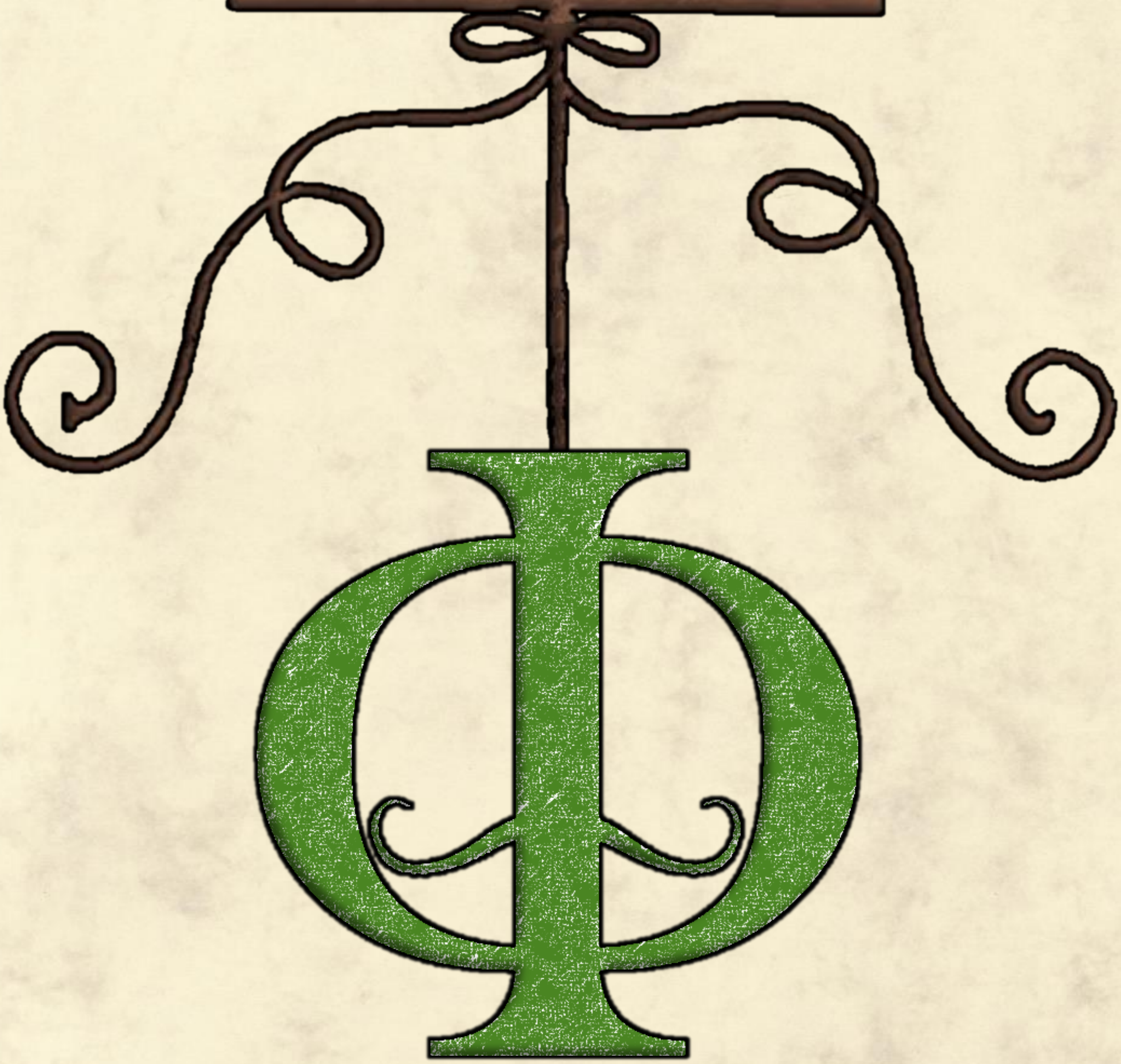
PHI, LA BELLESA DE LES MATEMÀTIQUES



BlessedXXVI

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Rafael Alberti

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ

«La realitat s’agrada d’amagar-se», digué Heràclit. Em sembla que aquest fragment del filòsof antic il·lustra clarament el que passa a l’actualitat amb el nombre Phi. Estem habituats a mirar les coses en la seva superfície, sense preguntar-nos perquè són d’una determinada manera, veiem que són boniques o lletges, però no ens aturem a fer una contemplació que vagi més enllà d’allò superficial. Passem per la vida sense veure la realitat de les coses, sense veure el transfons d’elles, i per tant, sense donar el valor que en realitat amaguen. Per què tenim la forma que tenim, per què els nostres ossos tenen les mides que tenen, per què les nostres faccions són com són? La resposta a totes aquestes preguntes és que compleixen la proporció àuria, la proporció divina; l’essència de la creació de tot allò que existeix.

Aquest treball, fet d’una primera investigació per diverses fonts, és un intent d’aproximació del nombre daurat a les nostres vides.
Aquest nombre ha existit des de l’antiguitat, concretament des de l’antiga Babilonia –3000 anys abans de Crist–, i ha anat avançant, dia a dia, passant per diferents mans de matemàtics, filòsofs, escriptors, biòlegs, botànics, arquitectes, pintors, etcètera, que han fet que aquesta història, aquest tema, perdurés durant més de 5000 anys fins a arribar als nostres dies, moment en que encara s’està estudiant. Per tant, fins al dia d’avui, aquesta proporció ha estat present en les nostres vides, sense que quasi ningú n’hagi sigut conscient. S’han anat descobrint llocs del món i del cos humà, com a microcosmos que és, on hi està present. Llocs insospitats, llocs que mirem cada dia en la nostra vida quotidiana i tan sols veiem la forma externa, sense adonar-nos que la seva composició, les seves mides... tot, absolutament tot, conté la proporció àuria.

Com es podrà comprovar al llarg d’aquest treball, la proporció àuria ha estat com un testimoni en una cursa d’atletisme, que ha anat passat d’una època a una altra, mantenint allò que s’havia descobert i afegint una nova informació que complementava la seva existència. A través d’aquestes pàgines, a part de conèixer què és el nombre Phi, com es pot calcular, on es pot observar, es farà un passeig per la història de la humanitat, descobrint personatges que han aportat, amb la seva saviesa, un coneixement més sobre aquesta proporció. D’aquesta manera entrarem en contacte amb Pitàgores, Euclides, Pacioli, Vitruvi, Ghyka i, amb gran sorpresa i honor, amb Salvador Dalí, entre d’altres.

Espero que aquest treball, us endinsi en aquest gran món, us faci obrir la curiositat de valorar tot allò que ha estat creat, davant una mirada nova, oberta, observadora, com ha estat en el meu cas, de la immensitat que abracen aquest seguit de xifres: una proporció, un número. Phi, la bellesa de les matemàtiques.

Objectius, motivacions i metodologia

La primera vegada que vaig sentir parlar del nombre Phi creia que estava davant d'un error. Phi? Mai ho havia sentit. En les classes de matemàtiques que fèiem de petits havia sentit parlar d'un nombre, el Pi. S'haurien equivocat? Això va provocar-me una curiositat vers aquest tema i vaig acudir a internet per tal de cercar un significat. Allà em vaig trobar tot un món en el qual, poc a poc, m'hi vaig endinsar. Cada pàgina que llegia feia brollar en mi més interès sobre aquest nombre. Com podia ser que tot l'Univers estès mesurat per un nombre del que mai havia sentit parlar?

Entre moltes de les diferents pàgines d'internet que vaig anar consultat sobre la proporció àuria cal destacar la relativa a Luca Pacioli. En aquesta s'explica un fet que em va sorprendre molt: el seu llibre titulat *De Divina Proportione* havia estat il·lustrat per Leonardo da Vinci per tal que la seva explicació fos més entenedora. Això em va causar encara més curiositat vers el tema, però, el que realment em va sobtar, fou trobar el nom de Salvador Dalí en mig de totes aquelles explicacions sobre la bellesa de les matemàtiques.

En aquell moment vaig recordar la meva visita al Teatre-Museu Dalí, en una excursió del col·legi, quan tenia poc més de nou anys, i l'impacte que em van produir aquells passadissos plens de quadres i d'escultures que no havia vist mai, així com la sensació i les opinions que corrien vers el seu autor, de boca en boca, entre el meus companys. Vaig prendre la decisió d'analitzar les seves obres, de valorar el treball d'un home considerat com un estrafolari i un *sense sentit*. El fet que en algunes pàgines parlessin d'ell i de la seva dedicació, casi obsessió, per la ciència em va fer posar mans a l'obra i vaig decidir fer una investigació per tal de demostrar que aquest artista utilitzava, de manera conscient, la proporció divina.

Arrel de tot això vaig decidir fer aquest treball, el qual està dividit en dues parts: la part teòrica i el treball pràctic.
L'objectiu de la primera part consisteix en fer una explicació de què és el nombre Phi, on es pot trobar, com es pot trobar i com es poden construir figures que mantinguin aquesta proporció –coneixements totalment necessaris per tal de saber com trobar la proporció–. Tot això va seguit d'una demostració de la seva existència al llarg de la història: com la saviesa ha anat passant d'autor en autor fins arribar a Salvador Dalí, personatge que donarà pas a la segona part del meu treball. Aquesta està format per l'anàlisi de diverses obres que es troben, a dia d'avui, exposades en el Teatre-Museu Dalí. El seu estudi és realitzat amb l'aplicació de la geometria àuria, estudiada en el cos d'aquest treball. Arrel de la meva admiració per Dalí, va sorgir en mi la necessitat i l'objectiu primordial de crear un llibre personal, que desvelés la realitat que amaguen les obres dalinianes; la divina proporció.

Per tal de poder prendre les mides de manera *àuria* he construït uns compassos i he creat unes plantilles per tal de realitzar la recerca de la proporció en les obres de Dalí. A més, tal i com ell va fer, he considerat oportú que l'estructura del treball, de la meva obra, contingués la proporció divina, seguint els passos del mestre. Aquest fet és degut a la necessitat de voler aconseguir que la meva investigació, plasmada en diferents fulles, sigui la més perfecte possible.

1- DEFINICIÓ DEL NOMBRE PHI

Des de temps antics s'ha sentit parlar del nombre Phi ja sigui en relació a les matemàtiques o a la natura. Tanmateix, quina és la seva essència? És potser un nombre? Una proporció? O una raó?
S'està davant del 1,618033... un seguit de xifres decimals indefinides, és a dir, un nombre irracional (vegeu *Annex 1* per veure la definició i els exemples d'aquest. p. 31). Hi ha moltes maneres sorprenents d'anomenar-les: número Phi, nombre d'or, raó àuria, raó daurada, proporció àuria, divina proporció, entre d'altres. Aquest es troba a milers de llocs de la natura, de l'art, de les escultures, de l'arquitectura, de figures geomètriques, etcètera. Així doncs, se li atribueix un caràcter estètic molt especial; millor dit, una importància mística. Encara que no sigui evident, la proporció àuria és una constant que es percep diàriament i quan s'observa dóna una sensació de bellesa i harmonia.

El nombre Phi fou considerat el primer i més rar nombre trobat al llarg de la història i, com tots els irracionals, fou representat amb una lletra de l'alfabet grec, Fi (Φ), –que correspon a la sisena lletra d'aquest abecedari–.
El nombre daurat, com a tal, fou descobert pels grecs a l'època antiga com una proporció o una relació. En aquest treball es podrà comprovar que la seva existència es remunta en el temps. Se l'anomena *Phi* en honor a l'escultor grec Fidias, qui ho aplicava a les seves creacions atès que creia en l'existència d'unes proporcions harmonioses.

1.1- Càlcul del nombre

En el primer apartat s'ha donat a conèixer la definició d'aquest nombre però no com es va arribar a trobar el seu valor. Com anteriorment s'ha mencionat, el nombre auri té un valor de $1{,}618033\ldots$ però, d'on surt aquesta xifra?

- **Càlcul del nombre mitjançant un segment**

Els primers que van descobrir el valor de Phi, com ja s'ha dit, foren els grecs. Ho van aconseguir al intentar dividir un segment d'una manera molt especial: buscaven que la raó entre la part major del segment i la part menor del mateix coincidís amb la raó de la longitud total i la part major del segment.

$$\underbrace{\overset{1}{\rule{3cm}{1pt}}\overset{x}{\rule{4cm}{1pt}}}_{1\,+\,x}$$

A la part més llarga li donaren el valor de x i a la part menor el número 1. Per tant, la longitud total del segment va ser $1+x$. Seguin els passos mencionats anteriorment, igualant les raons dites, apareixen dues fraccions amb una incògnita, la x.

$Fracció\ 1$: $\dfrac{part\ major}{part\ menor} = \dfrac{x}{1}$ $Fracció\ 2$: $\dfrac{segment\ total}{part\ major} = \dfrac{1+x}{x}$

$$\frac{x}{1} = \frac{1+x}{x}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Calculant l'equació de segon grau obtinguda, tenint en compte que és del tipus $ax^2 + bx + c = 0$ on $a = 1, b = -1$ i $c = -1$ i s'ha de resoldre amb la fórmula de l'equació de segon grau: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, apareixen dos resultats, un positiu i un altre negatiu. En aquest cas s'utilitzarà el positiu.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033\ldots = \Phi \qquad \cancel{x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = -0{,}618033\ldots$$

- **Càlcul del nombre mitjançant un segment (2)**

En aquest cas, s'ha de seguir el mateix procediment realitzat en l'apartat anterior però anomenant diferent les parts del segment.[1] El resultat (fent els mateixos càlculs) no serà el nostre número màgic, ja que, en aquest cas, el resultat que apareixerà serà el número auri unitari, representat amb la lletra grega δ (lletra d), però sempre es podrà arribar al valor del nostre nombre.

Com ja se sap, perquè un segment contingui la proporció àurea, la raó de la part major i la part menor, ha de ser la mateixa que la raó de la longitud total del segment entre la part major.

$1-x$ $\quad$ x

1

En aquest segon mètode, primerament es dóna el valor de 1 a la totalitat del segment i x a la part més gran del mateix. Per tant la part menor té el valor de $1-x$.

$$Fracció\ 1\text{:}\ \frac{part\ major}{part\ menor} = \frac{x}{1-x} \qquad Fracció\ 2\text{:}\ \frac{segment\ total}{part\ major} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Calculant aquest tipus d'equació, utilitzant $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ja que és una equació, com l'anterior, de segon grau de tipus $ax^2 + bx + c = 0$ on, en aquest cas, $a = 1$, $b = 1$ i $c = -1$, apareixen també dos resultats on s'ha de descartar el negatiu.

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618033\ldots \qquad \cancel{x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} = -1{,}618033\ldots$$

---

[1] El valor del segment en aquest cas val 1, en canvi, en l'apartat anterior val $1 + x$. D'aquesta manera, els valors de les parts del segment també varien.

Com es pot veure, en aquest cas, no apareix la fracció algebraica que representa al nostre nombre. El resultat que apareix és molt semblant a Phi, té els mateixos decimals però varia la primera unitat (de 1 passa a 0). Com s'ha dit anteriorment, aquest nombre s'anomena número auri unitari i per aconseguir el número d'or s'han d'utilitzar les raons que representen cada part del segment.

- Raó 1: si $\frac{x}{1} = \Phi$ i $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}61803 \ldots \rightarrow \frac{0{,}61803}{1} = 1{,}61803 \ldots = \Phi$
- Raó 2: si $\frac{x}{1-x} = \Phi$ i $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}61803 \ldots \rightarrow \frac{0{,}61803}{1-6{,}1803} = 1{,}61803 \ldots = \Phi$

1.2- Característiques d'un nombre característic

Phi, com s'ha dit anteriorment, és aquell nombre que es pot trobar en molts dels objectes que envolten el dia a dia, provocant en aquests una bellesa harmoniosa i màgica. Però, no només té aquestes característiques tant espectaculars en els llocs on hi ha la proporció. El nombre en sí, dins de les matemàtiques, té unes característiques sorprenents que cap altre nombre conegut té. Són les següents:

a) Si es suma una unitat, apareix el mateix resultat que si s'eleva al quadrat.

- $1{,}61803 + 1 \approx 2{,}61803$ o $\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}61803$
- $(1{,}61803)^2 \approx 2{,}61803$ o $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}61803$

b) Si es resta una unitat o es fa l'invers del nombre $\left(\frac{1}{\Phi}\right)$, dóna el mateix resultat (a més a més apareix el número auri unitari): [2]

- $1{,}61803 - 1 \approx 0{,}61803$ o $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}61803 = \delta$
- $\frac{1}{1{,}61803} \approx 0{,}61803$ o $\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}61803 = \delta$

c) Seguint les propietats esmentades anteriorment, se'n poden aconseguir dues més:

- En la primera propietat, on hi ha esmentat que: $\Phi + 1 = \Phi^2$, s'aconseguirà arribar a representar el nombre mitjançant arrels quadrades il·limitades. La següent fórmula va ser publicada per Nathan Altshiller-Court,[3] de la Universitat de Oklahoma, a la revista *American Mathematical Monthly* de l'any 1917.

$$\Phi^2 = 1 + \Phi \;\rightarrow\; \Phi = \sqrt{1 + \Phi}$$

Al substituir la lletra que representa el nombre Phi pel seu valor en aquesta equació $\left(\sqrt{1+\Phi}\right)$, s'obté una altre representació del mateix.

[2] Vegeu l'apartat *Càlcul del nombre mitjançant un segment (2)* (p. 8).
[3] Matemàtic nord-americà d'origen polonès (1881-1968).

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}}}}}$$

- Gràcies a la característica de l'apartat (b), on hi ha esmentat que $\Phi - 1 = \frac{1}{\varphi}$, es podrà obtenir la representació del número d'or mitjançant fraccions infinites. A aquest tipus de fracció se l'anomena fracció contínua i té com a fórmula $x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots}}}$ on els números a_n són enters. Tots els irracionals que continguin una arrel quadrada es poden expressar en forma contínua.

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi} \;\rightarrow\; \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Per tant, substituint la lletra que representa el nostre nombre pel seu valor, en aquest cas $\left(1 + \frac{1}{\Phi}\right)$, apareix la representació de Phi mitjançant fraccions indefinides.

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

d) Com ja s'ha dit, Phi es troba en la resolució de l'equació $x^2 - x - 1 = 0$, això indica que la igualtat es compleix al substituir la x per aquest valor. Per tant, $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1$.
A partir d'aquesta equació final, multiplicant l'equació varies vegades per Φ, es pot arribar a deduir que qualsevol potència de Φ es expressable en funció de la suma de dues potències de graus inferiors del mateix número. Dit matemàticament: $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$, on n és un número enter.

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$$
$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2$$
$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3$$
$$\ldots$$

e) Així mateix, utilitzant l'apartat (d), es poden trobar altres equivalències per les potències de Φ, en les quals tant sols intervé el propi valor de Phi i un seguit de nombres naturals.

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2$$
$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3$$
$$\ldots$$

Per obtenir qualsevol potència de Φ només s'ha de multiplicar el propi nombre auri per un número, el qual és la suma dels coeficients de les potències anteriors a Φ i sumar-hi el coeficient de la potència anterior. Per exemple, mirant l'esquema anterior, a Φ^5, el 5 que multiplica a Φ és la suma de 3 i 2 que apareixen a l'expressió de Φ^4 i el 3 és el nombre que multiplica a Φ en aquesta última potència.

1.2.1- Per què se´l coneix com a *nombre d'or*?

A títol de curiositat, a les matemàtiques hi ha molts conjunts de nombres: els nombres reals, els enters, els irracionals, els naturals, entre d'altres, però hi ha un grup que sovint passa desapercebut. Aquest tipus de nombres ajudarà a explicar el per què Phi té aquest nom tant valuós, *nombre d'or*. Estem parlant dels nombres metàl·lics.

Els metàl·lics són números plurals, positius o negatius i irracionals que reben noms especials relacionats amb els diferents metalls, d'aquí la procedència del seu nom. Els nombres d'aquesta família, introduïda per la matemàtica argentina Vera de Spinadel a l'any 1994, es generen a partir d'arrels positives d'una equació de segon grau de tipus $ax^2 - bx - c = 0$, on $a = 1$ (sempre) i, b i c són nombres enters positius.
Alguns d'aquests nombres metàl·lics tenen nom propi i són molt coneguts. El més famós de tots ells s'obté quan $b = 1$ i $c = 1$. En aquest cas l'equació que en resulta és $x^2 - x - 1 = 0$ i l'arrel positiva és el nombre d'or, Phi.

En la *Taula 1* es poden veure els nombres metàl·lics més importants juntament amb el seu valor.

NOMBRE	B	C	VALOR APROXIMAT	VALOR EXACTE
Or (Φ o δ_{Au})	1	1	1,618033989 …	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Plata (δ_{Ag})	2	1	2,414213562 …	$1+\sqrt{2}$
Bronze (δ_{Br})	3	1	3,302775638 …	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$
Coure (δ_{Cu})	1	2	2,000000000 …	2
Níquel (δ_{Ni})	1	3	2,302775638 …	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$
Platí (δ_{Pt})	2	2	2,732050808 …	$1+\sqrt{3}$
…	…	…	…	…

Taula 1

1.3- Relació amb la successió de Fibonacci

La història de les matemàtiques a vegades és sorprenent i sempre inesperada. Això passa amb aquesta successió i el nombre Phi. És impossible parlar de Phi sense tenir en compte aquest seguit de xifres indefinides.

Una successió o progressió és una llista de nombres ordenats d'una manera específica. Per exemple: 2, 4, 6, 8, 10... Cada un d'ells és anomenat *terme de la successió* i el conjunt d'elements ordenats (probablement infinit) se li denomina *longitud de la successió*. L'ordre en què apareixen els termes d'una progressió és rellevant i un mateix pot aparèixer en més d'una posició.

1.3.1- Història de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1170-1250), també conegut com Leonardo Fibonacci o, de forma més comuna, simplement, Fibonacci, fou el matemàtic italià amb més talent de l'edat mitjana. El seu pare tenia un càrrec diplomàtic, representava als comerciants de la República de Pisa que negociaven a Bugia, Síria, Egipte, entre altres llocs. Quan Leonardo era adolescent va acompanyar al seu pare al Nord d'Àfrica i allà va conèixer les tècniques matemàtiques utilitzades pels àrabs, així com els seus nombres –entre els quals estava inclòs el 0–, i va aprendre a sumar, restar, multiplicar i dividir utilitzant les xifres indo-aràbigues. S'ha de tenir en compte que a Pisa s'utilitzaven els nombres romans, on era impossible escriure les operacions pas a pas ja que els càlculs eren fets amb *l'Àbac*[4] i no existia el nombre 0.

Quan Leonardo torna a Pisa, pels volts de l'any 1200, amb la intenció de donar a conèixer la numerologia aràbiga i els nombres tal com els coneixem a dia d'avui, va escriure a l'any 1202 el llibre anomenat *Liber Abaci*, compost de diversos problemes matemàtics. El resultat d'un d'ells dóna lloc a la seqüència de Fibonacci. Es tracta d'un problema sobre el creixement d'una població de conills (vegeu el problema i la resolució a l'*Annex 3*. p. 33).
L'única intenció de Pisano era donar a conèixer la nova numerologia, sense ser conscient del transcendental descobriment que havia fet. Per això, s'hauran d'esperar uns quants anys per comprovar que la seqüència, i per tant el nombre d'or, està present en moltes coses de la nostra vida quotidiana, donant harmonia i bellesa a tota creació.

1.3.2- Successió de Fibonacci

Aquesta magnífica successió és una progressió infinita de nombres naturals que cada terme s'obté de la suma dels dos termes anteriors.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \ldots$$

Cada xifra de la successió s'anomena *número de Fibonacci*. Aquesta sèrie de nombres no tindria res en particular si no fos per les seves característiques. Es pot trobar representada en la natura, té nombroses aplicacions a la ciència, en les matemàtiques, en la teoria dels jocs i té una sèrie de propietats i curiositats (vegeu-les a l'*Annex 4*. pp. 34-35).

[4] Eina per al càlcul manual d'operacions aritmètiques que consisteix en un marc amb filferros paral·lels per on es fan córrer boles (del llatí *abăcus*, i del grec *άβαξ-ακος*, que significa *taula*).

2- EL NOMBRE PHI A LA GEOMETRIA

La geometria és una branca de la matemàtica que s'ocupa de l'estudi de les propietats de les figures en el pla o en l'espai, incloent punts, rectes, plans, etcètera. És una de les ciències més antigues que es coneixen.

Segons expliquen els historiadors neix a la vora del riu Nil, lloc on les crescudes i estiatges del Nil obligaven a situar les marques i els límits dels camps de conreu després de cada inundació. La mesura d'àrees, distàncies i angles va afavorir el desenvolupament d'una sèrie de tècniques per executar aquests processos amb precisió. En altres paraules, l'inici de la geometria a un nivell essencialment pràctic.
Van ser els inquiets i curiosos habitants de Grècia els que van sistematitzar i formalitzar aquestes estructures, descobrint propietats curioses, elaborant teoremes i formulant demostracions que tindran validesa universal. L'estructura bàsica de la geometria ha arribat intacta a l'actualitat i segueix estudiant-se tal i com ho van fer els grecs fa segles.

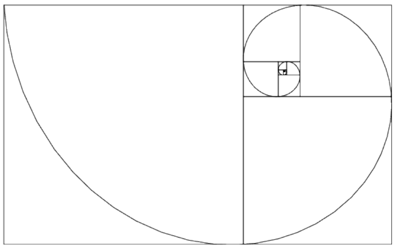
Hi ha molts tipus de figures geomètriques: el quadrat, el rectangle, el triangle, etcètera. Però no es té la consciència de que aquestes poden estar construïdes mitjançant la nostra proporció. A continuació es mostraran una sèrie d'exemples de figures que contenen el nombre Phi i s'explicarà com s'han de construir per tal que siguin matemàticament màgiques.

2.1- Rectangle auri

Un rectangle els costats del qual estan en una proporció àuria és anomenat rectangle auri. Aquest és un rectangle molt especial. Els grecs el consideraven particularment bell i el van utilitzar en la seva arquitectura. A més a més, a la majoria de les persones també els sembla més agradable a la vista un rectangle amb aquestes proporcions que no pas un altre que no les mantingui.
Per obtenir un rectangle que mantingui les proporcions del nombre Phi, no fa falta que es mesuri amb regle ni calcular-ho amb calculadora, només es necessita un quadrat de qualsevol mida de costat i un compàs (per observar el procediment de com dibuixar-lo, vegeu *Annex 5*. p. 36).

2.1.1- Espiral de Durero

Tres anys abans de morir, al 1525, el genial pintor renaixentista i gran enamorat de les matemàtiques, Alberto Durero, publicà una obra titulada *Instrucció sobre la mesura amb regle i compàs de figures planes i sòlides*. Aquest és un preciós llibre en el qual es pretén ensenyar als artistes, pintors i matemàtics de l'època diversos mètodes per traçar diferents figures geomètriques.
En aquesta obra Durero mostra com traçar amb regla i compàs algunes espirals. D'entre totes les espirals que ensenya, n'hi ha una que passarà a la història amb el seu nom: l'Espiral de Durero.
No es tracta d'una espiral d'Arquímedes ni d'una espiral logarítmica ja que cap de les dues es poden construir amb regle o compàs. No obstant això, s'aproxima bastant a



aquesta última. És una espiral basada en el famós nombre d'or, o millor dit, en els rectangles auris, amb raó de creixement Phi, Φ.
Per construir aquesta espiral, que apareix a tants llocs de la natura i de l'art, és important de basar-se en el rectangle auri construït anteriorment. A partir d'aquest i amb una sèrie de traçaments de línies i corbes s'aconseguirà formar aquesta espiral màgica (vegeu construcció d'aquesta figura en l'*Annex 6*. p. 37).

2.1.2- Espiral de Fibonacci

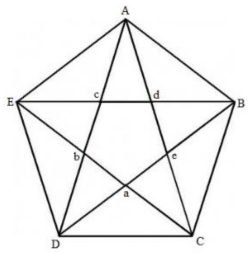
Com en la majoria de figures, cossos o equacions que tenen alguna cosa a veure amb el nombre d'or, s'hi poden trobar utilitats o característiques que molt sovint provoquen una sorpresa i en el cas del rectangle auri i de l'espiral, no és diferent.

A part que, aquestes dues figures es poden trobar en diferents obres, monuments o en la naturalesa, la que es comentarà en aquest apartat no té res a veure amb el món que ens envolta. Es tracta de la construcció de l'espiral que acabem d'estudiar mitjançant la successió de Fibonacci (vegeu *Annex 7* per saber el procediment exacte de la seva construcció. p. 38).

2.2- Pentàgon auri

Resulta sorprenent que els pitagòrics, que només admetien l'existència dels nombres naturals i aquells que es podien expressar en forma de fracció, tinguessin, com a símbol emblemàtic, la figura geomètrica que més s'aproxima a la proporció àuria. Aquest era un polígon estrellat de cinc puntes, també anomenat *pentalfa* o *pentagrama místic*, que consisteix en la figura que es crea en traçar totes les diagonals d'un pentàgon regular (per tenir coneixement de la seva construcció, vegeu *Annex 8*. pp. 39-40).

2.2.1- El nombre Phi al pentàgon



Un cop s'ha aconseguit el pentàgon regular, només cal dibuixar-hi les seves diagonals per tal d'obtenir una estrella de cinc puntes, anomenada pentagrama. A partir de les mides de les diagonals resultants, dels costats del pentàgon i dels diferents segments obtinguts, es comprovarà que el pentàgon és la figura que conté més vegades el nombre Phi.

Primerament, es suposarà que cada costat del pentàgon val 1. Al mateix moment, també s'ha de saber que els angles Aº, Bº, Cº, Dº i Eº són iguals i equivalen a 108^{o} (ja que la suma de tots els angles d'un pentàgon regular és 540^{o}). Amb el coneixement d'aquests dos conceptes i amb l'ajuda de la trigonometria, es pot començar a demostrar on es troba amagat el número Phi.

- Al dividir la longitud d'una diagonal (AC, AD, BE, BD o CE) entre el valor d'un dels costats del pentàgon (AB, BC, CD, DE o EA), apareix el nostre nombre $\left(\frac{diagonal\ del\ pent\grave{a}gon}{costat\ del\ pent\grave{a}gon} = \Phi\right)$.

Per demostrar-ho, es prendrà com a punt de partida el triangle ADE. D'aquest es coneixen dos costats, els quals equivalen a 1 (AE i ED) i, al mateix moment, es coneixen els tres angles que el formen ja que de cada vèrtex surten dos diagonals, les quals fan dividir l'angle en tres d'iguals: $\frac{108^o}{3} = 36^o$. Per tant, el triangle ADE té uns angles de 36^o, 36^o i 108^o respectivament.

Un cop es sap el valor de dos dels costats del triangle i els angles del mateix, es calcularà la diagonal AD. Per obtenir el seu valor s'haurà d'utilitzar la trigonometria. En aquest cas, el teorema del sinus.

$$Teorema\ del\ sinus: \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Al substituir els valors a la fórmula anterior i aïllar la incògnita (AD) s'obtindrà el valor de la diagonal.

$$\frac{AE}{\sin D} = \frac{AD}{\sin E} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sin 36} = \frac{AD}{\sin 108} \quad \rightarrow \quad AD = \frac{\sin 108}{\sin 36} = 1{,}618033 \ldots = \Phi$$

La diagonal AD té un valor de $1{,}618033 \ldots$ per tant:

$$\frac{diagonal\ pent\grave{a}gon}{costat\ pent\grave{a}gon} = \frac{AD}{AE} \quad \rightarrow \quad \frac{1{,}618033}{1} = 1{,}618033 \ldots = \Phi$$

- Cada triangle isòsceles –format gràcies a les diagonals–, té dos costats iguals, aquests equivalen a $\frac{1}{\Phi}$ i si es divideix aquest segment entre el costat del pentàgon, apareix Phi.

Utilitzant els triangles AdB, AcE, BeC, CaD i DbE, que són els exteriors a l'estrella de cinc puntes i tenen uns angles de 36^o, 108^o i 36^o respectivament, es pot veure que el costat més llarg té un valor de 1, ja que equival a un costat del pentàgon, i els altres dos costats són iguals i tenen un valor molt característic, el qual es calcularà a continuació mitjançant altra vegada el teorema del sinus.

$$Teorema\ del\ sinus: \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Substituint els valors del triangle AdB (per exemple) a la fórmula, es trobarà el valor del costat que es busca (Ad).

$$\frac{AB}{\sin d} = \frac{Ad}{\sin B} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sin 108} = \frac{Ad}{\sin 36} \quad \rightarrow \quad Ad = \frac{\sin 36}{\sin 108} = 0{,}618033 \ldots = \frac{1}{\Phi}$$

El segment Ad té un valor de $0{,}618033 \ldots$ per tant:

$$\frac{costat\ pent\grave{a}gon}{costat\ calculat} = \frac{AB}{Ad} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{0{,}618033} = 1{,}618033 \ldots = \Phi$$

Si s'observen els triangles que equivalen a les puntes de l'estrella inscrita al pentàgon, es pot veure que els costats més llargs i alhora iguals d'aquest tenen un valor de $\frac{1}{\Phi}$ ja que equivalen a un dels dos costats iguals dels triangles exteriors –

costats calculats anteriorment–. Però, dels triangles Acd, Bde, Cea, Dab i Ebc, que tenen uns angles de 36°, 72° i 72° respectivament, només se'n coneixen els dos costats iguals i el costat desigual, la base, no es sap el seu valor. Aquest, com no podria ser d'una altre manera, també està relacionat amb el número Phi i a continuació es calcularà mitjançant, altra vegada, el teorema del sinus.

$$Teorema\ del\ sinus\colon \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

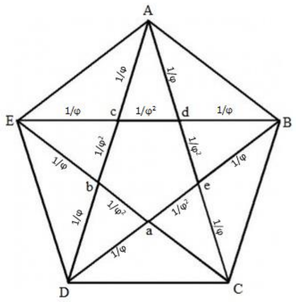
Al substituir els valor del triangle Acd (per exemple) a la fórmula anterior, es trobarà el valor del costat que busquem (cd).

$$\frac{cd}{\sin A} = \frac{Ad}{\sin c} \rightarrow \frac{cd}{\sin 36} = \frac{\frac{1}{\Phi}}{\sin 72} \rightarrow cd = \frac{\frac{1}{\Phi} \times \sin 36}{\sin 72} = 0{,}381966 \ldots = \frac{1}{\Phi^2}$$

El segment cd té un valor de $0{,}381966 \ldots$ o, millor dit, és el quadrat de l'invers del nombre Phi $\left(\frac{1}{\Phi^2}\right)$ –número auri unitari al quadrat $\left(\delta^2\right)$–. Al dividir aquest valor amb el costat del pentàgon no apareix Phi però sí que s'obté un valor relacionat amb ell.

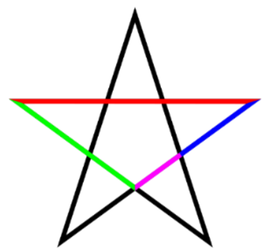
$$\frac{costat\ pentàgon}{costat\ calculat} = \frac{AB}{cd} \rightarrow \frac{1}{0{,}381966} = 2{,}618033 \ldots = \Phi + 1 \text{ o } \Phi^2$$

Gràcies a aquests càlculs s'ha aconseguit trobar tots els valors dels segments originats pels talls de les diagonals del pentàgon. D'aquesta manera es demostra que és la figura geomètrica que conté més vegades el número Phi. Tal i com es veu en la *Il·lustració 1*.



Il·lustració 1

En segon lloc, sabent tots els valors del pentàgon, només s'utilitzarà l'estrella de cinc puntes atès que la raó entre els diferents segments obtinguts donen Phi.
Perquè sigui més fàcil d'entendre i per fer-ho el més visual possible s'utilitzarà la figura de la *Il·lustració 2*.


Il·lustració 2

- Color vermell $= \Phi$

  Equival al valor de la diagonal del pentàgon.
- Color blau $= \frac{1}{\Phi}$

  Equival al valor dels costats iguals dels triangles que formen les puntes de l'estrella.
- Color rosa $= \frac{1}{\Phi^2}$

  Equival al valor de la base dels triangles que formen les puntes de l'estrella.
- Color verd $= 1$

Equival, essent igual que el costat del pentàgon, a la suma del segment blau i del segment rosa: $\frac{1}{\Phi}+\frac{1}{\Phi^2}=\frac{\Phi+1}{\Phi^2}=\frac{\Phi^2}{\Phi^2}=1$

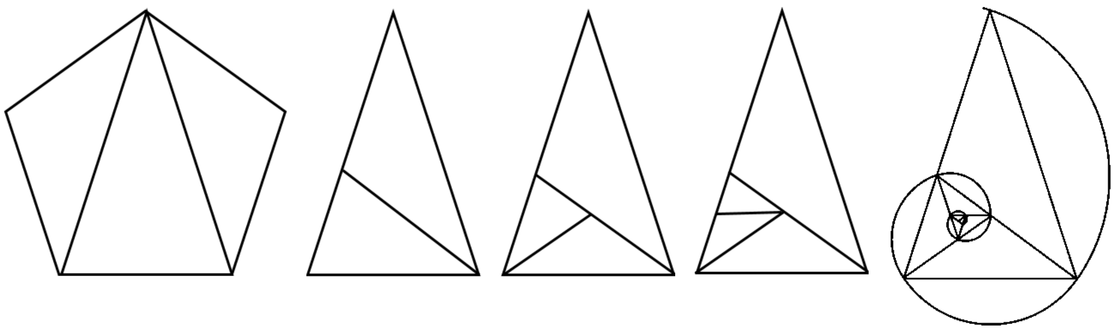
Les raons que provoquen que aparegui el nombre producte d'aquest treball són:

- La raó entre el color vermell i el color verd → $\frac{color\ vermell}{color\ verd}=\frac{\Phi}{1}=\Phi$
- La raó entre el color verd i el color blau → $\frac{color\ verd}{color\ blau}=\frac{1}{\frac{1}{\Phi}}=\Phi$
- La raó entre el color blau i el color rosa → $\frac{color\ blau}{color\ rosa}=\frac{\frac{1}{\Phi}}{\frac{1}{\Phi^2}}=\frac{\Phi^2}{\Phi}=\Phi$

2.2.2- Triangle auri

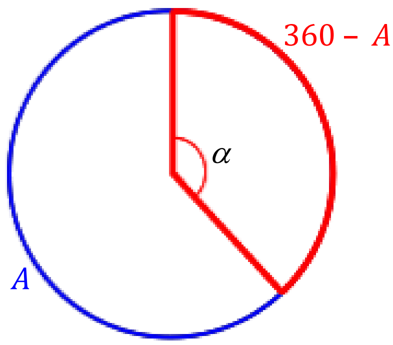
Després de saber que un pentàgon conté repetidament el nombre Phi, trobar un triangle que mantingui les proporcions àuries és realment senzill ja que són tots aquells triangles formats per els costats i les diagonals de la figura esmentada.

Les característiques del triangle auri no es basen simplement en el fet de tenir els costats en proporció sagrada, sinó que, mitjançant aquest triangle i, amb l'ajut de l'escaire i el cartabó, es poden anar traçant diferents paral·leles dels costats del pentàgon que passin pels vèrtexs de la base de la figura que s'estudia en aquest apartat, fent, d'aquesta manera, el triangle auri més petit possible dins del mateix. Aquest procés s'anirà repetint indefinidament fins a poder dibuixar la famosa Espiral de Durero. Aquesta s'aconseguirà al ajuntar tots els vèrtexs obtinguts dels nous triangles auris.



2.3- Angle auri

El nombre auri no es troba solament en figures geomètriques, sinó que també hi és a dins d'una circumferència on, amb el mateix procediment que en el del segment, es pot descobrir quin és l'angle auri. Es diu que és la relació angular de proporció entre dos segments circulars, en aquest cas A i $360-A$.



Com es pot veure, la circumferència està dividia en dos parts, l'anomenada A i l'anomenada $360 - A$, ja que aquesta figura té 360^{o} i el que estem buscant és un angle. Per tant, s'hi troben dos raons, les quals s'hauran d'igualar: la divisió de tota la circumferència (360^{o}) entre la corba major A i A entre la corba petita $(360 - A)$.

$Raó\ 1$: $\dfrac{circumferència\ total}{corba\ major} = \dfrac{360}{A}$ $Raó\ 2$: $\dfrac{corba\ major}{corba\ menor} = \dfrac{A}{360 - A}$

$$\frac{360}{A} = \frac{A}{360 - A}$$

$$129600 - 360A = A^2$$

$$A^2 + 360A - 129600 = 0$$

Al igualar les dos raons i arreglar la solució, apareix una equació de tipus $ax^2 + bx + c = 0$, per tant, de segon grau, on $a = 1$, $b = 360$ i $c = 129600$. Utilitzant la formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ es podrà resoldre l'equació i apareixeran dos resultats. El negatiu no es tindrà en compte ja que es volen donar els angles en positiu.

$$A^2 + 360A - 129600 = 0$$

$$A = \frac{-360 \pm \sqrt{360^2 - 4 \times 1 \times (-129600)}}{2 \times 1}$$

$$A_1 = 222{,}4922359\ldots \qquad \cancel{A_2 = -582{,}492236\ldots}$$

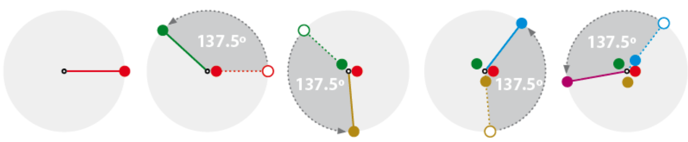
El resultat positiu que apareix no és l'angle que s'està buscant ja que, si s'observa a la circumferència del començament d'aquest apartat, es pot veure que el resultat de la corba menor, $360 - A$, és l'equivalent a Phi i no el que s'ha trobat, el valor de A. Aleshores, simplement s'ha de substituir el seu valor i calcular una simple resta.

si $A \approx 222{,}4922359$ i $360 - A = \alpha \ \rightarrow \ 360 - 222{,}4922359 = 137{,}5077641\ldots$

Amb aquest últim càlcul, ara sí, s'arriba a la conclusió que l'angle d'or és, més o menys, $137{,}51^{\text{o}}$.

Aquest angle és molt present a la naturalesa atès es aquell que maximitza la quantitat de llum solar, per la manera en com distribueix les fulles al voltant de la tija, els pètals de les flors o les llavors –tal i com s'explicarà en l'apartat 3–.
Al ser un angle irracional, per moltes voltes que doni al voltant de una circumferència, mai tornarà a la posició inicial, i això vol dir que mai cap fulla en taparà a cap altre i totes elles podran gaudir de la llum solar, incrementant l'energia de la planta.

La selecció natural ha decidit premiar amb major descendència a aquelles plantes que han tret més partit de la llum del sol i, per tant, han crescut més altes i més sanes.



3- APLICACIONS DEL NOMBRE PHI

La proporció àuria, considerada com l'essència de l'Univers, es pot trobar a qualsevol lloc que un es pugui imaginar atès que no està feta per l'home, sinó que l'ha projectada en les seves obres com una expansió de la seva pròpia perfecció. A continuació es farà un recorregut, no gaire extens, d'algun dels llocs on, sorprenentment, es troba el nombre d'or.

Es podria començar a parlar de l'Univers. Des del seu inici, l'explosió del Big-Bang, l'Univers s'ha anat expandint mitjançant aquest nombre i, no només això sinó que la mateixa explosió creadora del món es va efectuar seguint la seqüència de Fibonacci –raó per la qual l'Univers es segueix expandint sense que res topi amb res–. Així doncs, gràcies a la perfecció matemàtica del Big Bang, tots els demés cossos celestes (com molt bé s'aprecia a l'*Annex 9*. p. 41) s'han creat seguint la mateixa successió de Fibonacci i respectant la naturalesa del nombre d'or.
Ara bé, no només en fenòmens naturals com les galàxies o els huracans, inclús en les onades, sinó també en el regne vegetal i animal s'aprecia la proporció divina.

La distribució dels pètals de les flors, la posició de les fulles respecte el tronc, la posició de les llavors en algunes plantes, s'organitzen de manera que no es solapen les unes amb les altres per tal de poder aprofitar al màxim la llum del sol, per incrementar la major energia possible. Aquest fet és degut, nogensmenys, a la seva distribució seguint la seqüencia de Fibonacci o del rectangle auri (vegeu *Annex 10* per tal d'apreciar més detalladament la proporció àuria en el regne vegetal. p. 42).

Seguint amb els éssers vius, en els animals també es troba la divina proporció atès que determinades pautes de vida que segueixen alguns animals per sobreviure o algunes de les seves estructures es basen en el nombre Phi (vegeu més exemples a l'*Annex 11*. p. 43). En aquest grup –el regne animal– també s'hi han d'incloure els éssers humans. Aquests, gràcies a les diferents relacions entre les parts del cos, als òrgans que el mantenen viu –tant interns com externs– i a la temperatura corporal d'ells, es pot dir que el cos conté la proporció divina.
Per demostrar que aquest últim fet del éssers vius –mamífers– conté aquesta proporció, s'ha de suposar que la distància des de 0° (temperatura de solidificació de l'aigua) fins a 100° (temperatura d'ebullició de l' aigua) és igual a Phi. Per tant, la unitat partint des de 0° seria aproximadament 62° (temperatura límit de la vida) i la unitat partint des de 100°, en direcció a 0°, equivaldria, més o menys, a 38° (temperatura corporal dels mamífers). La temperatura normal de l'home està al voltant de 37° però, en canvi, en els gats o els gossos està al voltant de 39°. Per tant, la mitjana dels mamífers és un valor molt proper als 38°.

$\frac{100}{\Phi} = 61{,}8 \approx$ temperatura límit de la vida

$100 - \frac{100}{\Phi} = 38{,}2 \approx$ temperatura corporal dels mamífers

(vegeu *Annex 12* per conèixer altres exemples. p. 44)

La creació de l'home no ha estat exempta de la proporció àuria i s'ha utilitzat en tots els àmbits que avarca la ciència humana: l'arquitectura, l'escultura, la pintura, la música, etcètera.
Anteriorment s'ha explicat que la bellesa de l'art es deu, la majoria de les vegades, a la utilització del nombre Phi. Per tant, també tindrà a veure amb la bellesa de l'arquitectura i amb els diferents mètodes que utilitzaven els arquitectes.
Les primeres mostres de la utilització de la secció àuria en aquest àmbit es troben en l'Antic Egipte, encara que rarament es pot assegurar que això fos degut a una preferència deliberada. A partir d'aquest fet, s'han anat construint, cada vegada amb més freqüència, estructures que contenen aquesta proporció. Per exemple: la Piràmide de Kheops, la Torre Eiffel o l'edifici de la ONU (vegeu-los més detalladament a l'*Annex 13*. p. 45).

Les primeres mostres d'escultures ja mantenien la proporcionalitat del cos humà, per tant, la proporció àuria. A partir d'aquest fet, altres escultors han anat copiant l'estil egipci i han anat creant diferents obres. També en l'art pictòric es poden trobar, en moltes ocasions, quadres que contenen aquesta proporció. Es podria dir que és la branca que conté més varietat d'obres, juntament amb l'arquitectura, les quals han estat formades mitjançant la màgica proporció per tal que les obres adquireixin bellesa. Per exemple, *La Gioconda* no només té els enigmes visuals que la majoria de gent coneix, també s'hi troben enigmes matemàtics: la proporció àuria (vegeu exemples, inclòs aquest, a l'*Annex 14*. pp. 46-47).
Encara que aquest estil d'art, la música, és molt diferent que els dels casos anteriors, pel sol fet que són obres auditives i no visuals, en moltes partitures d'autors importants es veu com la utilització de la proporció àuria és clau per tal que aquella cançó tingui un so el més bell i harmoniós possible. Aquesta relació es pot aconseguir amb la proporció entre el desenvolupament del tema i la seva introducció –tal i com va fer Mozart en algunes de les seves sonates–, amb la distribució de les notes seguint la seqüència de Fibonacci –com es veu en la *Cinquena Simfonia* de Beethoven– o amb la utilització del nombre Phi per determinar la durada de les notes.

Tot i haver evolucionat notablement a mesura que ha anat passant el temps, la proporció àuria no s'ha deixat d'utilitzar, ja sigui conscient o inconscientment, i s'ha representat en les nostres creacions, tant virtuals com físiques. De fet, no és d'estranyar atès que, a part de produir bellesa, dóna més facilitats a l'hora de crear determinats objectes i permet aprofitar al màxim el material que s'ha d'utilitzar.
Per exemple, si es mesuren les dimensions de qualsevol targeta de crèdit, dèbit o el Document Nacional d'Identitat (DNI) –inclús un paquet de tabac– es pot veure com la divisió entre la llargada i l'amplada dóna exactament Phi. Per tant, equivalen a un rectangle auri.
A més, si s'observen matemàticament les marques o els logotips de diferents objectes, es pot apreciar com, en molts d'ells, apareix la proporció divina (per tal de visualitzar exemples i demostracions contempleu l'*Annex 15*. p. 48).

Finalment, no cal fixar-se en obres excepcionals per tal de contemplar la proporció àuria, aquesta també apareix en molts dels petits objectes que ens envolten en la nostra vida quotidiana. Per exemple, en alguns bolígrafs, en les pinces d'estendre roba, en l'ampolla de sabó del rentavaixelles, etcètera. Aquests són considerats objectes d'escàs valor en el nostre dia a dia però de gran importància en l'àmbit de les matemàtiques (vegeu les demostracions a l'*Annex 16*. p. 49).

4- EVOLUCIÓ DE PHI

Segons algunes investigacions, s'ha considerat que el nombre auri ja es trobava en algunes esteles babilònies i assíries de l'any 3000 a.C. De totes maneres, no s'ha trobat cap documentació històrica que acrediti que aquest nombre fos utilitzat de manera intencionada per arquitectes o artistes d'aquella època. Però, el fet que tampoc existeixi cap document històric que asseguri el contrari, tan sols les raons donades per Mario Livio[5] i Álvaro Valareza, és oportú fer-ne un petit esment en aquest treball.

On sí sembla que es pot demostrar, de manera més fefaent, la seva utilització és en èpoques posteriors: diferents personatges han anat cercant i calculant aquesta proporció en llocs on han cregut que s'hi podia trobar o simplement l'han utilitzat per plasmar-la en les seves obres. El fet que cadascun aportés una cosa diferent indica la llargada d'aquest nombre, no només com a xifres, sinó com a misteris que conté. A més, cada nova incorporació provocava i provoca un despertar envers un altre personatge, el qual té la necessitat de cercar o comprovar la realitat que amaga aquest seguit de xifres indefinides.

En la primera època on es trobà rastre de Phi fou en l'Edat Antiga, concretament en l'Antic Egipte on, les piràmides i les escultures realitzades en aquelles èpoques tenien la presència de la proporció àuria. El fet que els grecs entressin en contacte amb aquesta gran civilització va ajudar a que el nombre d'or s'anés propagant per altres terres i fos utilitzat per personatges tan important com Pitàgores, Policlet, Fídies, Plató, Lísip, Euclides, etcètera. A més, l'expansió de l'Imperi Romà va donar lloc a que personatges representatius de l'època en poguessin tenir contacte, com el cas de Vitruvi.

La segona de les etapes, l'Edat Mitjana, queda com un parèntesis buit en la utilització del nombre, atès que tant sols es coneix el treball realitzat per Fibonacci i, no serà fins a l'Edat Moderna on es sentirà la seva presència en multitud d'escrits i obres. Aquestes seran escrites i llegides per Pacioli, Da Vinci, Durero, Kepler... donant lloc a un redescobriment d'aquesta proporció.

La influència d'aquest nombre no ha disminuït amb el pas de temps, més aviat s'ha anat ampliant i continua en plena expansió. Ja a l'Edat Contemporània diferents personatges l'utilitzaven en les seves obres, tan arquitectòniques com pictòriques, o escultòriques, per tal de que fossin matemàticament màgiques. S'està parlant de Bonnet, Fechner, Zeising, Cook o Ghyka. Des d'aquell moment fins a l'actualitat, la bellesa de les matemàtiques ha anat cridant l'atenció a la majoria de persones que han sentit parlar d'ella. És per això que, el nombre Phi està en plena vida i en continu descobriment.

Per tal de conèixer més detalladament els autors que han mantingut viva l'essència del nombre d'or fins al dia d'avui, vegeu *Annex 17* (pp. 50-62) o, més concretament:

EDAT ANTIGA (3.500 a.C. – Segle V d.C.) → *Annex 17.1* (pp. 50-55)

EDAT MODERNA (Segle XV – Segle XVIII) → *Annex 17.2* (pp. 55-58)

EDAT CONTEMPORÀNIA (Segle XVIII – Actualitat) → *Annex 17.3* (pp. 58-62)

[5] Astrofísic israelià i autor d'obres que polaritzen la ciència i les matemàtiques (nascut a l'any 1945).

5. RECERCA DE LA PROPORCIÓ ÀURIA EN LES OBRES DALINIANES

Un cop coneguda la teoria sobre la proporció àuria, la geometria sagrada i el seu gran valor, ha arribat el moment de posar-ho en pràctica.

Arrel de la curiositat que he tingut sobre la veritable intenció artística que hi ha darrera de la personalitat, podríem dir estrafolària, de Salvador Dalí, crec convenient apartar el tel que amaga la realitat de les seves obres i de la seva vida. Obrir els ulls i la mirada per tal de veure les coses com ho feia ell, i d'aquesta manera, arribar a una compressió més profunda de l'autor i de la seva obra.
Després de tota la bibliografia secundària estudiada sobre el nombre Phi, m'ha semblat que tots els autors que l'han tractat han estat ben considerats en el món científic. A més, visualitzant molta varietat de documentals, he observat que els membres del món científic parlen amb una gran deferència de la persona de Salvador Dalí i en distingeixen dos personatges: una persona amb molta curiositat i ganes d'adquirir coneixement i l'altre, la persona que mostra al públic. Jo em pregunto: per què, popularment, no era conegut d'aquesta manera?
Davant aquest interrogant, he considerat convenient aplicar tots els coneixements que he adquirit en relació al nombre Phi i al seu càlcul, entrant en l'anàlisi de les diferents obres que foren creades amb posterioritat al seu contacte amb la proporció àuria, per tal de divulgar la seva aplicació i fer honor al seu minuciós treball, el qual no fou únicament artístic sinó que també fou basat en el coneixement matemàtic i científic.

Per tal de ser més esclaridor, l'anàlisi de les obres es farà a part d'aquest treball, concretament en un llibre on poder abocar tota la investigació que he realitzat i que, segons el meu més humil coneixement, he considerat correcte. Aquest, juntament amb una nota d'agraïment, per la seva ajuda i col·laboració, el remetré a la Fundació Gala-Salvador Dalí per tal que en tinguin coneixement.

A totes les obres analitzades, la proporció àuria ha estat cercada a través d'unes plantilles que m´he creat jo mateix –amb l'ajuda de l'apartat 2 d'aquest treball– (per observar-les dirigiu-vos en l'*Annex 18*. p. 63) i dos compassos construïts també per mi (vegeu el procediment en l'*Annex 19*. p. 64). A més, tal i com Dalí va utilitzar, clarament, la proporció àuria en les seves obres, jo també he volgut plasmar aquesta màgica proporció en la meva obra *Visita al Teatre-Museu Dalí a través de la mirada del Phi*. Amb l'ajuda d'un regle, es pot veure com els marges del llibre creen un rectangle auri (18 x 11,1 cm) –aquest fet també ocorre amb els marges d'aquest treball (24,7 x 15,27 cm)–.

El logotip, el qual apareix en nombroses ocasions en aquest treball i en el llibre, ha estat creat per mi i representa el símbol del número Phi juntament amb el famós bigoti de Salvador Dalí. Aquest conté, també, la proporció àuria: el bigoti està situat en proporció divina respecte l'altura del logotip i aquesta, al dividir-se amb l'amplada del bigoti dóna Phi (vegeu la demostració a l'*Annex 20*. p. 65).

És el moment de conèixer i entrar en el món, perfecte i daurat, de Salvador Dalí.

5.1- Salvador Dalí

Il·lustració 3

Salvador Dalí i Domènech va néixer l'onze de maig de 1904 a la capital de l'Alt Empordà, Figueres. La seva llarga vida ha estat marcada per determinats successos que han portat a que la història el catalogués, no pas com a savi, sinó com a pintor excèntric. Entre els quals cal destacar el caràcter autoritari del seu pare, Notari de Figueres, qui esperava que el seu fill seguís les seves passes; la mort prematura de la seva mare, quan ell tant sols tenia setze anys, i el fet que el seu germà gran, de nom Salvador, morís nou mesos abans que ell nasqués. Aquest últim fet l'expressa en el seu llibre titulat *Vida secreta de Salvador Dalí*: «He vivido toda mi infancia y toda mi juventud pensando que era una parte de mi hermano muerto, es decir que llevaba en mi cuerpo y en mi alma el cadáver de mi hermano muerto que se aferraba a mi porque mis padres hablaban sin cesar del otro Salvador».

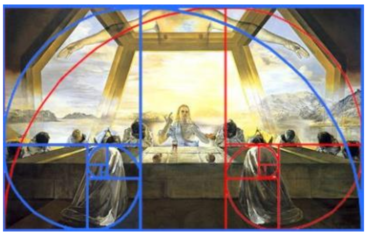
Les seves aparicions públiques sempre van ser catalogades com a *estrafolàries* ja fos a la seva casa de Portlligat, lloc on davant dels mitjans de comunicació apareixia disfressat i mostrant objectes com eriçons o carxofes que res tenien a veure amb la filmació que es duia a terme, o el fet que en la inauguració de la XXIV Fira de Mostres de Barcelona del 13 de juny de 1966 aparegués amb un barret format per diversos pentàgons i convidant a la gent a pintar una gran cúpula de plàstic que havia instal·lat al recinte.
Les carxofes, els eriçons de mar, els pentàgons i les molècules d'ADN col·locats en llocs i moments que a primer cop d'ull no tenen res a veure, era la demostració física i visual de l'existència de la proporció àurea en el món que ens envolta. Res més lluny de l'excentricitat sinó, més aviat, un mostrar gràficament els fets científics, tan importants per ell.

La seva vida transcorre entre Espanya, França i Nova York, tenint contacte amb una gran diversitat d'intel·lectuals entre els quals s'hi trobaven pintors, matemàtics, físics, etcètera. Tota cosa descoberta, com podria ser l'ADN, o tot esdeveniment d'influència mundial, com l'explosió de la bomba atòmica durant la Segona Guerra Mundial, van fer que Dalí tingués la necessitat de plasmar-ho gràficament en els seus quadres, com a altra hora feu Leonardo Da Vinci en el llibre de Luca Pacioli per tal de fer més entenedores les explicacions del seu llibre *De Divina Proportione*.

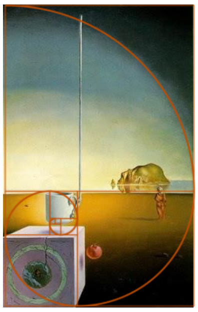
La seva connexió amb el nombre objecte d'aquell treball fou degut a que durant la seva estada a Nova York va conèixer el matemàtic romanès Matila C. Ghyka el qual, molt influenciat per l'obra de Luca Pacioli (entre d'altres), adoctrina a Salvador Dalí en la pràctica del nombre d'or, ajudant-lo en algunes de les seves obres on queda reflectida aquesta proporció. L'amistat entre els dos es va mantenir durant llarg temps compartint correspondència.
Com ja s'ha comentat Ghyka va fer un recorregut per tot el procés de la geometria estètica, des la simplicíssima partició de la línia recta a través de de les figures planes (polígons) i dels volums (poliedres) fins als cossos regulars en l'espai de quatre dimensions que havien estat intuïts per l'anàlisi matemàtic. I aquí també fou contagiat

Salvador Dalí, que va plasmar en les seves obres poliedres i figures de quatre dimensions. Així ho podem veure en l'evolució de seu quadre *Cos hipercub,* pintant en tres sessions, començant pel cos de Crist levitant, tot seguit, la incorporació de la creu, aquesta realitzada en quatre dimensions i l'entrada en escena de la seva dona i musa Gala, totalment divinitzada, observant la crucifixió.

Es pot observar a continuació, tal com ens informen moltes pàgines web d'internet, l'existència de la proporció àuria en alguns dels quadre que Dalí creà. Primerament, en *El sagrament del Sant Sopar*[6] (*Il·lustració 4*) es pot observar l'existència d'un dodecaedre al fons de l'obra i dues espirals àuries que envolten a dos dels deixebles de Jesús. L'obra de la *Leda Atomica*[7] (*Il·lustració 5*) fou realitzada amb les operacions matemàtiques de Ghyka i en el peu de l'esborrany de la mateixa hi consten els càlculs per plasmar la proporció àuria. A més, en aquest quadre la figura de Gala està emmarcada dins d'un pentàgon. En l'últim dels tres quadres, *Tassa gegant volant, amb apèndix incomprensible de cinc metres de llarg*[8] (*Il·lustració 6*), els objectes que hi apareixen estan perfectament situats per tal de crear l'espiral de Durero.


Il·lustració 4


Il·lustració 5


Il·lustració 6

Pero el moment culminant de demostració de l'obra daliniana ve a l'any 1960, davant la proposta de l'alcalde de Figueres, quan decideix restaurar l'antic Teatre de Figueres per tal de convertir-lo en el seu museu. Les obres van començar el tretze d'octubre de 1970 sempre sota la seva supervisió, tal com va manifestar en el primer acte públic del projecte: «cada centímetre d'aquestes parets serà un quadre abstracte... als finestrals hi instal·laré fotografies... la gent no en sortirà decebuda...»

El fet que el deu de gener de 1964 es publiqués en la portada de la revista *Time* una cúpula realitzada per l'enginyer Buckminster Fuller,[9] va fer despertar en ell el desig de coronar la part que fou escenari del Teatre de Figueres amb una cúpula geodèsica,[10] i, per aquest motiu, va dissenyar els primers esborranys d'aquesta. De totes maneres no fou Fuller qui la va realitzar, sinó que va ho va fer l'arquitecte de Múrcia, Emilio Pérez Piñero.[11] Tal com manifestà Salvador Dalí a l'any 1972:

> «...això va ser per una sèrie de coincidències, jo no el coneixia en absolut, (referint-se a Emilio Pérez) perquè a Espanya se'l coneixia poc i jo era molt amic de Buckminster Fuller, que era el que feia aquestes cúpules, i jo vaig proposar

[6] Oli sobre tela, 1955. 166,7 x 267 cm. National Gallery of Art, Washington, Chester Dale Collection.
[7] Oli sobre tela, 1949. 61 x 46 cm. Teatre-Museu Dalí, Figueres.
[8] Oli sobre tela, 1944. 50 x 31 cm. Col·lecció privada.
[9] Visionari, dissenyador, arquitecte, inventor i escriptor nord-americà (1895-1983).
[10] Part d'una esfera geodèsica, un poliedre generat a partir d'un icosaedre o un dodecaedre, encara que es pot generar amb qualsevol dels sòlids platònics.
[11] Arquitecte espanyol (1935-1972).

> per al museu de Figueres, que Fuller fes una cúpula geodèsica, i, en aquest moment, el director general d'Arquitectura va dir, però per què anem a donar feina a un americà quan tenim a Espanya un noi, que està en un poble de Múrcia, però que fa coses molt més atrevides que el mateix Fuller? I Fuller m'ho va confirmar. Va dir: "Piñero realitza coses que jo no sabria fer". Em va dir Fuller: "Té vostè a Piñero que fa coses que jo no sé com les fa". Llavors, naturalment, vaig anar a Barcelona i allà vaig trobar a Ricardo Bofill, el qual em va dir: "Doncs és un amic meu". Li telefonem i va venir a Figueres, i vam començar amb un entusiasme extraordinari la cúpula...»

Però, considerant la gran influència de Ghyka en els treballs de Dalí no ha de resultar estrany que el teatre fos coronat per una cúpula geodèsica, tenint en compte que en el Capítol VIII del llibre *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*, Ghyka fa una anàlisi de les propietats geodèsiques i astronòmiques de la Piràmide de Kheops. Per tant, es pot dir que el Teatre Museu Dalí no és, en efecte, un museu. Es podria considerar molt més que això. És, en ell mateix, continent i contingut, obra daliniana que promet a tot espectador una experiència surrealista. Res del que sembla és, perquè en realitat és molt més del que sembla.

La decoració de la totalitat del museu fos realitzada per Salvador Dalí. Res del que hi ha hi es per atzar, sinó per un motiu que tant sols ell coneixia. La situació de la Sala del Tresor, on hi va col·locar totes aquelles obres que ell va considerar més properes o més importants per a ell, l'entapissat de la sala, la decoració de la volta que sosté la cúpula transparent, que decidí pinar de vermell una falsa estructura reticular i de blau tot el fons de la volta de suport al sostre, al costat de la cúpula. De qualsevol entrebanc creava art, com va passar al pintar de blau el sostre, que una taca de pintura va caure damunt del mur de pedra i ho va transformar en una espectacular cascada de blau en regalims que cauen del sostre.

En definitiva, Salvador Dalí no es deixa arrossegar sense mes per una imaginació delirant, com molts poden pensar, sinó que es proposa dominar-la i utilitzar-la metòdicament, i fins i tot fredament, per tal d'assolir uns objectis prèviament fixats, es a dir, servir-se del mon exterior com a il·lustració i prova irrefutable d'una altre realitat.

Salvador Dalí va morir el vint-i-tres de gener de 1989 a Figueres, mentre sonava l'òpera de Wagner anomenada *Tristan und Isolde* i sobre la seva tauleta de nit descansaven els llibres de Stephen Hawking *La historia del tiempo* i de René Thom *La teoría de las catástrofes*. El seu enterrament tingué lloc a Figueres. Si bé sembla que el seu desig era ser sepultat al costat de la seva esposa-musa Gala, al castell de Púbol, la realitat és que al costat d'ella tant sols hi ha un espai buit. Salvador Dalí, en canvi, fou sepultat al seu Teatre-Museu de Figueres. Aquest fet, envoltat de polèmica, ha provocat rius de tinta i interpretacions de tota mena. Però, qui sap si a similitud de tot faraó de l'Antic Egipte, que descansa en el seu temple piramidal, acompanyat de les seves riqueses i tresors, Salvador Dalí va decidir ser sepultat sota la cúpula geodèsica del seu *Temple*, concretament sota la figura geomètrica més àuria, el pentàgon, juntament amb moltes de les seves obres, les més importants de les quals es troben a la seva Sala del Tresor i perdurar en la realitat creada per ell... Però, en tot cas, això seria tema per un altre treball.

6- CONCLUSIONS

Quan vaig començar aquest treball en cap moment vaig pensar que seria tan ampli, ni molt menys. Pensava que fer una recerca del nombre d'or o de la proporció àuria seria un bufar i fer ampolles. Que equivocat estava! Des del moment que vaig entrar en contacte amb aquest tema, tot el món es va obrir davant meu com un ventall, un ventall ple de coses per explorar, mesurar, investigar...

En un principi, la meva idea era tan sols fer una explicació i una demostració de l'existència d'aquesta proporció en les obres del pintor figuerenc, Salvador Dalí, però vaig veure que això no era possible. Hauria hagut de menester unes grans prestatgeries per poder anar col·locant els volums de llibres que hauria confeccionat. Davant la immensitat del treball, davant la impossibilitat de buscar la proporció en totes les obres i en la decoració del Teatre-Museu Dalí, vaig decidir triar aquelles obres que, d'alguna manera, eren més adients per la meva investigació.

Tot aquest treball de tardes, assegut a la taula de la cuina, rodejat de llibres, fulls, fotografies, compassos i plantilles, van desembocar en el llibre que acompanya aquest treball. Un llibre amb explicacions i il·lustracions on, quadre per quadre, obra per obra, he anat mostrant on es troba la meravellosa proporció àuria.
Aprofundir en les obres i, per tant, en la vida de Salvador Dalí, ha estat un regal per mi; descórrer les cortines que amagaven la realitat de les creacions dalinianes, ha sigut una gran experiència.

Mentre recopilava les dades que donarien lloc a la part més teòrica, vaig ser conscient que totes aquelles fulles plenes de nombres, arrels, equacions, etcètera, que omplen la meva llibreta de mates no formen part d'un present, d'avui, sinó que personatges de l'antiguitat ja en feien us. Llegir llibres escrits fa molts anys, veure les seves il·lustracions, les seves explicacions i pensar que encara a dia d'avui tenen una gran utilitat, m'ha sorprès gratament. De sobte vaig veure la gran importància que ha tingut en aquest món aquesta ciència, una ciència cap a la qual sento una profunda admiració: les matemàtiques.

He quedat satisfet de tot el treball que he realitzat, el qual ha sigut feixuc en moltes ocasions, difícil de sintetitzar, tardes en que no aconseguia trobar aquelles mesures que fessin màgia, però que ha deixat en mi les ganes de continuar, les ganes de seguir, les ganes de mirar novament els quadres de Salvador Dalí i veure la realitat amagada en ells.

Durant tot el treball he sigut conscient de la meravella que ens envolta, que res és el que sembla, i que tot, observat des d'aquesta percepció, obre els ulls a la veritable bellesa matemàtica, el nombre Phi.

7- AGRAÏMENTS

He de donar gràcies a la meva mare ja que gràcies a ella he entrat dins del món de la proporció àuria i m'ha ajudat en tots els aspectes que aquest tema comporta. El seu suport, la seva paciència i la seva companyia a diversos llocs on he hagut d'acudir per la realització d'aquest treball. Sense ella no hagués estat possible.

Un altre agraïment especial vers a la meva germana, la qual m'ha guiat en l'estructura del treball. El seu suport anímic, l'acompanyament i l'aportació d'idees, han estat clau per tal que la redacció de la part teòrica fos la més professional possible. A més, gràcies a ella, he tingut accés a una amplia gamma de llibres que m'ha portat de la biblioteca de la Universitat de Girona, de la Facultat de Lletres.

També vull donar les gràcies a la meva tutora pel suport que m'ha prestat en tot moment (tan personal com telemàtic), per la seva paciència al llegir tants esborranys com he fet, per la seva orientació i amabilitat i pel seu interès vers aquest tema. A la meva tutora de classe, qui m'ha donat alè per continuar treballant en aquest tema.

Per acabar, agrair a les fundacions amb les que he tingut la necessitat de contactar per tal de solucionar els problemes que m'han sorgit: Fundació Gala-Dalí i Fundació Emilio Pérez Piñero. La seva ajuda, col·laboració i professionalitat han fet que el meu treball quedés el màxim de complert possible i que, a més, hagin tingut l'amabilitat de contestar amb el mínim de temps possible.

Sincerament, gràcies!

8- BIBLIOGRAFIA I WEBGRAFIA

- BLANCO FREIJEIRO, Antonio, *El arte egipcio I*. Editorial Historia 16. Madrid, 1989
- BONELL, Carme. La divina proporción. Edicions UPC. Barcelona, 1999.
- CORBALÁN, Fernando. *La proporción áurea. El lenguaje de la bellesa*. RBA Coleccionables S.A. 2010.
- C. GHYKA, Matila. *el número de oro.* Editorial Poseidón. Barcelona, 1978.
- C. GHYKA, Matila. *Estética de las proporciones en la naturaleza y las artes*. Editorial Poseidón. Barcelona, 1983.
- GIMÉNEZ, Joaquín. *La Proporción: arte y matemáticas*. Editorial Graó. Barcelona, 2009.
- GIMENEZ-FRONTÍN, J. L. *Teatre-Museu Dalí*. Tusquets Editores. Madrid, 1994.
- LE CORBUSIER. *Norbert Huse.* Salvat Editores, S.A. Barcelona, 1988.
- LIVIO, Mario. *La proporción áurea*. Editorial HUROPE, S.L. Barcelona, 2006.
- MÜLLER, Lipsiae, *Recensuit et explanavit I*. Editorial B.G. Teubneri, 1874.
- PACIOLI, Luca. *La Divina Proporción*. Ediciones Akal, S.A. Madrid, 1991.
- PITXOT, Antoni i AGUER, Montse, *Teatre-Museu Dalí de Figueres*. Editorial Triangle Postals, S.L. Figueres, 2005.
- PÉREZ ALMAGRO, M. Carmen, *Las estructuras de Emilio Pérez Piñero en la musealización de dos espacios singulares*. Revistas MIDAS, 2013.
- RICHTER, G.M., *El arte griego*. Editorial Destino. Barcelona, 1980.
- RIERA I ARNIJAS, Maria Mercè, *Grans genis de l'art a Catalunya Dalí*. Ciro Ediciones, S.A. Barcelona, 2008.
- VITRUVIO, Marco Lucio. Los diez libros de arquitectura. Editorial IBERIA. Barcelona, 2000.

Catàleg raonat de Salvador Dalí:
http://www.salvador-dali.org/cataleg_raonat/index.php

Dalí y La Divina Proporción:
https://encontrandolalentitud.wordpress.com/2013/10/06/dali-y-la-divina-proporcion/

Dalí y el número áureo:
http://es.slideshare.net/IgnacioNieto/dal-y-la-razn-area

Diferents NODOS a la Filmoteca Española:
http://www.rtve.es/filmoteca/

Diferents pàgines de la Wikipedia:
https://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada

Diferents vídeos de YouTube:
https://www.youtube.com/
El Castor:
http://www.castor.es/phi_animales.html

El Cristo Hipercúbico o el Dalí herreriano y esotérico:
http://dali-dios-diablo.blogspot.com.es/2013_02_01_archive.html?m=1

Formas, números, patrones, y la Proporción Divina en la Creación de Dios:
http://www.sedin.org/propesp/ICR-Fibonacci-Shapes-Numbers-ES.html

Fundació Gala-Salvador Dalí:
http://www.salvador-dali.org/es_index/

Fundación Emilio Pérez Piñero:
http://www.perezpinero.org/

Galería Aurora:
http://www.galerialaaurora.com/dix-recettes-d-immortalite-dix-recettes-d-immortalite-dp8

La Proporción Áurea en las marcas:
http://www.designals.net/2013/02/la-proporcion-aurea-en-las-marcas/

La proporción cordobesa o humana:
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/belleza/canoncordobes.htm

Matemáticas Visuales:
http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/proporcionaurea/goldensection.html

Número áureo: belleza matemática:
http://www.abc.es/20100415/ciencia-tecnologia-matematicas/numero-aureo-belleza-matematica-201004151848.html

Video: *Dimensión Dalí*. Juan Úbeda, Susi Marqués et Eli Pons.

9- ANNEXES

Els annexes d'aquest treball consisteixen en una sèrie d'informació sobre el cos del treball principal: equacions, taules, il·lustracions, explicacions, comprovacions,...
He considerat oportú organitzar-lo d'aquesta manera per tal de que la lectura de la meva investigació sigui la més simplificada i assequible possible per tot aquell lector que hi estigui interessat.

Cada annex equival a un apartat, un subapartat o una explicació concreta del treball per tal que la seva utilització i visualització sigui la més ordenada possible. La majoria d'informació que s'hi troba ha estat obtinguda per mitjà de diferents llibres i pàgines web (els quals apareixen a la bibliografia) però, tota la redacció ha estat pensada i estructurada per mi, fent que les fonts d'informació em serveixin, simplement, per adquirir els coneixements necessaris a l'hora de tractar el tema.

ANNEX 1

Definició i tipus de nombres irracionals:

Aquest tipus de números són tots aquells nombres reals (ℝ), nombres que es poden pensar o veure, que no són racionals, és a dir, que no es poden expressar com una fracció $\frac{a}{b}$, essent a i b enters, i b diferent de 0. Els irracionals són precisament aquells nombres l'expansió decimal dels quals no s'atura mai, i tampoc no entra mai en un cicle periòdic. Gairebé tots els nombres reals són irracionals.
D'aquests n'hi ha de dos tipus: els irracionals algebraics, entre els quals trobem a Phi i els irracionals transcendents.

Els nombres irracionals algebraics són aquells nombres reals que són la solució d'alguna equació polinòmica amb coeficients enters. Per exemple: $x^2 - 2 = 0$ on $x = \pm\sqrt{2}$ o el nostre nombre, Phi, que el trobem resolent aquesta equació: $x^2 - x - 1 = 0$ on $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ (més endavant s'explicarà com arribar a ella).

Els nombres irracionals transcendents, són aquells nombres reals que no estableixen la solució de cap equació polinòmica.
Atès que hi ha infinites equacions polinòmiques i moltes d'elles tenen solució, es podria pensar que la majoria dels nombres són algebraics, però no és així. Existeixen molts més nombres transcendents que algebraics. Un clar exemple són Pi i *e*.

- π = (3'14159...)

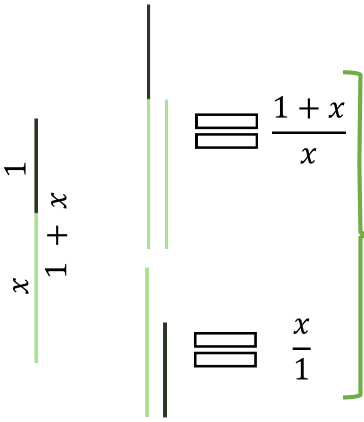
  Pi, és la relació entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre.
  - El primer que el va utilitzar fou el matemàtic francès Charles Hermite a l'any 1873 però va haver d'esperar a que l'alemany Ferdinand von Lindemann ho demostrés a l'any 1882.

- *e* = (2'71828...)

  e, és el límit de la successió del terme general $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
  - El nombre *e*, també anomenat *constant d'Euler* (en honor al matemàtic suís Leonhard Euler) o *constant de Napier* (en honor al matemàtic escocès John Napier, qui va introduir els logaritmes i va ser el primer que va testar el nombre a l'any 1618), és la base dels logaritmes neperians i un dels nombres reals més importants.
  - *e* està considerat per excel·lència, el nombre del càlcul.

ANNEX 2

Esquema per al procediment de l'apartat *Càlcul del nombre mitjançant un segment.* (p.7)

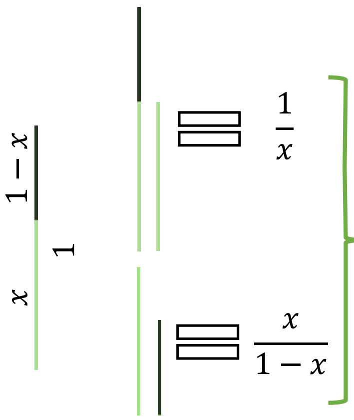


$$\frac{1+x}{x}=\frac{x}{1}\rightarrow 1+x=x^2\rightarrow x^2-x-1=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi \qquad \cancel{x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Esquema per al procediment de l'apartat *Càlcul del nombre mitjançant un segment (2).* (p.8)



$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}\rightarrow 1-x=x^2\rightarrow x^2+x-1=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \cancel{x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$si\ \frac{x}{1}=\Phi\rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\rightarrow\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

$$si\ \frac{x}{1-x}=\Phi\rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\rightarrow\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

ANNEX 3

Problema de la població de conills del llibre de Fibonacci, *Liber Abaci*.

> «Un hombre coloca una pareja de conejos de un mes de edad en un recinto cerrado para ver cuántos descendientes producen en el curso de un año, y se supone que cada mes, a partir del segundo mes de su vida, cada pareja de conejos da origen a una nueva. ¿Cuántas parejas habrá al cabo de un año?»

Per resoldre'l, Fibonacci, com a bon mercader i financer, va fer una taula (*Taula 2*). En aquesta desglossava el creixement de la família de conills i feia un seguiment del nombre de parelles que tenia al finalitzar cada mes.

MES	GENERACIÓ						TOTAL
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	
1º	1						1
2º	1						1
3º	1	1					2
4º	1	2					3
5º	1	3	1				5
6º	1	4	3				8
7º	1	5	6	1			13
8º	1	6	10	4			21
9º	1	7	15	10	1		34
10º	1	8	21	20	5		55
11º	1	9	28	35	15	1	89
12º	1	10	36	56	35	6	144

Taula 2

Com es pot veure, en l'última columna, en la secció *el total*, apareixen aquells nombres que formen la successió que s'està estudiant i el resultat del problema: 144 parelles de conills.

Cada parella acabada de néixer ha d'esperar dos mesos a fer-se adulta per poder-se reproduir i, a partir d'aquí, la seva reproducció serà mensual.

Això es veu en el tercer mes on la parella nascuda al mes anterior encara no s'ha reproduït (ho farà el proper mes) i la parella inicial ha tornat a reproduir-se de nou.

ANNEX 4

Propietats i curiositats de la successió de Fibonacci.

- Els nombres consecutius de Fibonacci són primers entre si.
- El resultat de la raó entre dos nombres consecutius de la successió va oscil·lant per sobre i per sota del nombre auri i, cada vegada que els números consecutius són majors, el resultat s'acosta més a aquest valor (1,618033...). Es pot observar a la *Taula 3*.

POSICIÓ	XIFRA	$a_n/a_n - 1$	DIFERÈNCIA AMB Φ
1	1	-	-
2	1	1,0000000000000	-0,6180339887499
3	2	2,0000000000000	+0,3819660112501
4	3	1,5000000000000	-0,1180339887499
5	5	1,6666666666667	+0,0486326779168
6	8	1,6000000000000	-0,0180339887499
7	13	1,6250000000000	+0,0069660112501
8	21	1,6153846153846	-0,0026493733653
9	34	1,6190476190476	+0,0010136302977
10	55	1,6176470588235	-0,0003869299264
11	89	1,6181818181818	+0,0001478294319
12	144	1,6179775280899	-0,0000564606600
13	233	1,6180555555556	+0,0000215668057
14	377	1,6180257510729	-0,0000082376769
15	610	1,6180371352785	+0,0000031465286

Taula 3

- D'altra banda, un terme de cada tres és parell*, un de cada quatre és múltiple de tres*, un de cada cinc és múltiple de cinc*, etcètera. Això indica que la successió de Fibonacci és periòdica.

$$\Longrightarrow 1, 1, \mathbf{2}, 3, 5, \mathbf{8}, 13, 21, \mathbf{34}, 55, 89, \mathbf{144}, 233, 377, \mathbf{610}, 987, 1597, \ldots$$

$$\Longrightarrow 1, 1, 2, \mathbf{3}, 5, 8, 13, \mathbf{21}, 34, 55, 89, \mathbf{144}, 233, 377, 610, \mathbf{987}, 1597, \ldots$$

$$\Longrightarrow 1, 1, 2, 3, \mathbf{5}, 8, 13, 21, 34, \mathbf{55}, 89, 144, 233, 377, \mathbf{610}, 987, 1597, \ldots$$

- Qualsevol número natural es pot escriure mitjançant la suma de diferents nombres de la successió, cada un d'ells diferent als altres. Per exemple:

$$3 = 2 + 1$$

$$6 = 3 + 2 + 1$$

$$11 = 5 + 3 + 2 + 1$$

$$17 = 13 + 3 + 1$$

$$65 = 55 + 8 + 2$$

$$150 = 144 + 5 + 1$$

...

- Essent n la posició i f_n el nombre, es pot observar com la suma dels n primers nombres és igual al número que ocupa la posició $n+2$ (on n és la posició de l'últim terme a ser sumat) menys 1. És a dir:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots f_n = f_{n+2} - 1$$

$$1+1+2+3+5+8=20$$

$$f_{(6+2)} - 1 = 21 - 1 = 20$$

- La suma de cada deu nombres consecutius es sempre múltiple d'11 i, a més a més, és 11 vegades superior al setè número de la sèrie.

$$1+1+2+3+5+8+\mathbf{13}+21+34+55=143=11\times\mathbf{13}$$

$$21+34+55+89+144+233+\mathbf{377}+610+987+1597=4147=11\times\mathbf{377}$$

- L'últim dígit de cada nombre es repeteix periòdicament cada 60 nombres. Els dos últims, cada 300 i, a partir d'aquí, es repeteixen cada $15\times10^{n-1}$ números.
- El màxim comú divisor de dos nombres de la successió és un altre nombre de Fibonacci. Més específicament: $mcd(f_n; f_m) = f_{mcd(n;m)}$
  - $mcd(8;\ 144)$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$8 = 2^3$$

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

$$mcd(8;144) = 2^3 = \mathbf{8}$$

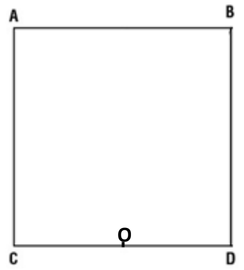
Per fer el màxim comú divisor, després de factoritzar en nombres primers cada un dels números, s'han d'agafar aquells factors comuns amb el mínim exponent i multiplicar-los (si n'hi ha més d'un). En aquest cas només n'hi ha un i és 2^3.

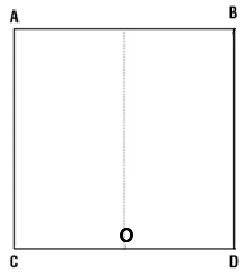
- Quan el valor de la borsa ha començat a variar, la seva tendència, després d'uns dies, puja o baixa de forma clara. Es pot preveure que la correcció serà del $61,8\%$ $\left(\frac{1}{1{,}618} = 0{,}618\right)$, o del $38{,}2\%$ $(1 - 0{,}618 = 0{,}382)$. Són les anomenades línies de Fibonacci i s'utilitzen per intentar identificar canvis en les tendències del mercat. Aquestes línies són rectes verticals que es dibuixen en períodes de temps proporcionals a $5, 8, 13, 21$ ... d'un índex de la gràfica o un valor de la borsa.

ANNEX 5

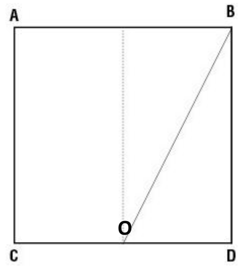
Construcció d'un rectangle auri

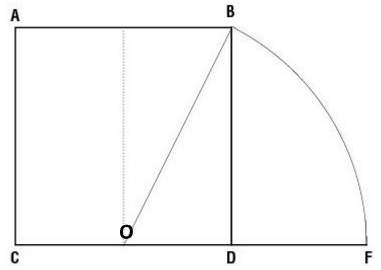
1r pas: Es dibuixa un quadrat ABCD i es fa una marca al centre del costat CD. A continuació, es traça una perpendicular en aquest punt (O), dividint la figura en dos rectangles iguals.



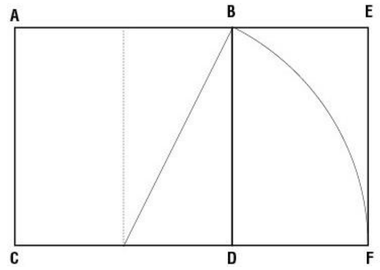


2n pas: S'agafa el compàs, es clava la punxa en el *punt O* i s'obra fins l'extrem B. Un cop el compàs està col·locat, es traça un arc de circumferència fins que aquest arribi a l'altura del costat CD i s'allarga fins a la marca, lloc on apareixerà el punt F.





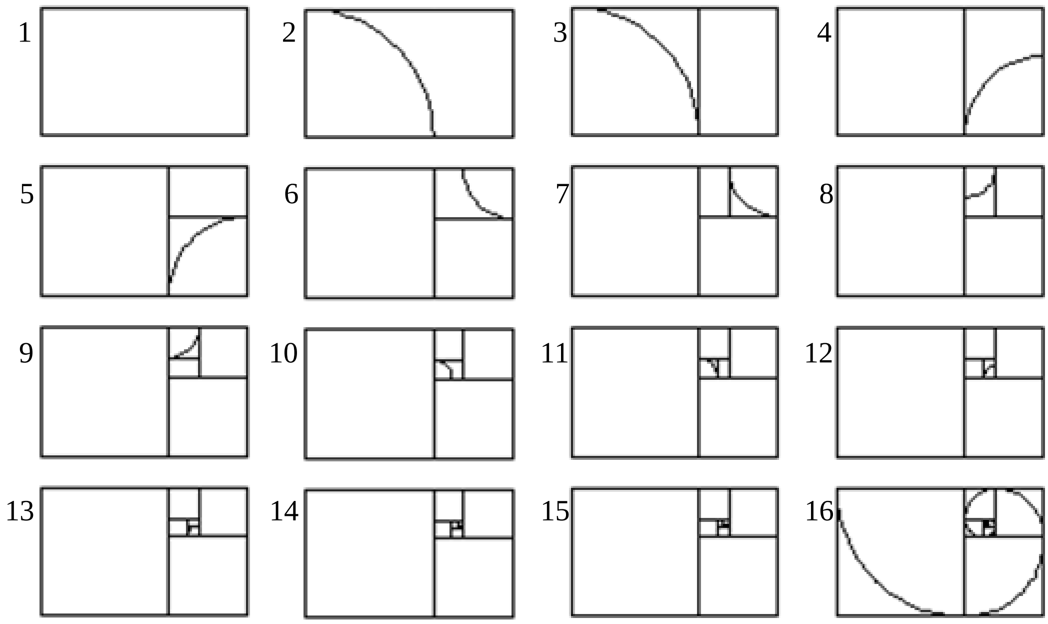
3r pas: Finalment, després de traçar una perpendicular al punt F i allargar el costat AB, el punt allà on es tallin aquestes dos serà el punt E, l'últim vèrtex del rectangle auri AECF. En aquest, al dividir el seu costat major entre el menor $\left(\frac{AE}{AC}, \frac{AE}{EF}, \frac{CF}{AC} \text{ o } \frac{CF}{EF}\right)$, apareix 1,618033 ...



ANNEX 6

Construcció de l’Espiral de Durero.

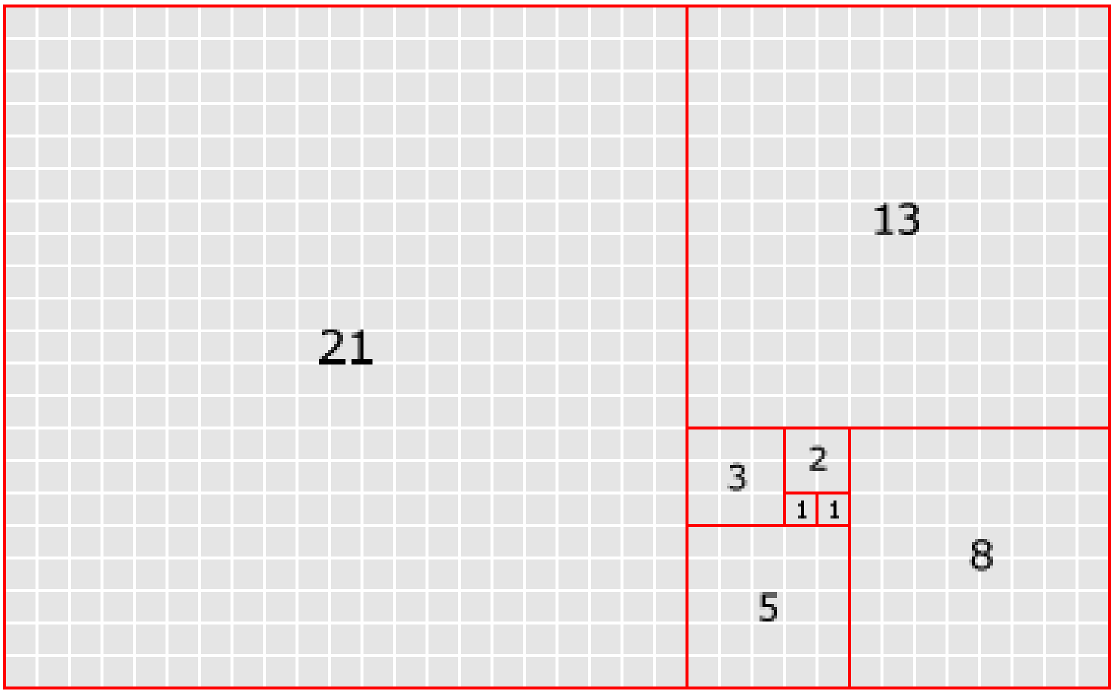
Primerament, s’ha de dibuixar un rectangle que mantingui la proporció àuria, tal com s’ha explicat anteriorment i, dins del mateix, amb l’ajut del compàs, fer el quadrat més gran possible. Apareixerà un altre rectangle, també auri, per tant seran semblants, en el qual s’ha de repetir el procediment anterior i així successivament. La unió de dos vèrtexs oposats de cada quadrat formarà l’espiral.

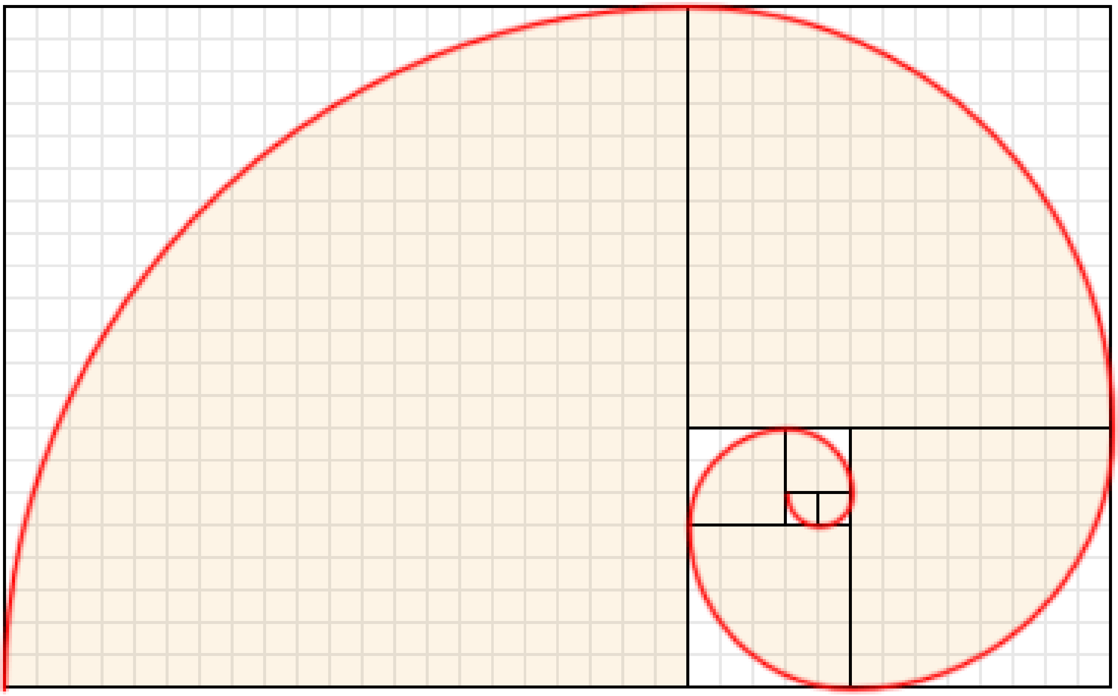


ANNEX 7

Construcció de l'Espiral de Fibonacci.

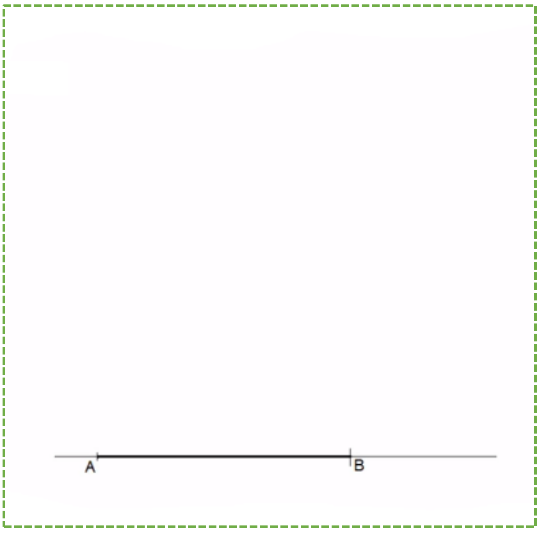
La seva construcció és igual que l'espiral de Durero però partint, com s'ha dit, de dos quadrats d'una unitat de costat i que estiguin junts. A partir d'aquí es forma un rectangle (de 2 x 1) el costat més gran del qual, que equival a dos, serveix com a costat d'un nou quadrat que s'enganxen als dos anteriors. Novament obtenim un rectangle però en aquest cas de dimensions 3 x 2. A partir d'aquí el procés es reitera successivament: cada quadrat s'obté sumant els costats dels dos quadrats anteriors, tal com succeeix en els termes de la Successió de Fibonacci. Un cop els quadrats han estat dibuixats, l'espiral s'aconsegueix traçant una corba que uneixi els dos vèrtexs oposats de cada quadrat.



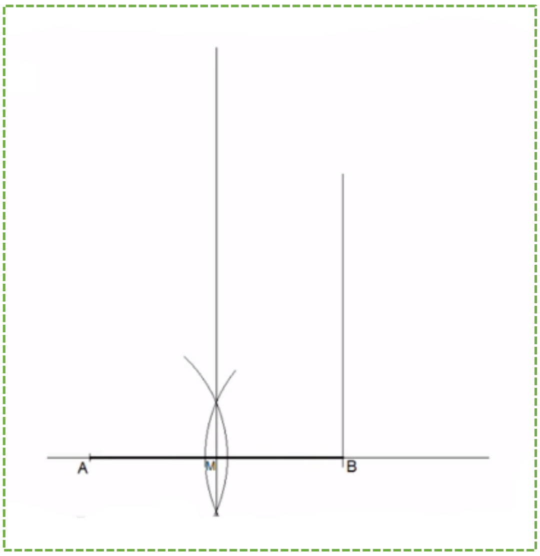


ANNEX 8

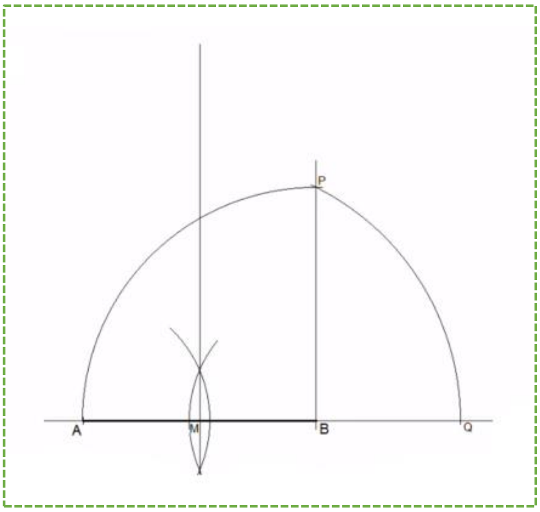
Construcció d'un pentàgon regular.



1.
El primer pas, és el més fàcil, consisteix en dibuixar un segment AB de qualsevol mida, aquesta serà el valor de tots els costats del pentàgon . Aquests dos punts seran els primers vèrtexs del nostre pentàgon regular.

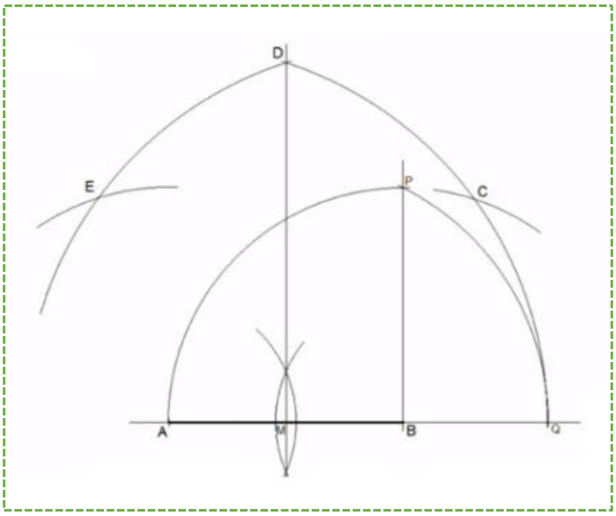


2.
Seguidament s'ha de trobar el *punt M* (punt mig del segment AB) utilitzant el compàs i fen la mediatriu del segment inicial.
També traçar una perpendicular al punt B.

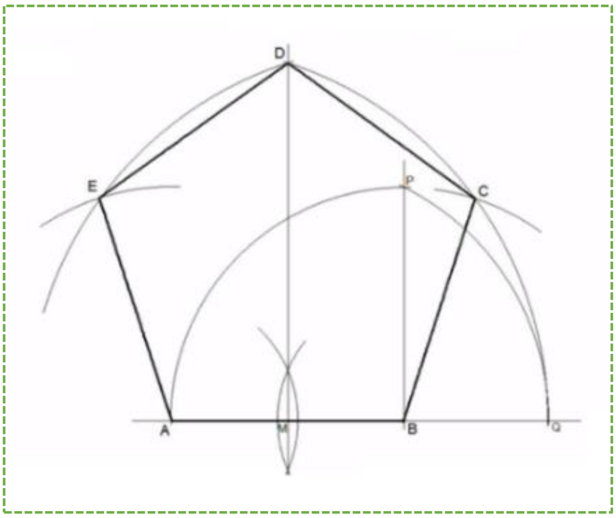


3.

Amb l'ajuda del compàs, traçar un arc de circumferència, punxant al *punt B*, que passi pel *punt A* fins que talli amb la perpendicular dibuixada anteriorment (*punt P*).
A continuació, agafar la mida MP i tornar a traçar un arc fins a tallar amb la recta inicial (*punt Q*).



4.
Agafar la distància AQ i dibuixar un arc fins que talli amb la mediatriu, d'aquesta manera s'aconseguirà el tercer vèrtex de la nostra figura (*punt D*). Es fa el mateix procediment però cap a l'altre costat i, obrint el compàs per la mida del costat AB, es fa una marca allà on aquests tallin amb els arcs anteriors. D'aquesta manera es trobaran els últims vèrtexs del nostre pentàgon (*punt C* i *punt E*).



5.
Per acabar, amb el regle, ajuntar tots els vèrtexs obtinguts per tal de que es formi la figura que es buscava, el pentàgon regular.

ANNEX 9

Explicació del nombre Phi en els fenòmens de la naturalesa, concretament en l'Univers.

Com es veu, les galàxies tenen una forma d'espiral molt característica. Aquesta coincideix amb la de Durero i, a més a més, s'expandeix de tal manera que segueix la successió de Fibonacci o, millor dit, la creació de l'espiral àuria començant des del centre (*Il·lustració 7*).

Il·lustració 7

La següent fotografia (*Il·lustració 8*) que s'ha considerat oportú il·lustrar aquí és la que permet de mostrar el nombre Phi, concretament, a la nostra galàxia. Si es divideixen les diferents distàncies dels planetes respecte del Sol per la distància amb el planeta anterior, i fent la mitjana de tots, ens apareix el numero Phi. Per tant, la relació entre els planetes del Sistema Solar manté la proporció àuria.

Il·lustració 8

ANNEX 10

Proporció àuria al regne vegetal.

En el món de les plantes es pot trobar el nombre d'or en múltiples ocasions: la distribució dels pètals de les flors, la posició de les fulles respecte el tronc, la posició de les llavors d'algunes plantes, entre molts altres. Es distribueixen de tal manera atès que, d'aquesta manera, no es solapen les unes amb les altres i poden aprofitar al màxim la llum del Sol i, per tant, obtenen més energia. Això és degut a que la seva distribució segueix la seqüencia de Fibonacci o l'angle auri, el qual es mencionarà més endavant.

Il·lustració 9

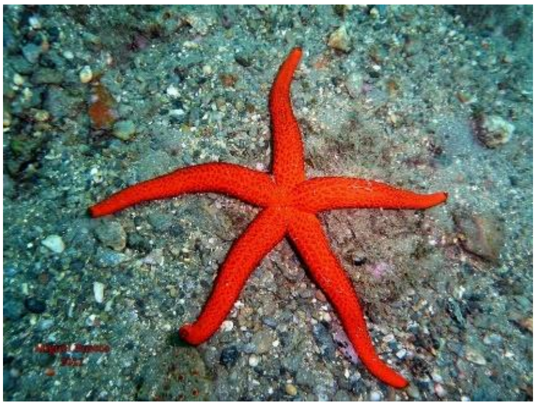
Il·lustració 10

Il·lustració 11

Il·lustració 12

ANNEX 11

Proporció àuria al regne animal.

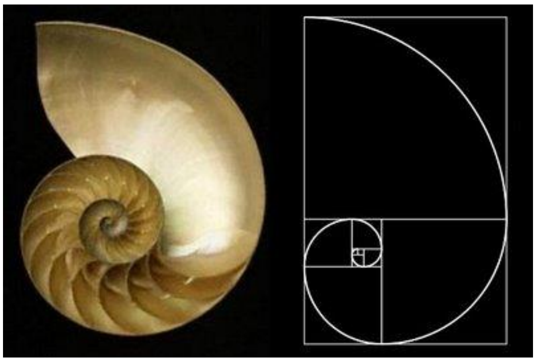


Il·lustració 13

Al unir les cinc puntes de l'estrella de mar (*Il·lustració 13*), apareix un pentàgon. Més endevant s'explicarà la importància d'aquesta figura amb el nombre Phi però, es pot dir, que és la figura geomètrica *par excellence* que el conté més vegades.

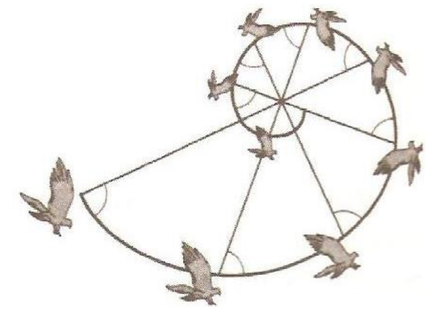
Il·lustració 14

L'eriçó de mar (*Il·lustració 14*), a part de tenir les pues perfectament distribuïdes gràcies a la proporció àuria –distribució similar a la que duen a terme les llavors de les plantes–, conté, també, cinc franges més fosques o marcades que formen un pentàgon, i és la mateixa figura que apareix en l'animal anterior.



Il·lustració 15

El cas de la Nautilus pompilius (vulgarment anomenada, cargola de Nautilus) és un dels més clars en relació a la proporció divina. En la *Il·lustració 15* apareix la carcassa d'aquest animal, la qual té una espiral idèntica a la que creà Durero basant-se amb el nombre Phi.

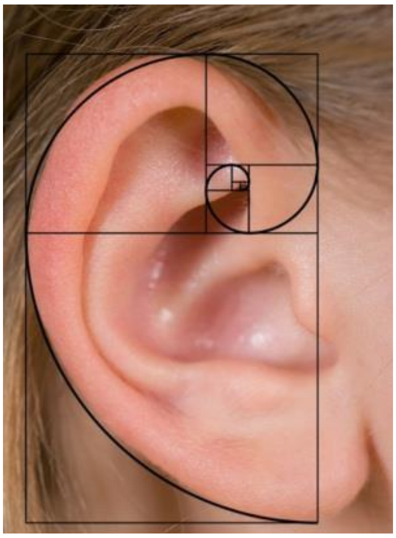


Il·lustració 16

Quan un falcó o una àguila veu una presa, aquesta agafa el vol d'una manera molt especial: va donant voltes al seu voltant creant així una espiral logarítmica semblant a la del nombre d'or i la finalitza al baixar a buscar el seu aliment (*Il·lustració 16*).

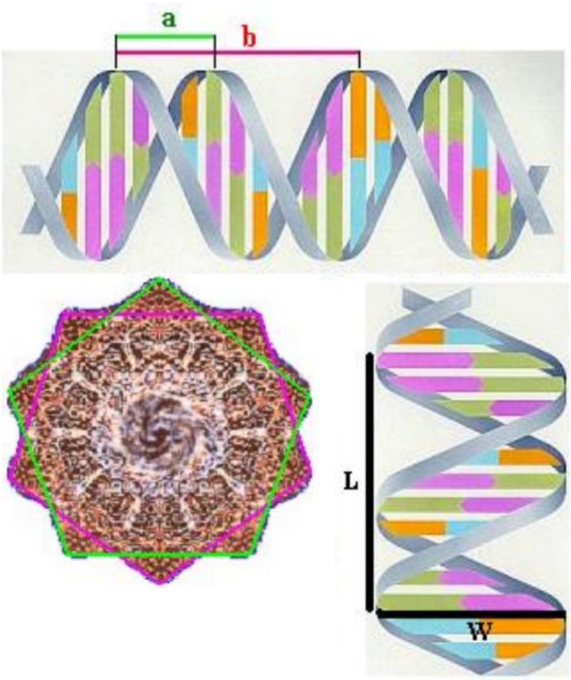
ANNEX 12

Proporció àuria a l'esser humà.



Il·lustració 17

Com es pot veure en la *Il·lustració 17*, la forma que segueix la orella de cada ésser humà és, ni més ni menys, l'espiral de Durero. D'aquesta manera s'aconsegueix captar molt millor el soroll exterior, pel sol fet que l'espiral finalitza allà on es troba situat el timpà.



Il·lustració 18

A la molècula de l'ADN (DNA) –el programa més perfecte on es guarda la informació de la vida– també hi apareixen les proporcions del nombre d'or (*Il·lustració 18*). Realitzant un tall transversal a la molècula d'ADN apareix un decàgon, figura geomètrica que equival a dos pentàgons superposats. En el següent apartat s'explicarà la importància d'aquest vers Phi que, com ja s'ha dit, és una de les figures que el conté més vegades.

Mirant ara un cicle complet de la doble hèlix de la molècula, les mesures equivalen a 21 Å, àngstroms,[12] d'amplada (W) i 34 Å de llargada (L), nombres consecutius de la sèrie de Fibonacci. Per tant, la seva divisió ens donarà pràcticament 1,618033...

També, la relació entre la distància d'un punt qualsevol i el seu consecutiu en la mateixa hèlix (b) i la distància d'aquest primer punt al seu corresponent consecutiu en la següent hèlix (a) és la proporció divina.

[12] Unitat de longitud, reconeguda internacionalment, que equival a 0,1 nanòmetres o 1×10^{-10} metres. S'utilitza per expressar la mida dels àtoms, la llargària d'enllaços químics o l'espectre visible de la llum.

ANNEX 13

Proporció àuria a l'art.

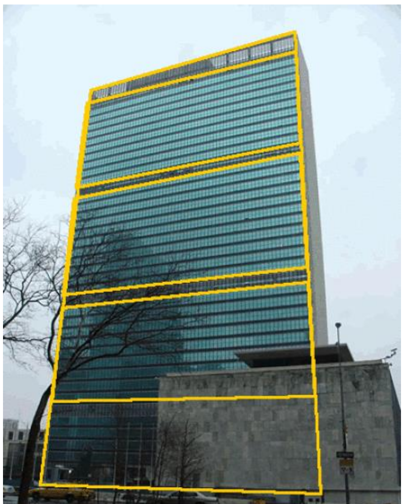
- **ARQUITECTURA**

Il·lustració 19

En aquesta grandíssima obra, Piràmide de Kheops (*Il·lustració 19*), el numero Phi apareix en nombroses ocasions. Es pot demostrar amb el coneixement de les seves dimensions i la utilització matemàtica de la geometria. Al dividir l'altura d'una de les cares laterals entre la meitat de la base del mateix; l'àrea total entre l'àrea lateral o l'àrea lateral entre l'àrea de la base, ens apareix, aproximadament, Phi.

Il·lustració 20

La torre Eiffel (*Il·lustració 20*) es pot dividir en tres pisos molt clars per tal de poder cercar la proporció, la qual fa que sigui tant bella: el primer d'aquests no serveix per contemplar la proporció àurea però els altres dos, juntament amb una mena de mirador que es troba situat, aproximadament, a la meitat d'aquests, ens fan veure la torre Eiffel com dos segments dividits en dos parts, justament per allà on hi ha els pisos i/o mirador. La divisió de les dos parts del segment o la divisió del segment total entre la part major del mateix, dóna Phi.



Il·lustració 21

Observant, ara, en un edifici modern, concretament de l'any 1950, es pot veure una mostra de que encara s'està utilitzant aquesta proporció. El cas de trobar-la en l'edifici de l'Organització de les Nacions Unides (ONU) no és d'estranyar ja que un dels arquitectes que hi participaren fou Le Corbusier –personatge que es comentarà en l'apartat de l'*Evolució de Phi*, gràcies a la seva utilització de la proporció àuria en la majoria dels edificis que creà–.
Com es veu en la *Il·lustració 21*, aquest edifici es troba dividit en diferents rectangles auris i tot ell en forma un altre, col·locat inversament, que dóna a l'edifici una sensació de bellesa.

ANNEX 14

Proporció àuria a l'art.

- **ESCULTURA**

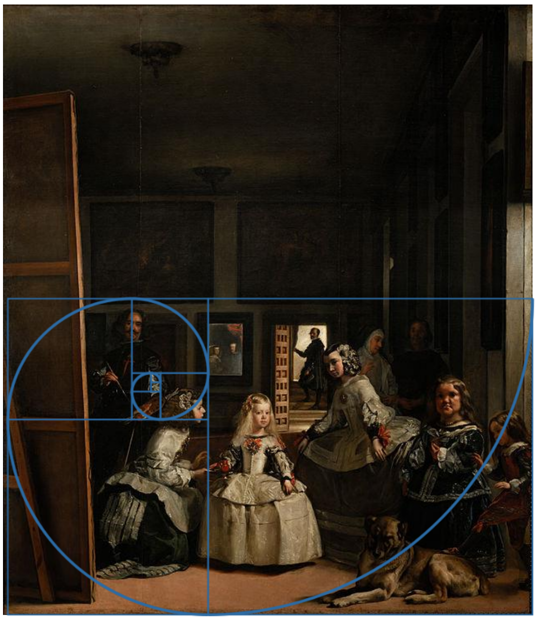
Il·lustració 22

En la *Màscara Funerària de Tutankhamon* (*Il·lustració 22*), una de les escultures més antigues que es coneixen, ja s'hi pot trobar la proporció àuria. Aquesta s'observa en la relació entre els diferents òrgans de la cara i, a més a més, entre els diferents objectes decoratius que presenta.

Il·lustració 23

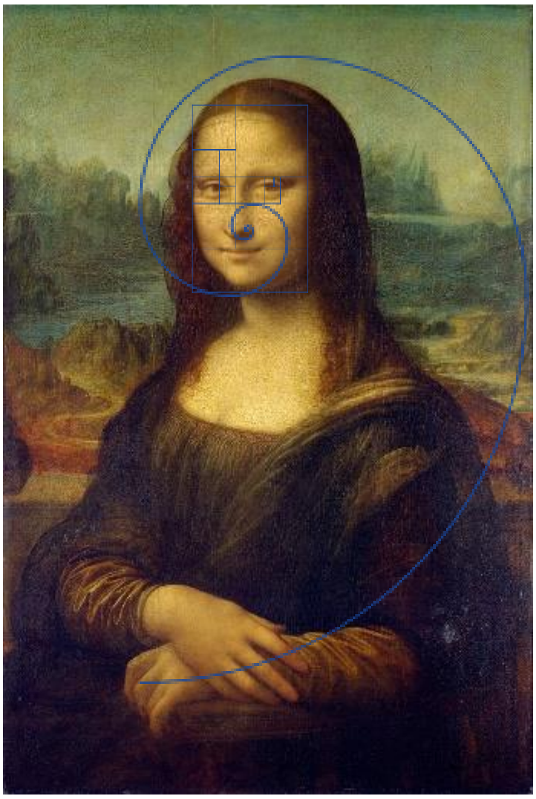
Per cercar el numero auri en la *Venus de Milo* (*Il·lustració 23*) s'han de tenir en compte les proporcions del cos humà (les quals comentarem en l'apartat corresponent) que fan que apareix-hi aquest nombre. Consisteix en una sèrie de divisions entre les dimensions i les altures a determinats punts de l'escultura. Per exemple: la relació entre l'altura total i l'altura del melic, la distància del melic al cap entre l'altura del cap, la distància del melic als peus entre l'alçada dels genolls, etcètera.

- **PINTURA**



Il·lustració 24

Per tal de trobar la proporció àuria que va utilitzar Diego Velázquez per crear *Les Menines* (*Il·lustració 24*) cal fixar-se, només, en la part inferior del quadre, la qual forma un rectangle auri. Lloc on hi apareixen tots els personatges ordenats i agrupats a l'interior de diferents quadrats i rectangles que s'hi formen. Si s'ajunten tota la sèrie de figures geomètriques que hi ha i es traça una corba que els uneixi, apareix l'espiral de Durero. Aquesta marca el recorregut de la llum que entra per la primera finestra, il·luminant tota la figura esmentada anteriorment, fins acabar a la punta del pinzell que utilitza el retrat de Velázquez.



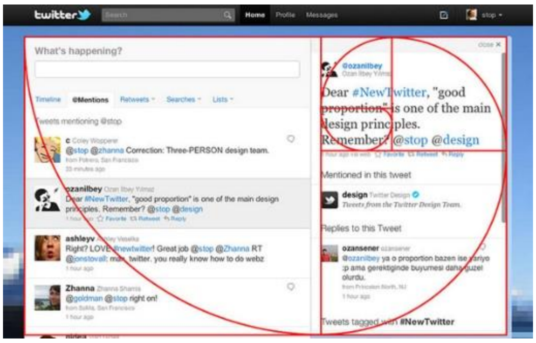
Il·lustració 25

La Gioconda no només té els enigmes visuals que la majoria de gent coneix, també s'hi troben enigmes matemàtics: la proporció àuria.
Si s'observa bé la *Il·lustració 25* es pot veure com conté una espiral àuria, la qual comença a la part central de la cara, al nas, envolta la seva cara i acaba allà on es troben situades les mans del personatge.
A més, conté les proporcions de la cara tal i com es pot veure en la sèrie de rectangles de color blau que hi ha al rostre. En una hi ha els ulls, a l'altre la boca, el nas, etcètera.

ANNEX 15

Proporció àuria a l'actualitat.

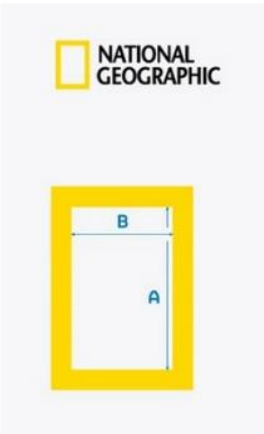
Si es mesuren les dimensions de qualsevol targeta de crèdit, dèbit o el Document Nacional d'Identitat (DNI) es pot veure com la divisió entre la llargada i l'amplada dóna exactament Phi. Per aquest motiu es pot dir que equivalen a un rectangle auri.
Aquest fet també es pot observar en alguns paquets de tabac.



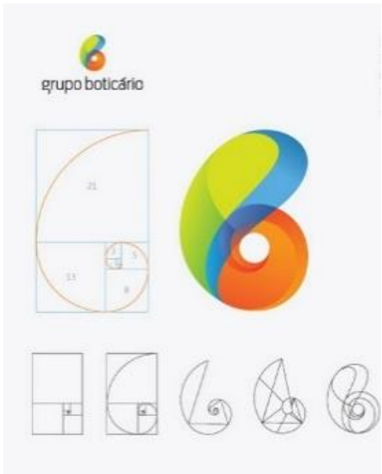
Il·lustració 26

Les distribucions de moltes pàgines d'internet segueixen la proporció àuria. Un exemple molt clar és el Twitter (*Il·lustració 26*), el qual té la pantalla d'inici distribuïda en diferents rectangles auris, –es pot arribar a formar una espiral–.

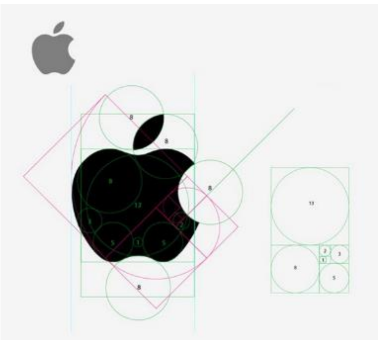
Molts dels logotips o marques contenen la proporció divina mitjançant diferents tipus de tècniques: la relació amb segments auris (*Il·lustració 27*), la divisió per zones divines –figures geomètriques que contenen la proporció– (*Il·lustració 29* i *Il·lustració 30*) o l'ús de l'espiral de Durero (*Il·lustració 28*).

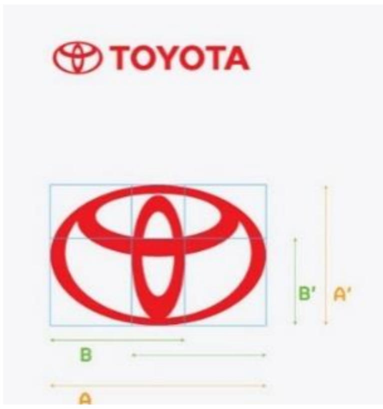


Il·lustració 27



Il·lustració 28


Il·lustració 29



Il·lustració 30

ANNEX 16

Proporció àuria a la llar.

Fotografia 1

Fotografia 2

Fotografia 3

Fotografia 4

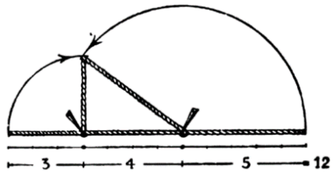
ANNEX 17

Història de la proporció àuria.

1. Edat Antiga

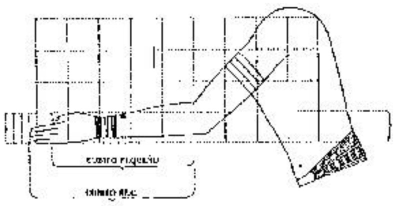
Segons alguns historiadors, els egipcis creien que la proporció àuria era sagrada i, per tant, molt important per la seva religió –la varen utilitzar en la construcció de temples i llocs sagrats–. Eren completament conscients que la utilitzaven però ells l'anomenaven *Raó Sagrada*.

Les inundacions periòdiques de la vall del Nil podrien ser la causa d'aquesta utilització: per tal de treure el màxim profit de les inundacions els *harpedonaptas*, nom que es donava als antics agrimensors,[13] operant amb una corda, assenyalaven les parcel·les després de les pujades d'aigua. La corda (*Il·lustració 31*) estava dividida en tres trossos, amb les mides de tres, quatre i cinc o amb d'altes mides que guardaven aquesta proporció. La forma en com col·locaven la corda consistia en un triangle rectangle, anomenat pels egipcis *Isiaco*, en honor a la deessa Isis. Aquesta formació triangular arriba als nostres dies a través de Pitàgores i, posteriorment, gràcies a Kepler. El seu triangle (triangle de Kepler), a similitud del triangle sagrat egipci, és un triangle rectangle amb els costats en progressió geomètrica[14] i la relació entre els costats del mateix està vinculada al nombre auri.



Il·lustració 31

Però això no és tot, sinó que, en l'expedició a Egipte de l'any 1830 patrocinada pel rei de Prússia per tal de registrar els monuments egipcis, Karl Richard Lepsius[15] va observar que les figures d'una tomba de Saqqara[16] estaven recobertes per una quadrícula (*Il·lustració 32*). A dia d'avui es té coneixement de l'existència d'un centenar d'exemples similars, des de l'època de Djoser.[17] L'existència d'aquesta quadrícula fou interpretada, per Lepsius com un cànon de proporcions, atès que a les figures de Saqqara hi havia una línia central, un eix vertical i estava tallada en sis línies horitzontals. Aquests estudis foren ampliats per Erik Iversen en una de les seves obres,[18] al demostrar que el cànon egipci es trobava a les parts del cos humà. Va comprovar que cada quadrícula corresponia a un puny de l'home, per la qual cosa va deduir que el puny era la base de totes les proporcions. Com digué Sigfried Giedion:[19]


Il·lustració 32

> «Las proporciones en la arquitectura estaban basadas en el antebrazo: el codo. Por consiguiente, la arquitectura egipcia es una proyección de las proporciones del cuerpo y los miembros humanos trasladada a una escala mayor, pero todavía humana. Esto es especialmente válido por lo que se refiere a los grandes templos. El hombre y los artefactos del hombre estaban estrechamente entrelazados».

---

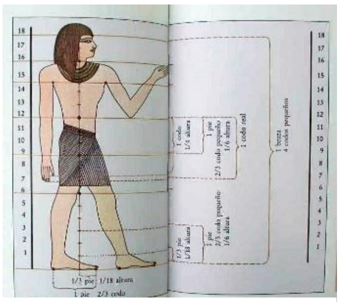
[13] Persona que té per ofici mesurar els terrenys.
[14] Seqüència en la qual cada element s'obté multiplicant l'element anterior per una constant denominada raó o factor de la progressió.
[15] Lingüista i bibliotecari prussià que va ser un dels primers egiptòlegs (1810-1884).
[16] Gran necròpolis situada prop de Memfis, al sud del Caire.
[17] Faraó de la dinastia III de l'antic Egipte (2665 a.C. – 2645 a.C.).
[18] IVERSEN, Eric i SHIBATA, Yoshiaiki, *Canon and proportions in Egyptian Art*. Editorial Aris & Philips Ltd. Warminster. Anglaterra, 1975.
[19] Historiador suís dedicat a l'arquitectura (1888-1968).

Concretament es varen utilitzar dos tipus de cànons, un anterior al segle VII a.C. i un altre a partir de l'època de Saqqara. D'aquesta manera, es pot afirmar que els cànons egipcis es basen en el pam, el colze i el peu.

- El pam, com a cànon egipci, és la mesura de la mà sobre els nusos. També està inclòs el dit polze, que correspon a una quadrícula.
- El colze es diferencia en colze petit i colze reial.
    - El colze petit existeix des de temps immemorials (abans que Imhotep,[20] aproximadament entre els anys 2690-2610 a.C., fes el recinte del Saqqara) i és la mesura entre la part interna del braç, a nivell del colze, fins a l'ungla del dit polze.
    - El colze reial és una sisena part més gran que el cúbit petit i s'utilitzava per mesurar els edificis construïts per ordre reial (piràmides i temples). També és la mesura de la part interna del braç, a nivell de colze, fins a l'ungla del dit mitjà.

A partir del segle VII a.C. el colze reial es va utilitzar com a proporció del cos humà.

El nou cànon egipci (VII a.C.) (*Il·lustració 33*) estableix que, al cos humà, la distància des de la parpella superior a la planta del peu mesura 21 pams, que equivalen a 7 peus (1 peu = 3 pams), o 4 colzes reals. Les mesures exactes del cànon petit són conegudes gràcies a Heròdot,[21] qui l'equiparà amb el colze grec. Aquest cànon nou coincidirà amb el cànon grec del segle V.[22]



Il·lustració 33

Tot a continuació s'observarà com determinats personatges importants de la història antiga van contribuir a la consideració del Phi tal i com a dia d'avui es coneix.

- **PITÀGORES**

Filòsof i matemàtic grec que fou considerat el primer matemàtic pur. És possible que viatgés a Milet, Fenícia i Egipte, llocs on podria haver estudiat els misteris de la geometria i l'astronomia. Bona part de la geometria pitagòrica està relacionada amb la secció àuria, essent l'estrella de cinc puntes la figura que ho representa. Aquesta es forma al fer les cinc diagonals d'un pentàgon, dibuix anomenat *Pentagrama* i era una espècie de símbol d'identificació de l'Escola Pitagòrica. Per això, els pitagòrics varen estudiar exhaustivament la construcció i les propietats del pentagrama. Aquest s'obté a partir de tres triangles isòsceles iguals, amb els angles iguals i dobles a l'angle desigual. Aquest tipus de triangle és anomenat auri ja que els costats iguals estan en proporció àuria amb els costat petits, tal hi com s'ha dit en l'apartat anterior.[23]

---

[20] Alt oficial, arquitecte, astrònom i metge, que va viure a Egipte durant la tercera dinastia. Alguns suposen que fou fill de Djoser i va dissenyar la Piràmide esglaonada de Saqqara.

[21] Historiador i geògraf grec (484 a.C.-425 a.C.) reconegut com el pare de la historiografia que va realitzar viatges a Àsia Menor, Babilònia, Egipte i Grècia on va conèixer de primera mà els coneixements i les cultures d'aquestes zones i que, al plasmar-ho per escrit en les seves obres, aquestes foren transportades i transmeses a altres cultures.

[22] BLANCO FREIJEIRO, Antonio, *El arte egipcio I*. Editorial Historia 16. Madrid, 1989. pp. 79-80.

[23] Comentat a la Proposició 10 del Llibre IV de *Los Elementos de Euclides*.

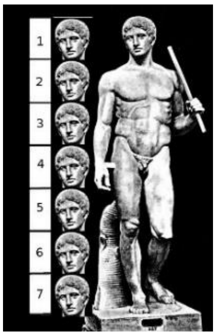
En geometria, el seu gran descobriment fou l'anomenat *teorema de la hipotenusa*, conegut com a *teorema de Pitàgores*, on demostra que en un triangle rectangle, la suma dels quadrats dels catets és igual al quadrat de la hipotenusa $(a^2 + b^2 = c^2)$. Si bé, com ja s'ha comentat abans, no sembla que sigui el creador del teorema, atès que aquesta proporcionalitat s'utilitzava en l'Antic Egipte i, segons altres fons, en les èpoques babilòniques.
Encara que es desconeix de quina manera concreta la filosofia pitagòrica va influir en els principals escultors grecs, sens dubte, les seves idees fonamentals, que estableixen l'ordenament de l'Univers en base a una concepció matemàtica, estan al centre de la creació artística grega. Per Pitàgores res existia sense els números.

- **POLICLET**

Escultor grec –coincident en el temps amb Fidias– certament important i corresponent a l'antiguitat clàssica. No serà fins a la Grècia clàssica que es tindrà en compte la proporció de l'obra segons la figura que representa. Aquesta nova mesura és la clau de la teoria de la proporció de Policlet.
Aquest personatge va fer un nou cànon de proporcions on va expressar la bellesa i la vitalitat del cos al mateix temps que li va donar un aspecte d'eternitat i harmonia. Va plasmar, per escrit, aquests nous valors i conceptes aplicats a l'escultura en un tractat, *El Cànon*,[24] en el qual l'artista realitzà un model de representació ideal de la bellesa del cos humà. Aquesta nova percepció podria haver-se basat en investigacions prèvies sobre proporcions realitzades per l'escultor Pitàgores, de totes maneres, les seves idees eren part de la necessitat de descobrir una estructura regular i harmoniosa formulada a través de relacions numèriques seguint el sentit pitagòric de la proporció com a ordre diví.
Aquest tractat detalla el seu sistema de composició escultòrica i, si bé està perduda, en tenim coneixement gràcies a que Galè[25] parlà d'ell en la versió llatina de *De placitis Hippocratis et Platonis libri novem*:

> «...pensó que la belleza reside no en la adecuada proporción de los elementos sino de las partes; es decir, del dedo con el dedo y de todos los dedos con la palma de la mano y con la primera parte de la palma y de estas con el codo, del codo con el brazo y finalmente de todas estas con todo lo demás. Así pues, la belleza del cuerpo consiste en la adecuada proporción de los miembros, la salud en la proporción entre sí de los elementos, cualesquiera que sean».[26]

Així, per a demostrar l'exactitud del seu cànon va esculpir una estàtua, de la qual només ens ha arribat una còpia romana ja que la original, anomenada el *Dorífor*, fou destruïda; aquesta representa un jove que porta una llança i apareix completament nu (*Il·lustració 34*). És una obra que serví de model atesa la seva gran demostració sobre la proporció i la bellesa del cos humà.



Il·lustració 34

[24] Paraula que prové del grec Χανων; és un concepte que es refereix a les proporcions perfectes o ideals del cos humà.
[25] Metge molt important de l'època clàssica (129-216).
[26] MÜLLER, Lipsiae, *Recensuit et explanavit I*. Editorial B. G. Teubneri, 1874. p. 426, vol I.

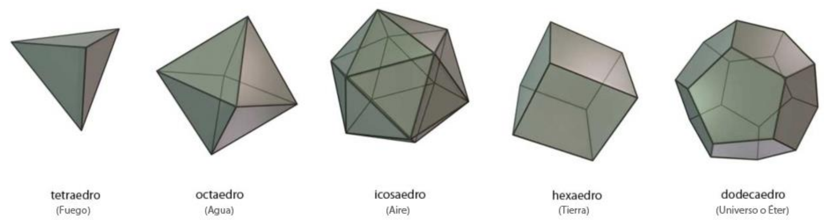
- **FÍDIES**

Escultor i arquitecte grec del període clàssic, essent un dels més famosos escultors de l'Antiga Grècia. Va viure a l'època de Pèricles,[27] el qual considerava a Fídies com un dels seus grans *artífexs* i el va anomenar director de les obres del Partenó. Als voltants de l'any 447 a.C. va supervisar les obres del Partenó dirigides per Cal·lícrates i Ictí[28] mentre, al mateix temps, es dedicava a la decoració escultòrica del temple. En les seves escultures va utilitzar la proporció àuria.
Fídies fou l'escultor més importat de l'època amb la col·laboració, més o menys aïllada però essencial, d'un altre gran artista, Policlet. El seu estil el va combinar amb els èxits de Policlet, com es pot observar en l'obra *Atena Pàrtenos*, realitzada a l'any 438 a. C., per ser consagrada al Partenó. L'escultura original no es conserva però hi ha una copia romana del segle II, de marbre, anomenada *Atenea Varvakeion*, que dóna una idea de com va ser l'original.

- **PLATÓ**

Filòsof grec seguidor de Sòcrates i mestre d'Aristòtil. Si bé va viure abans que Euclides estudiés el nombre auri, a Plató se l'hi ha atribuït el desenvolupament de teoremes relacionats amb el nombre d'or atès que Procle,[29] en un comentari sobre el primer llibre *Els Elements* d'Euclides, va escriure: «Euxodo… va multiplicar el número de teoremes relatius a la secció a la qual Plató va donar origen». La paraula *secció* va ser entesa com a secció àuria però, fins al segle XIX, aquesta interpretació fou motiu de discussió entre investigadors, els quals van arribar a la conclusió que la paraula *secció*, en aquell context, no tenia res a veure amb el nombre auri.

De totes maneres, sí que és cert que Plató va considerar que els nombres irracionals, descoberts pels pitagòrics, eren d'una gran importància atès que eren la clau de la física del cosmos. D'aquesta manera es va dedicar a estudiar l'origen i l'estructura del cosmos utilitzant els cinc sòlids platònics (*Il·lustració 35*).



Il·lustració 35

Encara que fou Empèdocles[30] qui, per primera vegada, va associar el tetraedre, l'octaedre, l'icosaedre i l'hexaedre al foc, l'aigua, l'aire i la terra respectivament, Plató va relacionar posteriorment el dodecaedre amb la substància de què estaven fetes les estrelles. En el diàleg del *Timeu*, Plató posa en boca seva aquestes paraules:

> «El fuego está formado por tetraedros; el aire, de octaedros; el agua, de icosaedros; la tierra de cubos; y como aún es posible una quinta forma, Dios ha utilizado ésta, el dodecaedro pentagonal, para que sirva de límite al mundo».

---

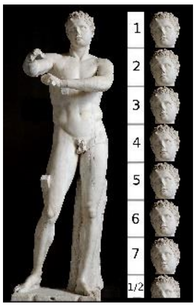
[27] Home d'Estat, militar d'Atenes (495 a.C. - 429 a.C.).
[28] Arquitectes grecs d'Atenes del segle V a.C.
[29] Filòsof neoplatònic que fou el cap de l'escola platònica d'Atenes (412-485).
[30] Filòsof presocràtic grec que va elaborar la teoria dels quatre elements per tal d'explicar l'origen del món (492 a.C.-432 a.C.).

D'aquesta manera, considerant l'Univers com un tot, el va associar al dodecaedre, afirmant que aquest és la matèria de la qual està fet l'element perfecte, l'èter, i que simbolitza la perfecció. A partit d'aquest moment els sòlids pitagòrics es varen convertir en sòlids platònics.

- **LÍSIP**

Escultor de la Grècia clàssica i retratista d'Alexandre el Gran,[31] a més a més, va ser considerat un dels grans escultors de la segona fase del classicisme.
Lísip va establir un nou sistema de proporcions que, molts segles després, durant el Renaixement, seria considerat com la gran bellesa grega. Aquest nou cànon estava inspirat en la natura, arrel de les manifestacions de Teopomp de Quios[32] i del *Dorífor* de Policlet. Va allargar les proporcions de Policlet fins a set caps i mig, de tal manera que les figures eren més lleugeres, amb més gràcia i amb més alçada. Buscant l'elegància i el naturalisme va rebutjar les antigues idees del cos humà i va optar per la representació subjectiva de la natura.

La seva nova versió del cànon queda reflectida en la seva obra *Apoxiòmenos*, com molt bé s'aprecia en la *Il·lustració 36*. Aquesta representa una escultura esculpida en bronze de la qual se'n conserva una còpia romana en el Museu del Vaticà.



Il·lustració 36

- **EUCLIDES**

No es conserven gaires dades de la seva vida ja que no consta ni el seu lloc de naixement ni el de mort. Es sap que va viure a Alexandria, Egipte, pels volts de l'any 300 a.C., on va fundar una escola d'estudis matemàtics després de la mort d'Alexandre el Gran. És conegut com *el pare de la geometria*.
Se sap que va escriure una desena d'obres però, tan sols n'hi ha dues que estan acreditades: *El Elements* i *La Data*. Aquesta última obra podria ser un text auxiliar o complementari del primer. La seva gran obra, *Els Elements*, coneguda com a geometria euclidiana, és un tractat matemàtic i geomètric certament important. El text grec fou publicat per primera vegada per Simon Grynaeus el Vell,[33] però la traducció més propera a l'original és l'edició de Johan Ludvig Heiberg,[34] atès que és fet des de set manuscrits considerats principals i un *palimpsest*[35] del museu britànic.
Aquesta obra és considerada un dels llibres de text més extensos de la història, essent el segon llibre més publicat després de la Bíblia. Durant segles, ha estat inclòs en el temari dels estudis universitaris i s'exigia el coneixement d'aquest. Encara avui en dia, s'utilitza com a introducció bàsica de la geometria.

- **MARC VITRUVI POLIÓ**

Arquitecte, escriptor i enginyer romà del segle I a.C. No es coneix gaire res de la seva vida atès que no es va escriure cap biografia seva, fins al punt que es dubta de si el

[31] Rei del regne grec de Macedònia, conqueridor de l'Imperi Persa i un dels líders militars més importants del món antic (356 a.C.-323 a.C.).
[32] Historiador grec (378 a.C.-303 a.C.).
[33] Erudit alemany i teòleg de la Reforma Protestant (1493-1541). Va publicar la seva obra sota el títol de *Euclidis Elementorum libri XV cum prefarione* a l'any 1533 en base a dos manuscrits grecs: un de Venècia i un altre de París
[34] Filòleg i historiador danès (1954-1928). Edició titulada *Euclidis Opera Omnia Tmo I-IV.*
[35] Document antic reutilitzat.

seu nom era realment Marc. Tampoc es coneix el seu lloc de naixement encara que se'l considera natural de Roma. El que sí es pot assegurar és que vivia a Roma durant l'època del primer emperador, Octavi August i que estava certament influenciat pels grecs.

Vitruvi és autor del tractat d'arquitectura més antic, format per deu llibres. Es tracta d'una obra amb una gran influència hel·lenística que explica la construcció d'edificis, tenint en compte la proporcionalitat que usaven els grecs. Concretament, el capítol primer del seu Llibre III d'arquitectura estableix les mesures dels temples i compara la proporcionalitat d'aquestes construccions a la proporcionalitat del cos humà, el qual considera perfecte per haver estat creat per la natura. Vegem-ho a continuació:

> «La Naturaleza ha hecho el cuerpo humano de manera que el rostro, medido desde la barba hasta lo alto de la frente y la raíz de los cabellos, sea la décima parte de la altura total. Igualmente, la palma de la mano, desde el nudo de la muñeca hasta el extremo del dedo de corazón, es otro tanto. La cabeza, desde la barba hasta la coronilla, es la octava parte de todo el cuerpo. La misma medida hay desde la nuca hasta la parte superior del pecho».[36]

2. Edat Moderna

- **LUCA PACIOLI**

Frare franciscà i matemàtic italià que va estudiar teologia i, posteriorment, es va dedicar a ensenyar matemàtiques en diverses ciutats d'Itàlia. La obra principal d'aquest autor fou publicada l'any 1494[37] i tingué una importància excepcional. Està escrita en un llenguatge vulgar i és considerat el primer llibre d'àlgebra del Renaixement, la difusió del qual va ser enorme. Per a la seva elaboració, Pacioli es va guiar pels *Elements* d'Euclides i en els treballs fets per Fibonacci.

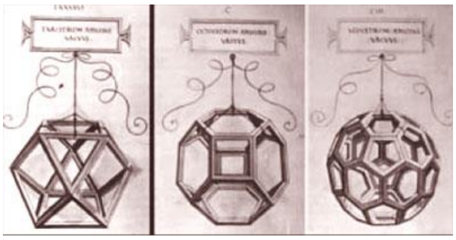
A l'any 1496, Pacioli marxà a Milà per ensenyar matemàtiques, convidat pel duc Ludovico Sforza. Durant la seva estada a Milà va escriure la seva obra més important, *De Divina Proportione*, que es dedica a la teoria de la proporció que avui es coneix com a secció àuria o, com dirien els clàssics, *divisió d'un segment en mitja i extrema raó*.
El seu contingut tracta de respondre a la preocupació dels pintors del moment, la perspectiva. Per a la seva elaboració es serveix d'una font tan important com el *Timeu* de Plató, on es parla de l'origen de la ciència matemàtica, *Els Elements* d'Euclides i els escrits de Vitruvi. Pacioli va tenir en compte el principi fonamental: la primacia de les matemàtiques sobre qualsevol altre disciplina.
En el capítol V fa un tractat de la secció àuria, la qual anomena *divina proporció* i que dóna lloc al títol de l'obra. Anomena *divina* a la proporció per diverses raons, concretament cinc. La tercera d'elles diu:

> «La tercera correspondencia es que, así como Dios no se puede propiamente definir ni puede darse a entender a nosotros mediante palabras, nuestra proporción no puede nunca determinarse con un número inteligible ni expresarse mediante cantidad racional alguna, sino que siempre es oculta y secreta y es llamada irracional por los matemáticos».[38]

---

36 VITRUBIO, Marco Lucio, *Los 10 libros de Arquitectura*. Ed. IBERIA. Barcelona, 2000. Cap. 1: *De dónde se han tomado las medidas para la erección de templos*. pp. 67-70.
37 *La Summa de arithmetica, geometría, proportioni et proportionalita precipitevolissimevolmente*
38 PACIOLI, Luca, *De Divina Proportione*. Ediciones Akal, S.A. Madrid, 1991.p. 41.

El llibre conté unes il·lustracions meravelloses dels cossos geomètrics estudiats, els quals foren dibuixats per Leonardo da Vinci (*Il·lustració 37*), amb qui havia tingut, com ja s'ha mencionat, una amistat molt especial. D'aquesta manera es va unir la ciència de Pacioli amb la creativitat artística de Leonardo, donant lloc a la bellesa i a la perfecció.



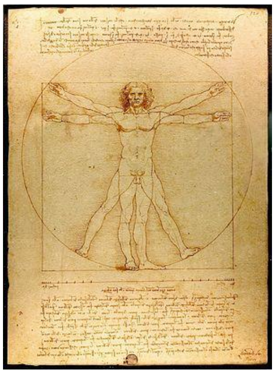
Il·lustració 37

- **LEONARDO DA VINCI**

Arquitecte, escultor, científic i enginyer, encara que va ser la pintura el que el va portar a ser considerat un gran artista, essent així un dels grans mestres del Renaixement. En la dècada de 1490 va estudiar matemàtiques al costat de Luca Pacioli, persona amb qui va coincidir i, com ja s'ha comentat, va fer una sèrie de dibuixos de sòlids regulars de manera esquelètica per il·lustrar el llibre *De Divina Proportione*.

Entre les seves obres més importants cal destacar *L'home de Vitruvi*[39] *(Il·lustració 38)*. Aquesta obra és especialment coneguda a l'actualitat, sobretot en àmbits mèdics i en estudis on s'utilitza la proporció àuria.

Per realitzar-lo, Leonardo da Vinci va tenir en compte el text del Llibre III, Capítol I, del llibre *Los diez libros de Arquitectura* de l'arquitecte romà Marc Vitruvi Polió, el qual ha estat comentat anteriorment en aquest treball, i que es basava en cànons grecs. Si bé va fer servir les proporcions de Vitruvi, també hi va fer algunes correccions.



Il·lustració 38

Les biografies clàssiques de Leonardo da Vinci no relacionen les seves obres amb la divina proporció, tot i que, segons estudis de l'arquitecta Carme Capelastegui i l'advocat Eladio de la Concha diuen el contrari. Segons ells, la divina proporció és com un codi secret que apareix en totes les seves obres, inclús els de la seva primera etapa florentina.

La proporció àuria, i en conseqüència la utilització del nombre Phi, es fa complexa en les obres com *El Sant Sopar*,[40] ja que Leonardo no tan sols utilitzava el rectangle auri sinó que, en les seves obres, cada racó està relacionat amb aquesta proporció.

Segons Carmen Capelastegui i Eladio de la Concha, la utilització de la proporció divina per part de Leonardo da Vinci era casi obsessiva. Consistia en un joc de línies imaginàries, punts, esferes i referències que donaven veracitat a la pròpia manifestació de l'autor: «Ningú pot entendre la meva obra si no entén de matemàtiques».

- **ALBERTO DURERO**

Artista més famós del Renaixement alemany, conegut a tot el món per les seves pintures, dibuixos, gravats i escrits teòrics sobre art; obres que van exercir una profunda influència als artistes del segle XVI. Fou un seguidor del Renaixement a Itàlia, lloc on es va desplaçar amb la necessitat d'adquirir més coneixements.

Durant els anys 1505 i 1507 va fer el seu segon viatge a Itàlia per tal de buscar tot allò relacionat amb la proporció àuria i la representació del cos humà, és a dir, la proporcionalitat, que tant va inspirar a Leonardo da Vinci. A tal efecte, va adquirir un exemplar de la geometria d'Euclides, el qual li va servir de base per escriure tractats

[39] Tinta sobre paper, vers el 1490. 34,4 x 25,5cm. Galeria de l'Acadèmia de Venècia, Venècia. Itàlia.

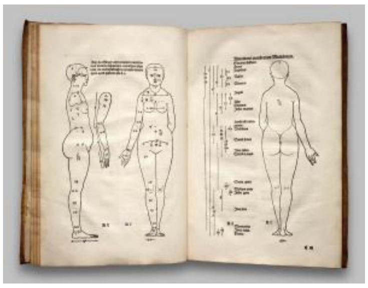
[40] Tremp d'ou i oli sobre guix, 1495-1498. 460 x 880 cm. Santa Maria delle Grazie, Milà. Itàlia.

teòrics per tal d'instruir als artistes en la perspectiva i la proporció, –sens dubte, la influencia de Luca Pacioli està present en aquests estudis–. En la seva segona visita a Venècia, Durero va poder visitar a Pacioli, qui llavors estava ensenyant matemàtiques a Bolonya. Aquesta és la opinió de Georges Jouven, qui diu:

> «Conocemos bien el carácter particular de las matemáticas de Pacioli para suponer lo que enseñó a Durero; le habló sin duda de las proporciones del *Timeo*, y particularmente de la Divina Proporción sobre la que iba a publicar su obra cuatro años más tarde».[41]

La utilització de la proporció àuria per part de Durero queda reflectida en l'anàlisi feta per Jouven sobre el gravat de 1514, *Melancolia I*, on ha comprovat la seva presència en la composició de l'obra. Durero considerava que hi havia molt artistes ignorats de la geometria «sense la qual no es pot ser ni convertir-se en cap artista».

Aquest pintor, enamorat de les matemàtiques, a l'any 1525 va publicar la seva obra titulada *Instrucció sobre la mida amb regle i compàs de les figures planes i sòlides*, primer llibre escrit en alemany on explica com dibuixar amb regle i compàs algunes espirals. Una d'elles passarà a la història amb el seu nom: *l'Espiral de Durero*. La seva importància ve donada pel fet d'estar basada en el famós nombre d'or i en els rectangles auris.



Il·lustració 39

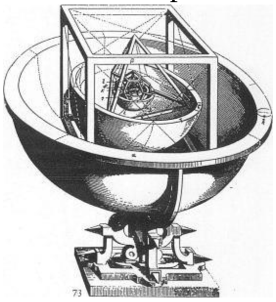
Influït per l'art clàssic, va fer un estudi de les proporcions, considerant quines havia de tenir el cos humà per ser considerat bell. Després d'anys d'anàlisis va arribar a la conclusió que no hi ha un únic ideal de bellesa i va descobrir que la perfecció es pot adquirir de diverses maneres.
El seu gran interès per la geometria i les proporcions matemàtiques, arrel del tractat de Vitruvi i de les obres de Leon Battista Alberti[42] i Luca Pacioli, el va portar a fer un tractat publicat a l'any 1528 conegut com *Vier Bücher von menschlicher Proportion* (Quatre llibres sobre les proporcions humanes) (*Il·lustració 39*) on pren com a unitat fonamental l'alçada de l'home i la subdivideix en fraccions de la següent manera:

- La meitat de l'alçada és igual a l'altura del cap i el tronc.
- Una quarta part de l'alçada és igual a la distància des del turmell fins al genoll i la distància de la barbeta fins al melic.
- Una sisena part de l'alçada és igual a la longitud del peu.
- Una vuitena part de l'alçada és igual a l'alçada del cap i la distància entre els pits.
- Una desena part de l'alçada és igual a l'alçada de la cara i l'amplada de la mateixa, incloent les orelles.
- Una dotzena part de l'alçada és igual a l'amplada de la cara, a l'altura de la part inferior del nas, i el gruix del ventre de la cama.

[41] JOUVEN, Georges, *Les Nombres Cachés*. Dervy-Livres. París, 1978. p. 224.
[42] Arquitecte, matemàtic i poeta genovès (1404-1472).

- **JOHANNES KEPLER**

Astrònom, matemàtic, brillant pensador, escriptor i una figura clau en la revolució científica. Estava convençut que el món s'havia creat seguint unes proporcions matemàtiques perfectes i ho va expressar en la seva primera obra publicada a l'any 1596, *Mysterium cosmograficum*, on va citar el seu descobriment: la naturalesa el·líptica de les òrbites dels planetes al voltant del sol. En l'època en la qual va viure tant sols es coneixia l'existència de sis planetes: Mercuri, Venus, Terra, Mart, Júpiter i Saturn. Ell es preguntava perquè tant sols n'hi havia sis. També es coneixia l'existència de cinc sòlids regulars o pitagòrics i va pensar que els números hi estaven relacionats. Va arribar a la conclusió que la raó per la qual tan sols hi havia sis planetes era perquè només hi havia cinc sòlids que estaven un dins els altres determinant la seva separació respecte del Sol (*Il·lustració 40*).

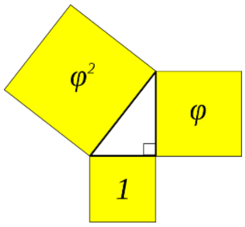


Il·lustració 40

En la seva primera obra va demostrar clarament la gran rellevància del nombre auri, quan entre les seves pàgines estableix que:

> «La geometria té dos grans tresors; un és el teorema de Pitàgores i l'altre la divisió d'una línia entre l'extrem i el seu proporcional: el primer el podem comparar a una mesura d'or; el segon l'hem de considerar una joia preciosa».

El triangle de Kepler (*Il·lustració 41*) combina el teorema de Pitàgores i la proporció àuria. Consisteix en un triangle rectangle els costats del qual estan en progressió geomètrica[43] de raó Phi i, a més a més, aproxima la quadratura del cercle. A l'any 1595 va demostrar que quan es posava un triangle dins un cercle i un altre cercle dins el triangle, la proporció del radis de les dues circumferències era similar a la proporció del radi de les òrbites de Mercuri i de Júpiter.



Il·lustració 41

Davant de tanta perfecció a l'Univers i creient com era, va arribar a la conclusió de que «no hi ha cap dubte de que Deu és un gran matemàtic».
Kepler estava fascinat amb el número cinc per la seva presència casi màgica en la natura: els cinc pètals de la flor, els quals formen un pentàgon, el cor de les fruites –com la poma–, on les seves llavors formen aquesta mateixa figura geomètrica. Resumint, el pentàgon.

3. Edat Contemporània

- **CHARLES BONNET**

Filòsof, naturista i psicòleg nascut en una família francesa emigrada a Suïssa, arrel de les persecucions religioses. En el camp de la biologia fou precursor de l'evolució per haver defensat la teoria de l'escala dels éssers, la qual fou desenvolupada en la seva obra *Traité d'Insectologie* (1745) i sobretot en *Contemplation de la Nature* (1764). Definia l'Univers com una continua evolució, un moviment progressiu de perfectibilitat en ordre al coneixement. Com ell digué: «l'home va en camí de convertir-se en àngel i les abelles en homes».

[43] Vegeu nota a peu de pàgina número 14 (p. 50).

També va estudiar la fotosíntesis de les plantes i, a l'any 1754, va publicar *Recherches sur l'usage des feuilles dans les plantes*, obra en la qual proposa la idea que les plantes tenen capacitats sensorials.
Dedicat a la *fil·lotaxis*,[44] va observar diferents tipus de distribucions de les fulles en la tija, les qual seguien un cert patró de creixement. Això ja havia estat observat per Teofrast,[45] autor de dos importants tractats sobre botànica. En un dels sis llibres que componen la seva obra *De causis plantarum*, Teofrast observà que les plantes que tenen fulles planeres estan distribuïdes de forma regular. Posteriorment, Plini el Vell[46] va realitzar una observació similar en la seva obra publicada a l'any 77, *Historia Natural*, quan parlà sobre els intervals regulars entre les fulles, posicionades circularment al voltant de la tija. Però, un estudi més profund sobre aquest tema el va fer Leonardo da Vinci, el qual va afegir un element quantitatiu a la descripció i distribució de les fulles al adonar-se que estaven distribuïdes en patrons que tenien forma d'espiral, en cicles de cinc (corresponen a un angle de 2/3 de volta), per tal de facilitar l'arribada d'aigua i de Sol a totes les fulles.
Ara bé, la primera persona que va descobrir, de manera intuïtiva, la relació entre la *fil·lotaxis* i els nombres de Fibonacci fou Johannes Kepler.

- **GUSTAV FECHNER**

Filòsof, psicòleg, metge de formació i professor de física i de filosofia alemany que considerava que Déu en el món era com l'ànima en el cos i que les ànimes individuals són part de l'ànima divina; també defensava la correlació entre allò físic i allò psíquic: «la intensitat de la sensació és igual a la intensitat del logaritme del estímul».[47]

Les seves obres principals són *Zend-Avesta* (sobre les coses del cel i del més enllà), publicada a l'any 1851, i *Elements de psicofísica*, de l'any 1860, on va quedar establert com relacionar les matemàtiques entre els estímuls i les sensacions provocades per aquests. Va formular una equació per tal de quantificar la relació entre un estímul i la seva sensació associada: $S = c \times \log R$, on S és el valor de la sensació, R és un dels estímuls i c una constant que varia depenent de cada estímul.

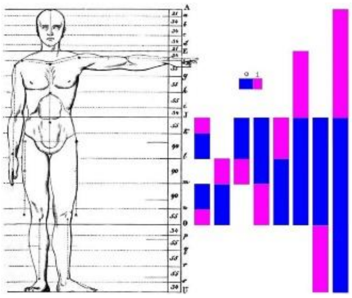
Posteriorment, a l'any 1876, Fechner, va realitzar una prova per tal de validar *científicament* l'aptitud estètica. Primer, va dividir una sèrie de segments iguals en diverses proporcions, incloent la proporció àuria, per tal de presentar-los davant un grup d'espectadors que havien d'escollir la més atractiva per ells. Els resultats no foren gaire significatius i Fechner va tornar a realitzar la prova, utilitzant targetes blanques de forma rectangular més o menys allargades. El rectangle que va tenir més preferència fou aquell que els seus costats mesuraven 34 i 21, la proporció del qual és 1,619..., xifra pròxima al nombre d'or, amb la qual cosa va demostrar l'efecte directe d'impressió estètica arribant a afirmar que la proporció àuria va de la mà de la percepció humana de la bellesa.
Aquests assajos foren continuats per Lightner Witmer[48] a l'any 1894 i per Edward Lee Thorndike[49] al 1917 amb resultats molt propers als obtinguts per Fechner.

[44] Paraula derivada del grec *phyllo*, fulla; *taxis*, moviment/orientació que defineix la disposició de les fulles en la tija d'una planta.
[45] Filòsof grec considerat el pare de la botànica (327 a.C-287 a.C.).
[46] Escriptor llatí, científic, naturalista i militar romà (23-79).
[47] Llei de Weber-Fechner.
[48] Psicòleg estatunidenc creador del terme *Psicologia Clínica* (1867-1956).
[49] Psicòleg i pedagog estatunidenc (1874-1949).

- **ADOLF ZEISING**

Psicòleg alemany, els interessos principals del qual eren les matemàtiques i la filosofia. Enfocà les seves investigacions en l'estètica, on hi destaquen les qualitats de la secció àuria. També va dedicar la seva investigació a certs fenòmens de la natura, com les plantes, les proporcions del cos humà i algunes espècies d'animals, així com certs aspectes de la bellesa de l'art: temples grecs i música, on hi va poder comprovar l'existència de l'esmentada proporció.
Segurament és a aquest autor a qui se l'hi ha d'atribuir la creació d'un codi de proporcions i que, amb la mirada enfocada cap a la secció àuria i les seves virtuts, genera una corrent de pensament que es materialitza amb una àmplia bibliografia sobre el tema. Tal i com es veu en les obres de *Neue Lehre von den Proportionem* (1854) i *Aesthetische Forschungen* (1855).
Així, Zeising, en el món de la botànica, va descobrir la raó àuria en la disposició de les branques al llarg de la tija de les plantes i les venes de les fulles. Després es va dedicar a estudiar l'esquelet dels animals, les ramificacions de les venes i els nervis, les proporcions dels compostos químics i la geometria dels cristalls. En el títol de la seva primera publicació a l'any 1854 resumeix el seu programa:

> «Nueva teoría de las proporciones del cuerpo humano, desarrolladas a partir de una ley morfológica básica hasta ahora desconocida, y que está presente en toda la naturaleza y el arte, acompañado por un resumen completo de los sistemas prevalentes».


Il·lustració 42

En ella presenta les seves pròpies anàlisis de les proporcions del cos humà.
A la *Il·lustració 42* es poden apreciar les proporcions del cos humà trobades per Zeising. En les quals divideix l'alçada total del cos en quatre zones principals:

- Des de la part alta del cap a l'espatlla.
- De l'espatlla al melic.
- Del melic al genoll.
- Del genoll a la planta del peu.

Alhora subdivideix cada una d'aquestes en cinc segments, els quals estan col·locats dins de cada zona mitjançant els números de Fibonacci, seguint el patró ABBBA o qualsevol altre que compleixi 2A+3B. La raó entre la part major (color blau) i la part menor (color rosa) de cada segment dóna el número Phi. A més, com ja s'ha dit, s'hi troben les xifres de la successió de Fibonacci, presents explícitament (color verd) o implícitament com totals (color rosa). Són les següents:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

- **THEODORE COOK**

Crític d'art i escriptor britànic el qual, en els seus viatges a Europa, es va inspirar, entre d'altres, en l'arquitectura i l'escultura de Leonardo da Vinci.
Els seus estudis es dirigeixen quasi completament cap a la presència de l'espiral àuria en la botànica, ja sigui directament en el perfil de la planta o en les seves parts. D'aquesta manera, va fer un estudi sobre la disposició de les fulles, de les llavors i, també, de les espirals variades que es manifesten en les banyes dels ovins, caprins, antilops, entre altres. A més a més, observà que una successió, com la sèrie Phi, es pot considerar com

l'esquema numèric de les pulsacions radials d'una espiral, la qual es considera *la curva de crecimiento armonioso*.

A l'any 1903 va escriure el seu llibre titulat *Spirals in Nature and Art* on va descobrir la presència de Phi en llocs inusuals:

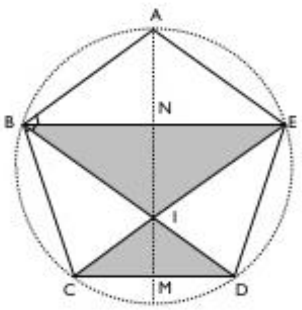
- Les circumval·lacions de creixement de les cloves del mol·lusc (la seva espiral es regeix per la descomposició modular del rectangle auri).
- La seqüència de branques al llarg del tronc d'un arbre.
- La formació de corol·les de flors.
- Les estructures microscòpiques dels cristalls de neu.
- La pròpia anatomia humana.

- **M. C. GHYKA**

Poeta, novel·lista, enginyer elèctric, matemàtic, historiador, militar, advocat i diplomàtic que, per descendència de la seva mare, fou besnét de Grigore Alexandru Ghyka, últim príncep de Moldàvia.
Se li coneix un exhaustiu estudi sobre la secció àuria, a la qual hi va dedicar una gran quantitat de textos voluminosos com per exemple: *Esthétique des Proportions dans la Nature et dans les Arts* (1927), *Le nombre d'or* (1931), *Pluie d'etoiles* (1936), *Philosophie et Mystique du Nombre* (1998), entre altres. En totes les seves obres deixa clarament al descobert la fascinació que li provocà el nombre d'or. El seu interès per aquest sorgeix de manera casual i, poc a poc, es va anar sentint envoltat per ell.

En el prefaci de la seva obra *Esthétique des Proportions dans la Nature et dans les Arts*[50] fa una referència sobre com, de manera totalment casual, va arribar a les seves mans el llibre *De Divina Proportione* de Luca Pacioli. El llibre està dividit en 11 capítols a través dels quals fa un recorregut per la història del nombre Phi. A més, construí una trama pitagòrica a partir del mestre de Crotona, que passà per Plató i Vitruvi, mestres d'obres medievals com Pacioli, Leonardo i Kepler, fins arribar al segle actual amb Einstein i Russell. Per tot aquell que accedeixi a aquest llarg recorregut de l'obra ghykiana, incloent aquells individus més escèptics, és quasi impossible que no es senti arrossegat per la seva eloqüència idealista, el seu culte casi místic a la proporció i al nombre daurat.

En el seu llibre, també, fa menció a la figura que es troba a l'interior del pentàgon. En un article publicat al gener de 1921 a *l'Amour de l'Art*, Édouard Monod-Herzen[51] mencionà l'existència d'una *Ley de la taza de oro* (*Il·lustració 43*) que, enunciada a Egipte i a Grècia, va ser adoptada pels croats[52] a Bizanci,[53] per tal que pogués ser utilitzada per arquitectes i orfebres d'Occident.



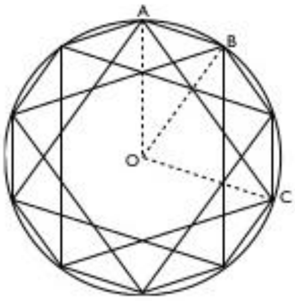
Il·lustració 43

[50] Traducció de K-Bosch Bousquet. Editorial Poseidon. 1983.
[51] Artista francès amb un interès en el psicoanàlisi (1873-1963).
[52] Guerrer catòlic que va prendre part en les Croades.
[53] Antiga ciutat grega de Tràcia, a la riba del Bòsfor, que va ocupar un lloc molt important en la història.

> «...la crónica cuenta que en tiempos de los griegos se construyó un maravilloso tazón de oro compuesto de una copa propiamente dicha y de su pie. No se dice cuál era su perfil, sino solamente que si se dibuja un pentágono convexo regular ABCDE y se trazan las diagonales BE, BD, EC, la parte sombreada da la armadura esquemática de la taza».

Respecte el decàgon regular –figura emparentada amb el pentàgon– (*Il·lustració 44*), la presència de Phi es troba en la relació entre el seu costat i el seu radi, així com entre el costat del decàgon estrellat i el radi corresponent. És a dir:

$$\frac{AC}{OA} = \frac{OA}{AB} = \Phi$$

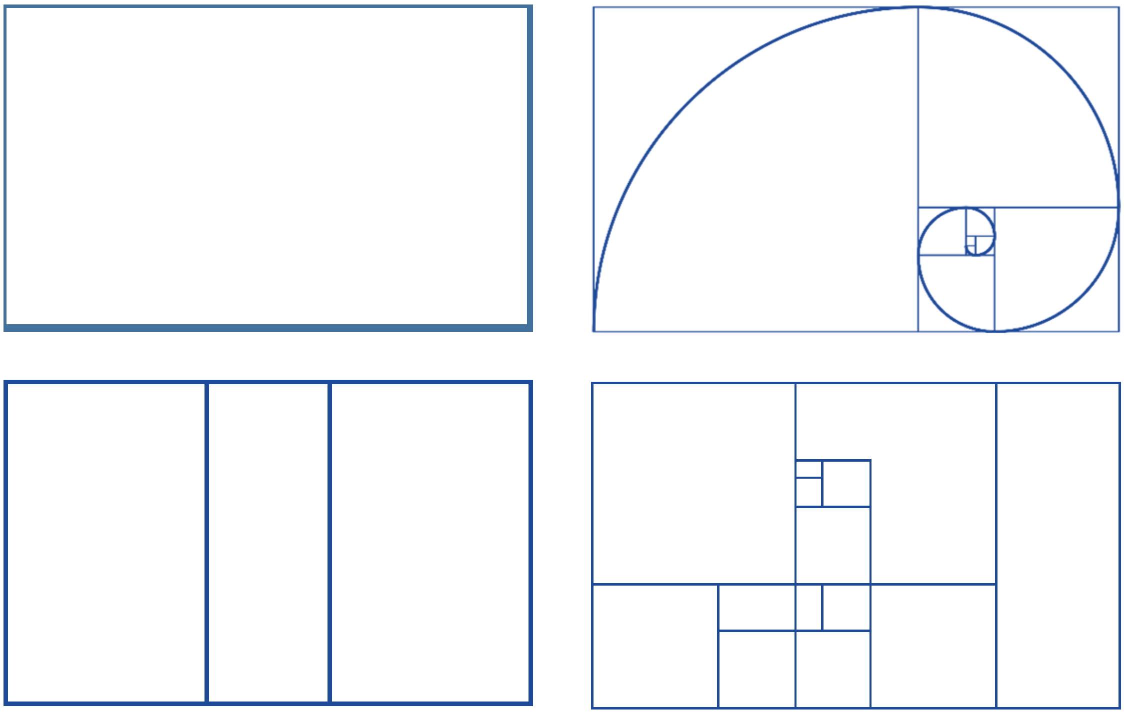


Il·lustració 44

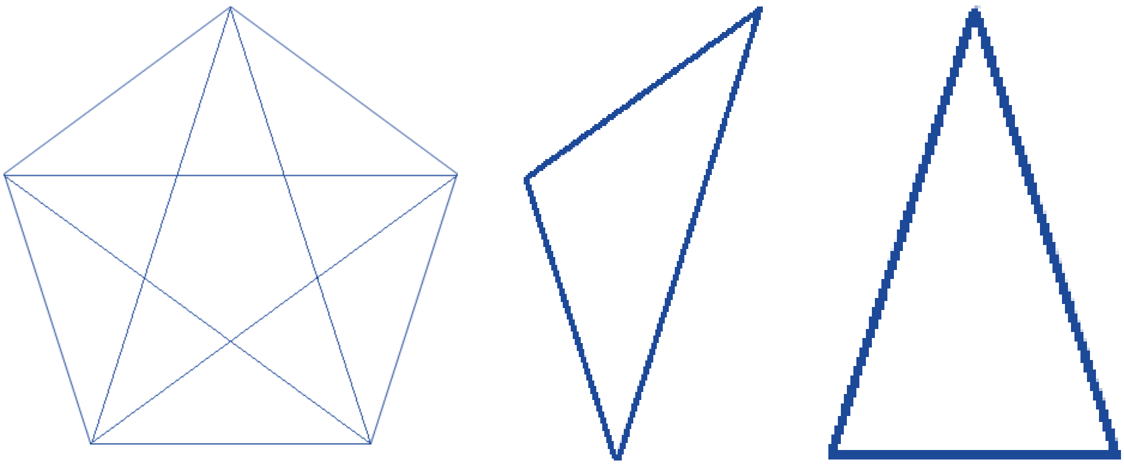
ANNEX 18

Plantilles àuries.

- Diferents tipus de rectangles auris.



- Pentàgon amb estrella de cinc puntes i els dos tipus de triangles que es formen al seu interior.



- Segment auri.

ANNEX 19

Construcció d'un compàs auri.

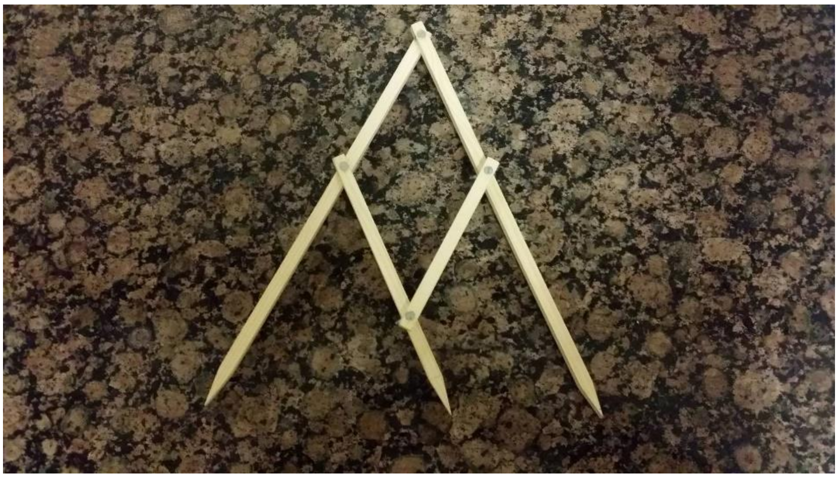
- Compàs 1.

Consisteix en tallar dues tires de cartó, plàstic o fusta fina, acabades en punta, de 2 cm d'amplada i 34 cm de llargada, en les que s'hi farà un forat a una distància de 13 cm d'un dels extrems. Unim les dues tires mitjançant el forat i ja tenim el nostre compàs auri de dos braços (*Fotografia 5*).
La seva utilització és molt fàcil. Per veure si algun objecte està en relació àuria només s'ha d'obrir l'extrem major fins que coincideixi amb una mida determinada i, sense variar l'apertura del compàs, posar l'altre extrem en l'altre part de l'objecte. Si coincideix, aquell objecte és auri.

Fotografia 5

- Compàs 2.

  Aquest requereix quatre tires més estretes, d'1 cm d'amplada. Dos d'elles, han de tenir una longitud de 34 cm; una altre de 21 cm i la última de 13 cm. Després, les unim de tal manera que ens aparegui la forma que es veu en la *Fotografia 6*.
  La seva utilització és exactament igual que el primer compàs però aquest serveix més per analitzar objectes lineals i no pas voluminosos.



Fotografia 6

ANNEX 20

Logotip insígnia d'aquest treball.