

**NEWTON EN
COLORS:
REPRESENTACIÓ
DE FRACTALS.**

Índex:

Introducció, estructura i metodologia.....	4-7
1. Nombres complexos.....	7-13
1.1 El conjunt dels complexos.....	7
1.1.1 Pla complex.....	8
1.1.2 Forma binòmica i forma polar. Operacions.....	9-10
1.1.3 Arrel n-èsima d'un nombre complex.....	12-13
1.1.4 Representació de les arrels d'un nombre complex.....	13-14
2. Fractals.....	14-51
2.1 Geometria euclidiana i geometria fractal.....	14-16
2.2 Definició de fractal.....	16
2.3 Característiques d'un fractal.....	16-21
2.3.1 Autosimilitud.....	16-17
2.3.2 Definició per algoritmes recursius.....	17-18
2.3.3 Dimensió fractal.....	18-21
2.4 Fractals geomètrics.....	21-29
2.4.1 Corba de Koch.....	21-22
2.4.2 Floc de neu.....	23
2.4.3 Triangle de Sierpinski.....	24-27
2.4.4 Catifa de Sierpinski.....	26-28
2.4.5 Conjunt de Cantor.....	28-29
2.5 Fractals al pla complex.....	29-37
2.5.1 Conjunt de Julia.....	29-32
2.5.2 Conjunt de Mandelbrot.....	32-37
2.6 Representació de fractals al pla complex.....	37-46
2.6.1 Nocions bàsiques de sistemes dinàmics.....	37-38
2.6.2 La família quadràtica.....	38-39
2.6.3 Conjunt de Julia, punts fixos i punts periòdics.....	39-44
2.6.4 Conjunt de Julia en el conjunt de Mandelbrot.....	45-47

2.6.5	Algoritme de color per generar imatges fractals.....	47-51
	Algoritme de temps d'escapament.....	48-49
	Algoritme d'escapament conjunt de Julia.....	49-50
	Algoritme d'escapament conjunt de Mandelbrot.....	50-51
3.	Càlcul aproximat de les arrels d'una equació.....	52-68
3.1	Anàlisi numèric.....	52-54
3.2	Mètode de Newton.....	54-60
3.2.1	Historia.....	54
3.2.2	Descripció del mètode i exemples.....	54-58
3.2.3	Teorema de Bolzano.....	59
3.2.4	Convergència del Mètode de Newton.....	59-60
3.3	Mètode de Newton per arrels complexes.....	61-68
3.3.1	Conques d'atracció.....	61-65
3.3.2	Fractals de tipus Newton.....	65-68
4.	Fractals a la vida.....	69-76
4.1	Fractals en la natura.....	70-74
4.2	Fractals en la música.....	74-75
4.3	Fractals en l'arquitectura.....	75-76
5.	Construcció de fractals amb Fractint.....	77-92
5.1	Programa Fractint.....	77-80
5.2	Construcció de fractals.....	81-92
	Conclusions	93-94
	Agraïments.....	94
	Bibliografia.....	95-97

Introducció, estructura i metodologia

Tot plegat comença ara fa gairebé un any, quan havia de triar el tema del treball de recerca. Jo tenia clar que aquest treball havia d'estar relacionat amb el món de les matemàtiques, ja que des de sempre m'han agradat i he tingut un especial interès en elles.

A l'hora d'elegir el tema van aparèixer diverses opcions, però la que més em va sorprendre i agradar va ser la del món dels fractals. Jo no havia sentit mai aquest terme, ni el que significa, encara que segurament ja n'havia vist algun anteriorment, tot i que no me n'adonés. Va ser llavors quan vaig veure la imatge d'un fractal, i em va sorprendre per la seva bellesa. Aquest va ser el punt d'inici de la meva elecció.

La motivació inicial ràpidament va anar acompanyada d'un repte , esbrinar el fons matemàtiques que tenen aquestes figures. Així doncs, el tema i l'objectiu estava decidit.

Quan vaig començar la meva recerca aviat vaig percebre que el món dels fractals, a part de ser una branca molt recent de les matemàtiques , és molt extens. Aquest va ser un dels primers problemes amb que em vaig trobar però no va ser l'únic. Per un altre banda havia de destinar grans esforços en la interpretació de la informació que obtenia sobre els fractals, degut a que era un tema totalment desconegut per a mi amb un alt contingut matemàtic. Tot això juntament amb el fet que els fractals han sigut un tema bastant explotat en treballs de recerca, va fer necessari donar un enfocament diferent al treball.

Estava clar que havia de familiaritzar-me amb tots els conceptes relacionats amb la teoria fractal, però vaig decidir donar-li un vessant diferent, focalitzant els meus esforços en la interpretació del mètode de Newton per a trobar arrels complexes d'una equació i

com aquest procés genera un tipus de fractals anomenats fractals de tipus Newton. Per tant, tot i que el primer objectiu no havia quedat modificat si que n'havia aparegut un de nou, estudiar el mètode de Newton en el pla complex i les seves aplicacions en la construcció i representació de fractals mitjançant algorismes de color. D'aquí el nom del treball.

En el procés de recerca em vaig adonar, que només amb una mica més d'esforç podia estudiar altres fractals, molt coneguts al pla complex, així com la seva representació com imatges fractals.

El treball està organitzat en cinc grans blocs i dins de cada bloc hi ha apartats específics.

El primer bloc és el dels nombres complexos. En ell s'explica què és aquest conjunt, com es representen, les diferents formes que poden adoptar i les operacions bàsiques per cada forma. Aquest primer apartat és bàsic perquè els fractals són al pla complex i primer s'ha de tenir una idea general dels nombres complexos.

El segon gran bloc correspon als fractals. En la primera part es realitza un desenvolupament de la teoria fractal així com de les seves característiques bàsiques. Després es presenten els dos grans tipus de fractals: els geomètrics i fractals al pla complex. Finalment s'explica com es representen aquest últims aprofundint en els sistemes dinàmics i algoritme de color.

El tercer bloc correspon al mètode de Newton. En aquest bloc primer es defineix el terme anàlisi numèric, ja que el mètode de Newton en forma part. Però l'objectiu principal és la seva descripció mitjançant exemples, l'estudi de les seves particularitats en la convergència i finalment la seva aplicació en la construcció de fractals.

El quart i cinquè bloc intenten mostrar les aplicacions de tot l'estudi matemàtic fet fins al moment.

Per una banda el quart bloc pretén fer una detecció dels fractals en la vida real, amb l'objectiu de mostra que no només són un objecte matemàtic curiós sinó que existeixen, amb les seves limitacions.

Amb el cinquè bloc intentaré aprofundir en el món de la imatge fractal, creant els meus propis fractals amb el programa Fractint.

Un nombre complex és una expressió de la forma $a + bi$, on a i b són nombres reals i "i" és el resultat de l'arrel quadrada de -1. D'aquesta expressió, **a** és la part real i **bi** la part imaginària.

Un nombre complex sense **a**, es a dir sense part real, és un imaginari pur $z = bi$

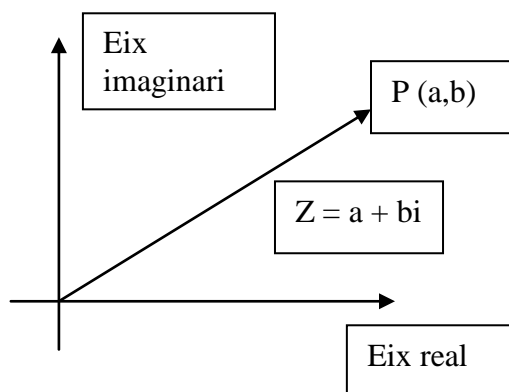
Un complex sense part imaginaria **bi**, és un nombre real. És per això que els nombres complexos engloben tots els nombres.

Els nombres complexos s'utilitzen sobretot en mecànica i en física.

1.1.1. Pla complex

Els nombres reals es poden representar sobre una recta, però els complexos com estan formats per dos parts, la real i la imaginaria es representen al pla.

Tot número complex té associat un punt del pla complex, on l'eix de les X representa la part real del nombre complex (a) i en l'eix de les Y es representa la part imaginària (b).



1.1.2 Forma binòmica i forma polar. Operacions

Hi ha dues formes de representar els nombres complexos,:

- en forma binòmica $z = a + bi$, on $\text{Re}z=a$ i $\text{Im}z=b$
- en forma polar: $z = r\alpha$ on $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i $\text{tag } \alpha = \frac{b}{a}$.

L'expressió anterior és el pas de forma binòmica a polar, però també es pot passar de forma polar a binòmica. Donat un nombre complex $z = r\alpha$ la seva expressió en forma polar és $z = a + bi$, on $a = r \cdot \cos \alpha$
 $b = r \cdot \sin \alpha$

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS AMB FORMA BINÒMICA

Potències de $i \rightarrow i^2, i^{10}, i^{17} \dots$

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

Les potències de i són cícliques:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

Suma $\rightarrow (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$$\text{Exemple: } (5 + 8i) + (3 + 2i) = (5 + 3) + (8 + 2)i = 8 + 10i$$

Resta $\rightarrow (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

$$\text{Exemple: } (6 + 3i) - (8 + 5i) = (6 - 8) + (3 - 5)i = -2 - 2i$$

Multiplicació $\rightarrow (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Exemple: $(2 + 4i)(5 + 7i) = (2 \cdot 5 - 4 \cdot 7) + (2 \cdot 7 + 4 \cdot 5)i = -18 + 34i$

Divisió $\rightarrow \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

Exemple: $\frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{(2 + 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{8 + 15}{16 + 25} + \frac{12 - 10}{16 + 25}i = \frac{23}{41} + \frac{-2}{41}i$

OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS AMB FORMA POLAR

Multiplicació

$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha + \beta}$ Exemple: $2_{60} \cdot 5_{180} = 10_{240}$

Divisió

$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha - \beta}$ Exemple: $\frac{3_{60}}{4_{45}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{15}$

Potència

$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$ Exemple: $(3_{60})^3 = (3^3)_{180} = 27_{180}$

També es pot escriure la potència d'un nombre complex en forma trigonomètrica, amb la fórmula de Moivre

$z^n = (r_\alpha)^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$

1.1.3 Arrel n-èsima d'un nombre complex

Donat un nombre complex en forma polar r_α la fórmula per trobar-ne les seves arrels n-èsimes és:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(\sqrt[n]{r}\right) \frac{\alpha+k*360}{n} \quad k = 0,1,2\dots n-1$$

A continuació explicaré com, analíticament i utilitzant la fórmula anterior es troben les solucions complexes d'una equació de qualsevol grau.

EXEMPLE:

Si intentem resoldre aquesta equació en el camp real no tindria solució, però si la resollem en el camp complex, el problema es redueix a calcular les arrels quartes de -1, que es un nombre complex.

$$x^4 + 1 = 0$$

$$x^4 = -1$$

$$x = \sqrt[4]{-1}$$

Es passa de forma binòmica a polar: $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_\pi}$ ja que $r = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

i $\tan\alpha = \frac{0}{-1} = 0^\circ$, es a dir $\alpha = \pi$.

Tot seguit s'aplica la fórmula de les arrels:

$$\sqrt[4]{1_\pi} = \sqrt[4]{1} \frac{\pi+k\cdot 360}{4}$$

Es substitueix k a la fórmula per trobar les solucions, on $k = 0,1,2,\dots,n-1$

$$k=0$$

$1_{\frac{180}{4}} = 1_{45^\circ} = z = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ Al ser 45° un angle del primer quadrant, tant el sinus com el cosinus són positius.

$$k=1$$

$1_{\frac{540}{4}} = 1_{135^\circ} = z = \cos 135^\circ + i \sin 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ En aquest cas, el cos de 135° es negatiu perquè és un angle del segon quadrant.

$$k=2$$

$1_{\frac{900}{4}} = 1_{225^\circ} = z = \cos 225^\circ + i \sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ 225° és un angle del tercers quadrant, que tenen cosinus i sinus negatiu.

$$k=3$$

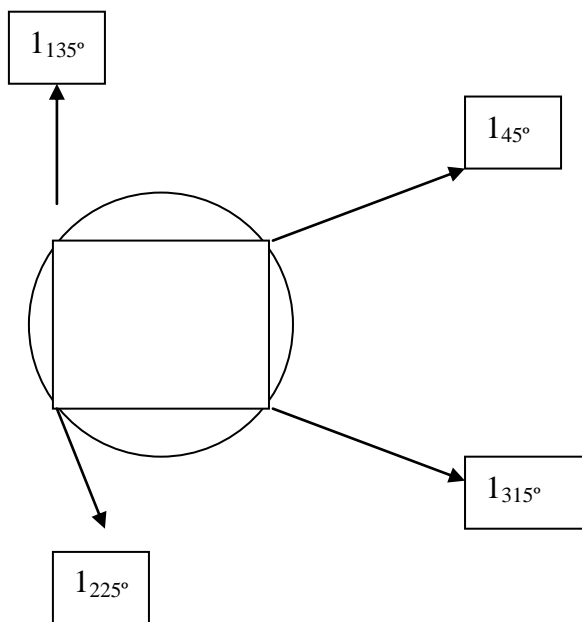
$1_{\frac{1260}{4}} = 1_{315^\circ} = z = \cos 315^\circ + i \sin 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ Quart quadrant, sinus negatiu i cosinus positiu

1.1.4 Representació de les arrels d'un nombre complex.

Es compleix sempre que les arrels n -èsimes d'un nombre complex es representen en una circumferència de radi $\sqrt[n]{r}$. Els afixos són els vèrtexs d'un polígon regular de n costats.

Exemple:

Les arrels quartes de -1 calculades anteriorment seran els vèrtexs d'un quadrat inscrit en una circumferència de radi $\sqrt[4]{1}$.

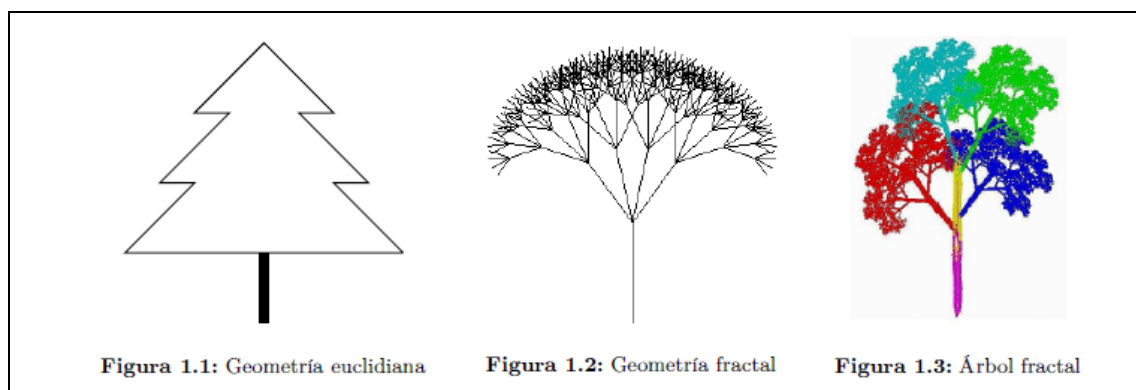


2.- Fractals

2.1 Geometria euclidiana i fractal.

La geometria tradicional, l'euclidiana, es la rama de les matemàtiques que s'encarrega de mesurar i estudiar les propietats d'elements com punts, rectes, àrees o volums.

Aquests càlculs no són adequats per formes de la natura com ara muntanyes, núvols o fulles, ja que presenten irregularitats que amb les fórmules tradicionals són difícils de mesurar. És per això que la geometria fractal és molt útil en formes de la natura.



La figura 1 és la representació d'una forma de la natura, en concret un arbre, en geometria euclidiana. En aquest dibuix només s'utilitzen triangles i el càlcul de l'àrea és fàcil. Les figures 2 i 3 són representacions d'un arbre utilitzant geometria fractal. El arbre té més detalls i es poden apreciar característiques dels fractals, com ara l'autosimilitud.

La limitació de la geometria euclidiana es deu a que les seves figures geomètriques tendeixen a perdre la seva estructura quan són ampliadetes: un arc de circumferència es transforma poc a poc en una recta, la superfície d'una esfera es fa cada vegada més plana, cosa que no passa amb les formes naturals.

Per exemple la superfície rugosa d'una roca conserva pràcticament la seva complexitat a diversos nivells de ampliació de microscopi. De la mateixa manera podríem fixar l'atenció en el fullatge d'un arbust, d'una branca surten moltes branques i cadascuna d'elles es repeteixen amb el mateix esquema.

Les Principals diferències entre geometria euclidiana i fractal:

Euclidiana	Fractal
Tradicional (més de 2000 anys)	Moderna (aprox. 10 anys)
Dimensió entera	Dimensió fractal
Representa objectes fets per l'home	Apropiada per formes naturals
Definida per fórmules	Algoritme recursiu (iteració)

Les eines de la geometria fractal són, avui en dia, elements insubstituïbles en el treball de molts físics, químics, biòlegs, economistes.... Ja que han permès reformular vells problemes de forma nova i nous problemes de forma molt simplificada. Els fractals apareixen en llocs tant estranys com la distribució de les estrelles al Univers, la ramificació alveolar dels pulmons, les fluctuacions dels preus del mercat o la dinàmica de creixement poblacional de colònies de bacteries.

Fractals en tots els llocs, fractals en una llista interminable d'objectes reals.

La geometria fractal és una branca de les matemàtiques i de la geometria molt jove, on encara hi ha moltes coses per descobrir rebutjant la idea de que en les matemàtiques tot ha sigut demostrat des de fa molt temps.

La geometria fractal busca i estudia els aspectes geomètrics que són invariants a un canvi d'escala. Aquesta geometria a més de no perdre la perspectiva del objecte en cada escala d'observació, realitza un anàlisis local del objecte sense la necessitat de suavitat (derivabilitat) que exigeixen altres geometries.

2.2 Definició de fractal

Actualment no hi ha una definició establerta de fractal, ja que és un terme relativament modern, encara que està universalment acceptat quines són les propietats d'un fractal.

- És massa irregular per ser descrit en termes geomètrics tradicionals, com ara la geometria euclidiana.
- Els detalls del fractal es poden observar a qualsevol escala o zoom, per tant característiques que es poden observar a nivell global també s'observen en parts més petites del fractal. Aquesta propietat s'anomena autosimilitud.
- Els fractals no tenen dimensió entera, tenen dimensió fractal o fraccionaria(1.5, 2.34 etc.)
- Els fractals es defineixen mitjançant un simple algoritme recursiu.

2.3 Característiques d'un fractal

2.3.1. Autosimilitud

Les figures es repeteixen infinites vegades a diferents escales.

Hi ha dos tipus d'autosimilitud:

AUTOSIMILITUD EXACTA- És la més restrictiva, exigeix que el fractal sigui idèntic a qualsevol escala. Aquesta propietat es troba

en fractals que es generen utilitzant l'algoritme recursiu de sistemes de funcions iterades (IFS). Amb aquest sistema de funcions iterades es troben els fractals geomètrics(fractals al pla real)

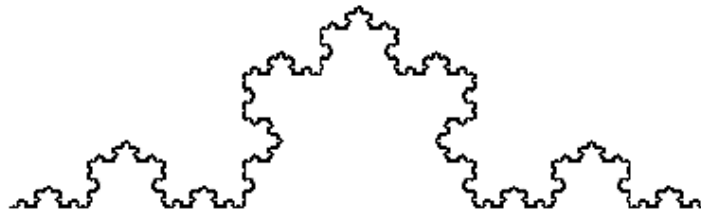
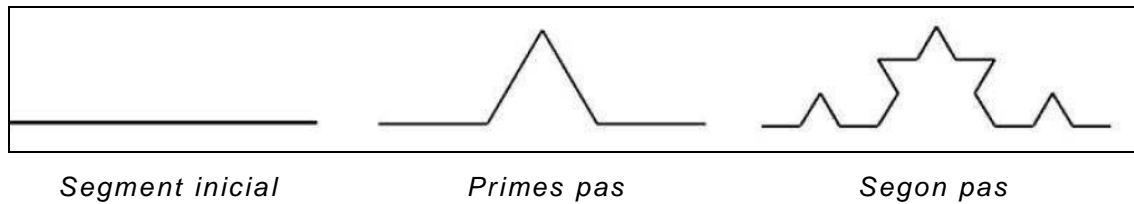
QUASIAUTOSIMILITUD- El fractal és aproximadament idèntic, presenta algunes distorsions depenent de l'escala on es miri. Aquesta propietat es troba en fractals definits per relacions de recurrència o algorismes d'escapament, com per exemple els fractals al pla complex.

2.3.2. Definició per algorismes recursius

Un algoritme recursiu és aquell implementat en una funció que es crida a si mateixa. A aquest algoritme li cal una condició de parada, un valor en què es pari l'algoritme perquè sinó entraria en un bucle infinit. Per exemple en el mètode de Newton (algoritme recursiu que explicarà posteriorment) aquest valor, podria ser un nombre concret d'iteracions, un nombre finit de xifres decimals correctes de l'arrel buscada o un error inferior a 0.001.

En aquest treball utilitzaré dos tipus d'algorismes recursius per crear fractals:

SISTEMA DE FUNCIONS ITERADES- Uns conjunts es reemplacen successivament per la imatge de una figura inicial. Per exemple en la corba de Koch la figura inicial o llavor és un segment de longitud 1. En el primer pas el dividim en 3 segments de mateixa longitud on el segment del mig és substituït per un triangle equilàter de costat $1/3$ de la longitud del segment total. En el segon pas, aquest procés es repeteix en cadascun dels quatre segments resultants. Si repetim aquesta construcció infinites vegades obtenim el fractal de la corba de Koch.



CORBA DE KOCH

A part d'aquest, hi ha altres fractals que es troben seguint aquest mètode com ara el triangle de Sierpinski, en conjunt de Cantor o la catifa de Sierpinski.

FRACTALS D'ALGORITMES D'ESCAPAMENT.- Sobre cada punt del pla complex es defineix una relació de recurrència utilitzant una funció holomorfa. El conjunt de Mandelbrot i el conjunt de Julia són exemples de fractals seguint aquest procediment.

2.3.3 Dimensió fractal

La dimensió fractal és una manera de mesura la rugositat en una corba. La geometria tradicional distingeix les següents dimensions: -1, 0, 1, 2 i 3:

- La dimensió -1 correspon al buit.
- La dimensió 0 és la que tenen els punts, ja que no tenen ni longitud, ni amplada ni profunditat.
- La dimensió 1 correspon a les rectes, ja que són un nombre infinit de punts que només tenen longitud.
- La dimensió 2 és la del plànel perquè té alçada i amplada.

- La dimensió 3 és la que correspon a les figures en tres dimensions, com ara els cubs o els prismes. Aquestes figures tenen profunditat, amplada i alçada.

Però una corba rugosa que recorre una superfície pot ser tant rugosa que casi plena la superfície on es troba. Així doncs una corba rugosa té una dimensió entre 1 i 2, o una superfície rugosa té una dimensió entre 2 i 3.

Hi ha una forma de saber la dimensió de les figures geomètriques, que és estudiar o contar les porcions de la figura que s'obtenen al dividir les dimensions en parts iguals.

Per trobar la dimensió s'utilitza la fórmula següent:

$$P = n^D \quad D = \frac{\log P}{\log n}$$

P :és el nombre de parts iguals que s'obtenen al dividir la figura

n :són les parts iguals en que es divideixen totes les dimensions de la figura

D :és la dimensió desconeguda

Comprovem que aquesta fórmula funciona per calcular les dimensions d'una recta, un quadrat i un cub, que a priori ja són conegudes.

DIMENSIÓ 1

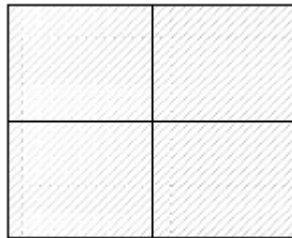
$n = 2$, ja que la l'amplada es divideix en 2

$P = 2$ perquè s'obtenen dos rectes iguals

Utilitzant la fórmula anterior trobem que:

$$2 = 2^D \rightarrow \log 2 = D \cdot \log 2 \rightarrow D = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$$

DIMENSIÓ 2



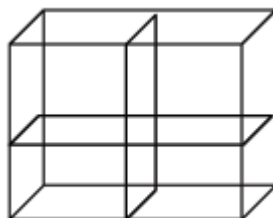
$n = 2$, ja que la longitud i l'amplada es divideixen en 2

$P = 4$ perquè s'obtenen quatre quadrats idèntics

Utilitzant la fórmula:

$$4 = 2^D \rightarrow \log 4 = D \cdot \log 2 \rightarrow D = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

DIMENSIÓ 3



$n = 2$, ja que la longitud, l'amplada i la profunditat es divideixen en 2

$P = 8$ perquè s'obtenen vuit cubs idèntics

Utilitzant la fórmula s'obté que:

$$8 = 2^D \rightarrow \log 8 = D \cdot \log 2 \rightarrow D = \frac{\log 8}{\log 2} = 3$$

Aquesta fórmula per trobar la dimensió d'una figura geomètrica també es pot utilitzar per calcular la dimensió dels fractals, com veurem més endavant.

2.4 Fractals geomètrics

En aquest apartat explicarem fractals construïts utilitzant sistemes de funcions iterades, que com s'ha explicat anteriorment consisteix en repetir una construcció geomètrica infinites vegades fins obtenir una imatge fractal. Aquests fractals, a diferència dels obtinguts a partir d'algoritmes de temps d'escapament, presenten autosimilitud total, que significa que a qualsevol zoom s'obté una imatge del fractal inicial.

2.4.1 La Corva de Koch

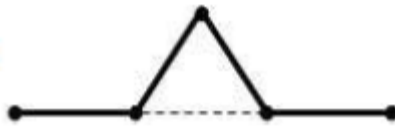
Es parteix d'un segment de longitud 1.



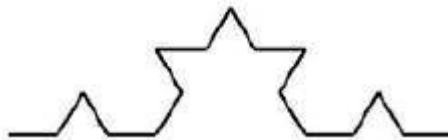
El primer pas consisteix en dividir aquest segment en tres parts iguals



A continuació es substitueix el segment central per un triangle equilàter amb un costat de longitud $1/3$.



El següent pas consisteix reiterar aquest procediment en els quatre segments de longitud $1/3$ que hi ha en la figura.

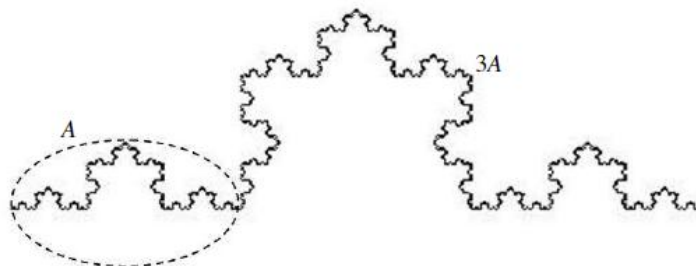


Com ha resultat obtenim 16 segments de longitud $1/9$. Si es repeteix aquest procés infinites vegades s'obté la corba de Koch.



Aquest fractal té longitud infinita i àrea zero. La dimensió d'aquest fractal és un nombre entre 1 i 2, ja que la dimensió 1 no és correcta perquè té longitud infinita i la dimensió 2 no és adequada perquè aquesta figura no delimita cap àrea.

Per calcular exactament la dimensió d'aquest fractal utilitzant la fórmula anteriorment exposada $D = \frac{\log P}{\log n}$, dividirem la figura per un terç, i obtenim 4 porcions iguals. Per tant, P és 4 i n és 3.



$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618$$

2.4.2 La corba “Floc de Neu”

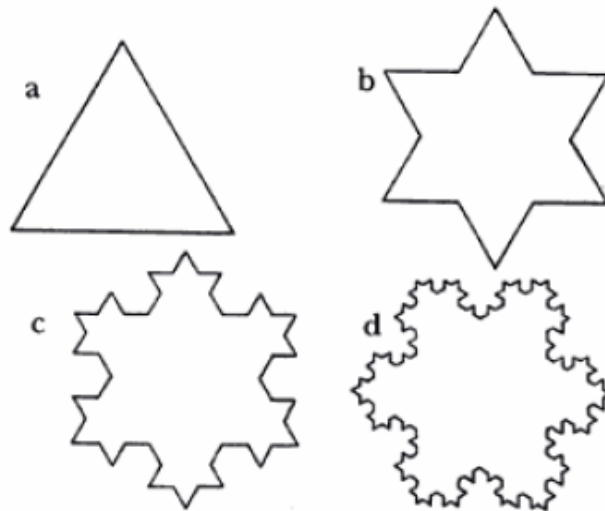
Es parteix d'un triangle equilàter de costat 1 i s'aplica el mateix procés que en la corba de Koch.

a= conjunt inicial (triangle equilàter de costat 1 format per 3 segments)

b= primera iteració(12 segments de longitud 1/3)

c= segona iteració(48 segments de longitud 1/9)

d=tercera iteració(192 segments de longitud 1/27)

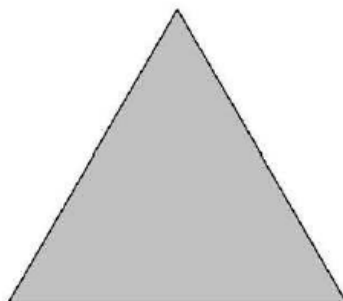


Aquest fractal té perímetre infinit però àrea finita i la seva dimensió també estarà compresa entre 1 i 2.

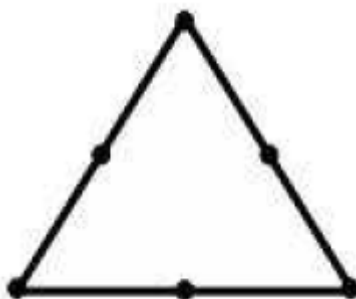
La dimensió d'aquest fractal és $D = \frac{\log P}{\log n} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261$

2.4.3 Triangle de Sierpinski

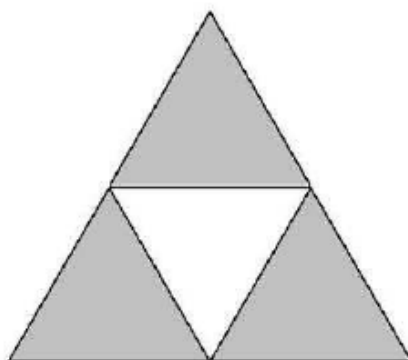
La llavor d'aquest fractal és un triangle equilàter de costat 1.



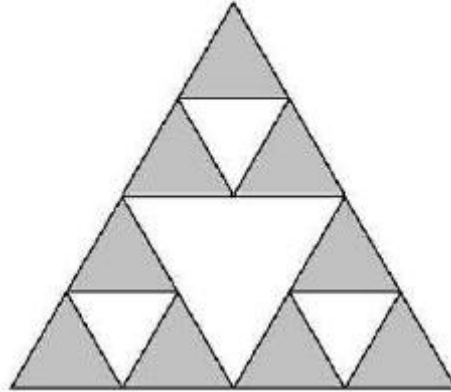
El primer pas per construir aquest fractal és trobar els punts mitjos dels costats.



Quan s'uneixen es divideix el triangle inicial en 4 triangles equilàters de costat $1/2$. Quan s'obtenen els quatre triangles s'elimina el central.



La següent iteració s'obté repetint el procediment anterior en cadascun dels tres triangles resultants de la primera i el resultat són nou triangles equilàters de costat 1/4

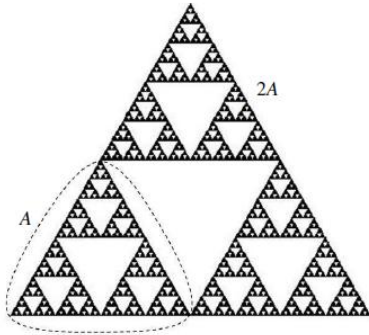


La generalització d'aquest procés es explica en la taula següent:

Pas	1	2	3	K	Triangle Sierpinski
Nombre de triangles	3	9	27	3^k	
Longitud del costat	1/2	1/4	1/8	$\frac{1}{2^k}$	
Perímetre total	9/2	27/4	81/8	$\frac{3^{k+1}}{2^k} = 3 \left(\frac{3}{2}\right)^k$	∞ El perímetre tendeix a infinit ja que la base es més gran que 1
Àrea total	$3 \frac{\sqrt{3}}{16}$	$9 \frac{\sqrt{3}}{64}$	$27 \frac{\sqrt{3}}{256}$	$3^k \frac{\sqrt{3}}{4^{k+1}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^k$	0 perquè la base és més petita que 1 i a infinites iteracions l'àrea es fa zero.

Per tant, la dimensió 1 no és correcta ja que tendeix a infinit i la dimensió 2 tampoc es pot utilitzar ja que tendeix a 0. És per aquest motiu que s'utilitza un nombre comprès entre 1 i 2.

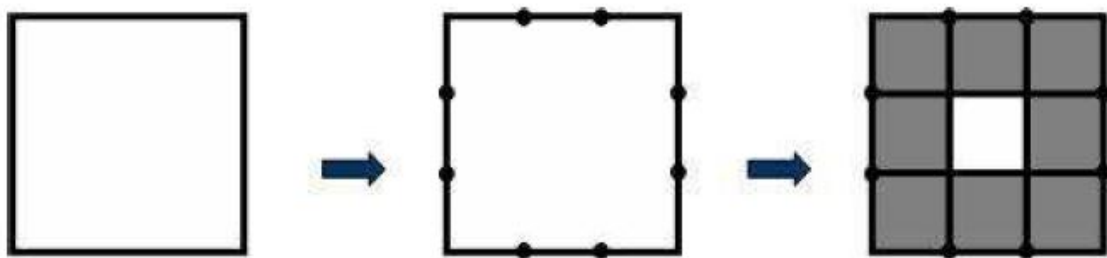
Per calcular exactament aquesta dimensió dividim per la meitat els costats i obtenim 3 porcions iguals ($n=2$ i $P=3$)



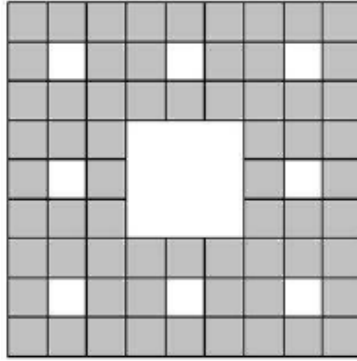
$$\text{Així doncs } D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.5849$$

2.4.4 La catifa de Sierpinski

En aquest fractal es comença amb un quadrat de costat 1. El primer pas consisteix en dividir els costats del quadrat en 3 parts iguals i unir els punts que estan a la mateixa altura formant 9 quadrats iguals de costat $1/3$. A continuació s'elimina el quadrat central.



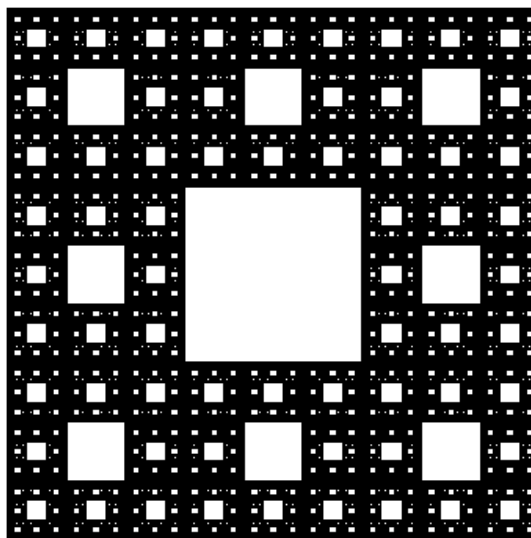
Aquest procediment es repeteix en cadascun dels 8 quadrats restants obtenint 64 quadrats de longitud $1/9$.



L'evolució de les iteracions s'indica en la taula següent:

Pas	1	2	3	K	Catifa de Sierpinski
Nombre de quadrats	8	64	512	8^k	
Longitud del costat	$1/3$	$1/9$	$1/27$	$\frac{1}{3^k}$	
Perímetre total	$16/3$	$80/9$	$496/27$	∞ El perímetre tendeix a infinit ja que la fracció tendeix a infinit.
Àrea total	$\frac{8}{3}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{512}{27}$	$\frac{8^k}{3^k} = \left(\frac{8}{3}\right)^k$	La base és més petita que 1 i per tant l'àrea tendeix a 0.

Si s'itera reiteradament aquest procediment el fractal final és:

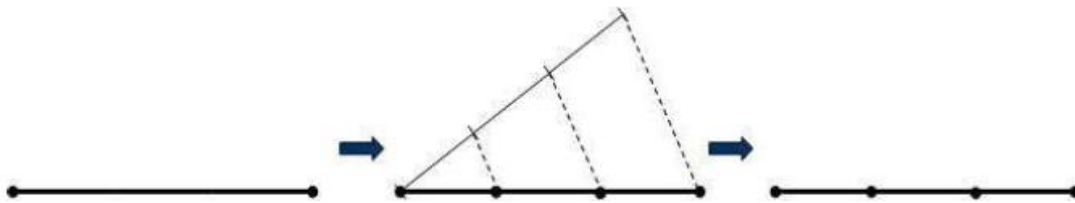


La dimensió serà un nombre entre 1 i 2, ja que com es pot deduir amb la taula anterior, l'àrea tendeix a 0 i el perímetre tendeix a ser infinit. Per calcular exactament la dimensió dividim la figura per un terç del costat i obtenim vuit porcions idèntiques ($n=3$ i $P=8$)

La dimensió és $D = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.8927$

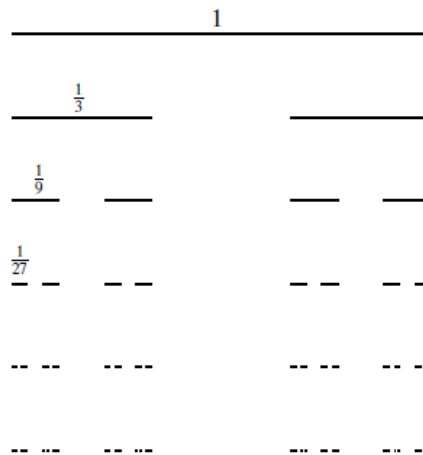
2.4.5 Conjunt de Cantor

Aquest conjunt és el primer que es va conèixer i és el més important. Es construeix a partir d'un segment de longitud 1, que es divideix en 3 parts iguals.



Seguidament s'elimina el segment central. En la següent iteració es tornen a dividir en 3 parts iguals els 2 segments de longitud $1/3$ per obtenir 4 segments de longitud $1/9$.

Si reiterem aquest procés s'obté el conjunt següent:



Pas	1	2	3	K	Conjunt de Cantor
Nombre d'interval·ls	2	4	8	2^k	
Longitud de cada interval·l	$1/3$	$1/9$	$1/27$	$\frac{1}{3^k}$	
Longitud total	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$	La base és més petita que 1 i per tant la longitud total tendeix a 0.

De la taula anterior es dedueix que la dimensió 0 no servirà per aquest fractal perquè té infinits punts i la dimensió 1 tampoc perquè la longitud tendeix a 0. La seva dimensió estarà compresa entre 0 i 1.

En aquest cas per calcular exactament aquesta dimensió, es divideix el conjunt en 3 parts iguals i s'obtenen 2 porcions (n=3 i P=2)



La dimensió d'aquest fractal és $D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309$

2.5. Fractals al pla complex

2.5.1. Conjunt de Julia

És un tipus de fractal que s'obté iterant nombres complexos amb una funció holomorfa. Una funció holomorfa és una funció injectiva, suprajectiva i continua. De totes les funcions holomorfes, la que

s'utilitza en el conjunt de Julia és la funció quadràtica $f_c(z) = z^2 + c$ on c és un nombre complex.

Una vegada fixat el valor de c , un algoritme per obtenir el conjunt de Julia J_c associat és:

Per a cada punt del pla complex ($z \in \mathbb{C}$) es crea la successió següent:

$$z_0 = z$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

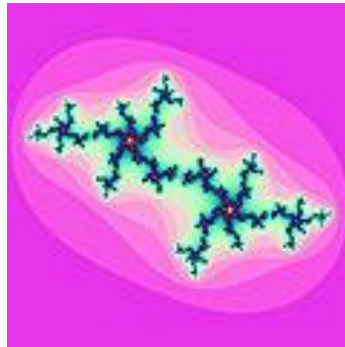
Si aquesta successió $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ queda acotada, es diu que z pertany al conjunt de Julia de paràmetre c . En cas contrari, aquella z queda exclosa del conjunt.

Realment, els valors que formen el conjunt de Julia són els que formen la frontera que separa els punts que pertanyen i els que no. Els que estan fora de la frontera no pertanyen al conjunt i els que estan per la part de dintre formen el cos del conjunt de Julia.

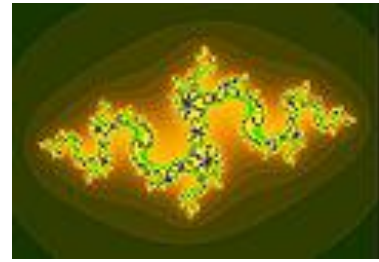
En la representació gràfica del conjunt, el color negre representa els valors de z que pertanyen al conjunt, i els de color queden fora. Els colors presenten intensitats diferents depenent de la velocitat en què la successió divergeix del conjunt. El color clar significa que la successió associada al punt z divergeix més lentament. Aquests punts clars estan a prop del conjunt, per tant com més lluny del conjunt, més ràpid es divergeix i per tant el color és més intens.



En negre, el conjunt de Julia associat a f_c , $c = \varphi - 2$, on φ és el nombre d'or



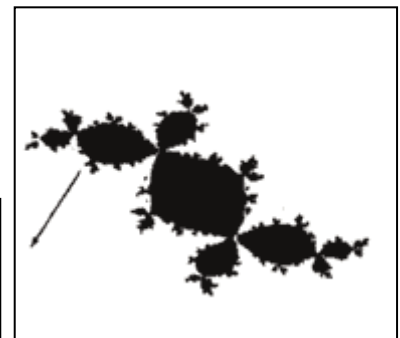
Conjunto de Julia associat a f_c , $c = (\varphi - 2) + (\varphi - 1)i = -0.4 + 0.6i$

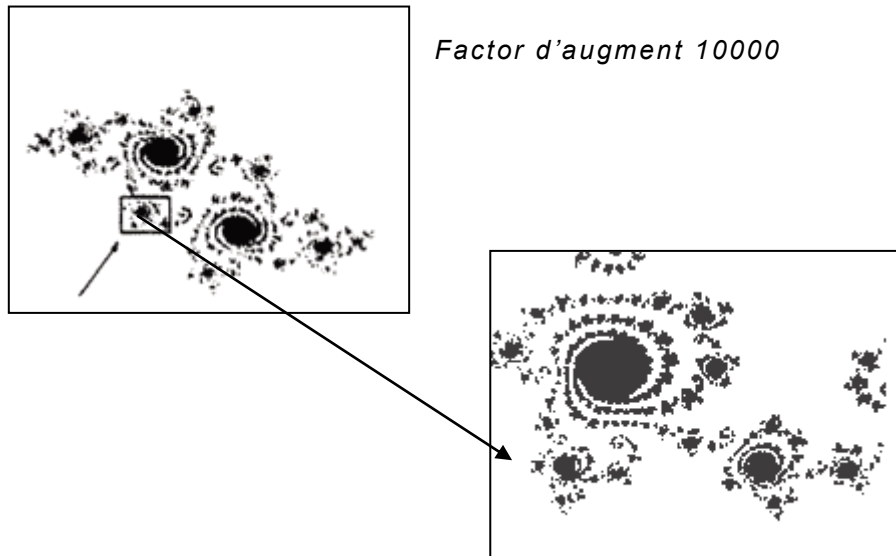


Conjunt de Julia associat a f_c , $c = -0.835 - 0.2321i$

El conjunt de Julia, com a fractal que és, presenta autosimilitud. A continuació es mostren dos exemples d'aquesta autosimilitud. En el gràfic de sota es veu la regió assenyalada del fractal superior ampliada. Es pot veure que a diferents zooms, els fractals són gairebé idèntics ja que presenten quasiautosimilitud.

Factor d'augment d'ordre 4 del fractal original





2.5.2. Conjunt de Mandelbrot

El conjunt de Mandelbrot és el més conegut dels conjunts fractals, i el més estudiat. Es coneix així en honor al científic Benoît Mandelbrot, que va investigar sobre ell en la dècada dels setanta del segle XX.

Aquest conjunt es construeix iterant la funció quadràtica $f_c(z)=z^2+c$. Aquesta c és un nombre complex i per a cadascuna d'aquestes c es crea la successió següent:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

La successió que s'obté al iterar rep el nom d'òrbita. En el conjunt de Mandelbrot s'obté sempre l'òrbita de zero, mentre que al conjunt de Julia s'obté l'òrbita del nombre complex z .

Conjunt de Mandelbrot: $f_c^k(0) \quad c \in \mathbb{C}$

Conjunt de Julia J_c (per a un valor de c fixat): $f_c^k(z) \quad z \in \mathbb{C}$

Si aquesta òrbita de zero està acotada aquesta c pertany al conjunt de Mandelbrot. Està demostrat que en el moment que un element d'aquesta successió o òrbita tingui mòdul superior a dos,

$|z_n| < 2$, aquesta divergeix o no esta acotada. Així doncs c pertany al conjunt de Mandelbrot si el mòdul de totes les iteracions de la succeció és més petit que dos,

Aquestes succecions poden ser convergents o divergents, depenent de si pertanyen o no al conjunt. A part, també poden ser periòdiques, es repeteixen els valors cada n iteracions o constants, el valor de les iteracions és sempre el mateix.

Per acabar està l'òrbita caòtica, aquella que els valors de les iteracions no segueixen cap orde concret i oscil·len. En alguns casos, aquestes òrbites caòtiques pertanyen al conjunt, i altres casos no.

Per exemple si $c=1$, obtenim la succeció 1,2,5,26.... ja que:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 0^2 + c = 1$$

$$z_2 = 1^2 + 1 = 2$$

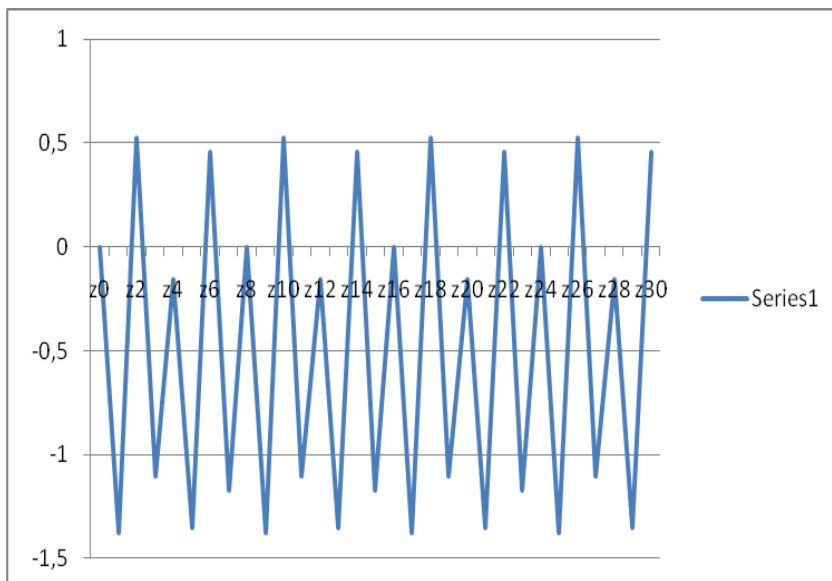
$$z_3 = 2^2 + 1 = 5$$

$$z_4 = 5^2 + 1 = 26$$

Aquesta succeció és divergent, ja que els valors creixent indefinidament i per tant el zero pertany a la conca de l'infint i $c=1$ no pertany al conjunt de Mandelbrot. ($1 \notin \mathbf{M}$)

Però si agafem el valor $c = -1$ la sèrie és $0, -1, 0, -1, \dots$ per tant és una òrbita periòdica de període 2, ja que els valors són els mateixos cada dues iteracions. En aquest cas,

$c = -1$ pertany al conjunt ja que el mòdul és inferior a 2. ($-1 \in \mathbf{M}$)



Un altre cas d'òrbita periòdica es quan $c = -1,38$. En aquest cas, el període és de 8 i és acotada i pertany al conjunt. ($-1,38 \in \mathbf{M}$)

Òrbita del zero per a $c = -1,38$ on es pot apreciar el període vuit

Per a $c = 0$ la successió queda de la següent manera:

$$z_0 = 0$$

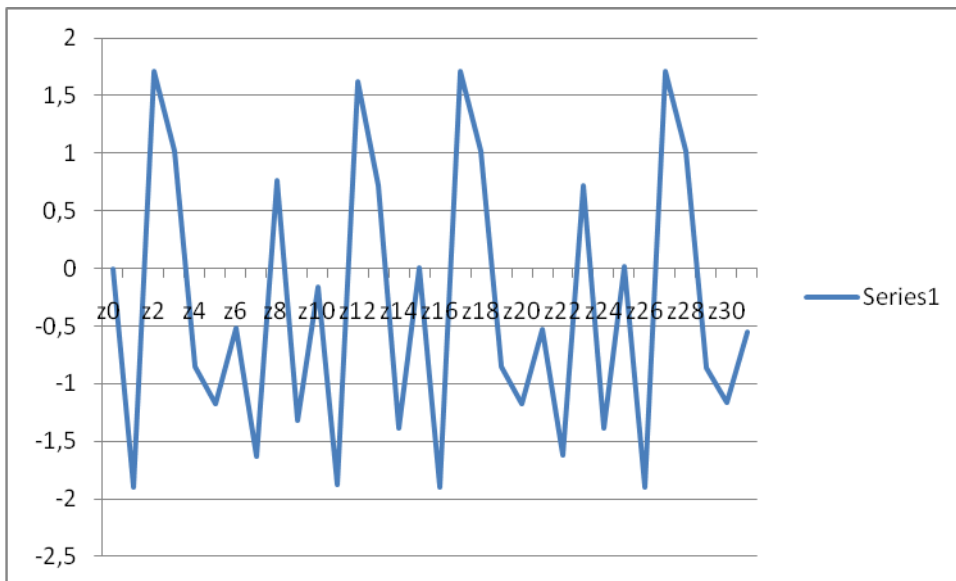
$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 0$$

Es pot veure que $c=0$ forma una òrbita constant i pertany al conjunt. ($0 \in \mathbf{M}$)

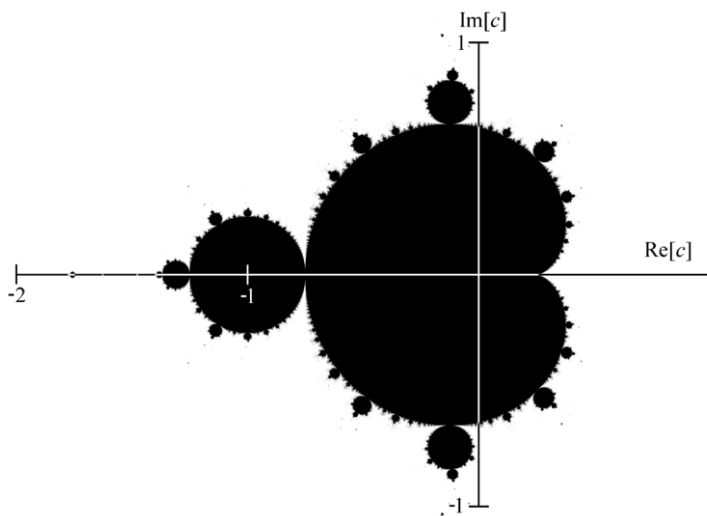
Per a $c = -1,9$ la sèrie es caòtica, no segueix cap ordre establert.

En el gràfic de les trenta primeres iteracions de l'òrbita per a $c = -1,9$ es pot comprovar que tot i ser caòtica està dintre del conjunt ja que mai supera el mòdul 2. ($-1,9 \in \mathbf{M}$)



Òrbita caòtica del zero per $c=-1,9$

Així doncs després d'estudiar l'òrbita de diferents punts que pertanyen a conjunt o no, es pot veure que la seva forma és:

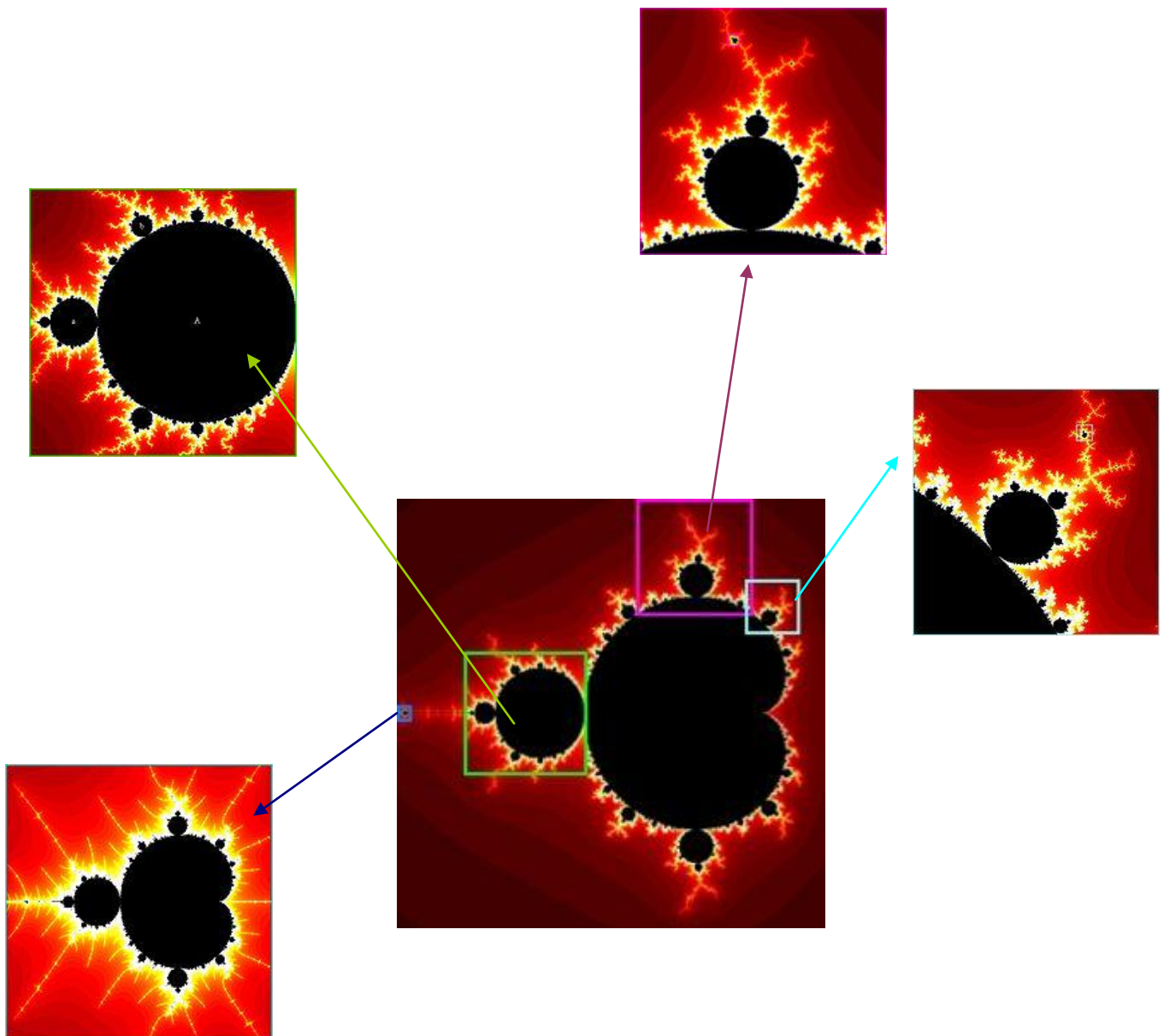


Conjunt de Mandelbrot

Sovint es representa el conjunt mitjançant l'algorisme de temps d'escapament. En aquest cas, els colors dels punts que no pertanyen al conjunt indiquen la velocitat amb què divergeix (tendeix a l'infinít, en mòdul) la successió corresponent a aquest

punt. A la imatge d'exemple, observem que el vermell fosc indica que al cap de pocs càlculs se sap que el punt no està en el conjunt mentre que el blanc informa que s'ha trigat molt més en comprovar-ho. Com que no es pot calcular una infinitat de valors, cal posar un límit i decidir que si els (x) primers termes de la successió estan acotats llavors es considera que el punt pertany al conjunt. En augmentar el valor de (x) es millora la precisió de la imatge.

Representació del conjunt de Mandelbrot per l'algorisme de velocitat d'escapament



Si observem la imatge següent, en els quadres verd, lila i blau cel es pot veure que els discs adossats al cardioide principal del conjunt de Mandelbrot són iguals entre ells.

Mentre que al augmentar el quadre blau podem comprovar l'autosimilitud del conjunt, ja que al aplicar zoom a certes parts de la imatge com per exemple una de les antenes que surten dels discs adossats, es pot veure el conjunt complet. Així doncs aquestes taques negres que apareixen a les antenes són còpies idèntiques del conjunt original.

2.6 Representació de fractals al pla complex

2.6.1 Nocions bàsiques de sistemes dinàmics complexos

Els sistemes dinàmics són l'eina necessària per passar de la teoria fractal a la imatge fractal. La representació dels fractals va evolucionar molt amb l'arribada dels ordinadors.

El matemàtic francès Gaston Julia va desenvolupar la teoria fractal, però Benoit Mandelbrot va ser l'encarregat de representar-los gràcies a les fórmules de Julia i mitjançant els ordinadors, que oferien una millor velocitat de càlcul i reproducció d'imatges.

En la dècada dels 80, els fractals es representaven pel seu valor estètic i no pel seu valor matemàtic. Per aconseguir nous fractals i que fossin més vistosos, el que es feia era augmentar la dificultat de l'equació del fractal. A partir del 1995, ja no es podien crear més fractals ja que havien esgotat tots els diferents tipus d'equacions. A causa d'això, van decidir aprofundir en els algorismes d'acoloriment, cosa que va permetre tornar a equacions

més fàcils, ja que amb els nous mètodes i l'augment de colors disponibles els fractals proporcionaven una major versatilitat i possibilitat d'expressió artística.

Un sistema dinàmic és el par (X, f) amb $f: X \rightarrow X$. En el cas dels fractals del meu treball utilitzarà sistemes dinàmics complexos (\mathbb{C}, f) . En els fractals de mètode de Newton, aquesta f és un polinomi de qualsevol grau i en el cas de Julia i de Mandelbrot, $f_c(z) = z^2 + c$. Per cada punt del pla complex z_0 , l'equació es substitueix reiteradament, obtenint l'òrbita d'aquell nombre $f_c^k(z_0)$.

Depenent de com sigui aquesta òrbita, el punt pot ser fix o periòdic. Per a una funció f_c determinada, z_0 (un punt del pla complex) és un punt fix si al iterar sempre dona el mateix valor. Un punt és n periòdic si els valors es repeteix cada n iteracions.

Alguns d'aquest punt fixes o periòdics poden ser atractius, i en aquest cas ens interessarà el conjunt de punts que són atrèts per ell, es a dir que pertanyen a la seva conca d'atracció.

2.6.2 La família quadràtica

Per la construcció dels conjunts de Mandelbrot i Julia ens interessa conèixer els punts fixes i periòdics de l'equació $f_c(z) = z^2 + c$.

El que intentarà en aquest apartat es calcular els punts fixes i 2-periòdics de la funció quadràtica anterior

Per trobar els punts fixes d'aquesta equació s'ha de complir que $f(z) = z$, ja que en totes les iteracions sempre s'obté el mateix resultat. Així els dos punts fixes d'aquesta funció han de complir:

$z^2 + c = z$ per tant $z^2 - z + c = 0$ (1). Utilitzant la fórmula d'equacions

de segon grau $z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot c}}{2 \cdot 1}$ els punts fixes són $z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$

Per trobar els punts 2-periòdics s'ha de complir que la primera

iteració i la tercera coincideixin, és a dir $z_0 = (z_0^2 + c)^2 + c$

$$\rightarrow z_0 = z_0^4 + c^2 + 2c \cdot z_0^2 + c \rightarrow z_0^4 + 2cz_0^2 - z_0 + c^2 + c = 0 \quad (2)$$

L'equació (2) té quatre solucions, dos solucions són els punts fixes i les altres dues són els punts periòdics. Els punts fixes són també punts periòdics, per això també són solucions de l'equació general. Al dividir l'equació (2) entre l'equació (1) s'obté l'equació dels punts periòdics. El resultat d'aquesta divisió és: $z^2 + z + c + 1 = 0$ si resollem aquesta equació obtenim els punts 2-periòdics de f_c

$$\rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(c+1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4c-3}}{2}$$

Així doncs queden caracteritzats els dos punts fixos i els dos 2-periodics de la funció quadràtica $f_c = z^2 + c$ que es utilitzada en els sistemes dinàmics per a la construcció dels fractals de Julia i Mandelbrot.

2.6.3 Conjunt de Julia. Punts fixos i punts periòdics.

Els conjunts de Julia poden ser de dos tipus, depenent de si el cos està format d'una sola peça (connex) o per una col·lecció de punts més o menys separats (no connex). Exemples de conjunts de Julia connextos:



$$c = 0.12 + 0.57i$$



$$c = -0.12 + 0.66i$$

Exemples de conjunts de Julia no connexos:



$$c = -0.25 + 0.74i$$



$$c = 0.75 + 0.11i$$

Per saber si un conjunt de Julia (J_c) es connex o no, és suficient amb estudiar l'òrbita del zero $f_c^k(0)$. Si l'òrbita és acotada, és a dir tota la successió és de mòdul inferior a dos, el conjunt és connex. Si hi ha algun valor que supera el mòdul dos i per tant l'òrbita divergeix, el conjunt serà no connex (resultat demostrat per Julia i Fatou l'any 1919).

Les implicacions d'aquest resultat són molt importants ja que iterant un sol punt del pla complex, el zero, és pot conèixer la naturalesa del conjunt de Julia que s'obtindrà quan iterem tots els punts.

La funció quadràtica f_c té punts fixos atractius o n-periòdics atractius. Un punt és atractiu si l'òrbita dels punts del voltant convergeixen cap aquell punt. Per cada funció quadràtica $f_c = z^2 + c$ hi ha dos punts fixos, dos 2-periòdics i altres n-periodics. D'aquests punts, cada funció només pot tindre un punt atractiu, ja que si no

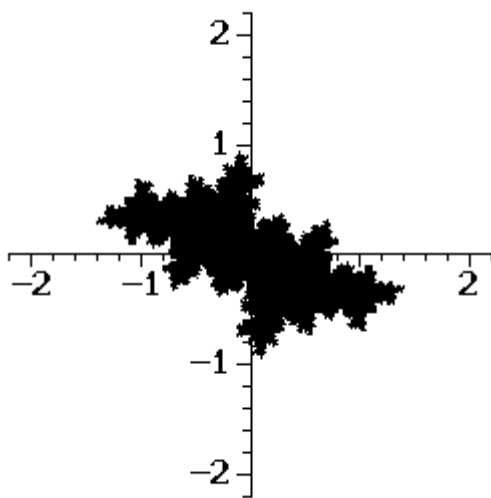
fos així, el zero, que sempre pertany a la conca d'atracció del punt atractiu, hauria de convergir cap a dos punts diferents.

Així doncs la forma que té el conjunt de Julia connex depèn de a quin punt convergeixi l'òrbita del zero, si convergeix cap un punt fix atractiu tindrà una forma i si convergeix cap un punt periòdic atractiu en tindrà una altra:

- L'ÒRBITA DEL ZERO CONVERGEIX CAP UN PUNT FIX ATRACTIU.

En aquests casos el fractal és sempre una corba tancada simple, i en el seu interior hi ha el punt fix que a la vegada és el punt atractiu de la funció f_c i tots aquells punts del pla complex que les seves òrbites convergeixen cap aquell punt atractiu. (conca d'atracció del punt fix atractiu)

Per exemple si $c = 0.5 + 0.5i$ el conjunt de Julia associat és:



Com qualsevol funció quadràtica $f_c = z^2 + c$ aquesta funció té dos punts fixes. En aquest cas són :

$$z_0 \approx -0.40867701 + 0.27512526i$$

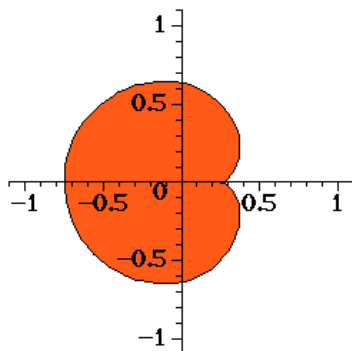
$$i z_1 \approx 1.40867701 - 0.27512526i$$

Z_0 que és el punt fix atractiu i està situat al triangle esquerra i l'altre punt fix de la funció està situat al extrem dret del conjunt J_c .

Per a què un punt del pla complex sigui un punt fix de la funció f_c , $z^2 + c = z$. Això vol dir que la segona iteració ha de coincidir amb la z inicial. A més, es pot saber si aquell punt és atractiu si la derivada

de la funció en aquest punt és de mòdul inferior a 1

$$(|f'_c(z)| = |2z| < 1)$$

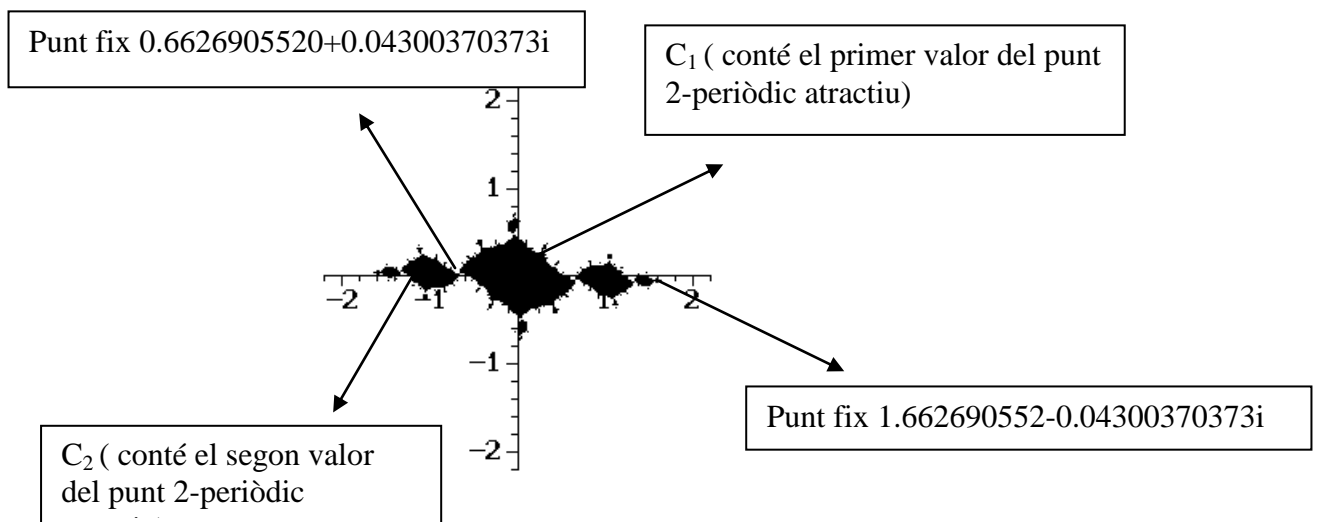


D'això es dedueix que les c del pla complex, on f_c té un punt fix atractiu i per tant el conjunt de Julia serà una corba simple tancada, es troben al cardioide principal del conjunt de Mandelbrot.

- L'ÒRBITA DEL ZERO CONVERGEIX A UN PUNT 2-PERIÒDIC ATRACTIU.

En aquests casos, els fractals ja no son corbes simples tancades, són una unió d'una quantitat numerable de corbes simples tancades unides per un sol punt on només es toquen dues corbes diferents (es a dir es tallen dos a dos)

Fractal associat a $c = -1.1 + 0.1i$



De totes les corbes simples tancades que formen el conjunt associat, només n'hi ha dues que contenen els dos valors del punt 2-periòdic atractiu w_1, w_2 . En aquest cas les corbes que contenen (o envolten)

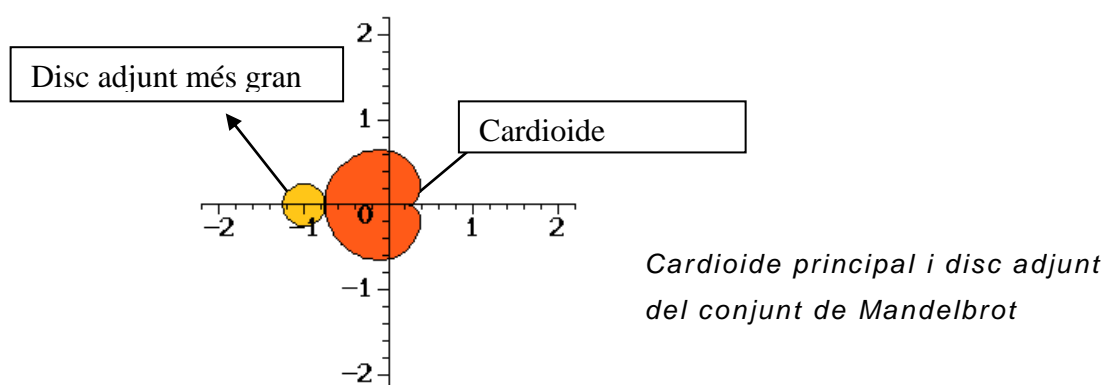
els valors del punt 2-periòdic atractiu són la C_1 que correspon a la corba central i C_2 que és la corba situada a l'esquerra.

El punt 2-cíclic atractiu està situat en l'interior de la corba tancada C_1 i per tant l'altre valor del punt 2-periòdic atractiu està a l'interior de la corba C_2 . Aquestes dues corbes es toquen en el punt fix de f_c que en aquest cas és el punt $-0.6626905520+0.04300370373i$ i l'altre punt fix està situat a l'extrem dret del conjunt i correspon a $1.662690552-0.04300370373i$.

Els punts de contacte de les altres corbes del fractal són preimatges del punts fixes de la funció (les preimatges són punts del pla complex que al substituir-los a la funció donen com a valor numèric els punts fixes). Aquests punts fixes no pertanyen al interior de la corba perquè són fixes, les seves iteracions sempre donen el mateix valor, per tant no poden convergir cap al punt atractiu.

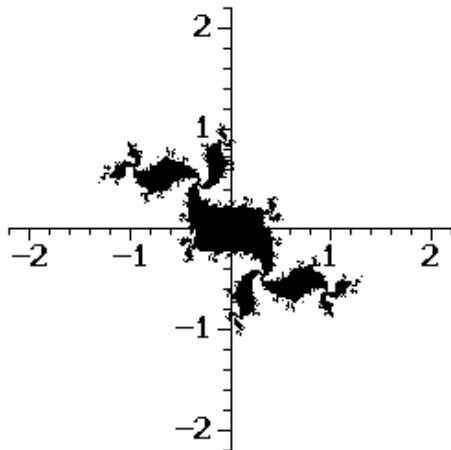
Els diferents valors de les iteracions de l'òrbita de qualsevol punt que estigui dintre del conjunt de Julia es van movent pels diferents valors que engloben les corbes del fractal, fins que el valor d'una de les iteracions està dintre de la corba C_1 . A partir d'aquest moment, les iteracions es van alternant entre valors de l'interior de C_1 i C_2 , fins que es va apropant al 2-cíclic atractiu.

Totes les c que tenen un punt 2-cíclic atractiu i per tant un conjunt de Julia associat semblant a l'anterior estan situats al disc adjunt més gran al cardioide principal.



- L'ÒRBITA DEL ZERO CONVERGEIX CAP UN PUNT 3-PERIÒDIC ATRACTIU

Els fractals de Julia on la f_c té un punt 3-periòdic atractiu són una unió d'una quantitat numerable de corbes simples tancades que s'uneixen de tres en tres en un sol punt. Aquestes corbes contenen els 3 valors del punt 3-periòdic, les seves preimatges i tots els punts les òrbites dels quals convergeixen cap al punt 3-periòdic atractiu. Dos d'aquests punts de contacte de les corbes són els punts fixes i els altres punts de contacte són preimatges dels punts fixes.



Conjunt de Julia associat al valor $c=-0.2+0.75i$. La funció f_c corresponent a aquest valor té un punt 3-periodic atractiu

Els conjunts de Julia que tenen un punt 3-periòdic atractiu es troben als dos discs més petits adjunts al cardioide principal i en un altre cardioide de menor mida que es troba en una de les antenes del conjunt.

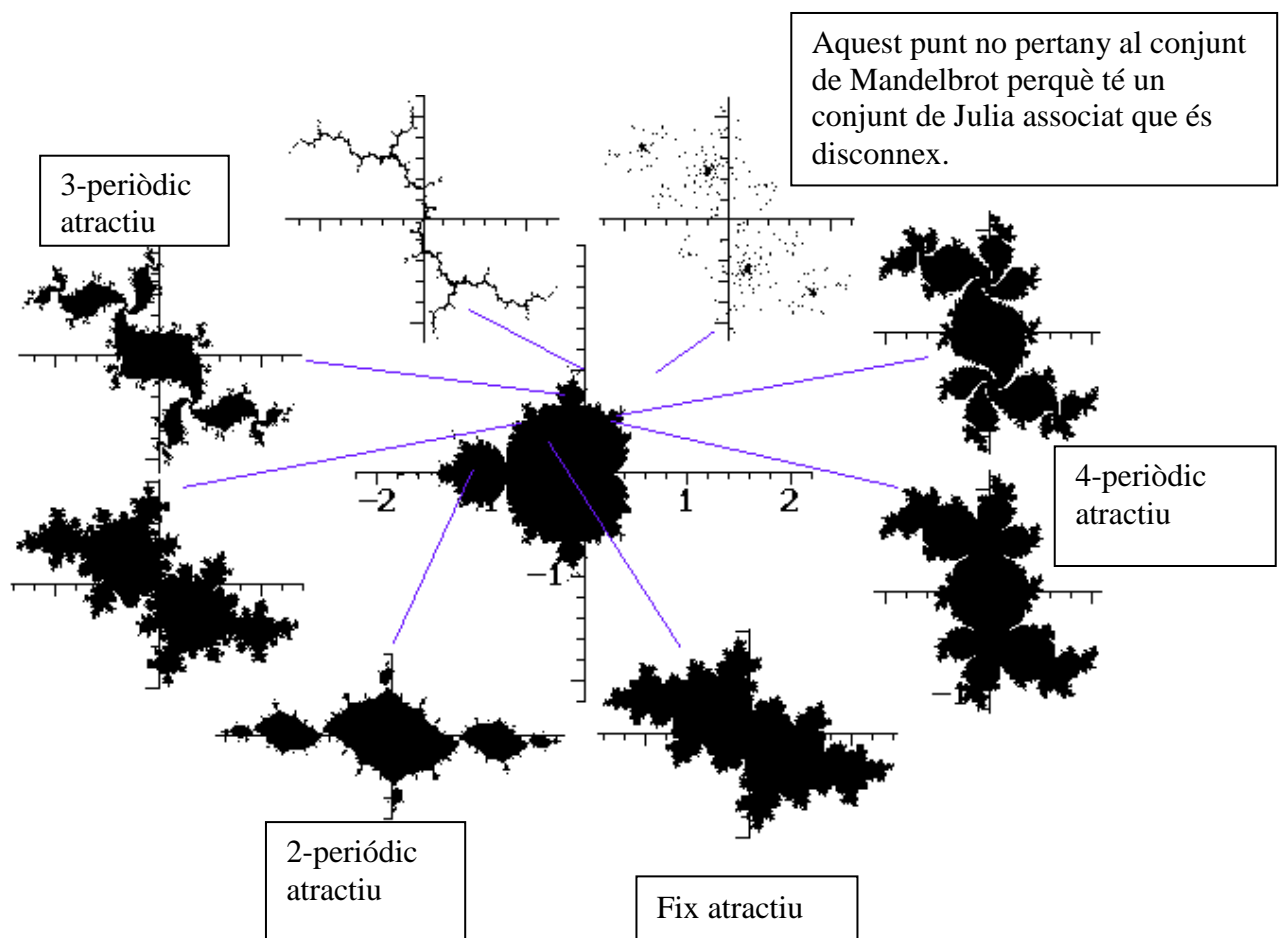
En general els conjunts de Julia que tenen un punt n -periòdic atractiu estan formats per un nombre discret de corbes simples tancades que es troben en un dels punts fixes o preimatges dels punts fixes en què convergeixen n corbes. Aquestes corbes contenen la conca d'atracció del punt n -periòdic atractiu, els n valors que formen aquest punt, és a dir els valors de les n primeres iteracions i les seves preimatges. Depenent del valor de n , aquests valors de c estan localitzats en un disc o cardioide concret del conjunt de Mandelbrot.

2.6.4 Conjunt de Julia en el conjunt de Mandelbrot

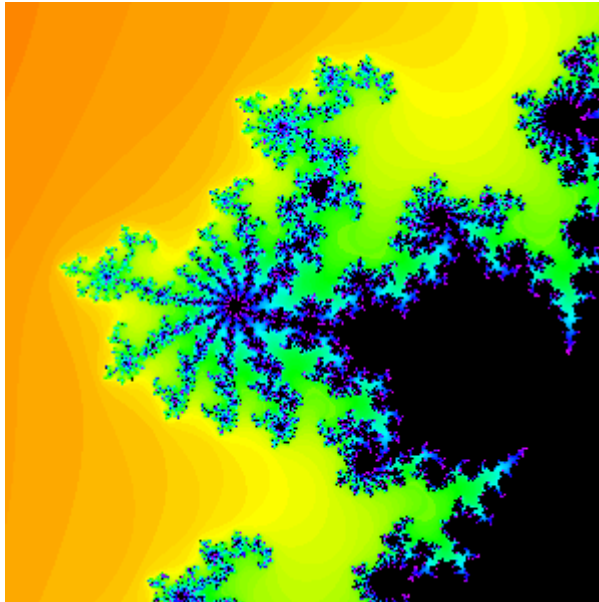
La primera definició del conjunt de Mandelbrot ens diu que un punt c del pla complex pertany al conjunt de Mandelbrot si l'òrbita del zero respecte la funció $f_c = z^2 + c$ està acotada, per tant les iteracions tenen mòdul inferior a 2.

$$c \in M \text{ si } f_c^k(0) \text{ és acotada.}$$

Però també es pot definir com el conjunt de nombres complexos que tenen associats un conjunt de Julia connex. Com ja s'ha vist anteriorment segon la posició de $c \in \mathbb{C}$ dintre del conjunt de Mandelbrot, el conjunt de Julia serà connex però tindrà una forma o un altre.



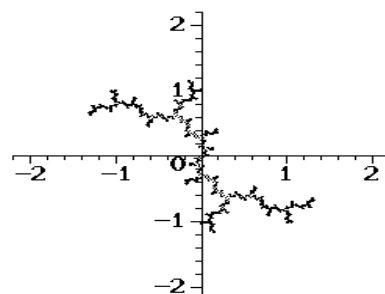
Per tant de l'anterior s'ha deduït que tots els punts complexos que pertanyen al cardioide o a un mateix disc del conjunt de Mandelbrot tenen associat un conjunt de Julia connex del mateix tipus que podem determinar simplement observant aquest disc



Per saber el tipus de punt periòdic atractiu de la funció f_c associada a cadascun dels punts de l'interior d'un disc adjunt al cardioide s'ha de comptabilitzar el nombre de ramificacions (contant el peu) de l'antena principal que surt del disc. En la imatge següent es pot veure un disc adjunt al cardioide principal del conjunt

de Mandelbrot. Totes les c dintre d'aquest disc tenen un conjunt de Julia associat 11-periòdic ja que es poden comptabilitzar onze rames sortint del disc, tenint en compte el peu de l'antena.

En els extrems d'aquestes antenes es troben els punts del pla complex que tenen associades conjunts de Julia que s'anomenen dentrites, uns conjunts de Julia que són connexos i sense punts interiors.

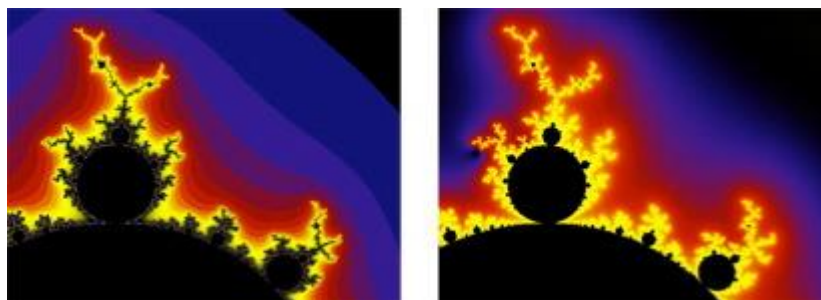


Dentrita associada al valor $c=i$

2.6.5 Algoritmes de color per a generar imatges fractals

Cada sistema dinàmic produeix una seqüència de valors $z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$, que s'anomena òrbita, per a cada valor del pla complex. Les imatges fractals es creen generant una d'aquestes seqüències per a cada píxel (punt de la pantalla) de la imatge. Posteriorment, l'algoritme de color és l'encarregat d'interpretar la seqüència numèrica de cada punt per produir un color final que el representi, per tant aquests algoritmes són les regles que assignen un color o pinten cada píxel.

Inicialment, en les imatges fractals, apareixien uns salts o franges en la transició de color. Cada color tenia un límit, un valor en què es passa de ser un color a ser-ne un altre. Aquest valor està representat amb una línia anomenada gradient, només present als fractals representats amb algoritmes de color que produeixen valors discrets, mentre que als continus, no hi són.



La imatge de l'esquerra correspon a un algoritme de color discret, i es poden observar les línies que separen els diferents colors. El de la dreta en canvi és un fractal continu i no hi ha aquestes desagradables bandes.

En l'actualitat, els algoritmes que més s'utilitzen són els continus, ja que són més suaus, doncs no tenen aquests desagradables canvis de color a causa dels gradients i gràficament són més atractius. Aquesta evolució de discret a continu també va estar potenciada per la substitució de la targeta gràfica de 8 bits, que originava un escalonat en la imatge, per les targetes gràfiques de 24 bits que permetien interpolar colors amb la precisió desitjada.

ALGORITMES DE TEMPS D'ESCAPAMENT

L'algorisme de temps d'escapament és un dels més antics i per a molts programes fractals l'única opció disponible. La seva simplicitat el converteix en el favorit d'aquells que s'inicien en la programació fractal, però, des del punt de vista artístic es considera menys important, ja que produeix valors discrets i s'ha vist àmpliament superat pels algorismes de color continus.

Aquest algorisme és basa en el nombre d'iteracions necessàries per determinar si l'òrbita d'un punt concret tendeix o no al infinit. Utilitza la premissa que quan l'òrbita d'un punt excedeix una regió frontera R , aquesta sempre divergeix al infinit. Les dimensions d'aquesta regió R , dependrà de cada fractal.

En el moment en què un valor de l'òrbita supera aquesta regió s'interrompeix la iteració i se li dona un color concret a aquell punt. El color que se li assigna dependrà del temps d'escapament d'aquell punt, és a dir, les iteracions que es necessiten per sortir de la regió R . Per exemple, si es necessiten 4 iteracions correspon al color verd, 5 iteracions vermell etc. Els punts amb òrbites, on totes les iteracions es mantenen dintre de la regió establerta, es considera que formen part del conjunt fractal i es pinten de color negre.

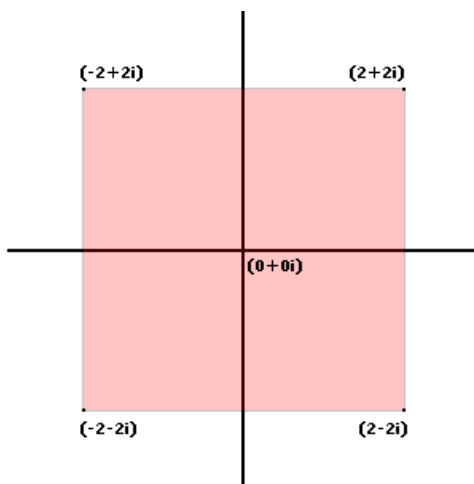
L'ús d'un valor discret (el nombre d'iteracions és sempre un enter) produeix una aparença de bandes similar a la d'un mapa topogràfic

o a la representació d'un fractal utilitzant un algoritme de color discret.

ALGORITME DE TEMPS D'ESCAPAMENT PER AL CONJUNT DE JULIA

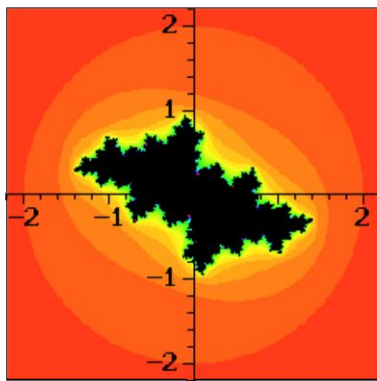
Per utilitzar l'algoritme d'escapament per a representar conjunts de Julia es necessari determinar primer la regió R , anomenada anteriorment. En aquest fractal es pot saber si l'òrbita d'un punt tendeix al infinit si el mòdul de qualsevol de les iteracions és superior a 2.

Per aquest raó es considera com a regió R , el quadrat de longitud quatre centrat al pla complex:

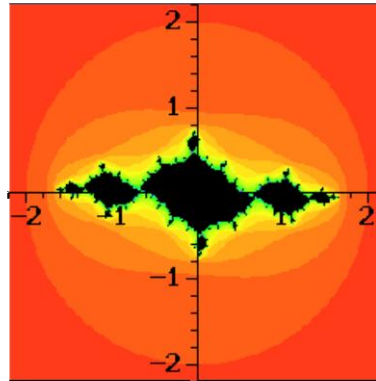


A continuació s'ha de fixar un nombre d'iteracions límit per saber si l'òrbita d'un punt està acotada o no i per tant, pertany o no al conjunt. Si es fixa aquest valor en 100 per exemple, si en les 100 primeres iteracions els diferents valors de l'òrbita del punt tenen mòdul inferior a 2 es

considerarà que el punt pertany al conjunt i es representarà de color negre. Si en alguna de les iteracions el mòdul és més gran que 2, no estarà dintre del conjunt i es pintarà d'un altre color. Els punts que no pertanyen al conjunt es representen de diferents colors segons el moment de la "sortida" (que estaria relacionat amb la velocitat amb què l'òrbita es va a infinit), i així s'obtenen les representacions usuals dels conjunts de Julia. Com més iteracions són necessàries per determinar si un punt és dins o fora del conjunt més resolució tindrà la imatge del fractal i més continu i atractiu serà.



$$c = -0.5 + 0.5i$$



$$c = -1.1 + 0.1i$$

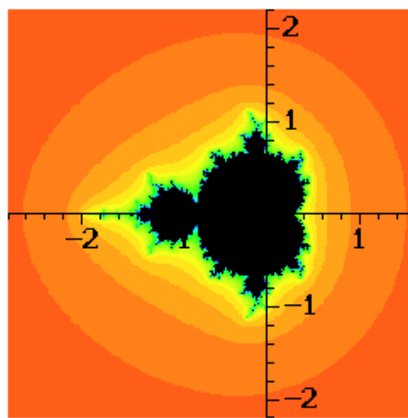
Representació de fractals de Julia per mitja de l'algoritme de temps d'escapament

ALGORITME DE TEMPS D'ESCAPAMENT PER AL CONJUNT DE MANDELBROT

En el cas el conjunt de Mandelbrot, tradicionalment, es defineix R com un cercle centrat en l'origen i amb radi 2. Això ve donat perquè en el conjunt de Mandelbrot està comprovat que tan aviat com $|z| > 2$ la iteració divergeix.

A la pràctica, per obtenir imatges mitjançant ordinadors del conjunt de Mandelbrot es consideren dos nombres r i k , i per a cada c computem termes de la successió $f_c^k(0)$. Si els k_0 primers termes verifiquen tots que $|f_c^k(0)| < r = 2$ es decideix que el punt pertany al conjunt de Mandelbrot. Si, per contra, hi ha $k \leq K_0$ amb $|f_c^k(0)| > r$ s'interromp la computació per a aquest c i es determina que c està fora de M . Finalment, representem en negre els punts per als que l'òrbita de l'origen roman acotada, i els punts per als quals aquesta òrbita es surt de la bola de radi r es representen de diferents colors segons el moment de la "sortida" es a dir segons el valor de k (que estaria relacionat amb la velocitat amb què l'òrbita es va a infinit).

Com més gran sigui K_0 , més precisa es la imatge fractal. Tenint en compte les possibilitats d'un mapa acolorit, K_0 pot valdre 64, 128 o 256 (que es la possibilitats de tons). Com he explicat anteriorment segons la iteració en la que es detecta que el terme de la successió té mòdul superior a dos quedarà pintat d'algun d'aquest 64,128 o 256 colors diferents. Major valor de k_0 implicarà una imatge fractal amb mes resolució i per tant mes recursos de màquina i mes temps de càlcul



Representació del conjunt de Mandelbrot per l'algoritme de temps d'escapament

3. Càlcul aproximat de les arrels d'una equació

Per polinomis de grau més gran que quatre, no existeix cap fórmula establerta que permeti trobar les arrels. Per això l'única opció per trobar-les es utilitzar mètodes que proporcionen aproximacions raonables, es a dir, l'anàlisi numèric.

3.1 Definició d'anàlisi numèric

L'anàlisi numèric es una rama de les matemàtiques que es pot definir com la disciplina ocupada de descriure, analitzar i crear algoritmes numèrics que ens permetin resoldre problemes matemàtics , en els que estiguin involucrades quantitats numèriques, amb una precisió determinada.

Un algoritme és un procediment que ens pot portar a una solució numèrica d'un problema mitjançant un nombre finit de passos que poden efectuar-se de forma lògica.

L'anàlisi numèric agafa especial importància amb l'arribada dels ordinadors, ja que són útils per als càlculs matemàtics extremadament complexos.

El terme de "solució numèrica" s'utilitza amb freqüència davant el de "solució analítica" (o "solució exacta"). La diferència entre tots dos termes es molt important.

La solució analítica es una expressió matemàtica que proporciona tota la informació sobre el comportament del sistema, per a qualsevol valor de les variables .

Per exemple si volem trobar l'equació que expressa totes les trajectòries possibles d'un mòbil que es desplaça en línia recta, la solució general és $y=kx$, on y és la coordenada d'un punt de la trajectòria, x el valor de l'abscissa i k la pendent de la recta. Un altre exemple i molt relacionat amb el treball, és la fórmula que permet resoldre qualsevol equació de segon grau $ax^2+bx+c =$

$$0, x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \text{Totes dues equacions són equacions universals,}$$

una expressa el conjunt infinit de totes les rectes que passen per l'origen i permet calcular la coordenada de cada punt per a qualsevol pendent i amb l'altre resolem qualsevol equació de segon grau independentment del valor dels coeficients.

Un exemple clàssic de solució numèrica va ser obtinguda per Arquímedes per al valor aproximat del nombre π . Si tenim en compte que $\pi = \frac{\text{longitud}}{\text{diàmetre}} = \frac{2\pi r}{2r}$, Arquímedes va inscriure polígons regulars de n -costats en una circumferència i va calcular el perímetre d'aquests polígons. Va començar amb hexàgons i va anar doblant el nombre de costats fins arribar a un polígon de 96 costats. Així doncs al dividir el perímetre dels polígons entre el diàmetre de la circumferència, i augmentar el número de costats obtenia cada vegada una aproximació més bona de π . Finalment, es molt important advertir que la solució "exacta" del problema es desconeguda i la solució numèrica és l'única alternativa, com passa en la majoria dels problemes pràctics. Una altre exemple de solució numèrica seria el càlcul de les arrels d'un polinomi de grau igual o superior a tres. Ruffini només permet calcular solucions enteres, però no hi ha cap mètode que permet calcular les arrels reals. L'única solució és utilitzar un mètode numèric, com ara el mètode de Newton, que més endavant explicarem, que ens doni les arrels d'aquell polinomi amb una precisió determinada.

Així doncs els mètodes numèrics busquen números, mentre que els mètodes analítics busquen fórmules matemàtiques. En general els mètodes numèrics s'apliquen quan és necessari un valor numèric com solució a un problema matemàtic, i els procediments exactes o analítics (manipulacions algebraïques, teoria d'equacions diferencials, mètodes d'integració, etc....) són incapaços de donar una resposta.

3.2. Mètode de Newton

3.2.1 Historia del mètode

Sir Isaac Newton (25 de Desembre de 1642 - 20 de Març de 1727) va aportar molts coneixements a la ciència: va descriure la llei de gravitació universal, va establir les bases de la mecànica clàssica amb les lleis que porten el seu nom, i també va descobrir un mètode per resoldre equacions de qualsevol grau: el mètode Newton.

El mètode Newton va ser descobert per Isaac Newton i publicat al *Method of Fluxions* al 1736. Tot i que aquest mètode també sigui descrit per Joseph Raphson a *Analysis Aequationum* al 1690, cal dir que el *Method of Fluxions* ja havia estat escrit al 1671. És per això que aquest mètode es coneix per mètode de Newton o mètode de Newton-Raphson.

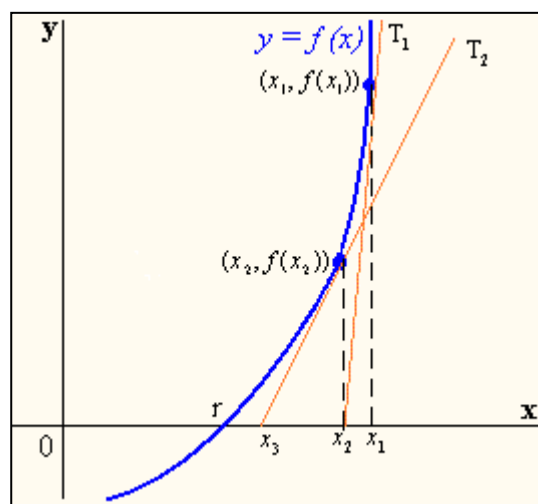
3.2.2 Descripció del mètode

El mètode numèric de Newton és una aplicació del càlcul diferencial que s'utilitza per trobar els zeros d'una funció derivable de enèsim grau amb la precisió desitjada.

Els procediments per trobar les arrels o zeros de funcions lineals o quadràtiques a partir dels coeficients de l'equació són senzills i exactes. Encara que existeixen fórmules per trobar les arrels d'equacions de tercer i quart grau, aquestes fórmules són molt complicades i res pràctiques. Un teorema, atribuït a Abel, estableix que no és possible trobar una fórmula general, en termes dels coeficients de l'equació, que permeti trobar els zeros exactes d'una funció de grau cinc o major. Això significa que, en general, només es poden trobar aproximacions per als zeros de funcions de grau més gran que quatre aplicant mètodes numèrics.

El que ens proposem es trobar una r que faci que $f(r) = 0$ i per tant sigui solució de l'equació. En el gràfic següent s'observa la gràfica de $f(x)$.

El punt r , la solució, es el punt de tall de la funció amb l'eix OX . Per obtenir aquest punt, es comença des d'un punt proper a r , que anomenarem x_1 . Tot seguit, es fa la recta tangent T_1 en el punt x_1 , $(x_1, f(x_1))$



El punt de tall en l'eix OX d'aquesta recta tangent és el punt x_2 , o segona iteració, que s'apropa més a la solució de la funció que el punt anterior. Si es tornés a repetir aquest procés, es trobaria la recta tangent T_2 , en el punt $(x_2, f(x_2))$, que tallaria l'eix OX en un punt més proper a l'arrel que el punt x_1 .

L'equació de la recta tangent T_1 que passa pel punt $(x_1, f(x_1))$ utilitzant la fórmula de punt- pendent és:

$$T_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

El punt de tall de la recta tangent T_1 amb l'eix OX és:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \longrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

El valor x_2 és la primera aproximació al punt r , que és la solució de la equació $f(x) = 0$

L'equació de la recta tangent T_2 en el punt $(x_2, f(x_2))$

$$T_2 : y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

El punt de tall de la recta tangent T_2 amb l'eix OX és:

$$T_2 : 0 - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \longrightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

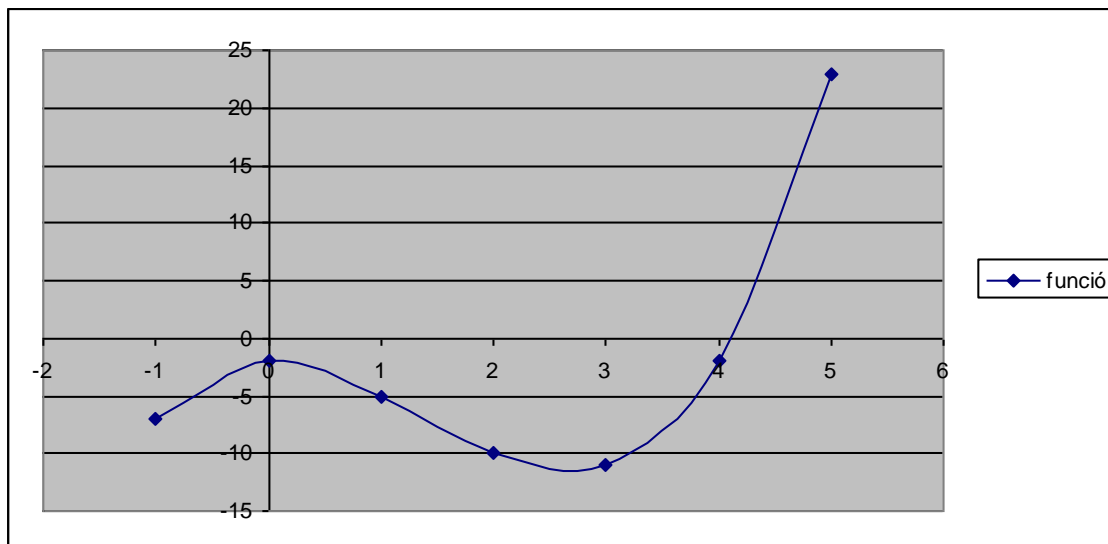
Si $f(x)$ és una funció derivable i r és solució de l'equació, donada x_n una aproximació de la solució, la següent aproximació x_{n+1} ve donada per la següent fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Aquesta fórmula es compleix sempre que $f'(x_n)$ sigui diferent de zero, ja que la recta tangent seria paral·lela a l'eix OX i no el tallaria mai.

EXEMPLE.

Utilitzant el mètode de Newton i fent ús de l'EXCEL intentarem calcular l'única arrel de la funció $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2$.



Representació gràfica de la funció $f(x)=x^3-4x^2-2$

La fórmula del mètode de Newton en aquest cas quedaria:

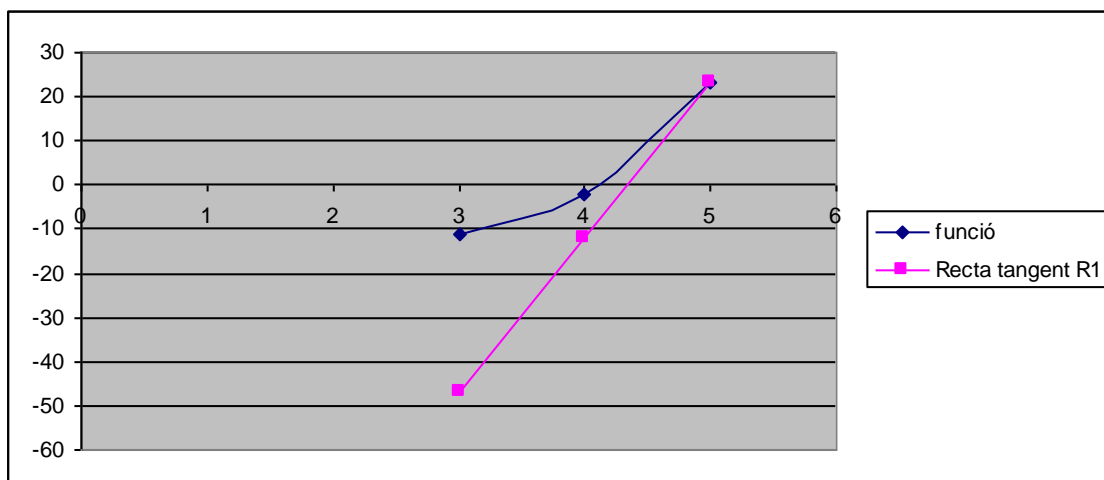
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 4x_n^2 - 2}{3x_n^2 - 8x_n}$$

Començarem a iterar per un valor pròxim a la solució, es a dir

$x_0=5$

Primera iteració

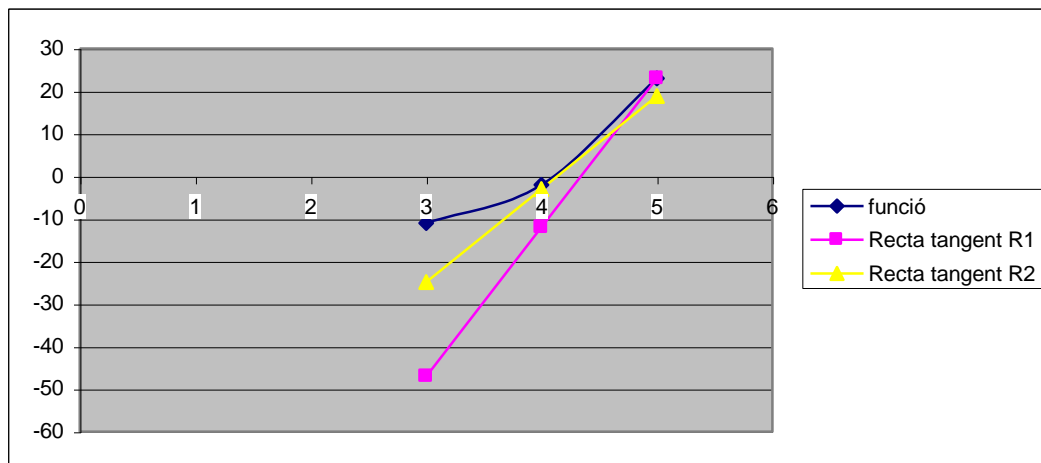
$$x_1 = 5 - \frac{5^3 - 4 \cdot 5^2 - 2}{3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5} = 5 - \frac{23}{35} = 4.34 \quad \mathbf{x_1 = 4.34}$$



Representació gràfica de la primera iteració del mètode de Newton

Segona iteració

$$x_2 = 4.34 - \frac{f(4.34)}{f'(4.34)} = 4.34 - \frac{4.4041}{21.78} = 4.13 \quad \mathbf{x_2 = 4.13}$$



Representació gràfica de la segona iteració del mètode de Newton

Tercera iteració

$$x_3 = 4.13 - \frac{f(4.13)}{f'(4.13)} = 4.13 - \frac{0.2173}{18.1307} = 4.1180 \quad \mathbf{x_3 = 4.1180}$$

Quarta iteració

$$x_4 = 4.1180 - \frac{f(4.1180)}{f'(4.1180)} = 4.11 - \frac{-0.1418}{17.7963} = 4.1179 \quad \mathbf{x_4 = 4.1179}$$

Al fer aquest procediment repetides vegades, es pot observar com algunes xifres decimals es van repetint, es a dir són xifres exactes de l'arrel buscada. Al fer la cinquena iteració, es pot veure que les dècimes i les centèsims són decimals exactes de la solució, ja que es van repetint.

3.2.3 Teorema de Bolzano

Aquest teorema s'utilitza per saber si hi ha algun punt dintre d'un interval on la funció s'anul·li i per tant, aquell punt sigui arrel. És un teorema important alhora de decidir l'interval on aplicar el mètode de Newton.

TEOREMA DE BOLZANO: Si una funció $f(x)$ és contínua en un interval $[a,b]$ i el signe de $f(a)$ i el signe de $f(b)$ són diferents, un es positiu i l'altre negatiu, aleshores existeix un nombre dintre d'aquest interval que fa que la funció sigui arrel, ja que al substituir per aquell número, la funció dona zero.

No obstant, en un interval pot haver-hi més d'una solució, i aquest teorema només ens diu que hi ha almenys una solució, encara que no especifica quantes arrels hi ha dintre l'interval.

3.2.4 Convergència del mètode de Newton

Hi ha alguns casos en què la successió del mètode Newton $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no convergeix a l'arrel, perquè no es realitza una bona elecció del punt d'inici x_0 . El teorema de convergència global ens diu des de quin punt començar la iteració.

TEOREMA DE CONVERGÈNCIA GLOBAL:

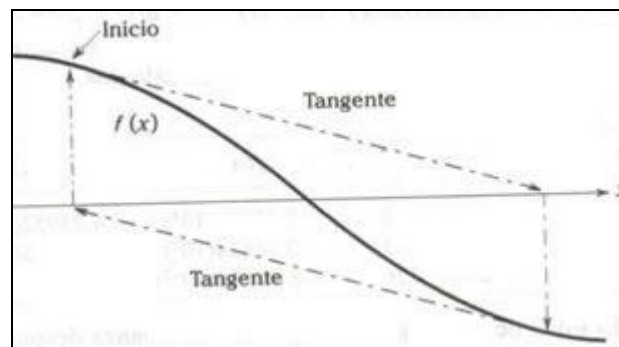
Donada la funció $f(x)$ definida en l'interval $[a,b]$ tal que:

- **$f(a) \cdot f(b) < 0$** Això vol dir que $f(a)$ i $f(b)$ tenen signes diferents, i amb el teorema de Bolzano ens assegurem l'existència d'una arrel.
- **$f'(x) \neq 0$ a qualsevol punt de l'interval $[a,b]$** , es a dir que la funció serà sempre creixent $f'(x) > 0$ o decreixent $f'(x) < 0$ i per tant està assegurada la unicitat de l'arrel.
- **$f''(x)$ no canvia de signe en $[a,b]$** es a dir que serà sempre còncava $f''(x) < 0$ o convexa $f''(x) > 0$
- **$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$** es a dir, la funció al punt d'inici de les iteracions i la segona derivada en aquest tenen el mateix signe.

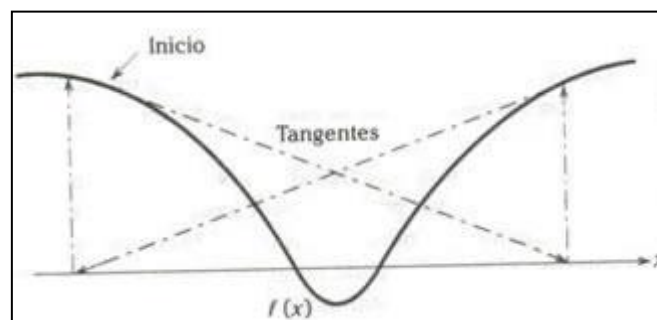
Si es compleixen aquestes condicions es pot assegurar que la successió $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix a l'arrel de la funció.

Ara mostraré alguns exemples on el mètode de Newton no funciona perquè falla alguna de les condicions esmentades anteriorment.

- En aquesta funció el mètode de Newton no funciona, ja que les rectes tangents es van separant de la solució, que en aquest cas es un punt d'inflexió. El mètode no funciona perquè s'està incomplint el tercer apartat del teorema de convergència, que diu que en l'interval, la segona derivada de la funció es sempre còncava $f''(x) < 0$ o convexa $f''(x) > 0$



- En aquest altre exemple s'incomplixen tots els apartats del teorema de convergència global: $f(a) \cdot f(b) > 0$ per tant els dos extrems del interval son positius. En l'interval, la funció és creixent i decreixent, la funció passa de ser còncava a convexa i per acabar $F(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$ ja que $f(x_0)$ és positiu i la segona derivada a x_0 és negativa.



3.3 Mètode de Newton per arrels complexes

Tenint en compte que les funcions de variable complexa es poden derivar de la mateixa manera que les de variable real, el mètode de Newton es realitza de la mateixa manera en funcions de variable real i imaginària. L'única diferència és l'interpretació geomètrica.

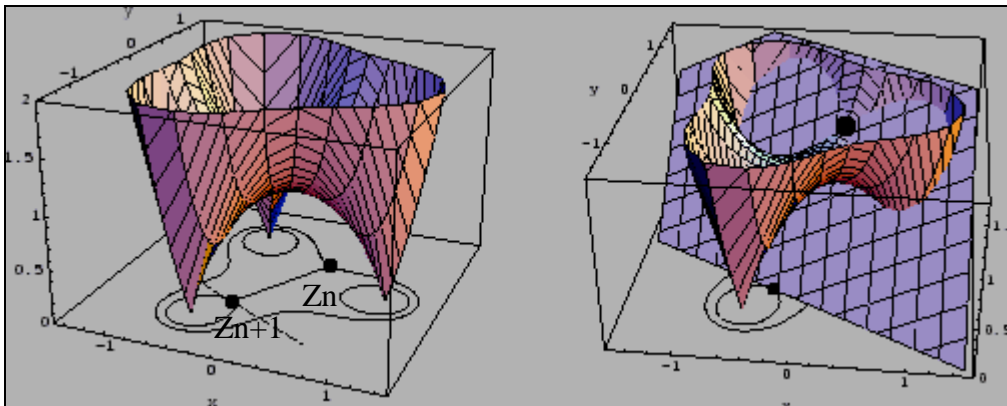
Interpretació geomètrica del mètode Newton per a variable real:

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

x_{n+1} és el punt de tall en l'eix OX de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt x_n

Interpretació geomètrica del mètode Newton per a variable complexa:

$$\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

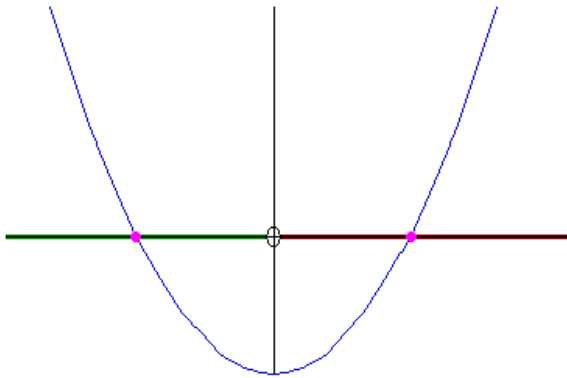


Representació gràfica de la interpretació geomètrica del mètode de Newton complex

z_{n+1} és troba construint el pla tangent a la funció $f(z)$ en el punt z_n . Aquest pla tangent, talla el pla XY en una recta. D'aquests infinits punts de la recta z_{n+1} és el perpendicular a z_n

3.3.1 Conques d'atracció

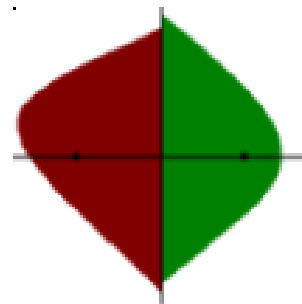
Si la funció té més d'una arrel, la solució que trobi el mètode de Newton dependrà del valor x_0 amb que es comenci la iteració. La conca d'atracció d'una arrel z^* , determina els valors que ha de tenir x_0 (llavor del mètode) per a que el mètode de Newton convergeixi cap a l'arrel determinada z^* .



Per exemple, les solucions de la funció $f(x) = x^2 - 1$ són -1 i 1 , per tant hi ha dues conques d'atracció, que ens diuen cap a quina solució convergim quan comencem a iterar des d'un nombre d'aquell interval.

Per la solució $x=1$ la conca d'atracció és l'interval $(0, \infty)$ i per la solució $x=-1$, és $(-\infty, 0)$. Així doncs, com que $x_0=7$ està dintre l'interval $(0, \infty)$ les iteracions del mètode de Newton començant des d'aquest punt convergiran cap l'arrel $x=1$.

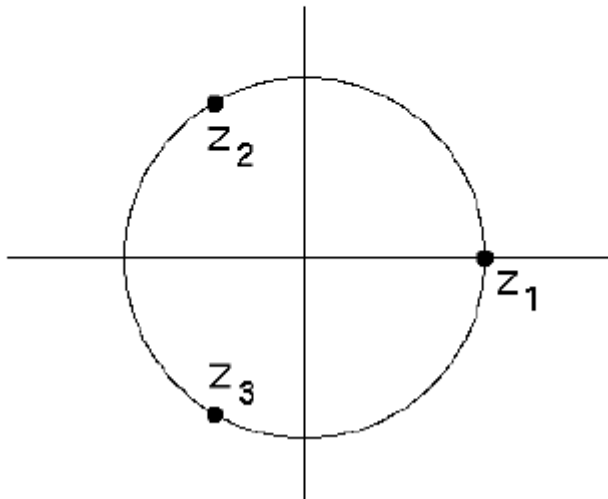
Si ara pensem en aquest mètode però en el pla complex, les conques d'atracció d'una arrel ja no seran intervals sinó subconjunts del pla complex. Si per exemple considerem la funció complexa $f(z) = z^2 - 1$, aquesta té dos arrels, i per tant, dues conques d'atracció. Si es comença la iteració per algun valor que estigui dins la regió pintada de color verd, la successió obtinguda convergirà cap a 1 , que és una de les solucions de l'equació. Si es comença per un valor pintat de vermell, cap a -1 .



Si es comença per un valor fora d'aquestes dues regions la iteració no convergirà a cap solució.

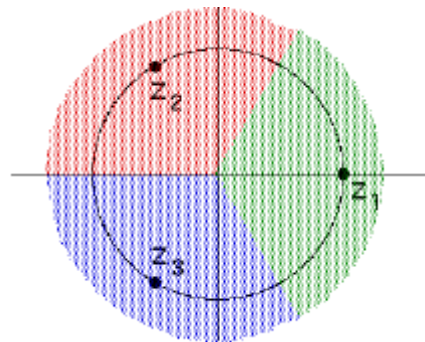
Si ara considerem la funció $f(z) = z^3 - 1$ les arrels són:

$$z_1 = 1, z_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

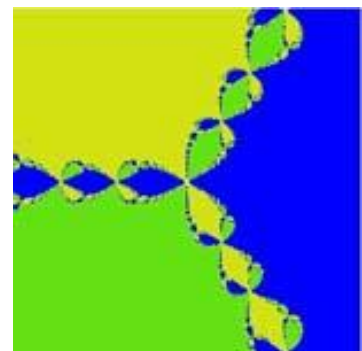


Com ja he explicat en el primer apartat del treball, les arrels cúbiques d' u es troben sobre una circumferència de radi u i són els vèrtex d'un triangle equilàter.

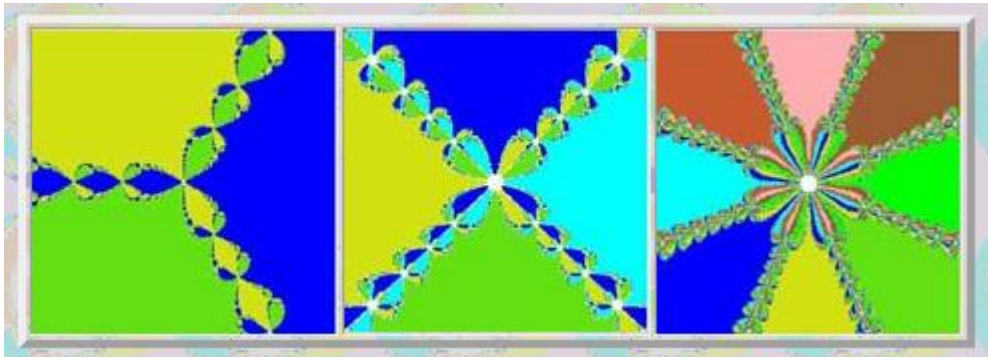
Per tant seguint l'exemple anterior les conques d'atracció corresponents haurien de ser més o menys així:



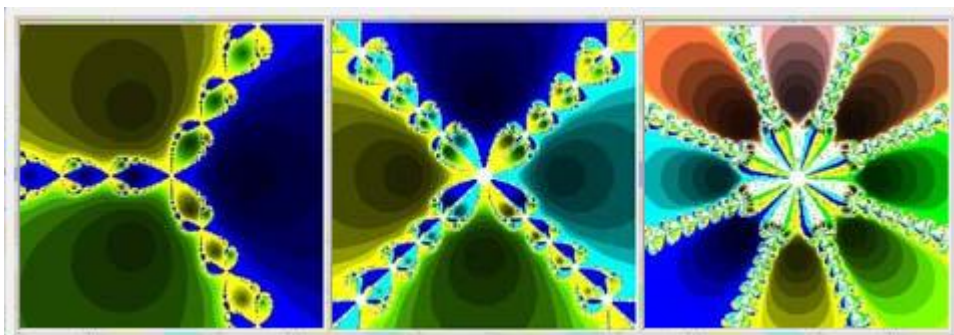
Però en realitat no són així, les conques d'atracció formen un fractal, on cada color representa la conca d'atracció d'una arrel diferent



Altres exemples de funcions complexes i les seves conques d'atracció.



La primera imatge correspon a una equació de grau 3, la segona de grau 4 i al tercera de grau 8. Cada color correspon a una conca d'atracció diferent i per tant, cada color representa una solució. A part de la solució cap a on convergeixen es podria ampliar més el gràfic afegint la velocitat en què convergeixen, donant colors més intensos a aquells valors que convergeixen més ràpid cap a l'arrel.



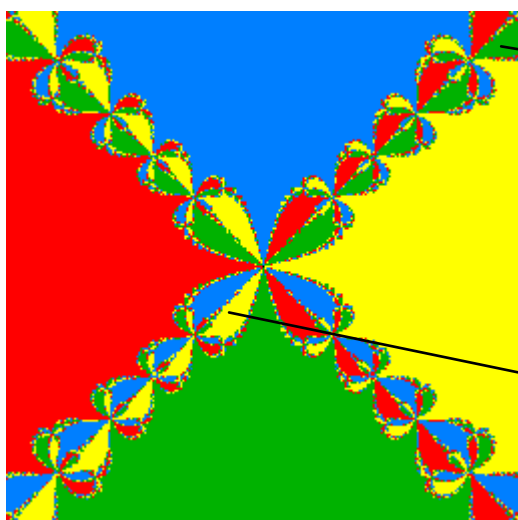
Gràfic que representa les conques d'atracció i la velocitat de convergència

3.3.2 Fractals de tipus Newton

Els fractals de tipus Newton es construeixen donant colors a cada punt del pla complex depenent de cap a quina solució de la funció convergeixen les iteracions del mètode Newton que comencen en aquells punts. Aquestes solucions o arrels s'han trobat utilitzant el mètode Newton.

Per exemple, $z^4 - 1 = 0$ té quatre solucions, dues són reals, 1 i -1 i les altres dues són i , $-i$. Quan es coneixen les arrels, es comença la iteració per tots els punts del pla complex dintre de la regió R. Aquesta regió s'estableix abans de començar les iteracions i en aquest cas serà un quadrat centrat a l'origen de coordenades on els vèrtexs són $(2, 2i)$, $(-2, 2i)$, $(-2, -2i)$ i $(2, -2i)$. Aquesta regió R es defineix tenint amb compte que les arrels quartes de 1 estan situades en una circumferència de radi 1. És per això que la regió R ha de ser més gran que la circumferència que conté les solucions per a poder mostrar una bona imatge fractal. En general per dibuixar un fractal de tipus Newton d'una equació de l'estil $z^p - q = 0$ la regió R serà un quadrat que ha de contindre dintre seu la circumferència de radi $\sqrt[p]{q}$. Depenent de cap a quina de les arrels convergeixi el mètode se li atribueix un color a aquell punt. Quan s'han realitzat les iteracions per tots els punts de la regió R, el fractal de tipus Newton de $z^4 - 1 = 0$ és el següent:

Tots els punt de color verd convergeixen cap a una de les solucions, $-i$. Els vermells cap a -1 , els grocs cap a 1 i els blaus cap a i . Hi ha quatre colors diferents ja que hi ha quatre solucions diferents.

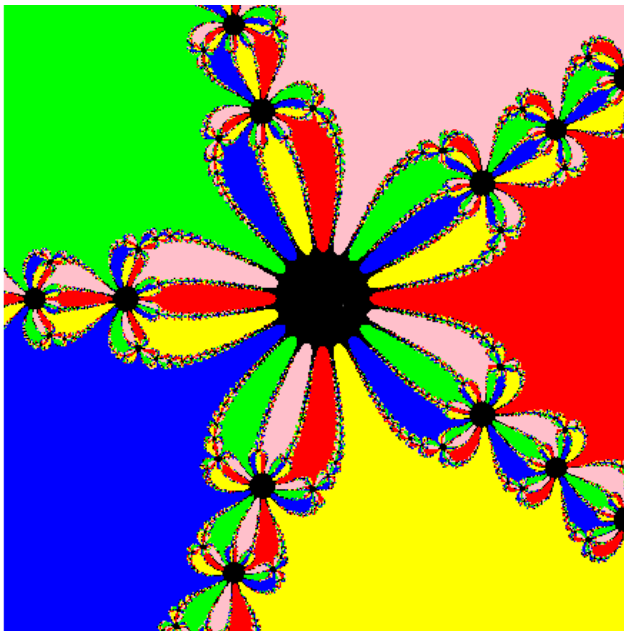


Aquest punt està a prop de l'arrel $z = 1$ però les seves iteracions convergeixen cap a l'arrel $z = -i$ representada de color verd.

La successió del mètode Newton per un punt d'aquesta regió caòtica en teoria hauria de convergir cap a $z = -i$ ja que és l'arrel que té més a prop, però convergeix cap a $z = 1$.

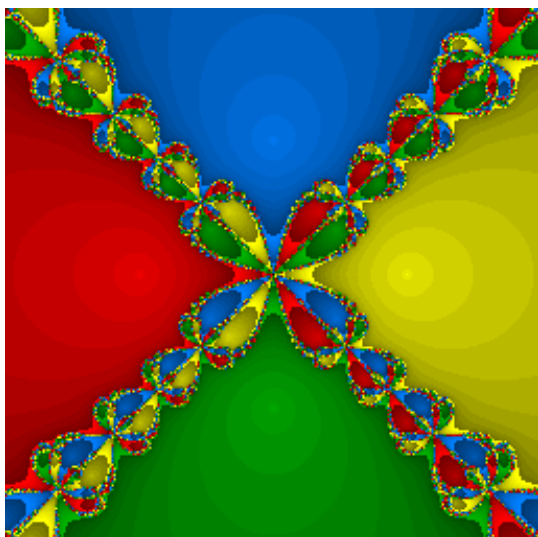
Les grans regions d'un sol color indiquen que tots els punts que contenen convergeixen ràpidament cap a l'arrel que representa aquell color. Però hi ha altres zones situades a la frontera de dos colors diferents que es comporten caòticament i no segueixen un ordre lògic. La successió del mètode Newton, per a un punt proper a una arrel qualsevol i que estigui dins d'aquesta zona caòtica, pot convergir cap a una arrel més llunyana. A més és aquesta zona caòtica el que dona a la imatge aquest aspecte fractal.

Un altre exemple de fractal de tipus Newton és el que correspon a la funció $z^5 - 1 = 0$



En aquest cas hi ha cinc colors diferents ja que són 5 les solucions de la equació. Els punts pintats de color negre són punts que al iterar-los no convergeixen cap a cap arrel.

Els fractals anteriorment esmentats són el resultat de atribuir colors depenent de l'arrel cap on convergeixin, però si a més s'afegeix la velocitat en què convergeixen cap a ella, el fractal resultant és aquest:

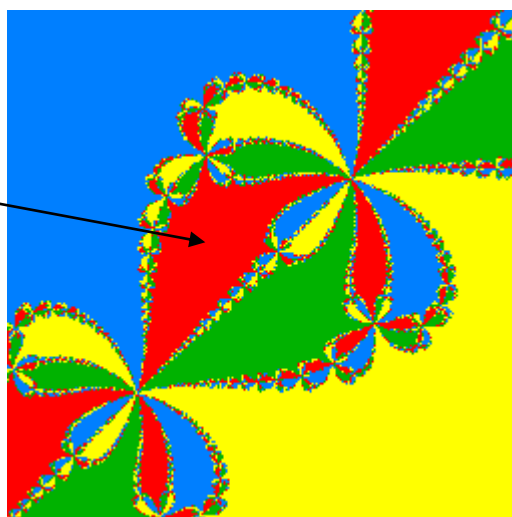
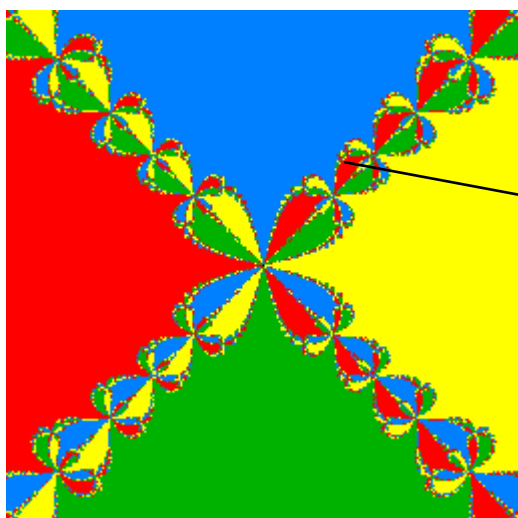


Totes aquestes iteracions que comencen en un punt qualsevol del pla complex tenen una ordre de parada, un moment en què el mètode de Newton ha obtingut una aproximació suficientment bona de l'arrel cap on convergeix. Aquesta proximitat es defineix abans d'iterar i pot ser un error de dècimes (0.1) de centèsimes

(0.01) etc. La velocitat en què convergeixen els punts del pla cap aquestes arrels té en compte el nombre d'iteracions necessàries per aconseguir un error igual o inferior al instaurat inicialment.

Les zones més clares són les més properes a l'arrel. Són regions on la successió obtinguda pel mètode de Newton i que s'inicia en aquest punts convergeix més ràpidament cap a elles , es a dir aconseguen un error inferior al instaurat amb menys iteracions. Així doncs la intensitat dels colors s'atribueix mitjançant la velocitat en què convergeixen cap a l'arrel, donant més intensitat als punts que tarden més a convergir-hi.

Aquests tipus de fractals també presenten autosimilitud com es pot observar en la següent imatge:



4. Fractals a la vida

4.1 Fractals en la natura

Encara que en el nostre llenguatge quotidià, no utilitzem habitual el terme fractal, els fractals ens envolten i el nostre cos mateix forma estructures fractals.

Com ja he explicat anteriorment els fractals són objectes matemàtics que resulten realment interessants, per què són els models ideals per estudiar i entendre moltes de les formes irregulars que poden trobar a la natura. Això es degut a que molts d'aquests objectes copien la propietat principal dels fractals, l'autosemblança. Es a dir, a diferents escales de detall, aquests objectes de la natura també tenen una estructura recursiva, i per tant estan formats per elements geomètrics de mida i orientació variable, però d'aspecte similar a l'estructura general.

L'exemple més clar per entendre un fractal és el d'un arbre. Si ens apropem a aquest arbre, podrem veure com les seves branques no són més que "petits arbres" amb la mateixa estructura que la de l'arbre inicial. Si ara ens acostem i mirem amb detall qualsevol d'aquestes branques podrem veure com, a la vegada, es componen de petites branques encara més petites però que mantenen la mateixa estructura inicial.

Podem trobar exemples de fractals en els núvols del cel, els perfils de les serralades, la forma de la costa marítima, en els cursos del riu i fins i tot en les galàxies de l'univers.

També en el nostre organisme: l'estructura del sistema circulatori, la ramificació de venes, artèries i nervis, la ramificació dels bronquis en els pulmons, les dendrites de les neurones, els alvèols...

Per últim deixar clar que els fractals que trobem a la natura són aproximacions de fractals, que exhibeixen l'estructura de autosemblança sobre un extensa, però finita, gamma d'escala. Els fractals no s'ajusten completament al que és la natura i òbviament no existeixen en el món natural com tampoc no existeixen rectes ni esferes, simplement serveixen per a descriure formes naturals fins ara indescriptibles ja que els fractals, com la natura, són massa irregulars per ser descrits fàcilment en el llenguatge geomètric tradicional però tenen una regularitat geomètrica degut a l'autosemblança.

Imatges fractals a la natura:

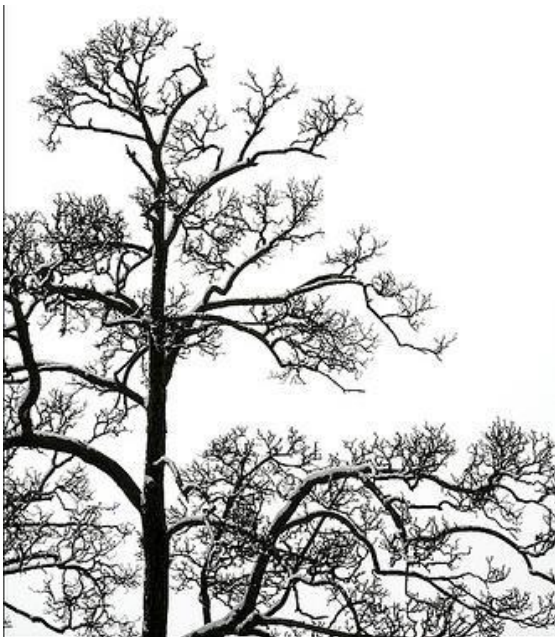


Figura 1. Les branques d'un arbre tenen una distribució fractal



Figura 2. Fractal patró del creixement caòtic dels nervis d'una fulla



Figura 3. Comestibles fractals: romanesco (creuament entre el bròquil i la col-i-flor) on es pot apreciar el patró de fractal en espiral



Figura 4. La falguera és un dels molts exemples que reflecteixen que la flora també són fractals.



Figura 5. L'encaix de la reina Ana, és un exemple de fractal floral. Cada flor produeix petites flors repetides

La xarxa que formen els rius i els seus afluents recorden molt a un fractal, al igual que les cadenes muntanyoses, les línies de costa o els grans deltes .



Figura 6. Línia de costa increïblement complexa a Florida

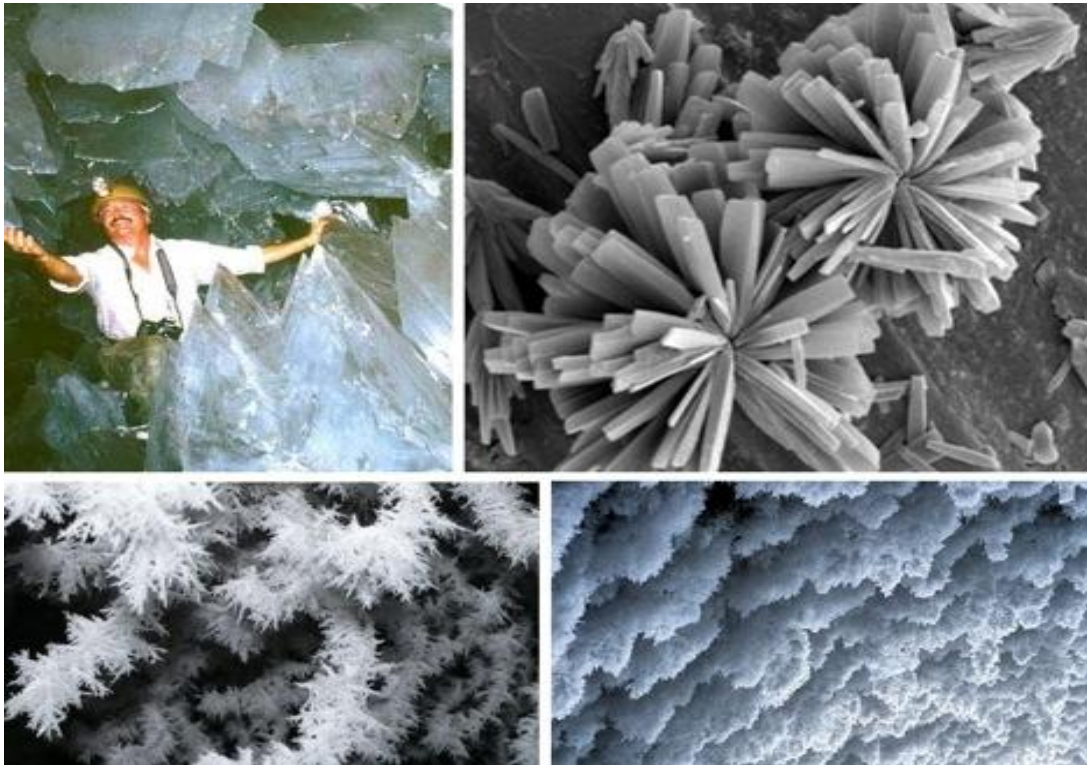


Figura 7. Rius i fiords



Figura 8. Alguns llamps al formar-se ho fan també amb forma fractal.

Molts vidres químicament formats i vidres de gel i el gebre són exemples impressionants de fractals a la natura. **Figura 9.**



L'ésser humà, encara que no ho sembli també conté estructures fractals, encara que no del nivell del romanesc. Els homes no estan formats per petites reproduccions d'ells mateixos, les estructures fractals són internes. Els sistemes de neurones, els bronquis i bronquíols o el sistema circulatori són exemples d'estructures fractals en els éssers humans. Aquest fenomen és degut a que la forma fractal és la forma en què els nutrients o la informació viatgen més ràpid pel cos.

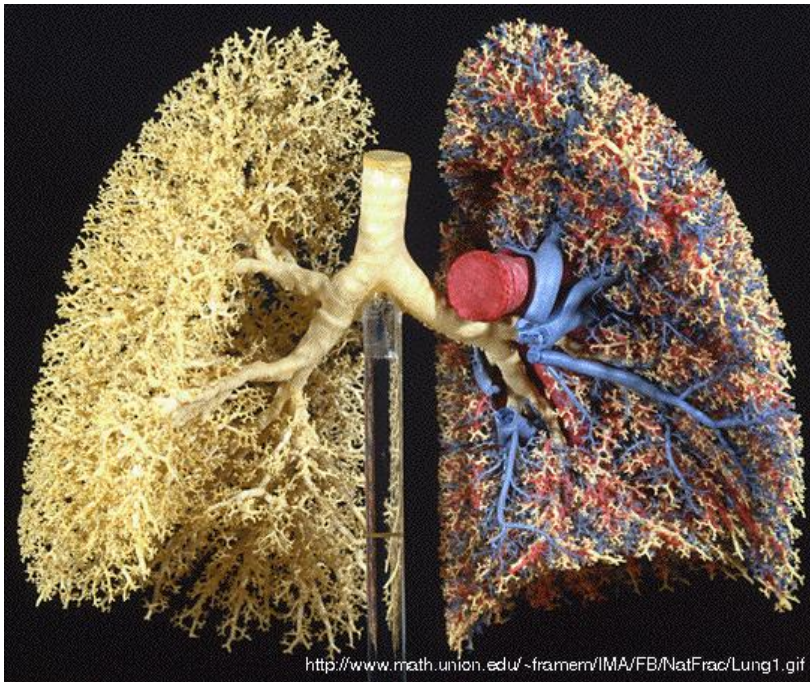


Figura 10. En aquesta imatge es pot veure com el sistema respiratori i el sistema circulatori formen un fractal. En aquest cas, el pulmó de l'esquerra mostra els bronquióls i alvèols pulmonars. El de

la dreta, les ramificacions que fan els capil·lars per poder arribar a tots els alvèols.

4.2 FRACTALS EN LA MÚSICA

Algunes obres d'importants autors com ara Bach, Beethoven o Mozart compleixen les propietats fractals.

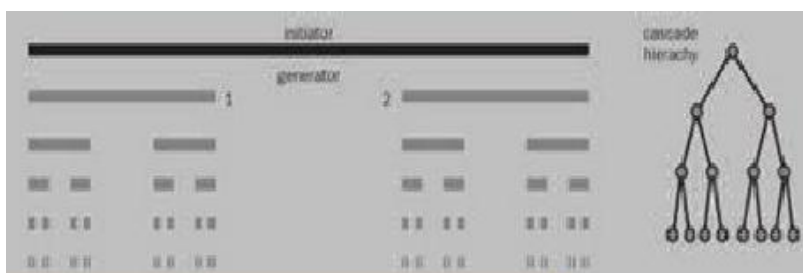
Tal com es pot veure en la imatge de l'obra de Beethoven, la "Primera Escossaien", l'estructura de la melodia es va repetint indefinidament formant una estructura semblant al conjunt de Cantor.

4.3 FRACTALS EN L'ARQUITECTURA

En l'arquitectura, els fractals estan presents en algunes estructures també. En arquitectura, el concepte de fractal pot apreciar-se en estils com ara el gòtic, on l'element determinant era l'arc apuntat, i on s'observa una seqüència en els elements de la façana. Un exemple seria la Catedral de Reims.



Gràcies a les facilitats tecnològiques, en l'arquitectura contemporània s'està donant una forta tendència a que les edificacions estiguin basades en models o funcions matemàtiques, permetent complexitats mai abans explorades en la història.



En aquesta imatge es pot veure una construcció seguint el conjunt de Cantor. La imatge de l'esquerra correspon al conjunt de Cantor original, i la dreta és la imatge a partir de la qual

s'ha creat la construcció de sota.

5. Construcció de fractals amb Fractint.

5.1 Programa Fractint.

Tot i que pot semblar mentida Fractint, és un programa totalment gratuït, probablement el millor programa de generació de fractals. Pot generar més de 100 tipus de fractals diferents, amb la possibilitat de crear-ne de nous a partir de fórmules definides per l'usuari, capacitat de zoom ràpida i profunditat, gran varietat de pantalles (reals o virtuals) tant en mida com en profunditat de color, multitud d'opcions de deformació... Aquest programa representa els fractals segons un algoritme de velocitat d'escapament discret, com podrem apreciar més tard.

Fractint va aparèixer al 1988 sota el nom de FRACT386. Només treballa amb aritmètica sencera, aconseguint un estalvi de temps. Aquest programa està disponible per tres sistemes operatius diferents: Mac, Linux i MS DOS, la versió que utilitzarem.

La versió que he utilitzat pel meu treball, està descarregada gratuïtament de la dreça <<http://fractint.programas-gratis.net/descargar>>

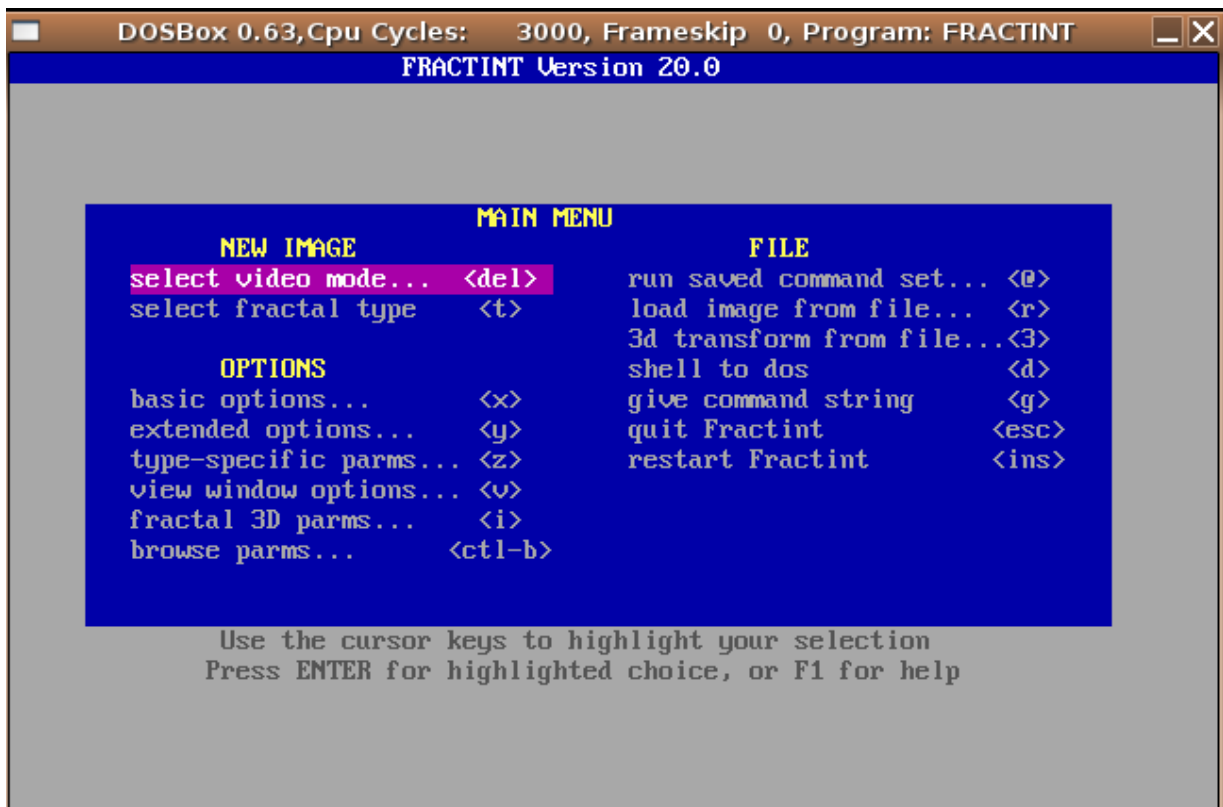
Al obrir el programa la primera imatge que ens trobem és aquesta:

```
DOSBox 0.63,Cpu Cycles: 3000, Frameskip 0, Program: FRACTINT
FRACTINT Version 20.0
Press ENTER for main menu, F1 for help.
Current Primary Authors
Timothy Wegner      Tim_Wegner@compuserve.com twegner@phoenix.net
Jonathan Osuch     73277.1432@compuserve.com
George Martin      ggmartin@compuserve.com
Robin Bussell      robin.b2@ukonline.co.uk
Contributing Authors
Pieter Branderhorst Past main author, solid guessing, menus
Juan J. Buhler     jbuhler@gidef.edu.ar Diffusion options, inverse Julia type
Mike Burkey       376x564x256, 400x564x256, and 832x612x256 UGA video modes
John Bridges      [75300,2137] superUGA support, 360x480x256 mode
Fulvio Cappelli  [100025,1507] ants options and speedup
Brian Corbino     [71611,702] Tandy 1000 640x200x16 video mode
Lee Crocker       lcrocker@netcom.com Fast Newton, Inversion, Decomposition..
Monte Davis       [71450,3542] Documentation
Paul De Leeuw     RDS (Random Dot Stereogram) Feature
Chuck Ebbert      [76306,1226] cmprsd & sqrt logmap, fpu speedups, fast parser
Dan Farmer        [74431,1075] orbits enhancements
Richard Finegold [76701,153] 8/16/.../256-Way Decomposition option
Frank Fussenegger Mandelbrot speedups
Sylvie Gallet     Sylvie_Gallet@compuserve.com Formula and math wizard
SPACEBAR toggles scrolling off/on
Copyright (C) 1990-99 The Stone Soup Group. Fractint may be freely copied
and distributed but may not be sold. See help for more information.
```

En aquesta pantalla es poden veure els noms dels creadors principals del programa, i també d'altres persones que van contribuir a la creació. Es dona la possibilitat de aturar el moviment del llistat d'autors secundaris prement la barra espaiadora.

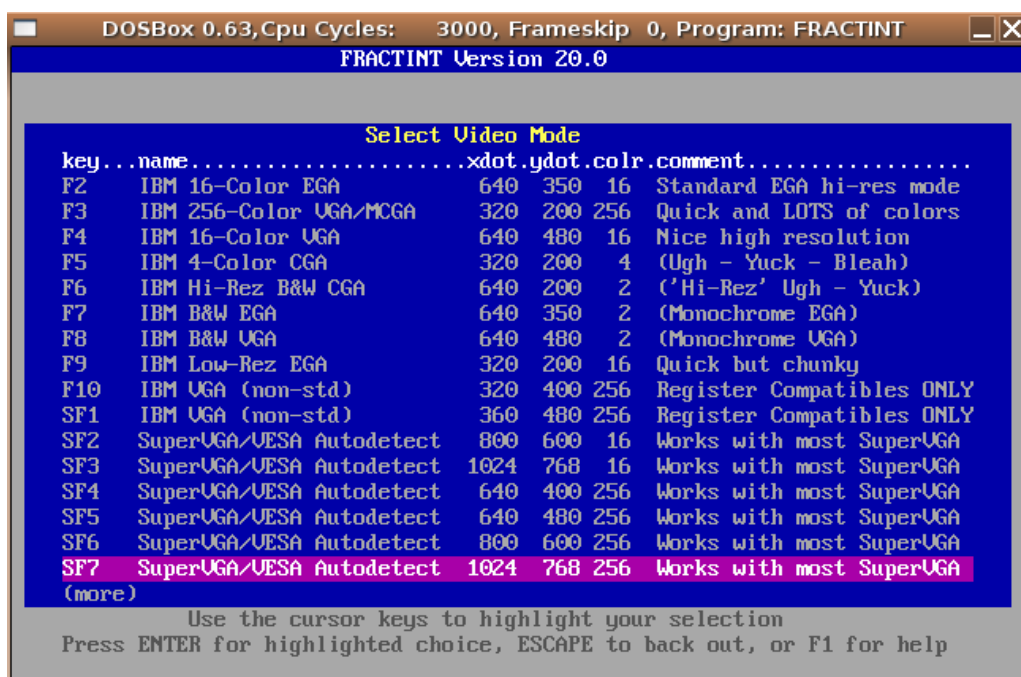
Cal dir que aquest programa es pot utilitzar amb el teclat, mitjançant tecles d'accés ràpid, que faciliten molt navegar pel programa.

Aquesta pantalla correspon al menú principal del programa



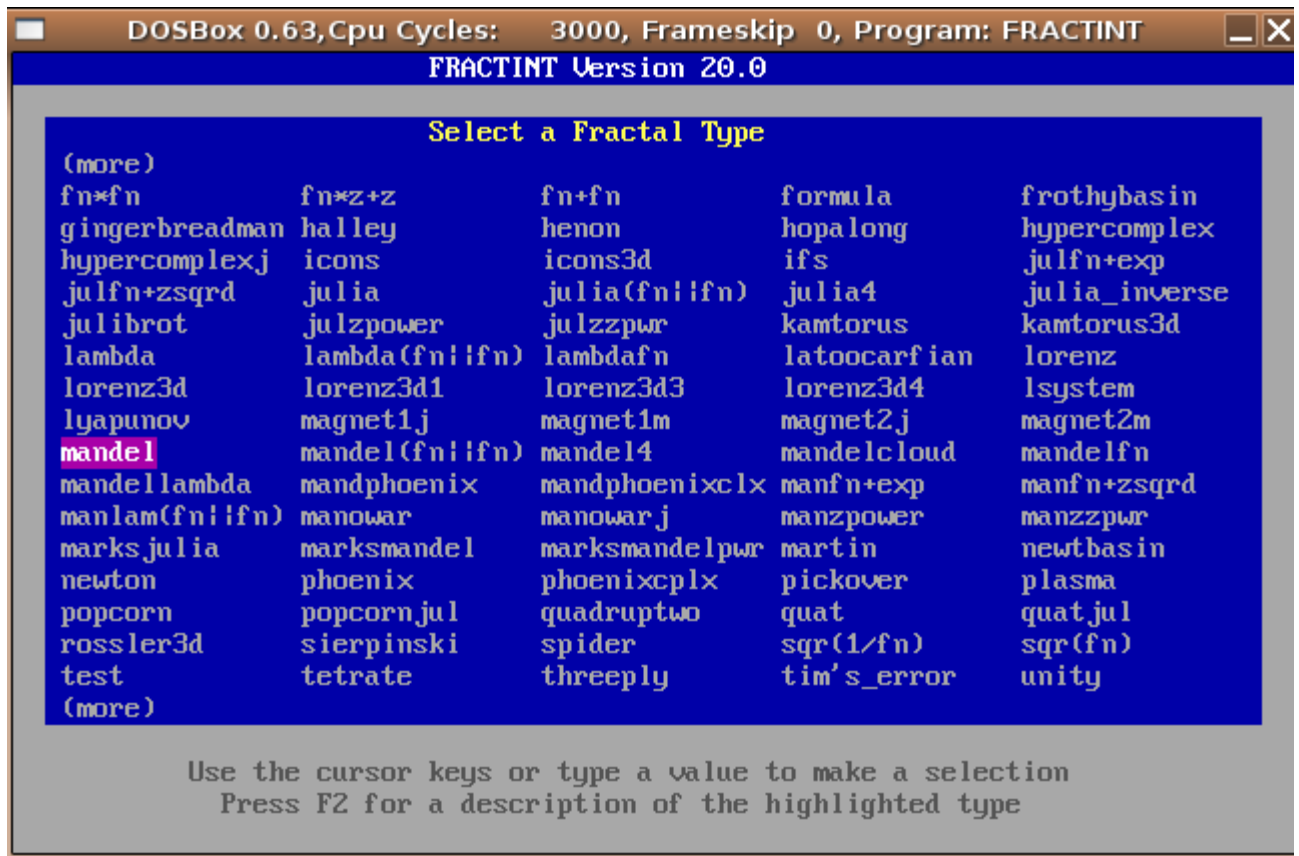
Aquí es poden trobar les opcions principals del programa, com ara seleccionar la resolució i colors del fractal que es crearà .

**select video mode... **



Des del menú principal també s'accedeix al menú de selecció de fractal.

select fractal type <t>

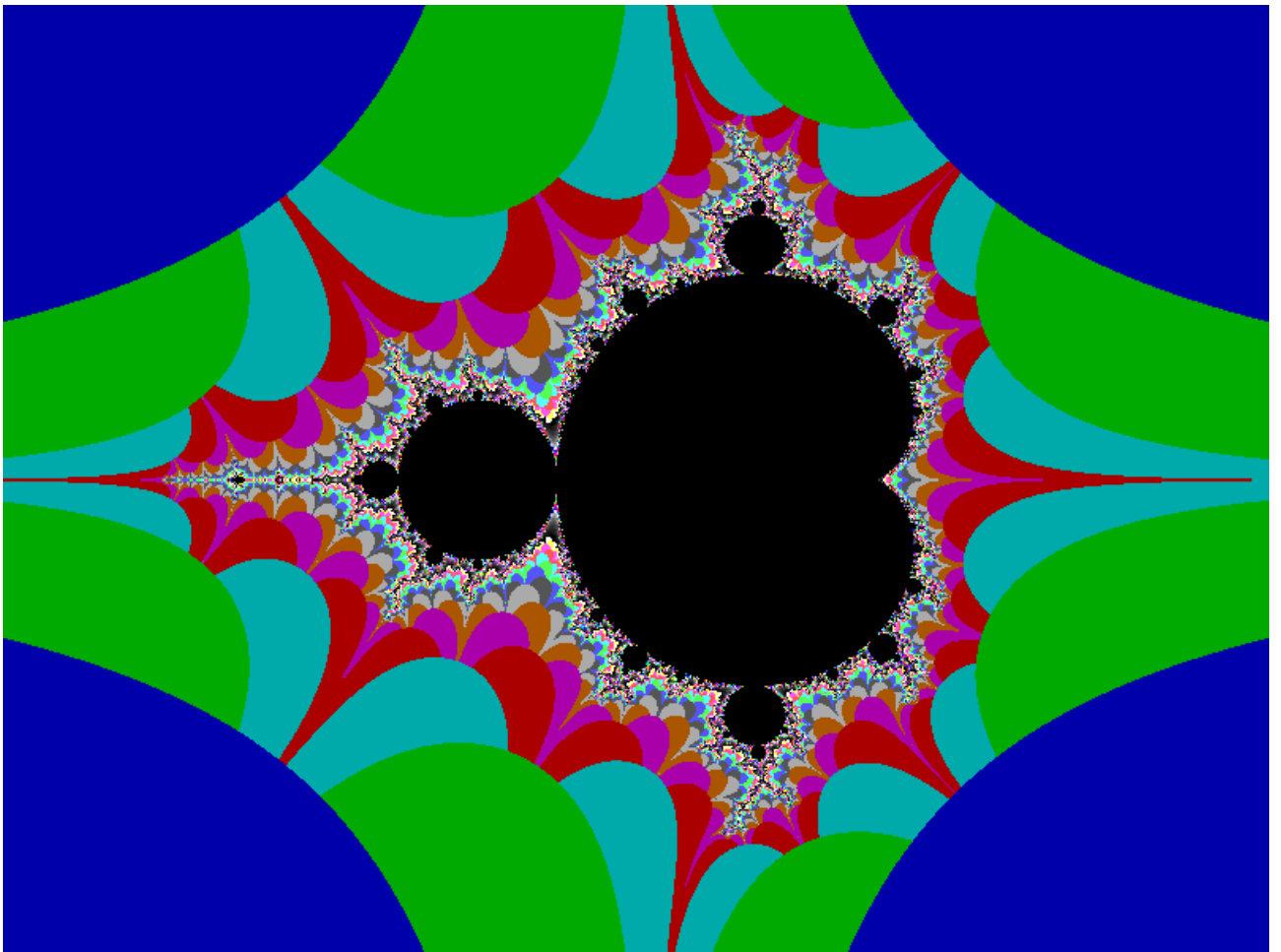


També des d'aquell menú podem entrar a les opcions bàsiques, des d'on podem decidir el nombre d'iteracions màximes o canviar els colors del fractal.

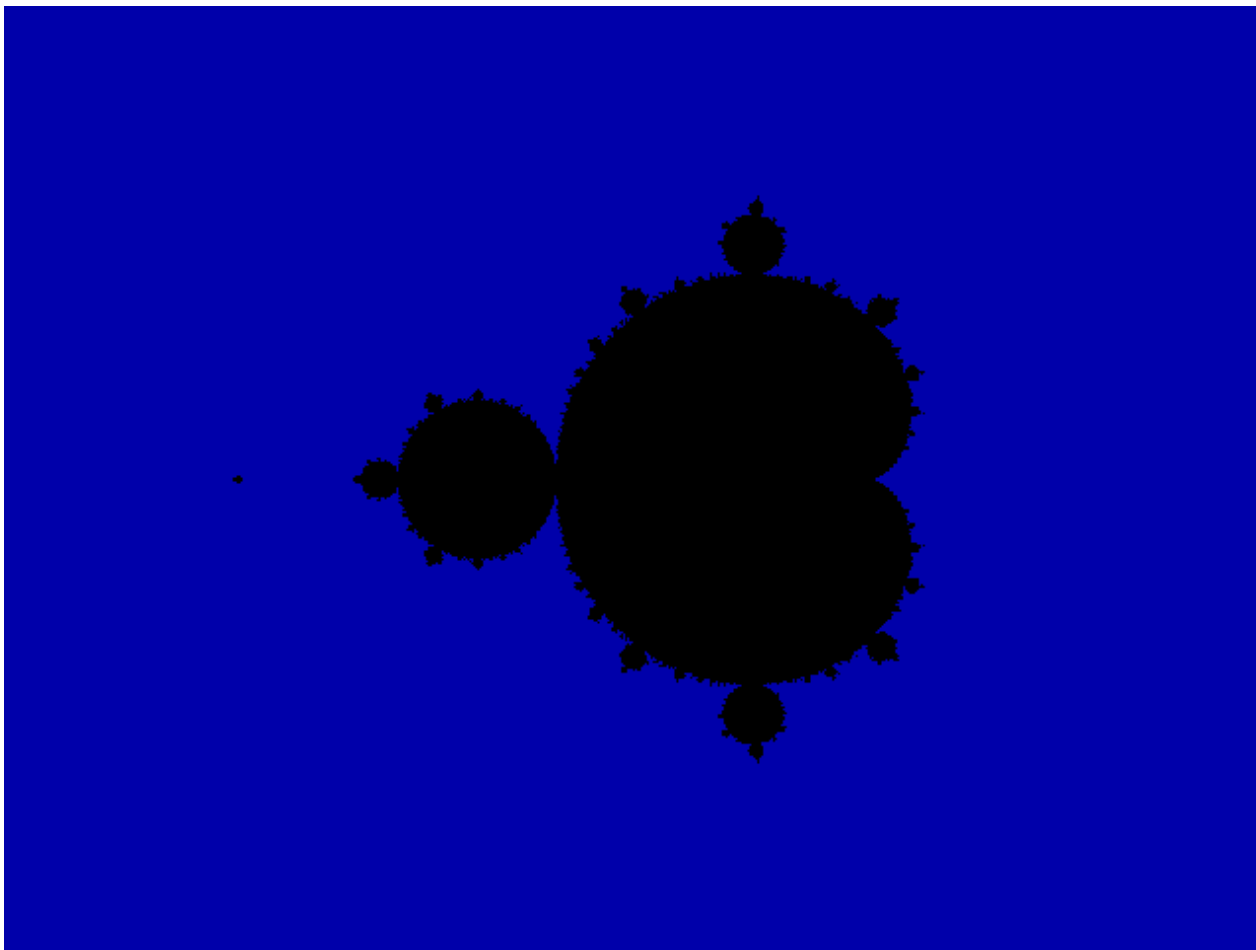
basic options... <x>

5.2 Construcció de fractals.

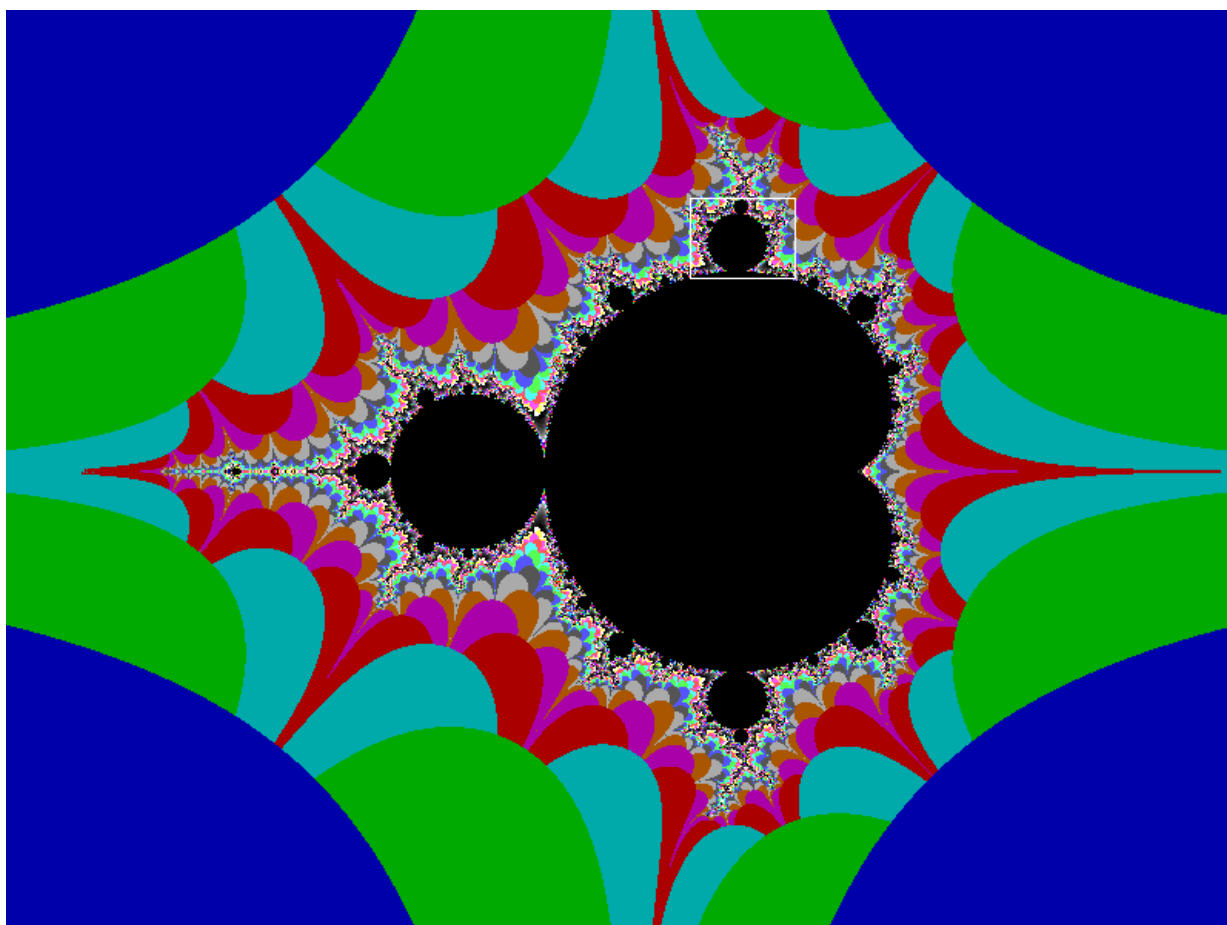
El primer fractal que construïrem és el conjunt de Mandelbrot. Per construir-lo, el primer pas és seleccionar-lo de la llista de possibles fractals. Aquest conjunt està representat pel nom *mandel*. A continuació, se'ns dóna la possibilitat de modificar aquest fractal, però per construir la imatge original seguim els paràmetres per defecte, encara que en lloc de fer el conjunt pel pla real, nosaltres el farem pel pla complex. Quan s'ha acabat d'introduir paràmetres a continuació es trien els colors i la resolució de la imatge, que en aquest cas serà 256 colors i una resolució de 800x600. La imatge resultant és la següent:



Gràcies a les opcions de modificar els colors que ens ofereix el programa, podem canviar els colors interns i externs. Per exemple, si pintem tots els punts que pertanyen al conjunt de negre, i tots els punts externs al conjunt els pintem de blau, sense tenir en compte la velocitat d'escapament com en l'exemple anterior, el resultat es aquest:

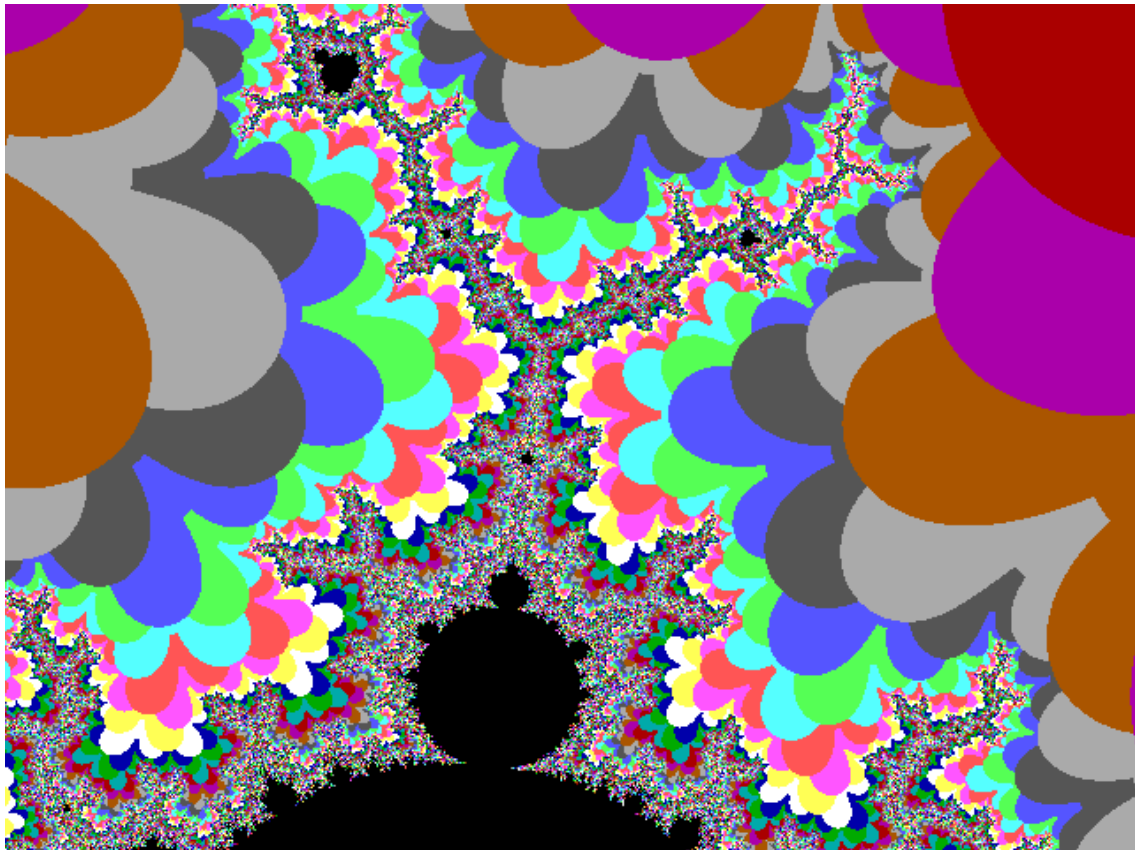


Aquest programa també permet relacionar ràpidament el conjunt de Julia associat a cada punt del conjunt de Mandelbrot. Si augmentem la zona marcada en la **Imatge 1**



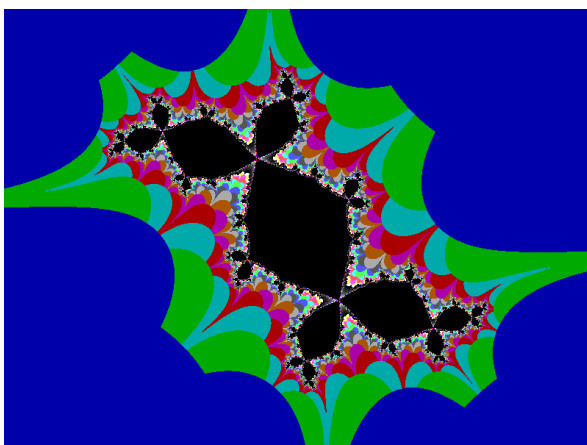
Imatge 1. Conjunt de Mandelbrot representant amb velocitat d'escapament

es pot veure com del disc adjunt al cardioide principal surten dues antenes, que sumades al peu del disc formen un total de tres antenes. (**Imatge 2**)

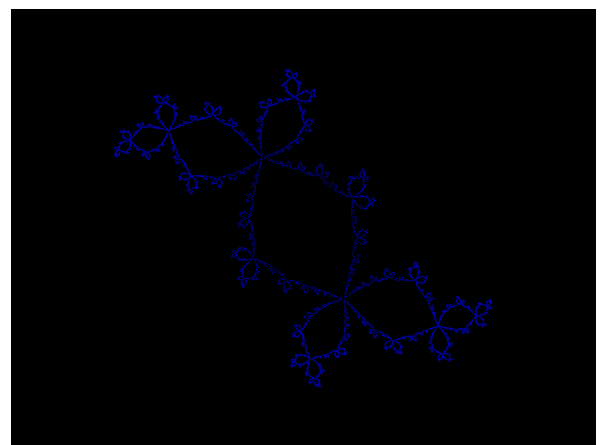


Imatge 2. Antenes del disc adjunt al cardioide principal

Això significa que els punts que estan dins d'aquest disc tenen un conjunt de Julia associat 3-periòdic atractiu. Aquest es el conjunt de Julia associat a un punt situat en aquest disc del conjunt de Mandelbrot:



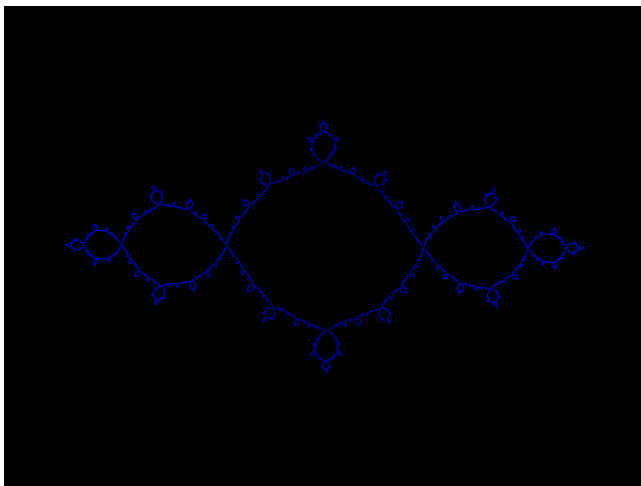
Imatge 3



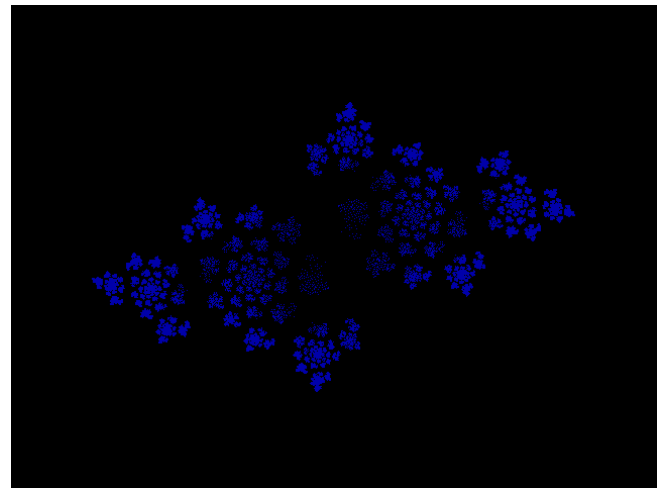
Imatge 4

En la **imatge 3** es veuen les diferents velocitats d'escapament dels punts que no pertanyen al conjunt, mentre que els punts que sí pertanyen estan pintats de negre. En la **imatge 4**, només estan pintats de blau els punts que fan frontera entre els que pertanyen i els que no. Aquests punts són en realitat conjunt de Julia.

Gràcies a aquest programa podem observar que hi ha dos tipus de fractals de Julia, els connexos i els que no ho són.



Imatge 5



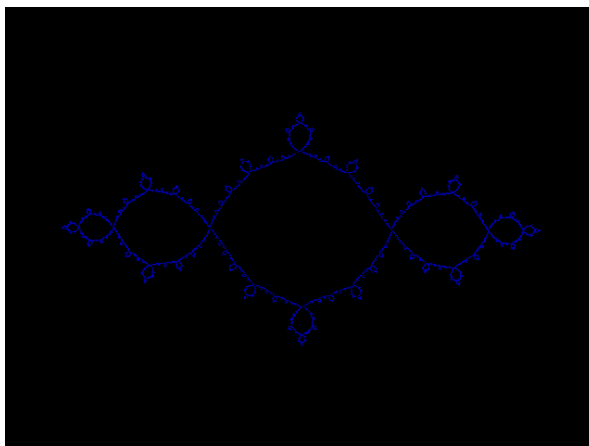
Imatge 6

La **imatge 5** correspon a un fractal de Julia connex, concretament a un conjunt que té un punt 3-periòdic atractiu i associat a un punt que pertany al conjunt de Mandelbrot. La **imatge 6** és un conjunt disconnex ja que els punts que el formen no estan junts, i es un conjunt de Julia associat a un punt que no pertany al conjunt de Mandelbrot.

Una de les eines més importants d'aquest programa és la facilitat per dibuixar conjunts de Julia amb diferents punts periòdics atractius:

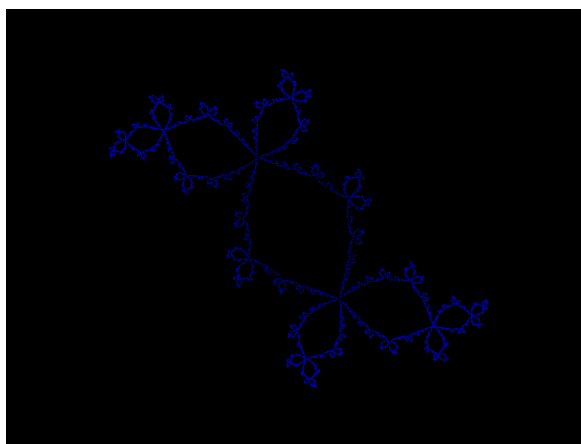
2-periòdic atractiu

Les corbes tancades coincideixen dos a dos



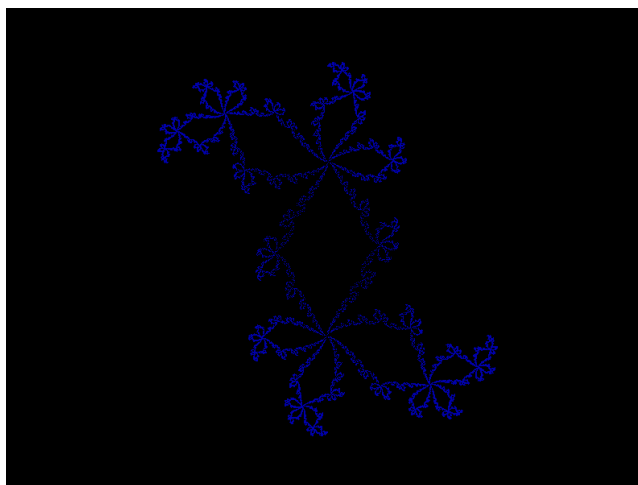
3-periòdic atractiu

Les corbes tancades coincideixen tres a tres

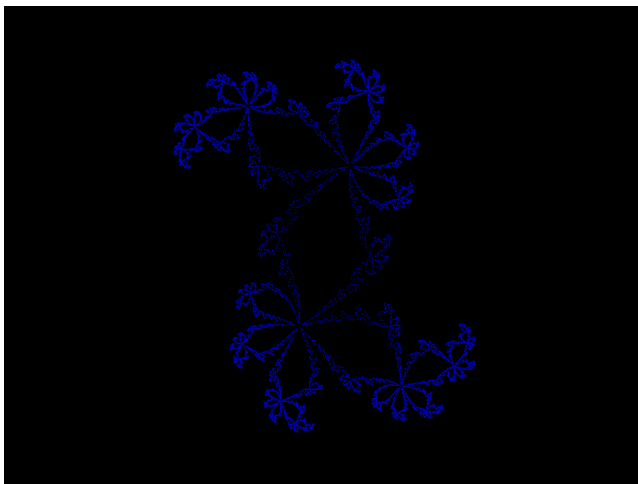


4-periòdic atractiu

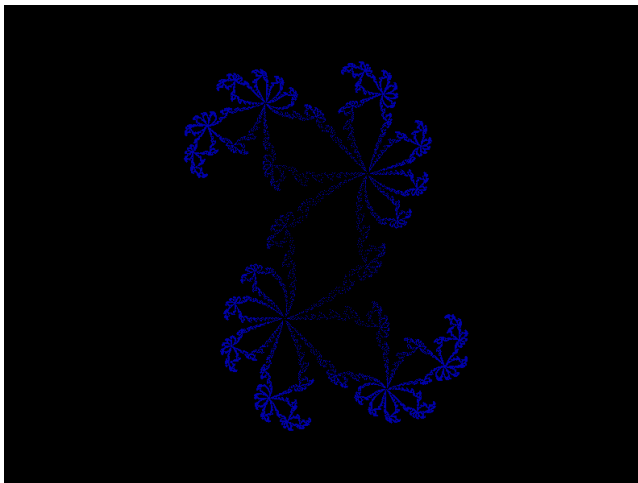
Les corbes tancades coincideixen quatre a quatre



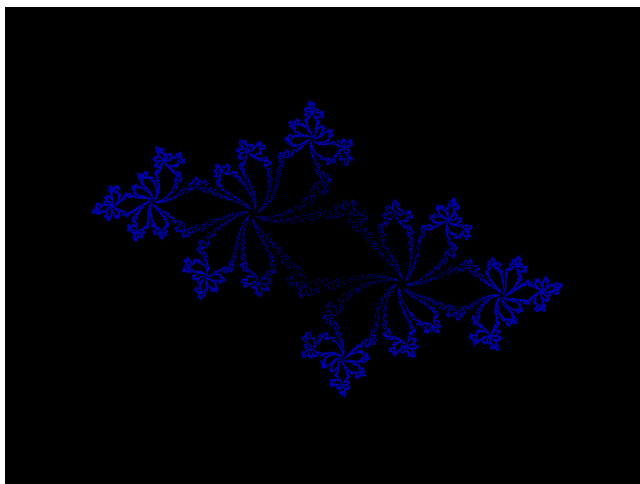
5-periòdic atractiu



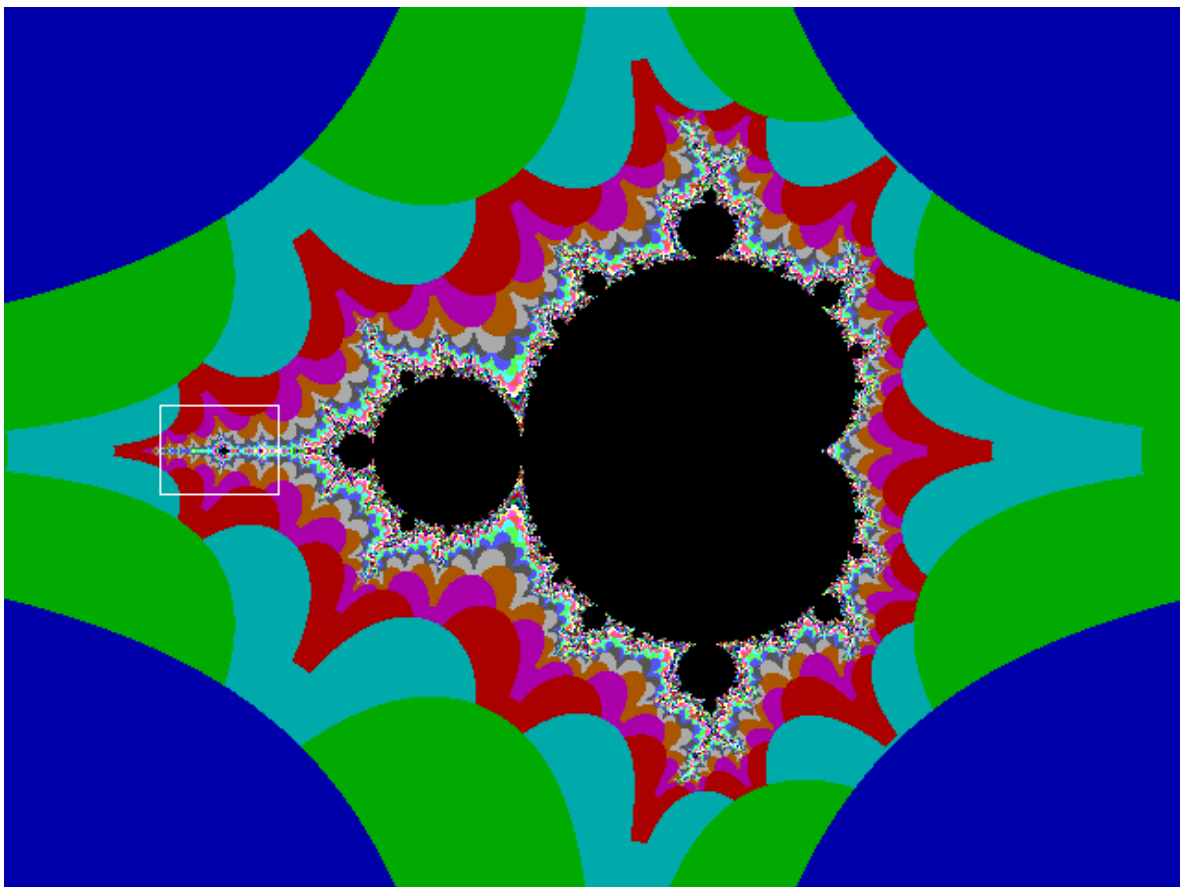
6-periòdic atractiu



7-periòdic atractiu

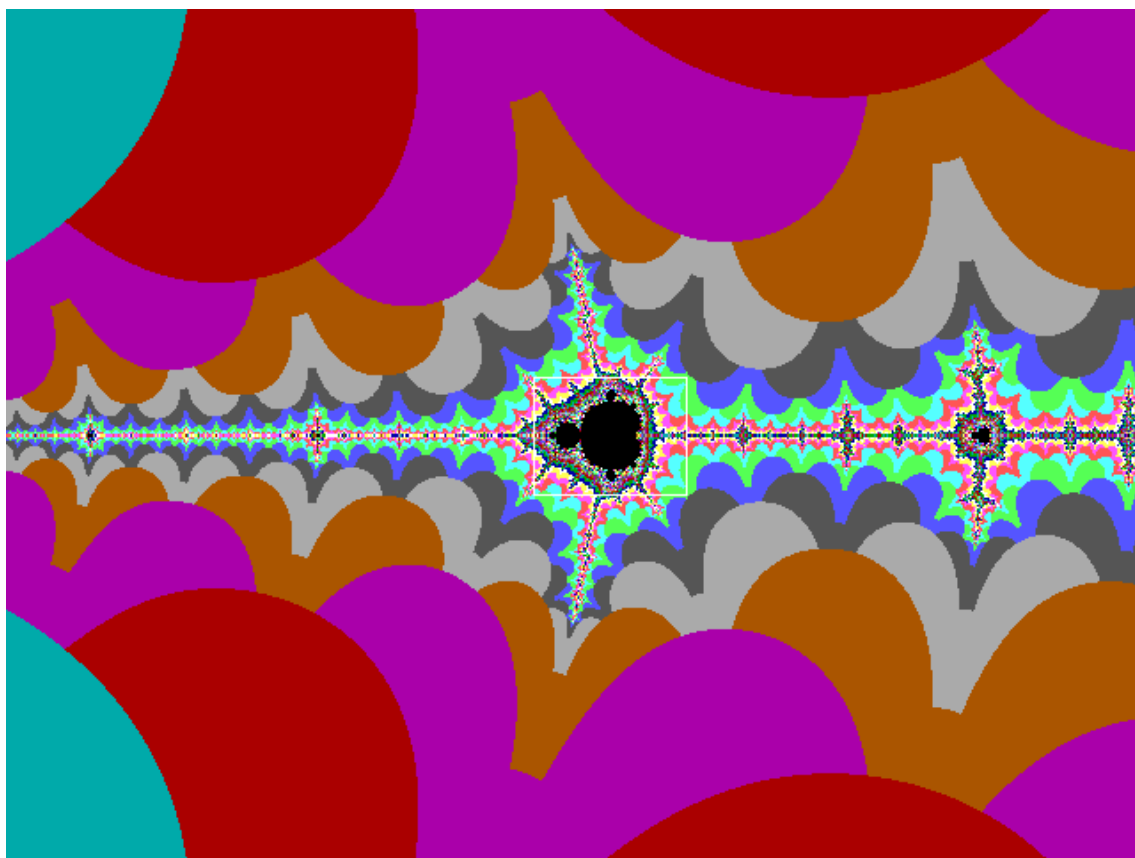


Aquest programa també ens permet ampliar una zona concreta del fractal per poder observar-la millor. Utilitzant aquesta eina podrem veure l'autosemblança del conjunt de Mandelbrot, una de les característiques d'aquest i de tots els fractals. El primer pas consisteix en ampliar la zona marcada de la **imatge 7**:

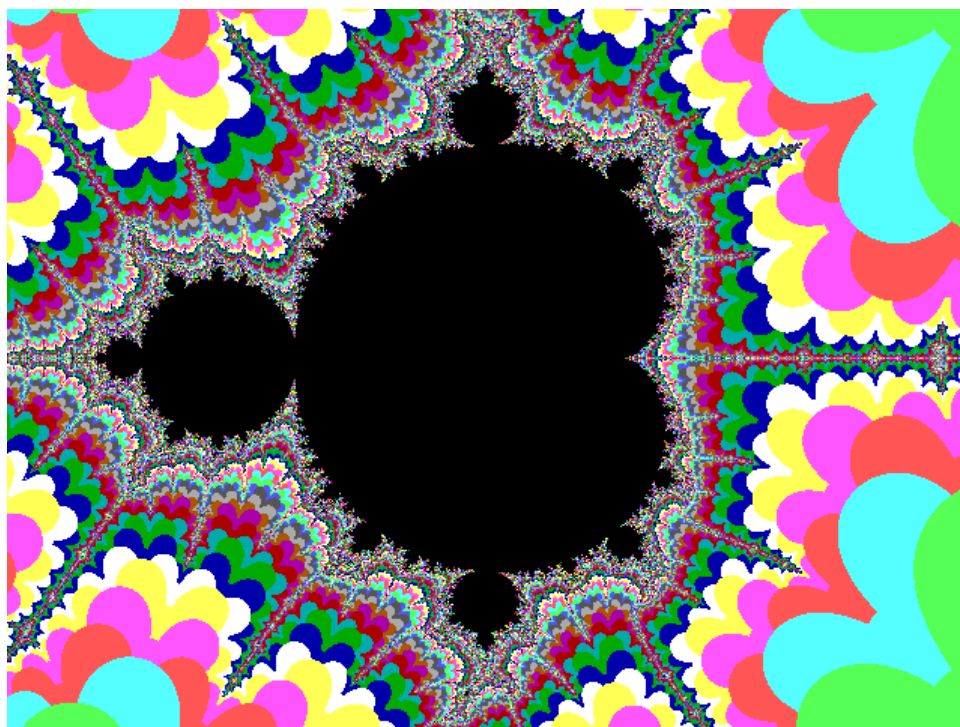


Imatge 7

La imatge resultant és aquesta (**imatge 8**)



Si es torna a aplicar un zoom al tros de la **imatge 8**, la imatge és la següent:

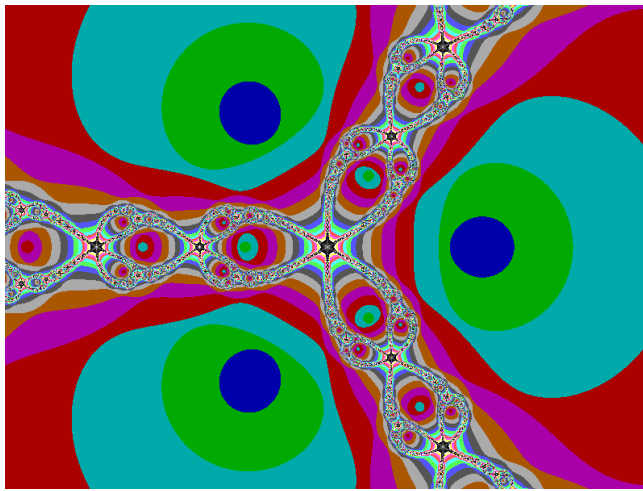


Imatge 9

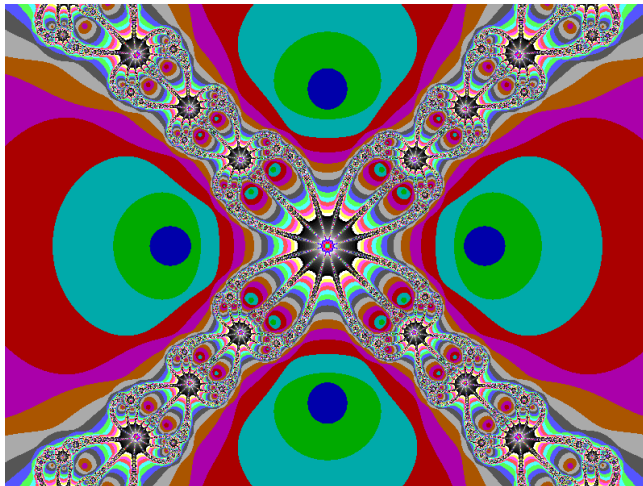
En aquesta **imatge 9** final és pot veure que el conjunt de Mandelbrot inicial es repeteix íntegrament en algunes parts del conjunt, ja que aquesta imatge ampliada d'una zona del conjunt és idèntica al conjunt total.

Fractint també ens permet creat fractals de tipus Newton. A continuació la taula amb les diferents equacions de nombres complexos i els fractals de tipus Newton associats, segons velocitat de convergència a l'arrel.

$$z^3 - 1$$



$$z^4 - 1$$



$$z^5 - 1$$



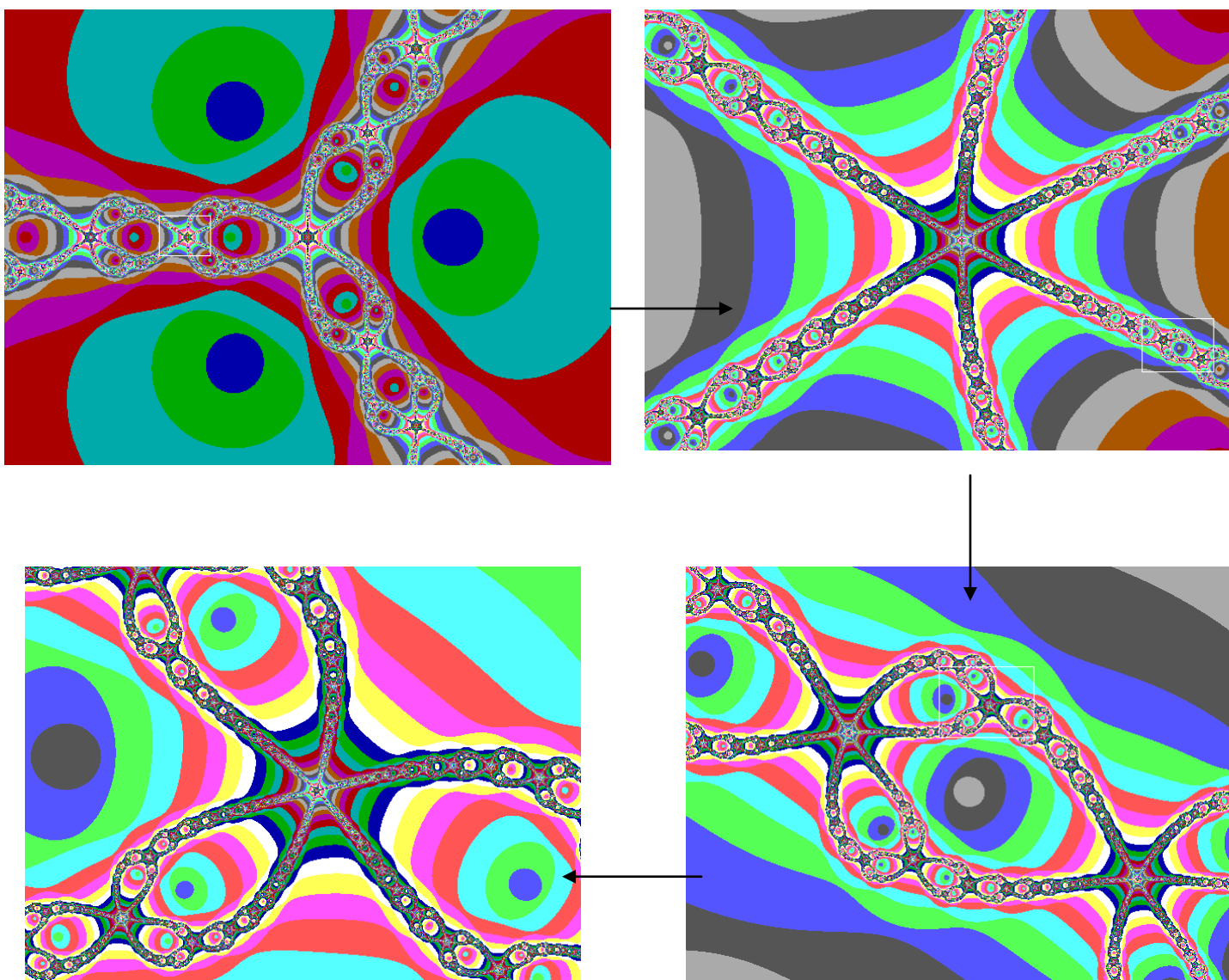
$$z^6 - 1$$



$$z^7 - 1$$



En els fractals de tipus Newton també es pot observar l'autosemblança que tenen. Prenent com a exemple el fractal associat a $z^3 - 1$ veiem que al aplicar zoom a una zona concreta, es pot veure com algunes parts del fractal es repeteixen infinitament.



Com es pot veure en la successió, les zones marcades en les diferents imatges es van repetint en tot el fractal, de manera que gràcies a aquesta ampliació de les zones es pot veure l'autosemblança.

Conclusions

Al acabar aquest treball de recerca, he après que les matemàtiques estan presents en gairebé tots els aspectes de la vida quotidiana, en especial els fractals, que encara que no ho sapiguem, són presents en molts llocs. Núvols, arbres, el nostre propi sistema circulatori són exemples de fractals. També he après que la geometria tradicional no és adequada a exemples a la vida real, ja que els avets no són perfectes i les esferes perfectes no existeixen.

A part d'aquests fractals reals, també hi ha els que estan al pla complex. Jo només he estudiat dos conjunts, el de Julia i Mandelbrot. Gràcies a aquest treball he sabut què eren, com es representen i la relació que tenen entre ells. En aquests fractals s'utilitzen nombres complexos, un conjunt numèric que jo desconeixia i que després d'acabar aquest treball he sabut què són, les formes que tenen...

L'altre gran apartat del qual jo no sabia que existia és el mètode de Newton. Jo sé que hi ha fórmules establertes per trobar les solucions d'equacions de grau 1 i 2, i que per grau 3 o més hi ha el mètode de Ruffini. Però aquest últim mètode només troba solucions enteres. És per això que trobo molt interessant aquest mètode, ja que troba arrels decimals d'equacions de qualsevol grau. Quan ja sabia com funcionava el mètode em va sorprendre molt que en aquesta cerca de solucions es forma un fractal, que en el treball he estudiat, mirant perquè es formen i quina forma tenen.

En el moment d'acabar el treball he quedat molt satisfet ja que he après moltes coses noves sobre matemàtiques que no sabia, i a partir d'ara ja sé que estem envoltats de fractals.

Agraïments

Per acabar voldria donar les gràcies a la meva tutora del treball Vanessa Florenza per aguantar-me i ajudar-me sempre que ho he necessitat i també al professor Àlex Trepal, per ajudar-me en la instal·lació del programa Fractint i en el seu funcionament.

Bibliografia

JUAN REDAL Enric i ANDRÉS M.Àngels . Matemàtiques 1r batxillerat
Grup Promotor /Santillana Educación S.L
2008

N. PISKUNOV. CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
Montaner y Simon, S.A.
1983

MARIANO GASCA. CALCULO NUMÉRICO
Mira Editores
1999

MIGUEL REYES. Fractales
Dept. de matemàtica aplicada, facultad de informática.

JOSÉ MARIA SORANDO. Fractales. Geometría del caos.
IES Elaios-Zaragoza

Recursos informàtics.

Mètode de Newton.

WLADIMIRO Diaz Villanueva. Métodos Numéricos. Maig 1998
< <http://www.uv.es/diaz/mn/fmn.html> >

Anàlisis numèric . Noviembre 2011
< http://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_num%C3%A9rico >

G. FIGUEROA M. Método de Newton. Tecnologías de Internet en la
Enseñanza de la Matemática.
<[http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/HERRAInternet/ecuaexecl/
node5.html](http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/HERRAInternet/ecuaexecl/node5.html) >

DEL VALLE SIERRA, Jesús. Método de Newton (para cálculo de
raíces).Curso de matemáticas dirigido a estudiantes de Ingeniería
de sistemas.
< <http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/latrue9.9.6.html> >

Newton en campo complejo
<[http://www.dma.fi.upm.es/java/sistemasdinamicos/Newton/complejo/
intro/teoriaComplejo.html](http://www.dma.fi.upm.es/java/sistemasdinamicos/Newton/complejo/intro/teoriaComplejo.html) >

Francesc Aguiló Gost y Alicia Miralles de la Asunción.
Consideraciones geometricas acerca del Método de Newton.
Diciembre 2003 Departamento de Matemàtica Aplicada UPC
< <http://www-ma4.upc.es/~matfag/gacetaRSEM/gacetaNewt-v3/gacetaNewt-v3.html> >

Fractals de tipus Newton

MUNUERA Carlos. Introducción a la Geometria Fractal:Fractales de tipo Newton.
<http://www.math.arq.uva.es/~cmunuera/MaterialDocente/Fractales/Fractal_6.pdf >

TRUJILLO Luz i TRUJILLO Bosque. La estructura fractal de las evoluciones.<<http://esunmomento.es/contenido.php?recordID=187>>

Fractales derivados de Newton-Raphson. Abril 2007
<<http://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/newton/>>

Fractals. Representació de fractals

Fractal. Febrer 2011
< <http://es.wikipedia.org/wiki/Fractal> >

HUGO Alfonso. Geometria Fractal:Una breve introduccion.Diciembre 2005.<http://www.planetamatematico.com/index.php?option=com_content&task=view&id=16&Itemid=1 >

Conjunto de Julia. Octubre 2010
<http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Julia >

Conjunto de Mandelbrot. Febrero 2011
< http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot >

Fractal de Mandelbrot dibujado con el algoritmo de tiempo de escape.<http://dglog.com.ar/blog/fractal_de_mandelbrot_algoritmo_tiempo_escape_python/ >

Arte fractal: Las matemàticas más hermosas.DivulgaMAT
<<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Exposiciones/artemate/Fractales/Articulo/articulo04.asp> >

BARRALLO Calonge, Javier. Geometría fractal: algoritmo y creación artística. < http://www.uv.es/metode/anuario2004/71_2004.htm >

Sistemas dinàmicos complejos
<<http://www.dma.fi.upm.es/docencia/cursosanteriores/02-03/segundociclo/sistdin/sdcomplejos.html#mandelbrot>>

TALANQUER, Vicente. Fractus, fracta, fractal. Fractales, de laberinto y espejos.

<<http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/147/htm/fractus.htm>>

Teoria fractal

<<http://www.dma.fi.upm.es/sonia/proyectos/tutorial-mov-brow/indiceteoriafractales.htm>>

Fractals en la vida real

Paisatges matemàtics. Octubre 2009

<<http://paisatgesmatemantics.blogspot.com/2009/10/els-objectes-fractals-i-la-natura.html>>

SANTAMARIA Fernando. Los fractales i la naturaleza. Octubre 2010

<http://md21011.socialgo.com/magazine/read/los-fractales-y-la-naturaleza-_34.html>

Fractales y series de Fibonacci en la Naturaleza. 2008

<<http://www.gran-angular.net/fractales-y-series-de-fibonacci-en-la-naturaleza/2008/09/11/>>

17 Fractales encontrados en la Naturaleza

<http://translate.google.es/translate?hl=es&sl=en&u=http://webecoist.com/2008/09/07/17-amazing-examples-of-fractals-innature/&ei=6kVcTcyCOsSs8AOF3JGVAg&sa=X&oi=translate&ct=result&resnum=9&ved=0CF4Q7gEwCDgU&prev=/search%3Fq%3DFractals%2Ba%2Bla%2Bnatura%26start%3D20%26hl%3Des%26sa%3DN%26rlz%3D1G1TSEJ_ESES409%26prmd%3Divns>