer lloc he de dir que realitzar aquest treball de recerca ha sigut una gran experiència, em refereixo a tot el volum d'informació que he hagut de cercar, el temps que li he dedicat, els dubtes que m'anaven sortint i que he intentat solucionar, etc. Però amb la paraula "gran" em refereixo sobretot a totes les coses noves que m'ha aportat aquest treball.

Ara sí podem parlar dels objectius que vaig proposar-me abans de realitzar tot aquest treball.
El primer objectiu era entendre millor la història de la probabilitat i la seva evolució. L'he pogut assolir fàcilment cercant informació i realitzant el primer bloc del treball, "probabilitat al llarg de la història". He entès d'on surt la paraula *atzar*, com van sorgir els primers problemes, com s'ha anat entenent cada vegada més aquesta branca de les matemàtiques, etc. Una cosa molt important que he aprés estudiant la història de la probabilitat és, saber qui són tots aquells pensadors que he escoltat dir alguna vegada al meu professor de matemàtiques o els he vist citats a llibres, com per exemple Bayes, Laplace, Fermat...

L'objectiu del segon bloc "la probabilitat i els seus conceptes", era entendre conceptes probabilístics i saber-los aplicar, doncs bé, aquest és l'objectiu que m'ha costat més d'assolir, ja que m'he trobat amb molts dubtes i coses noves, però finalment ho he acabat entenent tot. La part que m'ha costat més dels conceptes és, la probabilitat condicionada i el teorema de Bayes, ja que, són conceptes que havia escoltat parlar d'ells però mai m'havia "enfrontat".

Amb el tercer bloc "problemes famosos de probabilitat", he pogut veure millor com ha evolucionat la probabilitat i he pogut aplicar els conceptes que he aprés. Si ens endinsem a cada problema, cal dir que:

-Al problema del cavaller de Méré no m'esperava pas aquests resultats, ja que van en contra de l'aritmètica; jo creia que la probabilitat seria la mateixa i era el mateix apostar cap a un bàndol o cap a l'altre, però ara ja sé resoldre el problema, trobar la solució i entendre els resultats de Pascal i Fermat. A la simulació que he fet d'aquest problema, els meus resultats no s'allunyen massa dels percentatges proposats per els dos pensadors que van resoldre el problema, no esperava que hem donessin aquests resultats sincerament.

-Al problema dels punts, personalment jo l'hagués resolt com Luca Pacioli. Quan vaig mirar el problema per primera vegada, no entenia massa el perquè la solució de Pacioli no era correcta, però, seguidament vaig mirar millor el plantejament proposat per Fermat i el proposat per Pascal i, va quedar-me clar. Ara, si se'm presentés un problema com aquest, sé que l'haig de resoldre com ho van fer Pascal i Fermat, no com jo creia que s'havia de resoldre, ja que és erroni.

-El tercer problema, el dels aniversaris, m'ha impressionat molt. El problema ens diu que amb 23 persones ja sobrepassem el 50% de que almenys dues coincideixin en el seu aniversari. Jo, com moltes altres persones m'hagués guiat per la intuïció i diria que amb 23 persones el percentatge ha de ser molt més baix, que aquest resultat és impossible. Sincerament, quan vaig començar a mirar aquest problema, no em creia aquests resultats, no sabia per on "agafar" el problema. Però amb paciència i mirant-lo bé, he aconseguit entendre el perquè de la fórmula per resoldre'l i el perquè del resultat.

Finalment, gràcies a aquests petits objectius de cada bloc, he pogut arribar a l'objectiu de tot el treball de recerca: entendre i saber d'on ha sortit la branca de les matemàtiques anomenada, probabilitat.

Bibliografia

Llibres

Morris Kline. “La aritmética y el àlgebra en los siglos XVI y XVII. Punt 6, El teorema binomial y cuestiones afines”. A: *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, I.* Madrid: Alianza, 1992, p.364-367.

Jordi Deulofeu. “Azar y juego”. A: *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes.* Barcelona:RBA, 2011, p.65-90.

Fernando Corbalán i Gerardo Sanz. “La historia de la probabilidad” i “probabilidad y azar”. A: *La conquista del azar*. Barcelona: RBA, 2011, p.35-74.

“Probabilitat”. A: *Matemàtiques aplicades a les ciències socials 1Batxillerat”.*Barcelona: Santillana, 2008, p.286-310.

Articles de revista

Pere Grima Cintas. “Cálculo de probabilidades”. *Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, SUMA$^+$”,* 74 (2013), p.32-33.

Dossiers

Frederic Utzet. “El model probabilístic”. A: *Probabilitat i modelització estocàstica.* Universitat Autònoma de Barcelona, 2012, p.7-14.

Web grafia

http://es.wikipedia.org/

http://centrodeartigos.com/articulos-noticias-consejos/article_125354.html

http://es.scribd.com/doc/21996695/Tema-3-Elementos-de-Probabilidad

http://www.mat.ub.edu/futurs_ub/activitats/pdfs/problemes_famosos_probabilitat.pdf

http://www.estadisticaparatodos.es/historia/histo_proba.html

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB_cat/probabilidad/impresos/quincena12.pdf