

ELS FRACTALS

Generació de fractals geomètrics

Agraïments a la facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona per haver format part del programa de suport a alumnes del Batxillerat que estan desenvolupant el Treball de Recerca i poder obtenir ajuda per realitzar aquest treball. En especial a en Guillem Cobos, en David Martí i a la Núria Fagella. I també a la meva tutora Sònia Geli, per haver-me ajudat durant tot el procés.

“... de les lleis més simples neixen infinites meravelles que es repeteixen indefinidament.” – Benoit Mandelbrot

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ.....	6
1. L'EVOLUCIÓ DE LA GEOMETRIA: D'EUCLIDES A MANDELBROT.....	8
Abans d'Euclides: coneixement innat d'alguns conceptes geomètrics.	8
La geometria euclidiana.	8
La geometria projectiva.....	10
La geometria analítica.....	11
De la geometria diferencial a la geometria hiperbòlica.....	11
La geometria el·líptica.....	12
La geometria fractal.....	13
2. ELS PRECURSORS DE LA GEOMETRIA FRACTAL	15
El fractal d'Apol·loni.....	15
El pentàgon de Dürer.	15
El conjunt de Cantor.....	16
La corba de Peano.	17
La corba de Koch.	17
Fractals de Sierpinski.	19
El conjunt de Julia.	19
El conjunt de Mandelbrot.....	20
3. ELS FRACTALS I LES SEVES PROPIETATS.....	21
3.1. DEFINICIÓ DE FRACTALS.....	21
3.2. PROPIETATS	24
3.2.1. Rugositat.	24
3.2.2. Autosimilitud.	24
3.2.3. Dimensió no entera.....	26
3.3 TIPUS DE FRACTALS	30
Sistema iterat de funcions (IFS)	30
Fractals recurrents.....	30
Fractals oscil·lants.....	31
Fractals aleatoris	31
3.4 APLICACIONS.....	31
PART PRÀCTICA	37
4. TALLER SOBRE IFS DE LA UB	38

ACTIVITAT 1. ATRACTORS FRACTALS DE SISTEMES ITERATIUS DE FUNCIONS	38
ACTIVITAT 2. IFS DE CONDENSACIÓ.....	60
ACTIVITAT 3. LA FAMÍLIA DE SIERPINSKI	63
ACTIVITAT 4. AFINITATS.....	70
5. EL JOC DEL CAOS	71
5.1 PROGRAMACIÓ DEL JOC DEL CAOS	72
Programació del joc del caos en un triangle.	73
5.1.1. El joc del caos en altres figures geomètriques regulars.....	75
Programació del joc del caos en un quadrat.	75
Programació del joc del caos en un pentàgon regular.	77
Programació del joc del caos en un hexàgon regular.....	78
5.1.2. El joc del caos en diferents figures geomètriques canviant el factor de contracció, r.....	80
Codi de la seqüència del joc del caos en un triangle.	82
Codi de la seqüència del joc del caos en un quadrat.....	83
Codi de la seqüència del joc del caos en un pentàgon.	83
Codi de la seqüència del joc del caos en un hexàgon.	84
CONCLUSIÓ.....	86
BIBLIOGRAFIA.....	88
WEBGRAFIA	89
ANNEX A.....	92
ANNEX B.....	95

INTRODUCCIÓ

Des de sempre m'han agradat les matemàtiques. Al no tenir cap idea concreta sobre quin tema desenvolupar en el meu treball de recerca, amb el qual hauria d'estar tot un any treballant-hi, vaig decidir informar-me sobre els temes proposats a l'àrea de matemàtiques. A la llista que hem van donar, vaig veure un tema que no n'havia sentit mai a parlar: *Els fractals*. No en sabia res i vaig pensar que gràcies a la desconexença que tenia cap al tema, seria un bon motiu per investigar i experimentar. El meu treball de recerca doncs, s'ha basat en els fractals: estructures molt complexes de les quals, sense saber-ho, en podem trobar aproximacions a la vida quotidiana i a la natura.

Aprofitant l'oportunitat, vaig participar en el programa de suport que dóna la facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona als estudiants que realitzen el treball de recerca durant el primer curs de Batxillerat. Així doncs, van assignar-me a un alumne d'aquesta universitat matriculat a la carrera de Matemàtiques perquè em pogués ajudar en qualsevol dubte o problema.

A l'inici del treball estava perduda i insegura, però a mesura que aprofundia anava assolint nous coneixements sobre el tema i expandint-los.

He començat investigant els fractals en general, buscant els seus orígens en la història i informant-me de les característiques més bàsiques, i després he acabat endinsant-me en aspectes més pràctics.

En el treball es pot veure com des de molt de temps enrere alguns matemàtics ja havien trobat algunes figures fractals, tot i que no va ser fins a finals del segle XX que Mandelbrot els va posar nom i va assentar les bases del que es coneix actualment com a geometria fractal.

El meu treball consta de tres parts fonamentals:

Una part de recerca d'informació teòrica, en la qual he investigat la formació dels fractals precursors i dels més actuals com el Conjunt de Julia i el de Mandelbrot. Seguidament també menciono diferents definicions dels fractals de diversos matemàtics i els fractals que podem trobar a la natura. Aleshores començo a aprofundir en les seves propietats: rugositat, autosemblança i dimensió no entera. Aquesta última és la característica més extravagant, sempre havíem conegut la dimensió 1 (recta), 2 (pla), 3 (espai), però aquests objectes s'escapaven dels paràmetres considerats normals. Després, he

classificat els fractals en quatre tipus. I finalment, he buscat aplicacions en diferents camps molt diversos i novells.

Una segona part pràctica, que consistia en la generació dels fractals IFS. És a dir, d'una imatge inicial (generador), s'hi aplica una sèrie d'afinitats que provoquen uns moviments en el pla formant una altra imatge final (atractor). Aquestes activitats les vaig realitzar a partir dels coneixements teòrics i del treball amb uns exercicis que em va proporcionar la Universitat de Barcelona.

I finalment la part pràctica de la recerca, basada en un exercici sobre el joc del caos en un triangle equilàter. Després de dur-la a terme, vaig plantejar-me dues hipòtesis a partir de dos preguntes:

A) Què passarà si en el joc del caos no s'apliqués a un triangle qualsevol, sinó que s'apliqués a altres figures geomètriques regulars?

B) Què passarà si varia el factor de contracció?

Per realitzar aquesta part pràctica, he hagut d'aprendre a programar amb codi R. Va ser una tasca força difícil ja que la programació quedava fora dels meus coneixements, però gràcies a unes nocions bàsiques aportades per en Guillem Cobos, el noi que m'havien assignat en el programa de suport, vaig poder-la realitzar sense cap problema.

El procés de realització del treball va començar un temps més tard d'haver-lo decidit. Vaig anar buscant informació d'internet, d'algun llibre i de revistes complementant la teoria amb tot el que considerava important o d'interès saber. Durant tot el procés he fet un parell de viatges a Barcelona per posar-me amb contacte amb el meu suport universitari, Guillem Cobos, amb el qual resolva els dubtes que em sorgien en la realització de la part pràctica. Únicament vaig tenir dos problemes, com ja he mencionat abans. Al no haver conegut mai els fractals em sentia perduda però a poc a poc que aprofundia anava augmentant la confiança amb el tema. I el segon problema va ser no tenir cap coneixement de programació, fet que em dificultà la part pràctica però que vaig poder resoldre sense cap problema.

1. L'EVOLUCIÓ DE LA GEOMETRIA: D'EUCLIDES A MANDELBROT

Abans d'Euclides: coneixement innat d'alguns conceptes geomètrics.

Alguns investigadors van estar buscant proves per justificar que els conceptes geomètrics són innats i que no necessiten llenguatge ni cultura. Aquesta hipòtesi es va comprovar quan van realitzar una sèrie de proves a adults i nens d'una tribu amazònica, anomenada Mundurukú, la qual va estar aïllada més de quatre-cents anys. El seu ancestral coneixement de la geometria comporta a la creença d'intuïcions geomètriques que són independents d'un aprenentatge previ, d'una experiència anterior o d'un llenguatge específic pels conceptes geomètrics.

La lingüística moderna havia revelat caràcters semàntics universals comuns a totes les llengües i als sons del nostre llenguatge parlat. Doncs, s'havia pensat que aquesta podria ser la clau del coneixement innat, sense aprenentatge previ i independents dels caràcters geomètrics. En el 1957, una de les figures més destacades de la lingüística del s. XX: Chomsky, va postular l'existència d'un dispositiu cerebral innat que permetia aprendre'l i utilitzar-lo de forma casi instintiva i també va postular una gramàtica universal, al comprovar que els principis generals abstractes de la gramàtica eren comuns¹.

La geometria euclidiana.

En l'any 323 aC, Ptolomeu I, rei d'Egipte, estava fundant a Alexandria un gran centre cultural, i coneixent prèviament la fama de la ciència grega, va buscar a Atenes persones instruïdes en les ciències.

Euclides va ser escollit per dirigir l'escola de matemàtiques. Ell va ser qui va posar en ordre l'obra matemàtica que hi havia fins al moment, perfeccionant i demostrant coneixements de forma irrefutable que anteriorment no s'havien demostrat amb suficient exactitud. La seva obra és una recopilació i sistematització dels coneixements, sobretot dels coneixement geomètrics de la seva època, convertint les matemàtiques en un conjunt de sistemes relacionats.

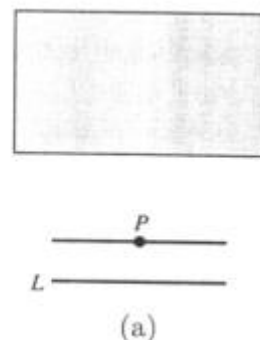
¹ Aquest postulats es van publicar en la seva obra anomenada *Estructures sintàctiques*, després de que a la seva tesi doctoral comencés a desenvolupar idees sobre la lingüística.

Durant la seva vida va escriure dotze obres, de les quals en coneixem cinc. La més important i amb més èxit és la titulada *Els Elements*². El seu objectiu és exposar les bases de la matemàtica coneguda sense aplicació pràctica.

Euclides, familiaritzat amb els coneixements de l'escola pitagòrica i especialment amb la seva primera crisi³, va voler fomentar la geometria sobre uns principis sòlids que, conjuntament amb una lògica inqüestionable, fundés una sèrie de resultats indiscutibles.

Va ser llavors quan Euclides es va adonar de què no tots els enuncisats matemàtics es poden comprovar, sinó que alguns han de ser acceptats com suposicions bàsiques. Per primera vegada, a *Els Elements* va establir un exemple del mètode axiomàtic, que va significar un canvi molt important per la història de les matemàtiques. Les seves hipòtesis eren de tres tipus: definicions, postulats i axiomes (o nocions comunes)⁴, a partir dels quals demostra tot els teoremes coneguts de la geometria. Així doncs, la geometria Euclidiana va quedar determinada pels següents 5 postulats:

- 1) Una única recta pot ser traçada entre dos punts qualsevols.
- 2) El segment d'una recta pot allargar-se indefinidament.
- 3) Es pot traçar un cercle amb qualsevol centre i radi.
- 4) Tots els angles rectes són iguals entre si.
- 5) Si una secant talla dues rectes formant a un costat angles interiors menors a dos angles rectes, les dues rectes allargades es tallen en



Il·lustració 1: Versió del cinquè postulat en la geometria euclidiana.

² Va ser un text obligat a totes les universitats i centres d'estudis matemàtics durant molt de temps. Es creu que hi ha més de mig miler d'edicions en diferents llengües. Constitueix una de les obres científiques més bones, antigues i extenses. Consta de tretze llibres: sis de geometria plana, tres d'aritmètica, un sobre mesures i tres més sobre geometria de l'espai.

³ Els pitagòrics creien que totes les lleis de l'univers es fonamentaven en proporcions entre nombres, però en estudiar la longitud de la diagonal d'un quadrat que mesura una unitat el seu costat, van descobrir que resultava un nombre no racional ($\sqrt{2}$), llavors es deia que la diagonal era immesurable. Alguns grecs, sobretot els pitagòrics, van considerar aquest fet com un naufragi.

⁴ Sembla ser que els postulats i les nocions comunes són de naturalesa geomètrica, però suposadament les últimes són comunes a totes les matemàtiques. Les nocions comunes expressen propietats fonamentals dels objectes matemàtics, en canvi els postulats confirmen operacions geomètriques practicables i possibles. Actualment, un axioma és una expressió lògica, suposadament certa, que s'utilitza en deduccions i un postulat ha quedat com un sinònim antic d'un axioma.

aquest mateix costat. És conegut com el postulat de les paral·leles i més tard va quedar reduït a “Per un punt exterior a una recta del pla només passa una paral·lela”

L'exposició d'aquest sistema, el mètode axiomàtic-deductiu, va marcar la pauta de la matemàtica moderna. Tot i que si s'analitza amb precisió s'hi poden trobar alguns defectes. Un dels més estudiats i polèmics és el cinquè postulat: “Per un punt exterior a una recta del pla només passa una paral·lela”. Els estudiosos creien que aquest postulat té aspecte de teorema i que s'ha de poder demostrar, però van notar com Euclides evitava utilitzar-lo al llarg de la seva obra i això va fer pensar que senzillament el va afegir sense saber com demostrar-lo.

Aquest defecte va provocar un gran desig als matemàtics de demostrar el cinquè postulat. No va ser fins el segle XIX que Carl Friedrich Gauss i Nicolai Lobachevski van comprovar que no era demostrable. I es va poder descartar que la geometria d'Euclides fos la única possible.

La geometria projectiva.

En el Renaixement, van aparèixer necessitats de representar artísticament i tècnicament la realitat. Científics i artistes com Leonardo Da Vinci, van afavorir l'aparició del concepte de la perspectiva.

Per Euclides, l'espai matemàtic quedava reclòs a un espai buit i absolut, a partir del qual es construeix la realitat, tant artística com natural. Aquest espai, impossible sense la matemàtica de l'espai lineal d'Euclides, és l'espai de la perspectiva.

Gérard Desargues, un matemàtic francès nascut l'any 1591, va observar com un cercle vist des d'una perspectiva es converteix en una el·lipse i també que l'ombra d'un objecte circular, depenent de la inclinació, serà un cercle, una el·lipse, una paràbola o una hipèrbola. Va arribar a la conclusió que la projecció d'un objecte transforma una figura en una altra. D'aquestes idees va identificar dos conceptes dels objectes geomètrics, un era el punt de l'infinít o impropí i l'altre la recta de l'infinít o impròpia. En el pla existeixen infinits punts impropis associats a diferents direccions, on es formen les rectes de l'infinít. Alhora en els espais existeixen infinites rectes impròpies, n'hi ha tantes com direccions, i

totes les rectes formen el pla de l'infinit. Segons el seu model, dos paral·leles es tallen en un punt de l'infinit, un punt impropï donat per la direcció del pendent de la recta, per tant, a cada pendent li podem associar un punt de l'infinit. De forma semblant, dos plans paral·lels es tallen en una recta de l'infinit, és a dir, una recta impròpia. Per tant, podem dir que dues rectes d'un mateix pla, és a dir, coplanàries, tenen sempre un punt en comú, que pot ser propi o impropï, així com dos plans de l'espai tenen sempre una recta en comú, que pot ser pròpia o impròpia.

L'aportació de Desargues es pot resumir en què els raigs visuals paral·lels es troben a l'infinit.

Així doncs, la geometria projectiva va fer possible desenvolupar geometries no euclidianes i, a la vegada, estudiar-les seguint models euclidians.

La geometria analítica.

L'obra de Descartes i de Fermat, impulsors de la geometria analítica, va ser un detonant de l'anomenada Edat Moderna de la geometria, en introduir els eixos de coordenades, gràcies als quals els punts d'una forma geomètrica poden passar a tenir una expressió numèrica i conseqüentment una d'algebraica. Els problemes geomètrics quedaven reduïts a problemes algebraics.

De la geometria diferencial a la geometria hiperbòlica.

Gauss va determinar les bases de la geometria que estudia les variables diferencials, creant la geometria diferencial. Va estudiar les corbes i les superfícies en el pla i va aconseguir establir les bases de la curvatura en una superfície. Va observar que com més gran fos el radi menys curvatura hi hauria, per tant, va concloure que la línia més curta entre dos punts era aquella que tingués menor curvatura i, en el pla euclidià, que té curvatura nul·la, la línia més curta entre dos punts és la recta.

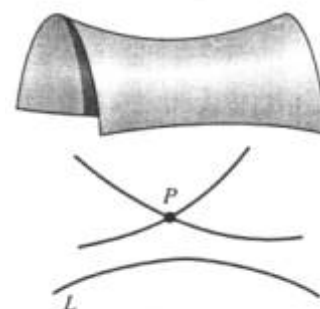
Però va imaginar altres superfícies amb curvatura no nul·la, i va demostrar que un resultat innegable en el pla euclidià ("la suma dels angles d'un triangle és de 180° ") no es complia sobre altres superfícies.

Amb aquestes conclusions, Gauss contradeïa el cinquè postulat d'Euclides sense que els altres quatre postulats es trobessin afectats. Va ser el primer en considerar que la geometria de l'univers no fos euclidiana, ja que malgrat

l'eliminació del 5è postulat podien existir altres geometries perfectament lògiques. Tot i així, mai va publicar els seus apunts.

Temps després, dos matemàtics del nord d'Europa, sí que es van atrevir a publicar-ho. Nikolai Lobachevski i János Bolyai van arribar independentment a les mateixes conclusions que Gauss, i el resultat va ser un tractat que substituïa el cinquè postulat d'Euclides per un altre que diu:

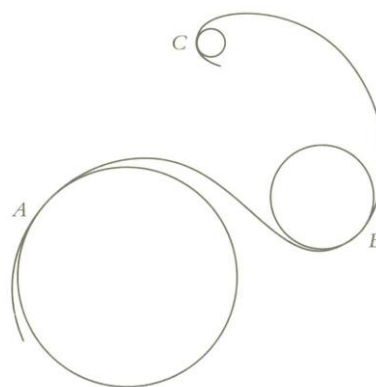
“Per un punt exterior a una recta passen com a mínim dues paral·leles”. Aquests matemàtics van considerar que el postulat de les paral·leles havia de ser demostrat lògicament i independentment dels altres quatre⁵. L'ús d'aquest nou postulat va portar a un nou sistema de teoremes i corol·laris d'un sistema que es va conèixer com geometria hiperbòlica⁶.



Il·lustració 2: Versió del cinquè postulat en la geometria hiperbòlica.

La geometria el·líptica.

Al segle XIX un deixeble de Gauss anomenat Bernhard Riemann va fer una conferència per poder optar a una vacant de professor d'universitat. En aquesta conferència va enunciar amb èmfasi els seus resultats sobre les varietats de qualsevol dimensió en qualsevol tipus d'espai. Va introduir el concepte de varietat diferenciable, on varietat faria referència a les diferents coordenades que varien per tenir els punts de l'objecte, mentre que l'adjectiu diferenciable indica que no té rugositats. Tot seguit, va definir el concepte de tensor de curvatura seccional, utilitzant les geodèsiques. Segons Riemann la curvatura d'una corba en un punt es mesura traçant la circumferència tangent i calculant la inversa del radi. Finalment, a la conferència Riemann es va plantejar que qualsevol



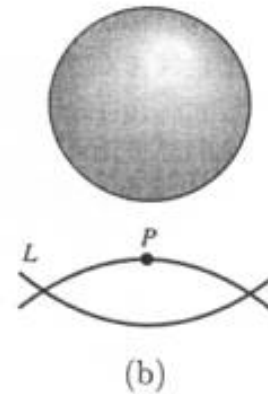
Il·lustració 3: Es pot observar que com menor és el radi de la circumferència tangent, major és la curvatura.

⁵ El conjunt d'aquests quatre postulats formen la geometria absoluta. Es diu que són absoluts perquè són certs tant en la geometria euclidiana com en la geometria no euclidiana.

⁶ En la geometria hiperbòlica no es compleix el cinquè postulat, el postulat de les paral·leles resulta fals, només es compleixen els altres quatre.

tipus d'espai pot ser estudiat com una variable diferenciable, i que al introduir una distància o mètrica es determinen les geodèsiques i la geometria que governa l'objecte. És a dir, un pla no és per si mateix euclidià o no euclidià, sinó que al introduir la mètrica euclidiana és quan es verifica el cinquè postulat i per tant quan es determina si ho és o no.

Riemann va examinar de nou els postulats de la geometria euclidiana. Va analitzar el segon postulat que deia textualment “el segment d'una recta pot allargar-se indefinidament” i va observar que s'havia de distingir de “tota recta es infinita”, així que va concloure que el segon postulat el conduïa a abandonar el cinquè, que va substituir per “tot parell de rectes es tallen”. Aquestes observacions van portar a la geometria el·líptica⁷. Així doncs, només els quatre primers postulats de la geometria euclidiana van satisfer la geometria el·líptica.



(b)
Il·lustració 4: Versió del cinquè postulat a la geometria el·líptica.

La geometria fractal.

Les teories d'Euclides tenien moltes limitacions a l'hora d'explicar l'Univers, la naturalesa no té figures tan perfectes com les d'Euclides. I per això, va aparèixer la necessitat d'una geometria per descriure i interpretar la naturalesa. A finals de la dècada dels anys 60, el matemàtic Benoît Mandelbrot va reprendre unes investigacions anteriors sobre les estructures complexes. Anteriorment, aquesta estructura complexa que ell va anomenar fractal, ja havia estat vista per altres científics. El 1906 el físic francès Jean Baptiste Perrin les va observar mentre analitzava el moviment d'una gota atrapada en una roca ígnia; seguia un moviment completament irregular. La trajectòria de la partícula va ser un dels primers fenòmens en els quals es va poder veure una auto semblança a diferents escales.

Mandelbrot, d'origen jueu polonès, va emigrar a França als 12 anys, on vivia amb el seu oncle, que havia estat un dels fundadors del grup Bourbaki, un col·lectiu de matemàtics que rebutjava la utilització de la geometria en les

⁷ La geometria el·líptica és la més encertada per a la mètrica de l'Univers.

demostracions, ja que la vista podia enganyar la raó. L'any 1945 va rebre del seu oncle un escrit del matemàtic Gaston Julia, titulat "Memòria sobre la iteració de les fraccions racionals", amb la recomanació de què deixés les explicacions geomètriques de banda. No va ser fins l'any 1970 quan, amb l'ajut de computadores posades a la seva disposició per IBM⁸, va crear les il·lustracions d'un assaig, que va sorprendre la comunitat científica amb el detall d'un gràfic inèdit, l'anomenat des de llavors "conjunt de Mandelbrot". Ell i els seus predecessors van posar en marxa una nova forma de relacionar les matemàtiques i la naturalesa: la geometria fractal. Segons Michael Barnsley és un nou llenguatge, semblant a les llengües orientals, on els elements segueixen regles de càlcul o algorismes que tenen sentit propi i que poden considerar-se unitats significatives de la geometria fractal⁹.

Podem dir que la geometria fractal es pot utilitzar per dissenyar estructures molt complexes i un fractal el podem definir com a un producte final d'una iteració infinita d'un procés geomètric elemental ben definit.

El missatge de Mandelbrot és que moltes estructures naturals com núvols, rius o muntanyes, que aparenten una complexitat extraordinària en realitat presenten una mateixa regularitat geomètrica: la seva invariància d'escala.

L'any 1975 va publicar el seu primer escrit, *Els objectes fractals: forma, atzar i dimensió*, en el qual apareix per primer cop la paraula "fractal"¹⁰ (del llatí *fractus*, trencat), que utilitzava tant com a nom com a adjectiu. L'any 1982 va ampliar aquestes idees en un nou llibre *La geometria fractal de la natura*, amb unes imatges espectaculars creades amb la tecnologia informàtica. On mostra com els fractals són un model per a les formes de muntanyes, les línies de les costes i dels rius, per a l'estructura de plantes, el sistema arterial, les formes de les galàxies o el moviment Brownià. També són un model útil per descriure fenòmens com la variació dels preus a les borses.

Definitivament, Mandelbrot no va inventar els fractals, hi eren des de sempre esperant que algú els trobés.

⁸ IBM és l'acrònim de *International Business Machines*. És una empresa d'informàtica estatunidenca i que es dedica a diferents vessants de la informàtica, com maquinari, programari, sistemes operatius o serveis diversos.

⁹ Aquest pensament queda reflectit al seu llibre *Fractals en tots llocs*. Michael Barnsley va ser professor de la Universitat Nacional d'Austràlia i investigador de reconegut prestigi en la matèria de fractals.

¹⁰ Mandelbrot utilitzava fractal en femení, venint a dir "la fractal".

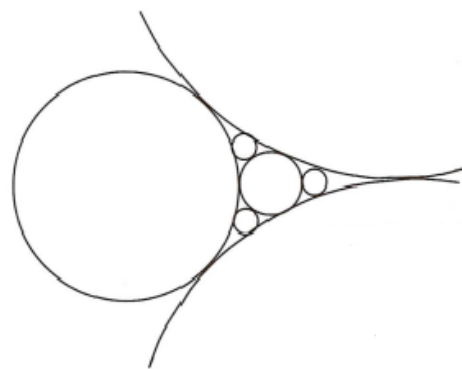
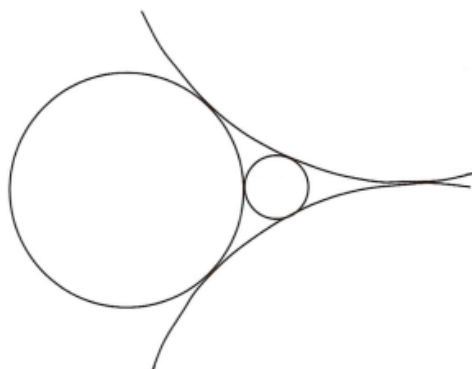
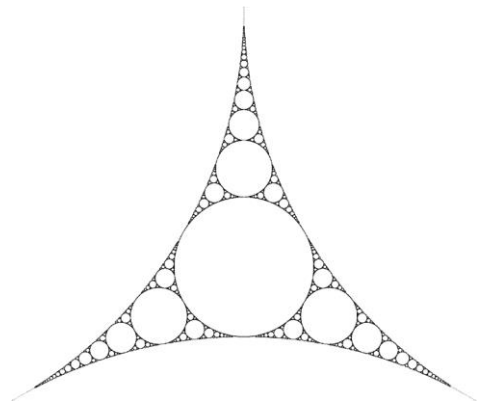
2. ELS PRECURSORS DE LA GEOMETRIA FRACTAL

El fractal d'Apol·loni.

Ja sobre l'any 300 aC, Apol·loni de Perge, deixeble d'Arquímedes, conegut pels seus treballs sobre les seccions còniques, les corbes planes i la quadratura de les àrees, va plantejar el problema de la construcció d'un cercle tangent a tres cercles donats, que va portar a la creació d'un triangle curvilini farcit de cercles en el qual a cada reiteració s'omple l'espai restant. Aquest plantejament va fer aparèixer un problema, -l'espai restant podia quedar reduït al no-res?- que va intrigar a molts dels geòmetres posteriors.

Formació del fractal d'Apol·loni.

En la geometria plana euclidiana, consisteix en construir una circumferència en el pla, tangent i amb radi més petit, a tres circumferències ja donades. En iterar aquest procés es va plantejar si aquests espai entre les circumferències, que cada cop són més petits, s'arriben a emplenar amb cercles de radis cada cop més petits.

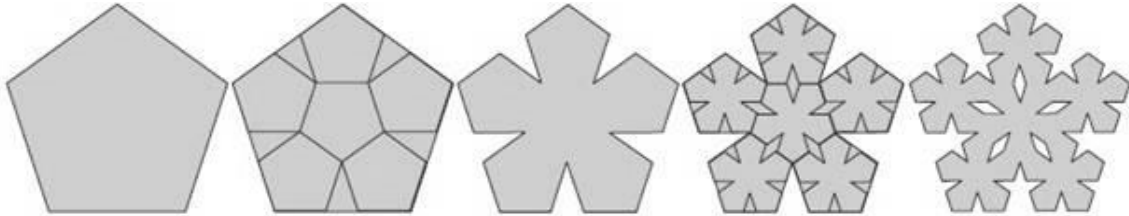


El pentàgon de Dürer.

Gairebé 2000 anys després, al voltant de l'any 1500, un dels artistes més importants del Renaixement alemany, Albrecht Dürer, va inventar un altre objecte fractal, que eixia d'un pentàgon.

Formació del pentàgon de Dürer.

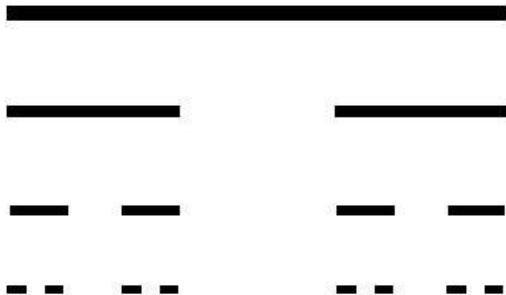
Es genera a partir d'un pentàgon regular dins del qual se'n generen 6, cinc en cada vèrtex de l'original i un en el mig. A conseqüència d'aquesta disposició, es formen 5 triangles isòsceles que s'eliminen. I així es podria anar iterant en cada pentàgon resultant.



El conjunt de Cantor.

Anys més tard, a finals del segle XIX, Georg Cantor¹¹, matemàtic i filòsof alemany, va crear el conjunt de Cantor i també la pols de Cantor: resultat del conjunt de Cantor en dues dimensions.

Formació del conjunt de Cantor.

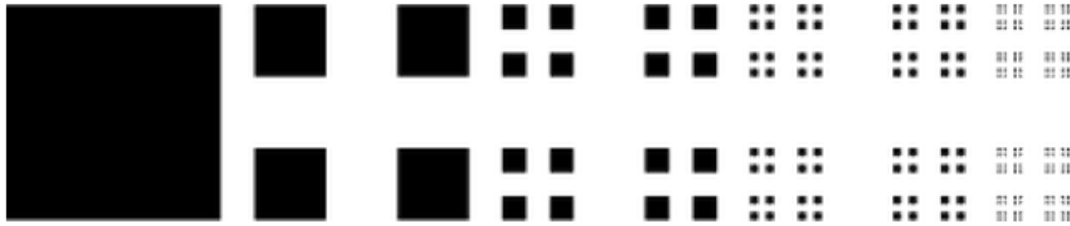


Es divideix un segment en tres parts iguals i esborrem el segment del mig. Seguidament, dividim els dos segments resultats en tres segments i eliminem el del mig. I així indefinidament.

Formació de la pols de Cantor.

Es divideix un quadrat en nou quadrats iguals, seguidament esborrem els quadrats del mig de cada costat i el central. I anem repetint el procés.

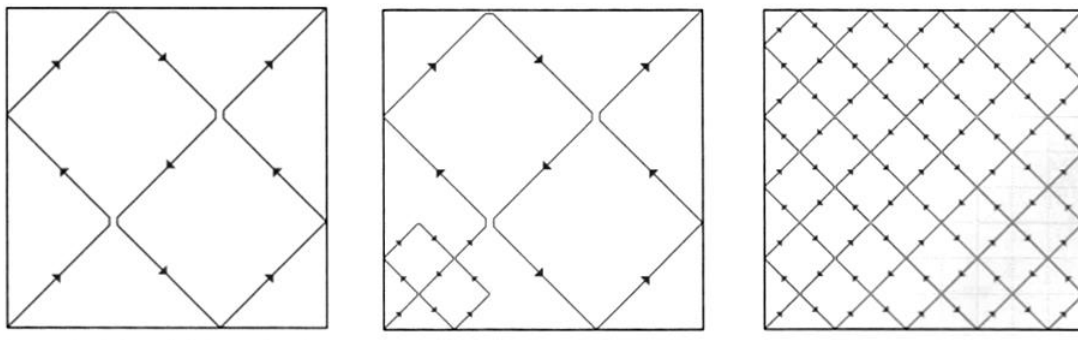
¹¹ Cantor, fou el fundador de la teoria de conjunts moderna. Va establir la importància del concepte de la funció bijectiva entre els conjunts, va definir els conceptes de conjunt infinit i de conjunt ben ordenat i va demostrar que el conjunt de nombres reals és més gran que el conjunt dels nombres naturals, tot i ser infinits ambdós.



La corba de Peano.

Gairebé a la mateixa època, Peano¹² va crear un altre fractal: la corba de Peano. Consistia en una corba contínua que passa per tots els punts del quadrat unitat, era el primer exemple d'una corba que omple un espai.

La formació de la corba de Peano.



A partir d'un quadrat es fa la diagonal, i des d'aquesta realitzem el paràmetre establert en la primera imatge; la diagonal es divideix en tres parts i es dibuixen dos nous quadrats sobre la part central. Llavors, ho realitzem contínuament amb cada segment originari del procés anterior.

La corba de Koch.

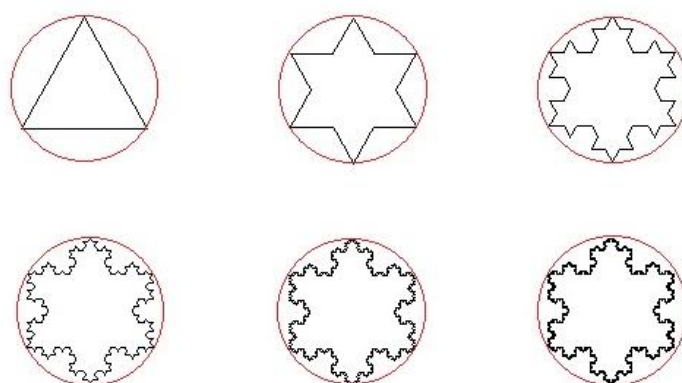
L'any 1904 Helge Von Koch, a partir de l'algoritme utilitzat per Cantor va construir: el Floc de neu, utilitzant el que se'n diria la corba de Koch. Aquesta figura geomètrica té una superfície finita però un perímetre infinit.

¹² Giuseppe Peano (1858 – 1932) va ser un matemàtic i filòsof italià, conegut per les seves contribucions a la teoria dels conjunts.

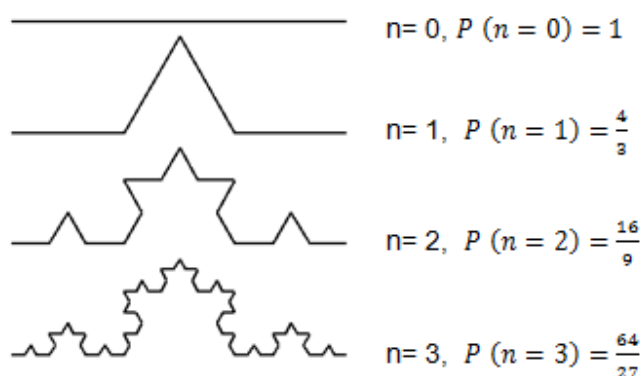
Formació del corba de Koch.

Aquest fractal es genera a partir d'un segment dividit en tres parts. La part central s'elimina però fa de base d'un triangle equilàter. Tot seguit es torna a repetir el procés anterior amb cada un dels segments resultats.¹³

El perímetre és infinit i la seva superfície és finita, es pot comprovar al veure que el Floc de neu, per moltes iteracions que fem sempre es manté dintre d'una circumferència. Per tant, té una superfície finita a una circumferència de radi finit. En canvi el seu perímetre és infinit, comprovable al veure que la funció del perímetre és: $P(n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ i al créixer indefinidament el nombre d'iteracions, n , se'n dedueix que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$.



Il·lustració 5: Demostració de la superfície finita.



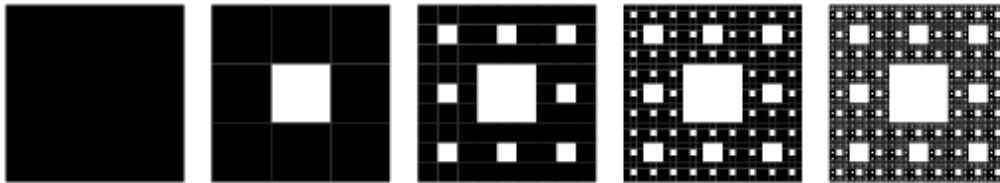
Il·lustració 6: Demostració del perímetre infinit.

¹³ Aquest procés el podem veure a la il·lustració 6.

Fractals de Sierpinski.

Uns anys més tard, al 1915 Sierpinski¹⁴ va crear formes fractals de dues o tres dimensions com: la catifa o l'esponja.

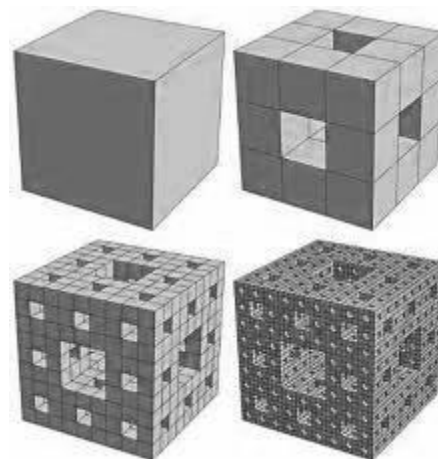
Formació de la catifa de Sierpinski.



A partir d'un quadrat el qual es divideix en nou quadrats iguals s'elimina l'interior, i així iterativament.

Formació de l'esponja de Menger.

El procediment és el mateix que per la catifa de Sierpinski, l'única diferència és que s'aplica a un cub i té una dimensió entre el 2 i el 3, una figura tridimensional. Primerament, s'agafa el cub i es divideix cada cara en 9 quadrats fent que el cub sencer es divideixi en 27 cubs. Seguidament eliminem cada cub central de cada cara i així amb el cub restant indefinidament.



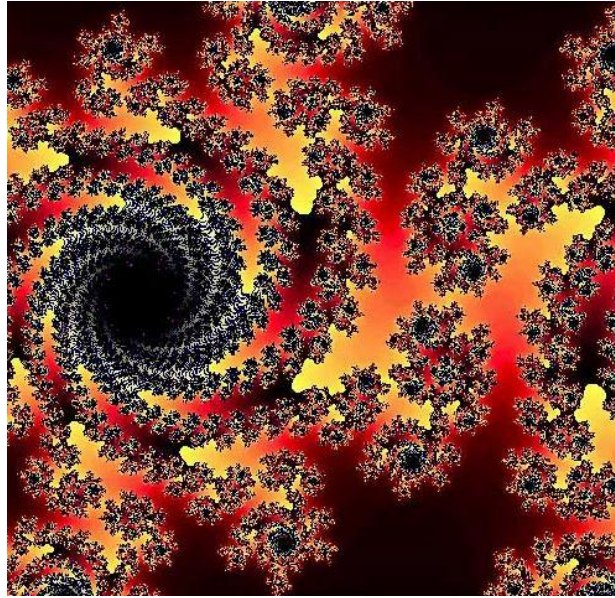
El conjunt de Julia.

El matemàtic francès Gaston Julia, va ser el descobridor dels objectes fractals de polinomis complexos. Julia va considerar una funció del tipus $f(z) = z^2 + c$. On c és un nombre complex i fix, (per cada valor de c s'obtenen diferents formes del conjunt). I on z és un nombre complex. I a partir d'un valor inicial de z es pot construir tot un seguit de punts definits per z_n , verificant que $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

¹⁴ Wacław Franciszek Sierpinski (1882–1969) va ser un matemàtic polonès. Va ser un matemàtic conegut per les seves excepcionals aportacions a la teoria de conjunts (l'axioma d'elecció i la hipòtesi del continu), teoria de nombres, teoria de funcions i topologia. Va publicar més de 700 articles i 50 llibres.

Julia va trobar que per alguns valors inicials la successió convergeix, és a dir, el punt límit es troba en una distància finita. Parlem llavors del Conjunt de Julia ple. Per altra banda en el conjunt estudiat per Julia l'any 1918 els valors inicials creaven una successió divergent, en la qual cada punt s'anava allunyant cada cop més del punt inicial fins a l'infinit.

Els estudis de Julia van ser presentats l'any 1925 en un seminari a Berlin creant intriga i incertesa entre els assistents, que veien per primer cop aquest estrany objecte fractal. A partir d'aquell seminari Brauer, Hopf i Reidmeister van escriure un assaig sobre aquest tema. Van dissenyar la primera representació gràfica del Conjunt de Julia, amb l'absència dels ordinadors, van



Il·lustració 7: Conjunt de Julia.

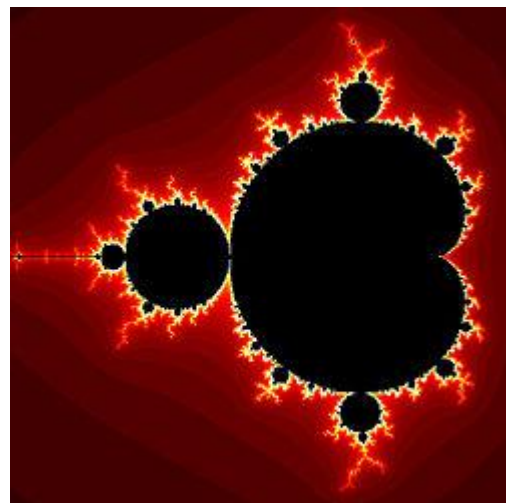
pintar de color negre els punts de partida, evitant la divergència, i cada iteració d'un color, donant forma a una aureola extraordinària.

El conjunt de Mandelbrot.

Sobre els anys 70 va néixer el Conjunt de Mandelbrot. És un conjunt molt semblat al de Julia determinat per la funció $f(z) = z^2 + c$, on c és qualsevol nombre complex que s'estudia i z és el valor que s'itera tenint en compte que z_{inicial} és 0. Llavors es forma una successió recursiva.

Si aquesta successió queda acotada, c formarà part del conjunt de Mandelbrot.

Però si pel contrari divergeix en quedarà exclosa.



Il·lustració 8: Conjunt de Mandelbrot.

Gràcies a la informàtica, que va facilitar-ne el càlcul, es va desenvolupar la teoria sobre la ciència dels fractals. Aquest fet permetrà crear a partir de funcions objectes complexos o de la natura com paisatges o núvols, i descriure fenòmens de fluctuació variats.

3. ELS FRACTALS I LES SEVES PROPIETATS

3.1. DEFINICIÓ DE FRACTALS

Els fractals en ser objectes tan peculiars se'ls ha descrit de diferents maneres. A aquests estranys conceptes sense definició durant segles, l'any 1970 Mandelbrot els va posar el nom de fractals, paraula que prové del llatí “*fractus*” amb la intenció de definir-los com a quelcom trencat.

Poc temps després, el matemàtic nord-americà Sullivan va descriure els fractals com un conjunt quasi autosimilar que fa ús del concepte de quasi autosimilitud.

L'any 2003, un altre matemàtic, amb el nom de Kenner Falconer va definir les formes fractals com les que tenen una geometria massa irregular per considerar-la euclidiana. També els hi atribueix que en qualsevol escala d'observació té detall, per tant, la geometria tendeix a l'infinit i no es pot mesurar. Kenner també els caracteritzava per la dimensió de Hausdorff-Besicovitch¹⁵ que és major a la dimensió topològica¹⁶, és a dir, major a la que seria esperada en la geometria euclidiana. Posseeixen una autosimilaritat, ja sigui exacte, quasi similar o estadística causada pel mètode recursiu, és a dir, una regla que es repeteix successivament aplicada al resultat anterior.

La natura d'aparença confusa i complexa, s'ha pogut determinar per unes regles de construcció. Els fractals naturals, com a elements de la natura, poden ser descrits amb geometria fractal. Tot i així, no són exactament fractals, però se'ls pot representar aproximadament com a un d'ells ja que per exemple l'infinit en el món natural queda limitat. Com deia Mandelbrot, “*Els núvols no*

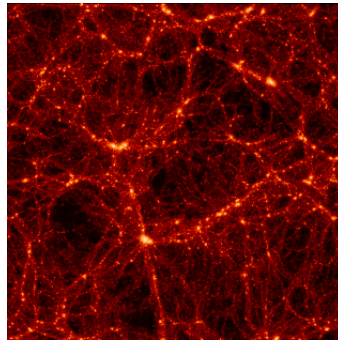
¹⁵ Posteriorment s'explicarà a l'apartat 3.2.3 *Dimensió no entera*.

¹⁶ Posteriorment s'explicarà a l'apartat 3.2.3 *Dimensió no entera*.

són esferes, les muntanyes no són cons, les costes no són cercles, i la escorça no és uniforme, ni un llamps viatja en línia recta". Seguidament podem veure una sèrie de fotografies d'estructures fractals a la natura.



Il·lustració 9:
Falgueres.



Il·lustració 10: Estructura aranya dels cúmuls de les galàxies.



Il·lustració 11: Núvols.



Il·lustració 12: Vista aèria de la "Isla de Trocadero", Cadis (Espanya).



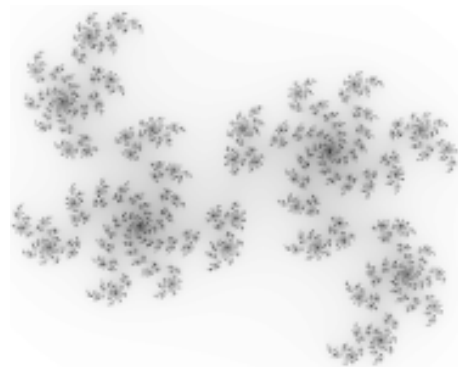
Il·lustració 13: Litoral de Tarragona, Catalunya.



Il·lustració 14: Zona muntanyosa d'Austràlia.



Il·lustració 15: Llamp.



Il·lustració 16: Estructura de l'espai.



Il·lustració 17: Cadenes muntanyoses.



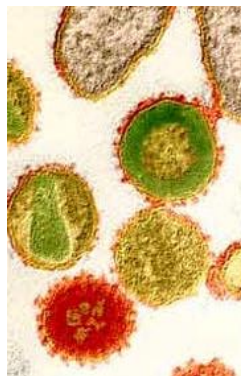
Il·lustració 18: Vista aèria de Toulouse, França.



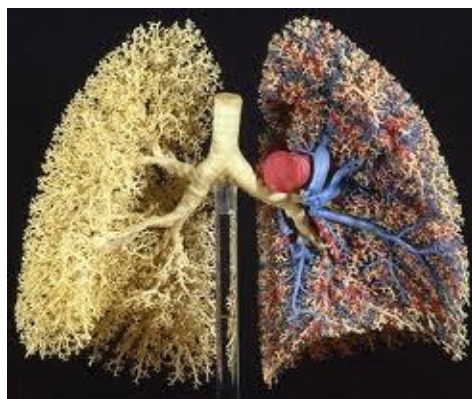
Il·lustració 19: Vegetació.



Il·lustració 20: Closca d'un cargol.



Il·lustració 21: Virus VIH.



Il·lustració 22: Estructura pulmonar.

3.2. PROPIETATS

Aquests objectes tenen una sèrie de factors característics, indispensables tots ells per a la seva concepció. Són geomètricament irregulars, tenen autosimilitud, la seva dimensió és no entera i es defineixen per un algorisme recursiu.

3.2.1. Rugositat.

Són objectes geomètrics irregulars, perquè no se'ls pot representar amb la geometria tradicional a causa de la seva complexitat. Mandelbrot en una entrevista expressa el seu interès en dir que aquest objectes no són regulars, i els defineix com a: rugosos¹⁷.



Il·lustració 23: Superfície de la coliflor romanésca.

3.2.2. Autosimilitud.

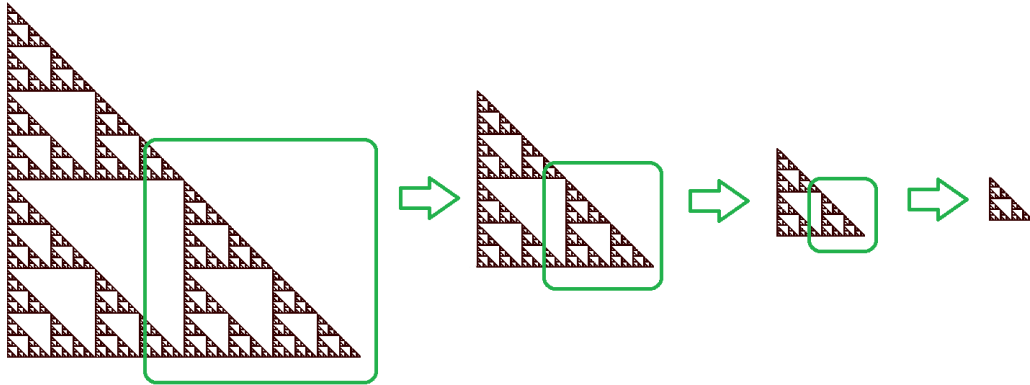
Se'ls considera objectes que posseeixen una autosimilitud. Això significa una invariància o una petita deformació en el canvi d'escala, per tant, l'estructura del tot es repeteix infinites vegades en escales més petites. Per aconseguir aquesta autosimilitud les figures es repeteixen elles mateixes, a partir d'un algorisme recursiu definit. Alguns d'aquests processos iteratius es basen en ¹⁸transformacions contractives com l'homotècia, el gir o la translació.

Hi ha diferents tipus de fractals segons el grau d'autosimilitud:

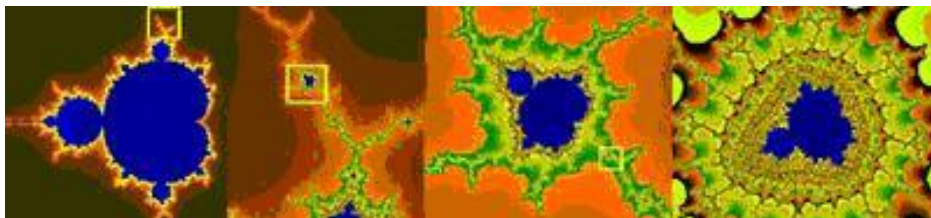
¹⁷ Mandelbrot solia utilitzar molt la paraula rugositat per definir els fractals, segons ell el contrari de regularitat era rugositat. Aclariment que va esmentar en l'esdeveniment anual anomenat TED (Tecnologia, Entreteniment i Disseny) on va fer una xerrada sobre "Els fractals i l'art de la rugositat" l'any 2010.

¹⁸ Posteriorment s'explicarà a l'Annex A.

- **Autosimilitud:** En aquest cas el fractal és idèntic en diferents escales. Sovint es troben definits per sistemes de funcions iterades (IFS).



- **Quasi autosimilitud:** En aquest cas, el fractal és aproximadament idèntic a diferents escales, presenta lleugeres distorsions d'ell mateix. Normalment són els que estan definits per relacions de recurrència.



- **Autosimilitud estadística:** És el tipus més dèbil d'autosimilitud. Exigeix que el fractal tingui les mateixes mesures numèriques o estadístiques en el canvi d'escala. Els fractals aleatoris en són un exemple.



3.2.3. Dimensió no entera.

Normalment, en el nostre dia a dia, el nostre concepte de dimensió és un nombre enter, l'anomenada dimensió topològica. Seguidament podem



veure els exemples més bàsics.

Dimensió 0

Dimensió 1

Dimensió 2

Dimensió 3

Els fractals, al ser objectes complexos sobrepassen els nivells d'una dimensió física i passen a tenir una dimensió fraccionària, és a dir, no entera que majoritàriament es trobarà entre 1 i 2 si es troba en un pla, o bé, entre 2 i 3 si es troba a l'espai. Aquest número fa referència al grau de rugositat d'un fractal, a la densitat amb la qual ocupa l'espai ambient.

Originàriament se l'anomenava dimensió de Hausdorff-Besicovitch, nom dels que van ser els seus descobridors. Aquesta dimensió ens dona una idea de com l'estructura fractal ocupa l'espai que la conté. Consisteix en definir el volum de d -dimensió d'una figura com un d no enter, on d pugui canviar d'infinít a zero. Aquesta dimensió és més gran que la dimensió topològica i no es sol utilitzar per comparar conjunts del món natural.

$$0 \leq D_H(A) \leq D_F(A)$$

Equació 1: La dimensió de Hausdorff-Besicovitch proporciona un número $D_H(A)$ invariable a les simetries, que té la següent relació amb la dimensió fractal $D_F(A)$.

En l'actualitat, una bona aproximació és la dimensió box-counting o també anomenada de Minkowski, que defineix com el número de boles o de caixes necessàries per recobrir tota l'estructura. Amb aquesta dimensió sí que es poden comparar objectes del món real amb fractals generats per algoritmes matemàtics.

$$D_F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

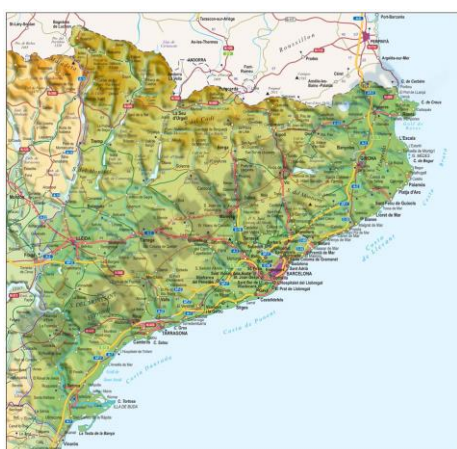
Equació 2: Càlcul de dimensió fractal en el cas d'utilitzar boles per mesurar-la. On el mínim número $N(\epsilon)$ de boles de radi ϵ són necessàries per recobrir el conjunt.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

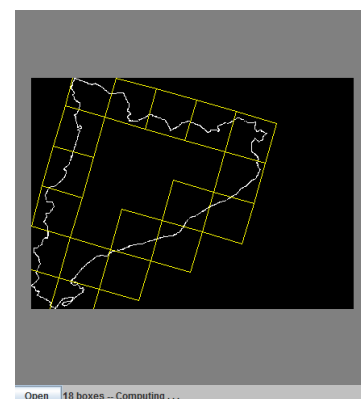
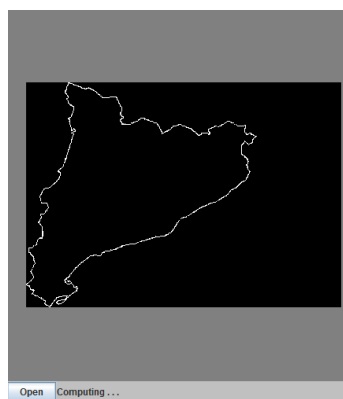
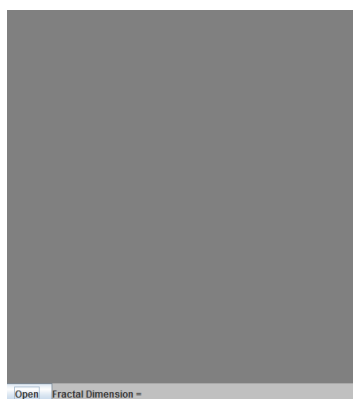
$$D_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln(2^n)}$$

Equació 3: Càlcul de dimensió fractal en el cas d'utilitzar caixes per mesurar-la. On el número de caixes N_n de una quadrícula d'amplada $1 / 2^n$ intersecten al conjunt.

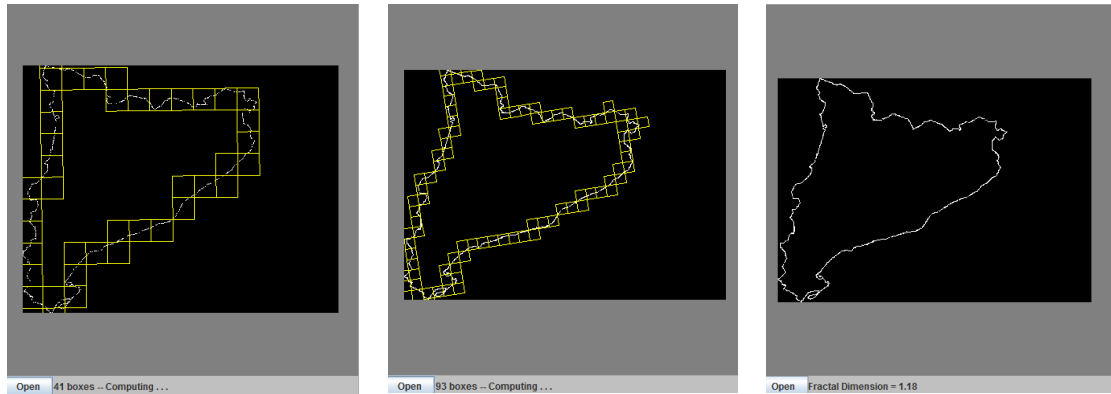
Per calcular amb la dimensió box-counting, es poden utilitzar diferents programes o aplicatius que es troben a la xarxa. Jo he utilitzat “Java Applet to Compute Fractal Dimensions”¹⁹, que utilitza l'algoritme de Monte Carlo. Per dur a terme l'exemple he utilitzat el mapa de Catalunya, per trobar la dimensió fractal del seu perímetre.



Seguidament, posem l'última imatge en el programa i deixem que en faci el procés marcant totes aquelles caixes que formen part dels límits de Catalunya, sent cada cop més petites les caixes. Després d'un seguit d'iteracions de les caixes trobem que Catalunya té una dimensió de 1,18.



¹⁹ Applet tret del link: <http://www.steve.org/fracdim/>



En el cas de calcular la dimensió de fractals autosemblants que tenen el mateix valor de contracció utilitzem la següent fórmula:

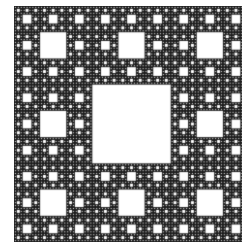
$$dim_S = \frac{\log(\# \text{ peces})}{\log\left(\frac{1}{\text{factor de contracció}}\right)}$$

Per exemple, podem calcular la dimensió de la catifa de Sierpinski de la forma següent. Partint de la fórmula deduïda a partir d'exemples més senzills on s'ha observat que:

$$\# \text{ peces} = \left(\frac{1}{\text{factor de contracció}}\right)^{dim_S}$$

només hem d'observar que hi ha 8 peces iguals (8 quadrats iguals) i que el factor de contracció a partir de la unitat és 1/3 (0,3 aprox.).

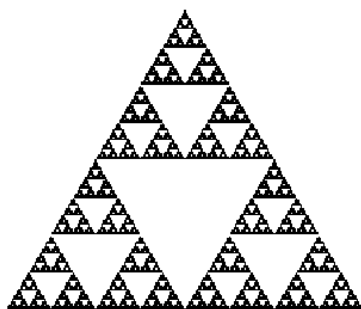
$$dim_S = \frac{\log(8)}{\log\left(\frac{1}{0,3}\right)} = 1,7271 \dots$$



Així doncs, la catifa de Sierpinski té una dimensió aproximada d' 1,72.

En el cas dels fractals produïts per un IFS si té el mateix factor contracció es pot calcular amb la següent fórmula:

$$dim_S = \frac{\log(n^o \text{ d'afinitats})}{\log\left(\frac{1}{\text{factor de contracció}}\right)}$$



El triangle de Sierpinski compleix aquests requisits i té una dimensió d' 1,58 aprox.

$$\dim_s = \frac{\log 3}{\log \left(\frac{1}{0,5}\right)} = 1,5846 \dots$$

Finalment si les afinitats²⁰ tenen diferent escalament o factors de contracció podem utilitzar la fórmula de Moran:

$$r_1^d + r_2^d + r_3^d + \dots + r_n^d = 1$$



afinitats	R	s	θ	φ	e	f
1	0,5	0,5	0	0	0	0
2	0,25	0,25	0	0	0,5	0
3	0,5	0,5	0	0	0	0,5

Aquest fractal s'ha realitzat amb un programa d'IFS amb els factors de la taula estipulats. Per tant:

$$0,5^d + 0,25^d + 0,5^d = 1$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{4}\right)^d = 1$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^d = 1$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^d\right]^2 = 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^d = x \end{cases}$$

Amb aquestes dos últimes equacions obtenim:

$$2x + x^2 = 1$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

²⁰ Posteriorment s'explicarà a l'Annex A.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$

Com que els factors de contracció són positius, només agafem la solució positiva.

$$x = \frac{-2 + \sqrt{2^2 + 4}}{2}$$

$$d = \frac{\log\left(\frac{-2 + \sqrt{8}}{2}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$d = 1,2715 \dots$$

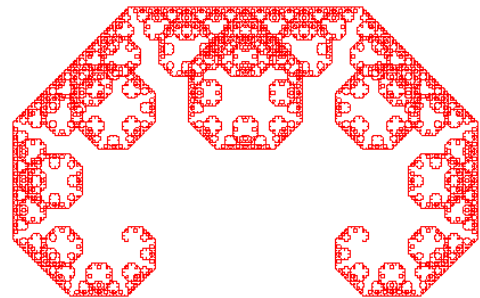
Per tant, la dimensió d'aquesta figura és 1,27 aproximadament.

3.3 TIPUS DE FRACTALS

Hi ha diferents categories de fractals:

Sistema iterat de funcions (IFS):

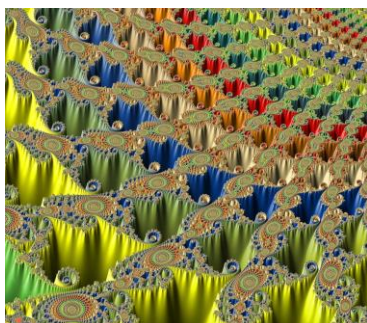
Són aquells definits per un punt fix geomètric, és a dir, que a partir de qualsevol generador sempre hi haurà un mateix atractor pels factors estipulats. Com per exemple, el conjunt de Cantor, el triangle de Sierpinski o la corba del drac entre altres.



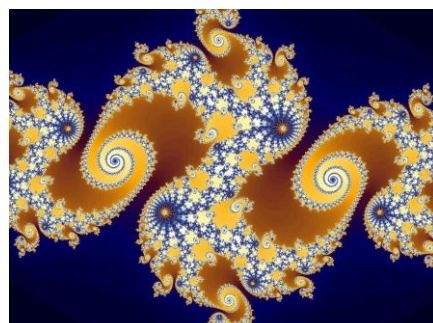
Il·lustració 24: Fractal anomenat la corba de Lévy, format per IFS.

Fractals recurrents:

Són aquells fractals definits per una relació de recurrència, és a dir, d'una variació en l'escala en cada punt de l'espai, tant en l'espai real com en el complex. Un exemple en són els fractals de Mandelbrot o el conjunt de Julia.



Il·lustració 25: Conjunt de Mandelbrot.



Il·lustració 26: Conjunt de Julia.

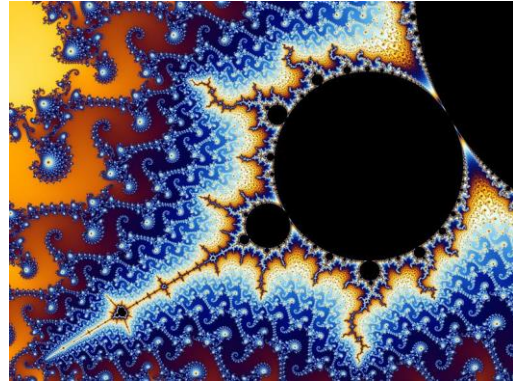
Fractals oscil·lants:

Són aquells que deriven del mètode de Julia o Mandelbrot, ja que de forma alternativa s'iteren 2 o més funcions diferents fins arribar a la convergència d'algun valor o la divergència a l'infinit.

En aquests fractals cada píxel es coloreja segons el nombre d'iteracions

necessàries per "escapar". Els punts que

no han "escapat" després d'un gran nombre d'iteracions es solen pintar d'un color especial, normalment negre.

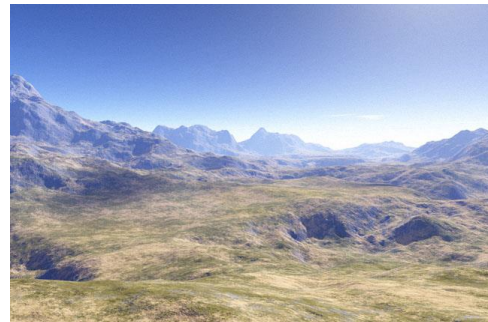


Il·lustració 27: Conjunt de Mandelbrot.

Fractals aleatoris:

Són aquells que es generen per processos estocàstics, és a dir, per la teoria del caos.

Aquest tipus de fractals, tenen una gran aplicació pràctica ja que són els més adients per descriure diversos objectes irregulars del món real.



Il·lustració 28: Fractal aleatori que descriu el relleu d'una muntanya.

3.4 APLICACIONS

Els fractals són una branca de les matemàtiques que encara s'està desenvolupant, ja que és bastant nova. Tot i així, tenen diferents aplicacions en diferents àmbits de qualsevol mena de tema.

Les formes fractals, com hem dit abans, s'assemblen bastant a formes naturals de matèria biològica. Per això, els podem utilitzar en el camp de la biologia i medicina.

En el camp de la biologia poden modelitzar les simetries de la informació genètica, els espirals de les formes de creixement i desenvolupament, i també, de divergències en les formes biològiques que poden ocasionar formes complexes, per exemple amb les fulles o branques d'un arbre.



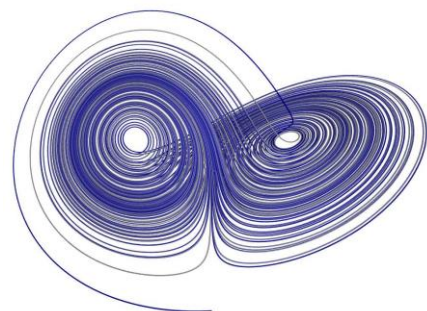
Il·lustració 29: Representació gràfica d'arbres.

S'utilitza també en la simulació de la vegetació amb fractals i en l'enzimologia.

En el camp de la medicina podem utilitzar-los en àmbits molt diversos: la identificació de retina, el càlcul de la dimensió fractal del cervell, de l'estructura òssia o també de tumors i així fer-ne el diagnosi. S'utilitzen en els TACS i per preveure el risc de fractura. També s'utilitzen en l'observació de les cicatrius per tal de escollir el tractament més adequat.

A l'última dècada del segle XX, Barnsley i Jacquin van utilitzar fractals per la compressió d'imatges, en format de la imatge fractal FIF, basant-se en el teorema del Collage²¹ i van trobar transformacions lineals que al aplicar-les reiteradament fa que obtinguem la imatge processada però reduint-ne l'espai que ocupa. Però a dia d'avui encara és una pràctica poc aconsellable a causa de la dificultat de trobar les transformacions que defineixen la imatge. Aquest procés s'utilitza en les companyies cinematogràfiques, en pel·lícules com StarWars o Shrek. També, trobem fractals en els salva-pantalles dels nostres ordinadors.

També es poden utilitzar per veure sistemes dinàmics en que la forma evoluciona a un sistema més complex, per exemple amb la teoria del caos. Aquesta evolució consisteix en cicles on a partir d'una realitat simple s'aconsegueix una de complexa, que a la



Il·lustració 30: Atractor de Lorenz, un exemple de sistema dinàmic.

²¹ Posteriorment s'explicarà a l'Annex B.

vegada els cicles formen part d'un altre i així consegüentment.



Il·lustració 31: Fenòmens climàtics.

Els fractals també van ser utilitzats en la física, es van utilitzar en el model de turbulències. Aquest, descrivia com el clima podia estar bé en un determinat moment i cada tant registrar un fenomen de vents i ocasionalment tornados extremadament forts o destructius.

Cal destacar-ne alhora l'aplicació en les arts plàstiques i en la música. Un dels processos per realitzar art amb la utilització de fractals es diu decalcomania, consisteix en aplicar-hi *gouache*, una aquarel·la opaca, diluït en un paper blanc, a continuació s'ajunten fent-hi una pressió desigual per difondre el gouache. El resultat és impredecible. Un artista que va treballar molt aquesta tècnica va ser l'alemany Max Ernst que va ser un experimentador infatigable de tècniques, estils i materials.



Il·lustració 32: Europe after the Rain II, Max Ernst. USA (1940-1942)



Il·lustració 33: La gran onada, Hokusai. (1829–1832)



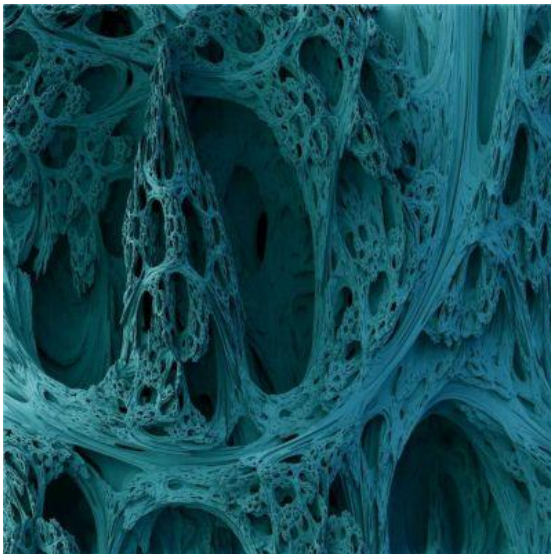
Il·lustració 34: El bosque encantado, Javier Barrallo.



Il·lustració 35: Sangre Alienígena, Earl Hinrichs.

Pel que fa als fractals a la música, podem trobar composicions de Bach, de Beethoven o de Mozart, que poden ser reduïdes i tenir, fins i tot així, la mateixa essència que li va donar el compositor. Per exemple una d'aquestes composicions pot ser la *Primera Escossaien* o el *Scherzo* de Beethoven. També hi ha compositors moderns com Phil Thompson, Gary Lee Nelson, Tac Leung entre altres.

En l'arquitectura també podem veure elements d'estructura fractal. Un exemple ben proper, n'és la Sagrada Família de Antoni Gaudí a Barcelona. Gaudí li deia a aquest estil orgànica.

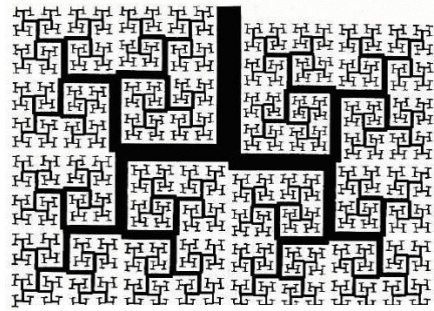


Il·lustració 36: Model de Mandelbrot creat en 3D amb tècniques informàtiques.



Il·lustració 37: Façana de la Sagrada Família a Barcelona.

En el camp de la tecnologia s'utilitza de moltes maneres diferents. Per exemple en les antenes se les ha fet de forma fractal per tal de disminuir espai, cost i augmentar l'eficiència i rendiment. Algunes empreses com *Fracton* i *Fractal Antenna Systems*, han començat a llançar aquesta nova tecnologia a la indústria, al comerç i negocis, a l'automoció, a les comunicacions, etc. En trobem alhora en rellotges de sol digitals. En la generació de textures o terrenys aleatoris, en la simulació de creixement de plantes. També s'utilitzen l'estudi de terratrèmols, la fractografia i la mecànica de la fractura. Anteriorment, en les ampolles de begudes gasoses utilitzaven additius fractals, per tal de fer-les més resistents a l'alta pressió que suportava.



Il·lustració 38: Representació esquemàtica d'una antena fractal



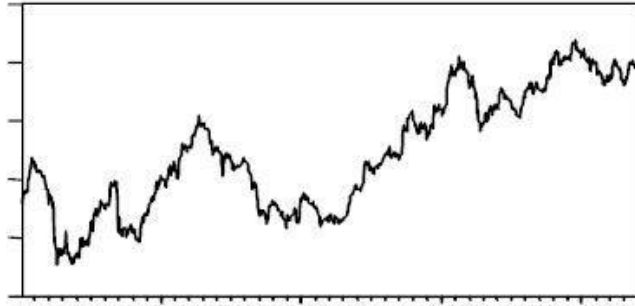
Il·lustració 39: Parets antisonores de la carretera.

També podem trobar la superfície fractal en les parets antisonores de les carreteres, tot i així només és una aproximació ja que els humans no podem crear la superfície fins a l'infinit. Així doncs, quan els sons toquen la paret queden perduts en ella i només en retornen el 15%, reduït així els sons de les carreteres i autopistes.

Els fractals fins i tot se'ls ha relacionat amb les Ciències Socials, s'ha aconseguit fer-ne una extrapolació encara que és utòpica. S'ha vist una relació amb la teoria del caos anomenada: sensibilitat extrema, on una variació petita dels estats inicials d'un procés poden produir canvis dràstics després d'un temps de l'inici²². Això per exemple fa pensar, en que un país tingui problemes econòmics podria que al cap d'un temps en tingués tots els altres països del món.

²² Aquest concepte també es conegut com l'efecte papallona, que diu: "el moviment de les ales d'una papallona poden provocar un tsunami a l'altre costat del món".

També Karl Marx, estudiant l'estructura capitalista mundial concretament la propietat privada, va treure'n la conclusió que derivaria a un monopoli, però no va poder determinar el futur exacte.



Il·lustració 40: Gràfic de la Borsa.

Mandelbrot, al voltant dels anys 60, va observar característiques fractals en la Borsa on els períodes de pujades i de baixades del mercat estaven formats també per fases de pujades i baixades, comparant-les en diferents períodes de temps. També destacaven les accions de vendes i de compres tan irregulars. Tot i així, als anys 30 ja Ralph Elliot va comparar les pujades i baixades de la marea amb les de la Borsa.

En l'àmbit de les ciències socials, els fractals només són aproximacions de fenòmens, ja que aquestes ciències no segueixen lleis precises ni concretes.

PART PRÀCTICA

4. TALLER SOBRE IFS DE LA UB

SISTEMES ITERATIUS DE FUNCIONS: UN PROGRAMARI

L'objectiu d'aquest exercici és crear fractals mitjançant Sistemes Iteratius de Funcions (IFS). Consisteixen en moviments del pla com: translacions, girs, simetries i homotècies que s'apliquen a partir d'unes afinitats, r , s , θ , φ , e i f en una figura inicial: generador o iniciador, per arribar a una figura final: atractor. Per fer-ho utilitzarem els aplicatius d'un curs sobre fractals de la Universitat de Yale, que trobem en el següent link: <http://classes.yale.edu/fractals/software/software.html>, en el qual hi ha diferents softwares. On realitzarem exercicis amb els aplicatius relacionats amb els fractals corresponents.

ACTIVITAT 1. ATRACTORS FRACTALS DE SISTEMES ITERATIUS DE FUNCIONS

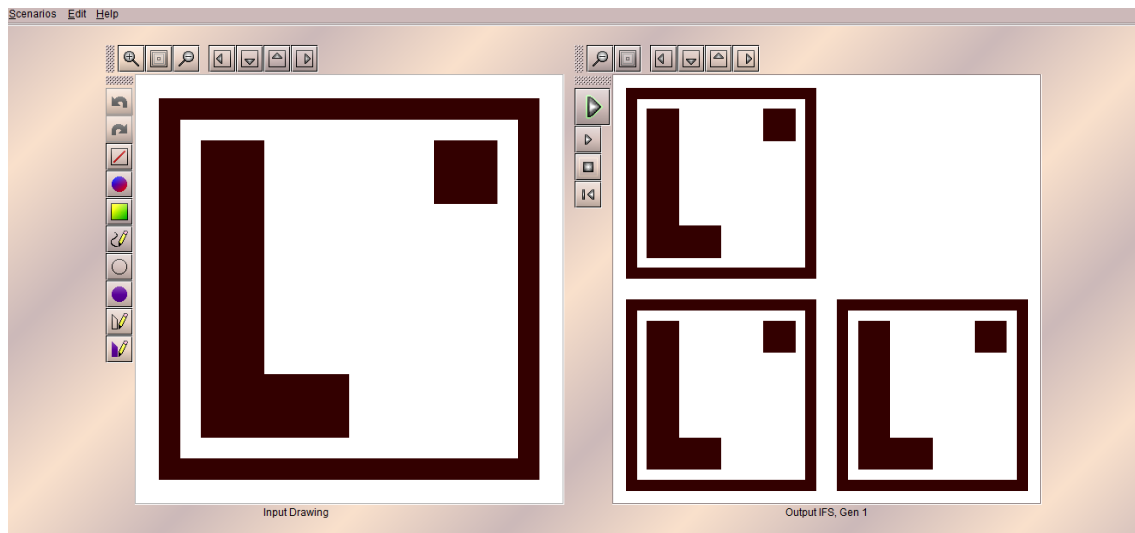
Utilitzarem el software *Deterministic IFS*, que hi ha al menú principal.

➤ El triangle de Sierpinski

Dibuixem un iniciador qualsevol amb la taula d'afinitats que correspondrà al triangle de Sierpinski. La taula d'afinitats per formar-lo és la següent:

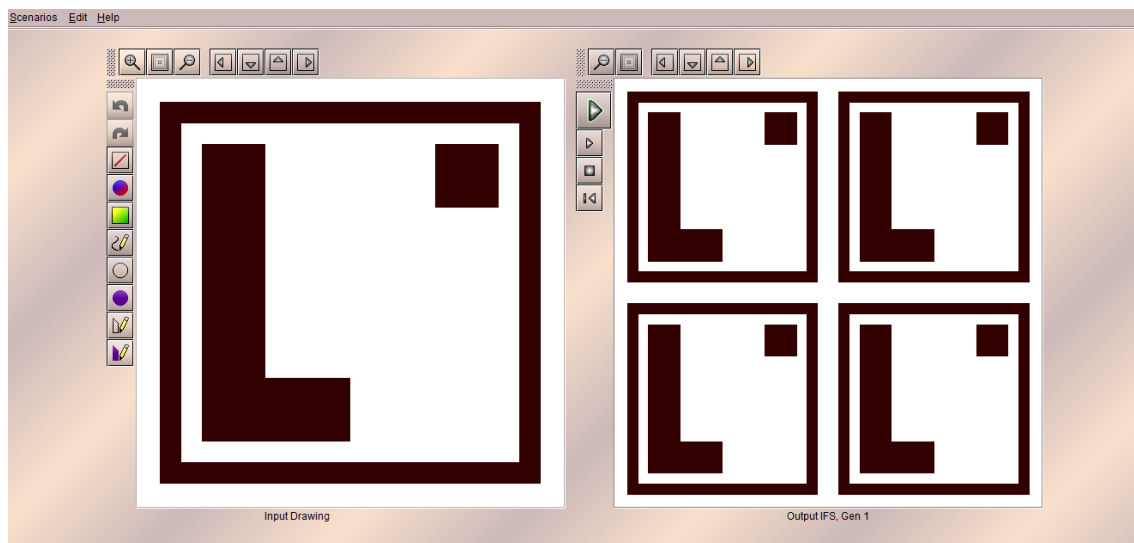
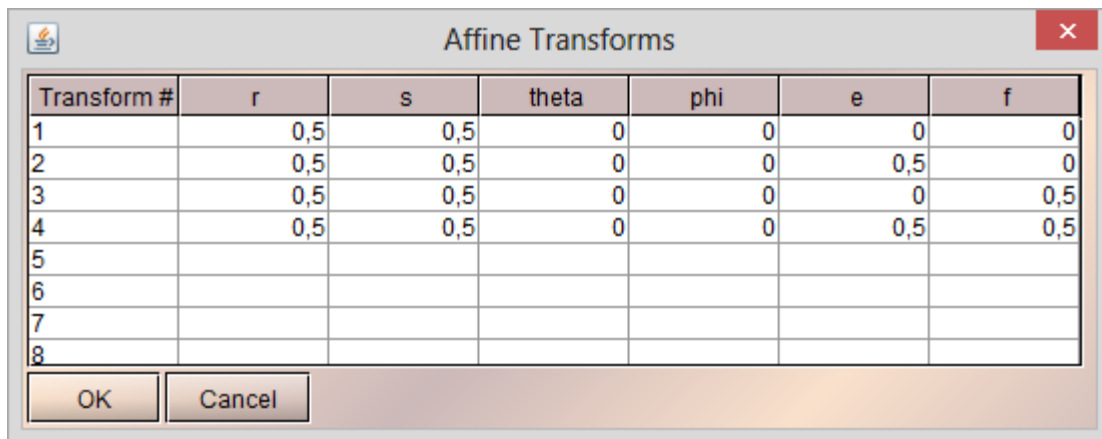
Affine Transforms						
Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,5	0,5	0	0	0	0
2	0,5	0,5	0	0	0,5	0
3	0,5	0,5	0	0	0	0,5
4						
5						
6						
7						

Executem la taula i després d'unes iteracions obtenim les següents figures:

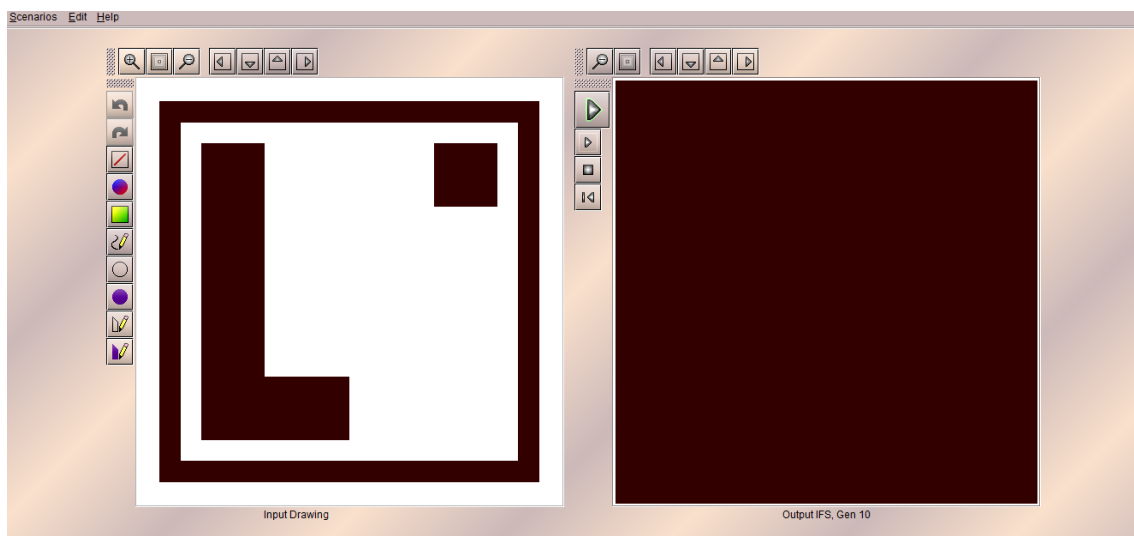


Podem veure com l'afinitat 1 correspon al subquadrat inferior de l'esquerra, el qual es redueix a la meitat tant pel que fa a l'eix x i a l'eix y ($r = s = 0.5$), no es produeix cap rotació ni a les rectes verticals ni a les horitzontals ($\theta = \varphi = 0$), i per últim no es produeix cap translació en l'eix x ni l'eix y ja que es manté en el mateix punt original ($e = f = 0$). L'afinitat 2 correspon al subquadrat inferior a la dreta, el qual es redueix a la meitat tant pel que fa a l'eix x i a l'eix y ($r = s = 0.5$), no es produeix cap rotació ni a les rectes verticals ni a les horitzontals ($\theta = \varphi = 0$), i per últim es produeix una translació en l'eix x ($e = 0.5$) però en l'eix y es manté igual ($f = 0$). Per últim en l'afinitat 3 correspon al subquadrat superior de l'esquerra, el qual es redueix a la meitat tant pel que fa a l'eix x i a l'eix y ($r = s = 0.5$), no es produeix cap rotació ni a les rectes verticals ni a les horitzontals ($\theta = \varphi = 0$), i per últim no es produeix cap desplaçament en l'eix x ($e = 0$) però en l'eix y es desplaçarà ($f = 0.5$).

Si afegim el subquadrat que falta a dalt a la dreta, l'afinitat 4 correspondrà a una translació en l'eix x ($e = 0.5$) i en l'eix y es desplaçarà ($f = 0.5$), l'iniciador es reduirà a la meitat tant pel que fa a l'eix x i a l'eix y ($r = s = 0.5$) i no es produirà cap rotació ni a les rectes verticals ni a les horitzontals ($\theta = \varphi = 0$).

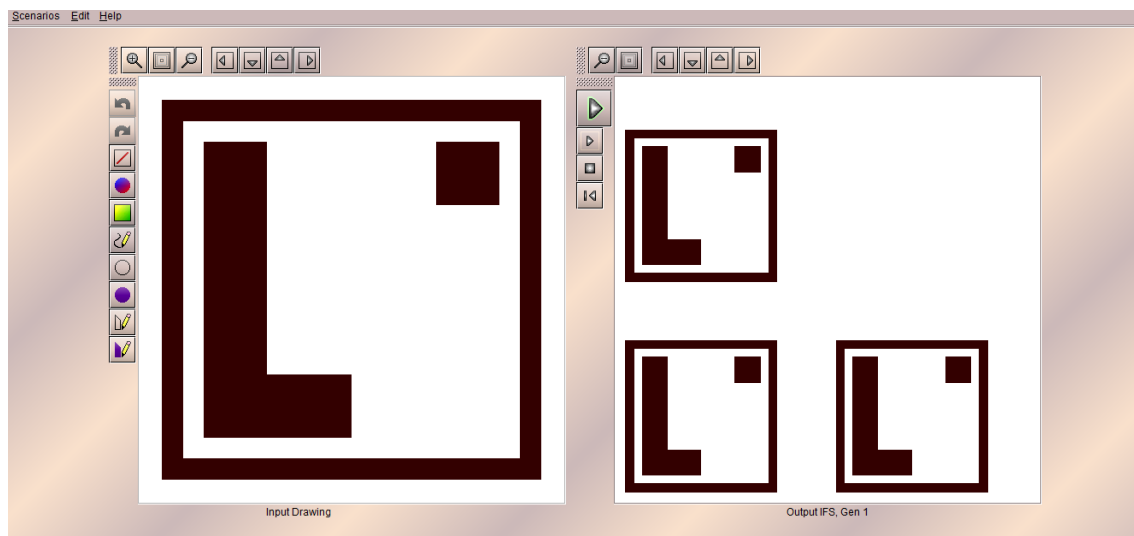


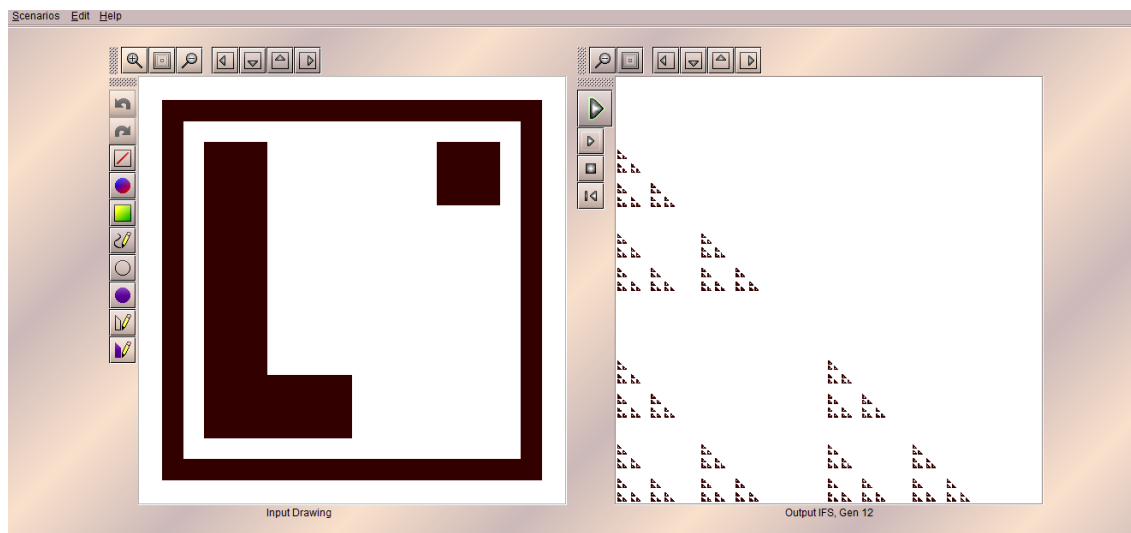
L'atractor és la figura final que obtenim després d'aplicar-li moltes iteracions. En aquest cas al fer ocupar tots els punts del pla ens resultarà un pla tot ocupat per punts, tal i com podem veure en la següent imatge:



Seguidament, aplicarem modificacions als factors de contracció. Observem que quan s'utilitzen els mateixos factors de contracció s'obtenen triangles amb els costats rectes. A diferència, si s'utilitzen diferents valors de contracció s'obtenen triangles amb els costats curvilinis. Aquests són els casos que m'ha portat a aquestes conclusions:

1r cas: He escollit tots els valors de contracció a 0.4

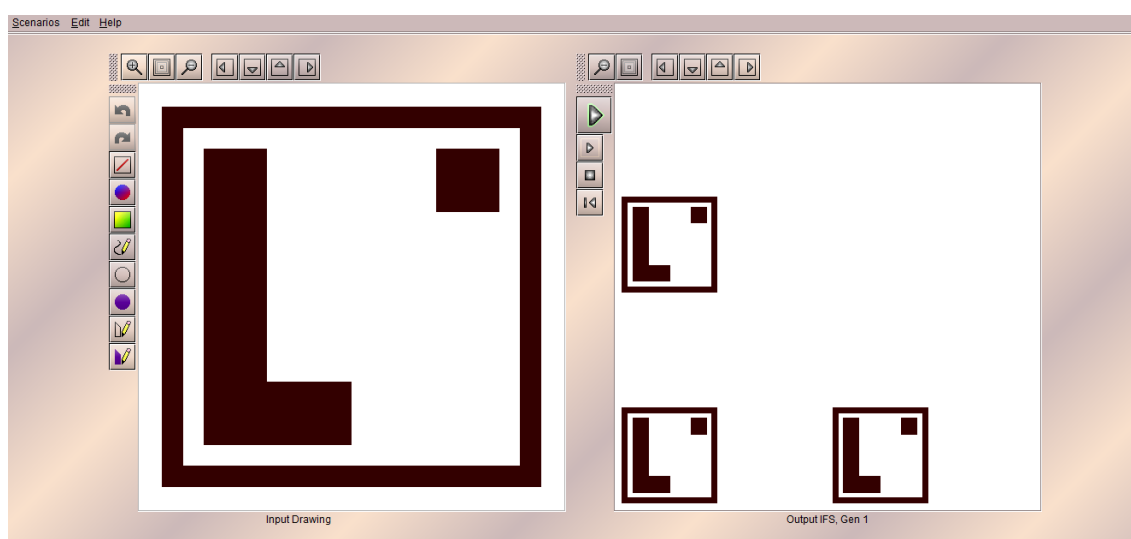


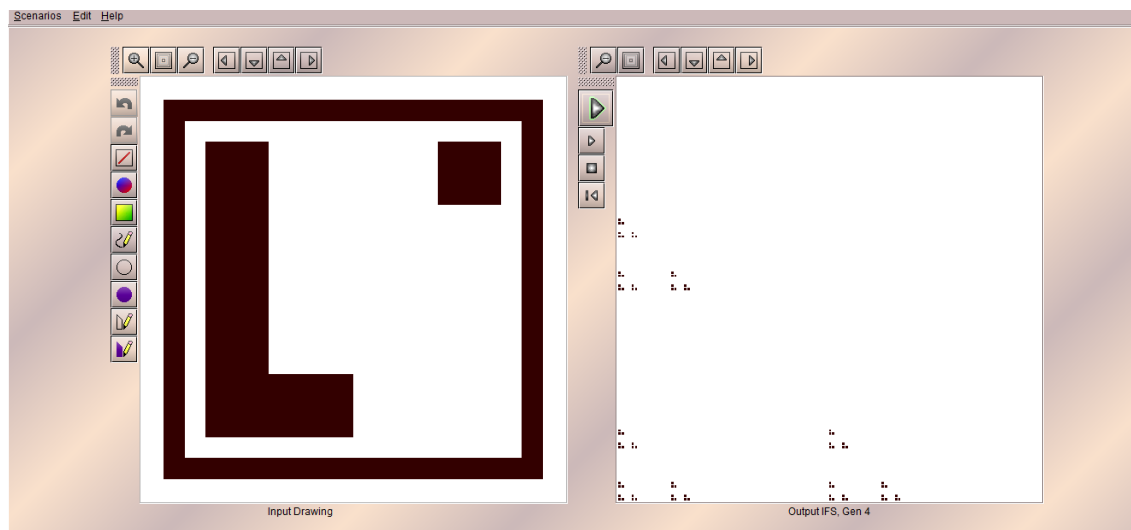


2n cas: He escollit tots els valors de contracció a 0.25

Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,25	0,25	0	0	0	0
2	0,25	0,25	0	0	0,5	0
3	0,25	0,25	0	0	0	0,5
4						
5						
6						
7						

OK Cancel

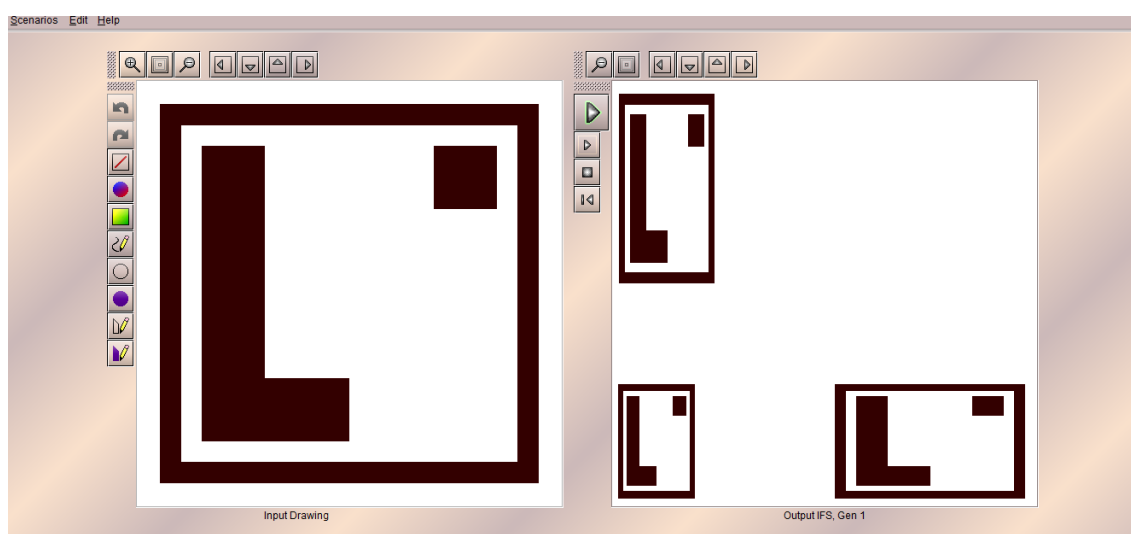


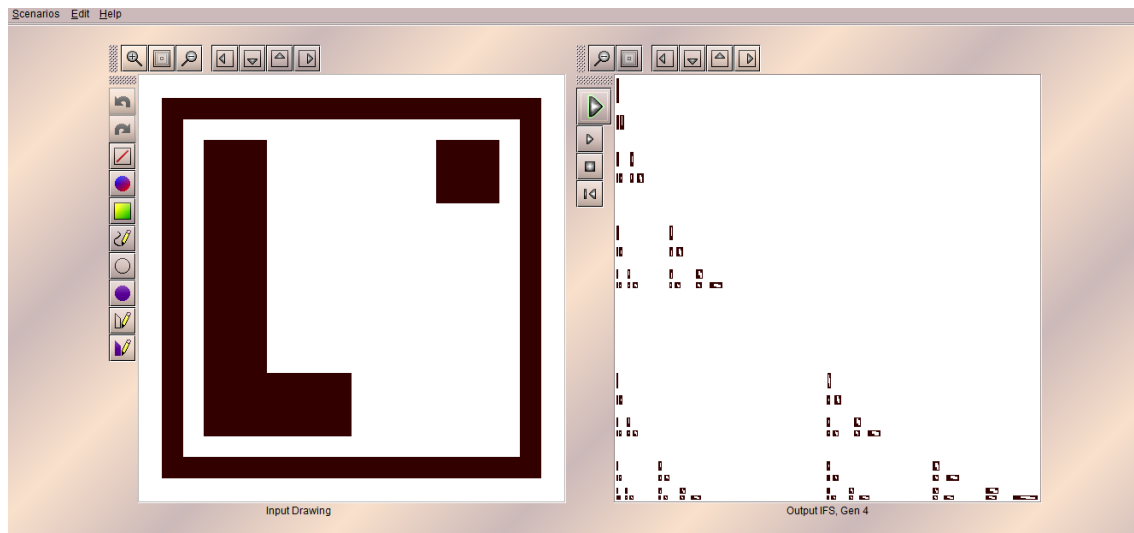


3r cas: He escollit valors diferents en els valors de contracció.

Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,2	0,3	0	0	0	0
2	0,5	0,3	0	0	0,5	0
3	0,25	0,5	0	0	0	0,5
4						
5						
6						
7						

OK Cancel



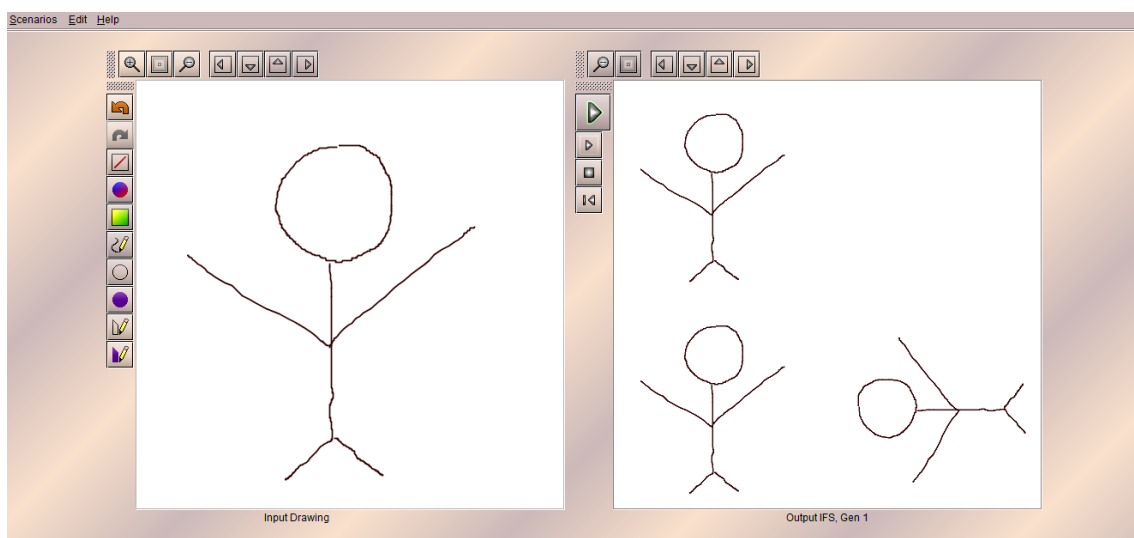


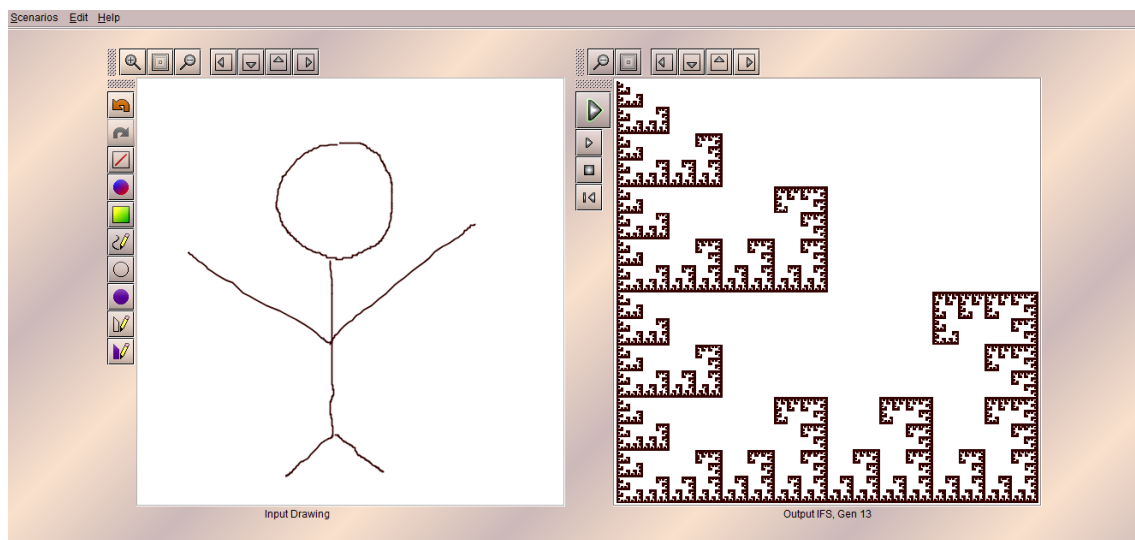
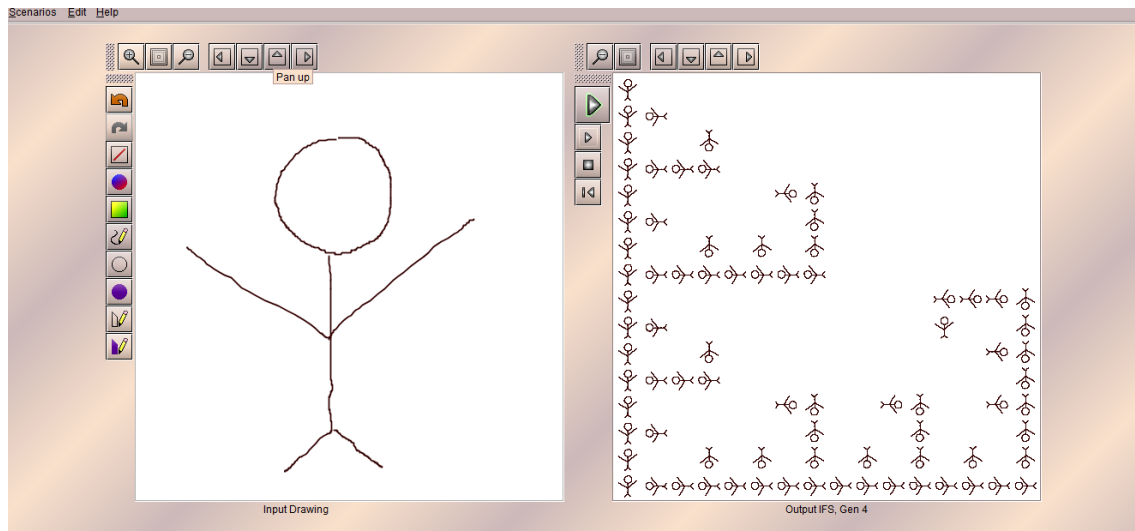
➤ Un fill del triangle de Sierpinski

A continuació, construïm una variació del triangle de Sierpinski fent que l'afinitat que es troba a baix a la dreta faci una rotació rígida de 90° .

Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,5	0,5	0	0	0	0
2	0,5	0,5	90	90	1	0
3	0,5	0,5	0	0	0	0,5
4						
5						
6						
7						

OK Cancel



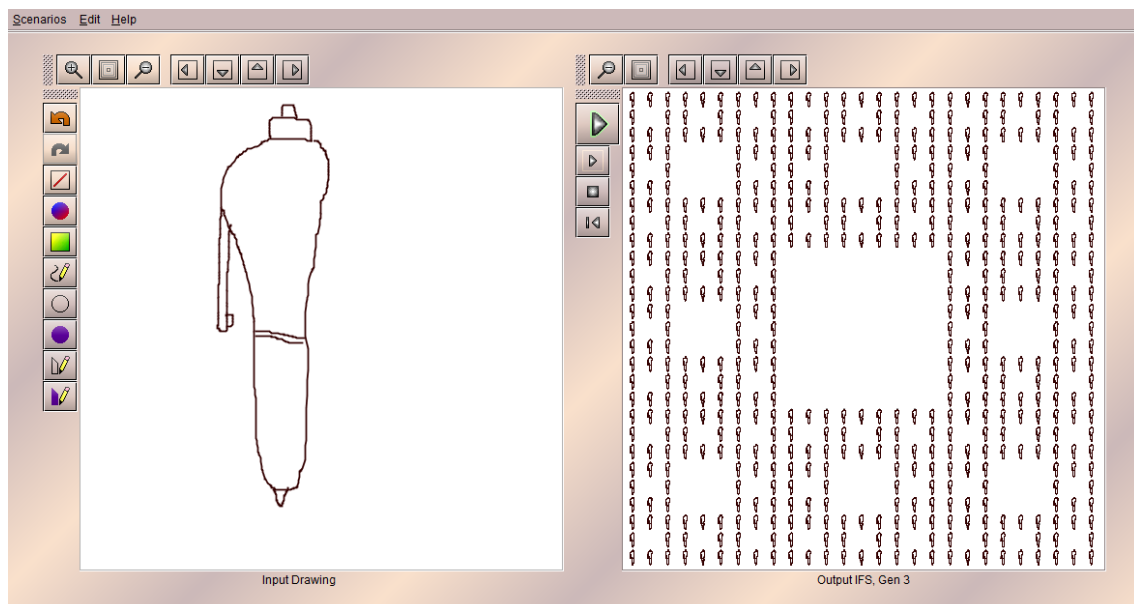


➤ La catifa de Sierpinski

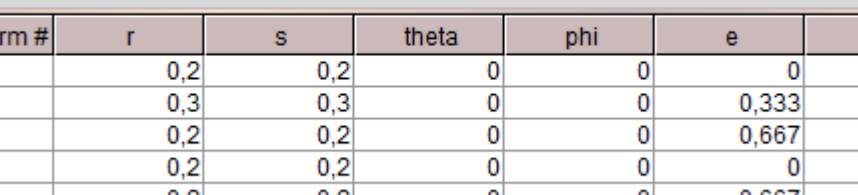
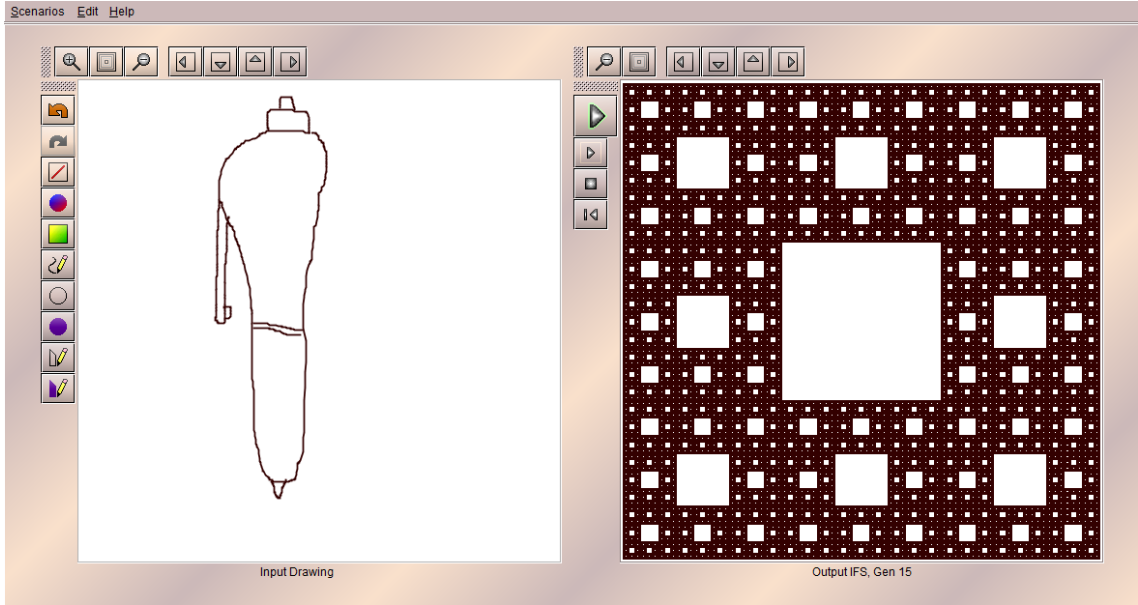
A partir de qualsevol iniciador construïm la catifa de Sierpinski. La taula d'afinitats que l'originarà és la següent:

Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,333	0,333	0	0	0	0
2	0,333	0,333	0	0	0,333	0
3	0,333	0,333	0	0	0,667	0
4	0,333	0,333	0	0	0	0,333
5	0,333	0,333	0	0	0,667	0,333
6	0,333	0,333	0	0	0	0,667
7	0,333	0,333	0	0	0,333	0,667
8	0,333	0,333	0	0	0,667	0,667
9						
10						
11						
12						

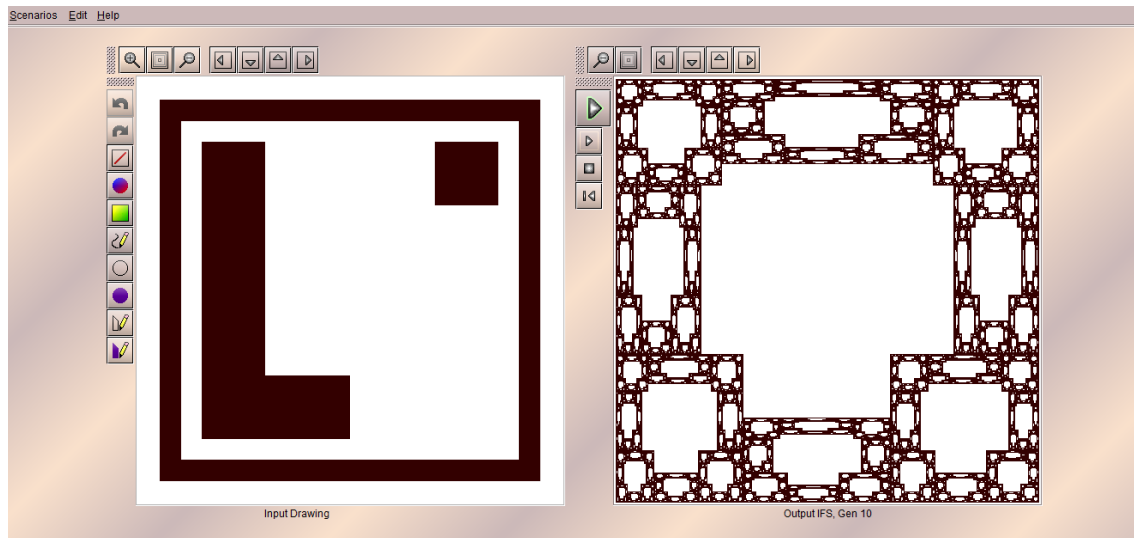
Després de diverses iteracions correspon a la següent figura fractal:



I finalment el seu atractor és el següent:

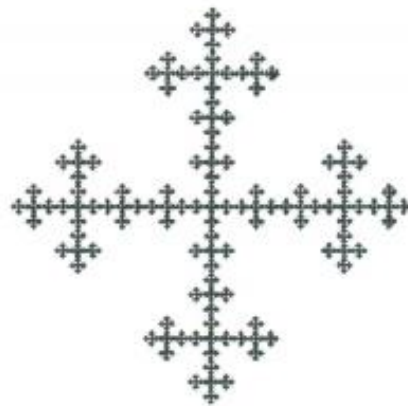
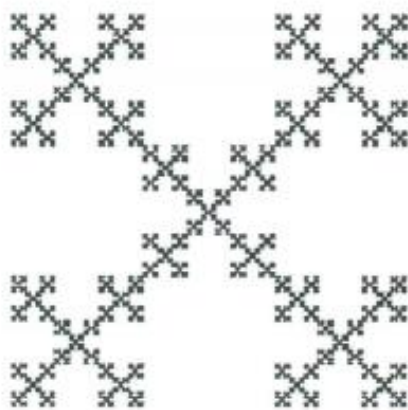


Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,2	0,2	0	0	0	0
2	0,3	0,3	0	0	0,333	0
3	0,2	0,2	0	0	0,667	0
4	0,2	0,2	0	0	0	0,333
5	0,2	0,2	0	0	0,667	0,333
6	0,2	0,2	0	0	0	0,667
7	0,3	0,3	0	0	0,333	0,667
8	0,2	0,2	0	0	0,667	0,667
9						
10						
11						
12						



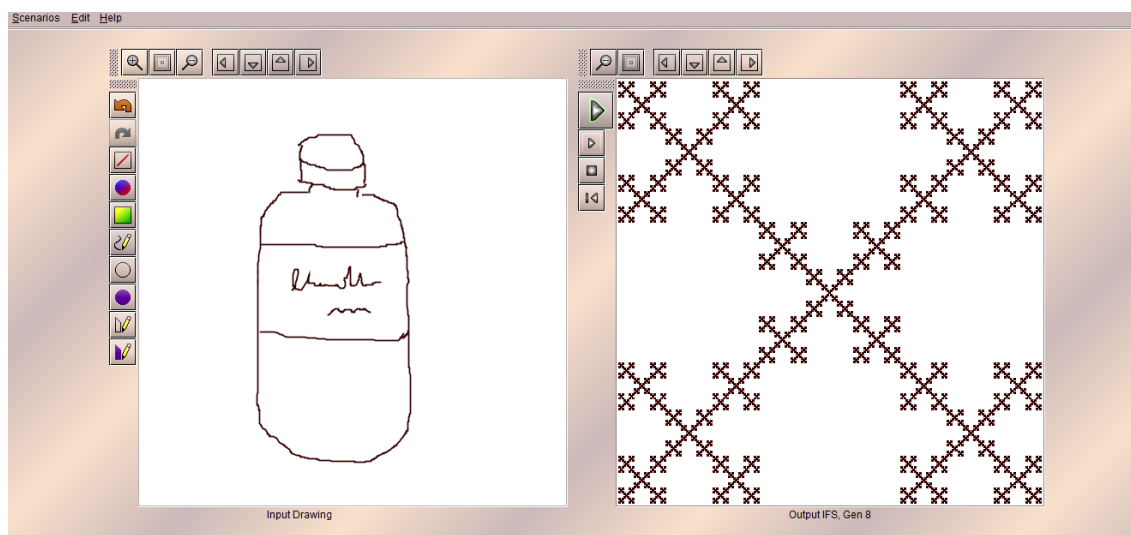
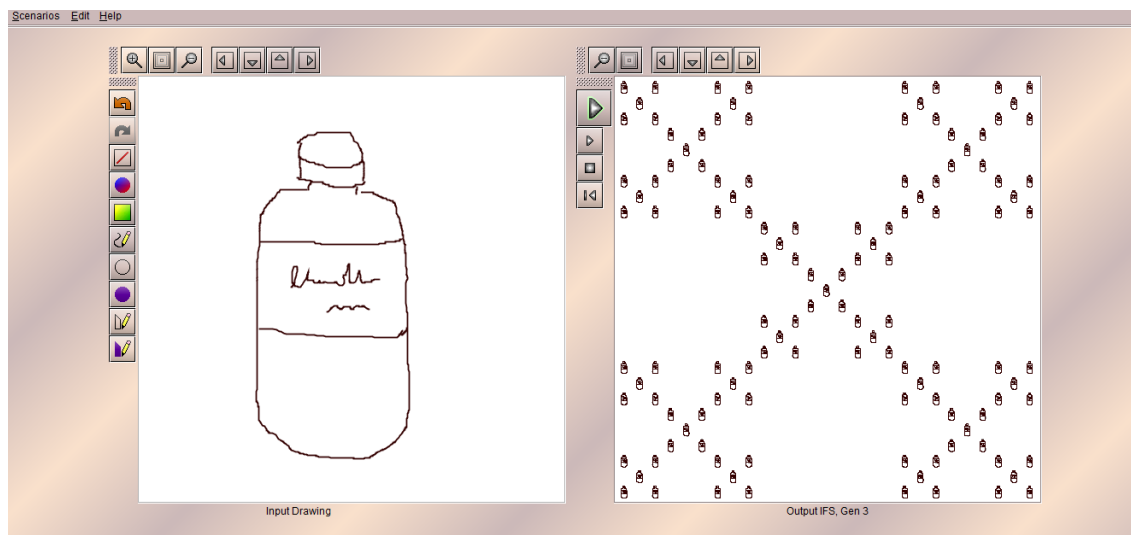
➤ Els fractals “x” i “+”

Seguidament intentarem crear els següents fractals a partir de la taula d'afinitats modificant-ne alguns valors.



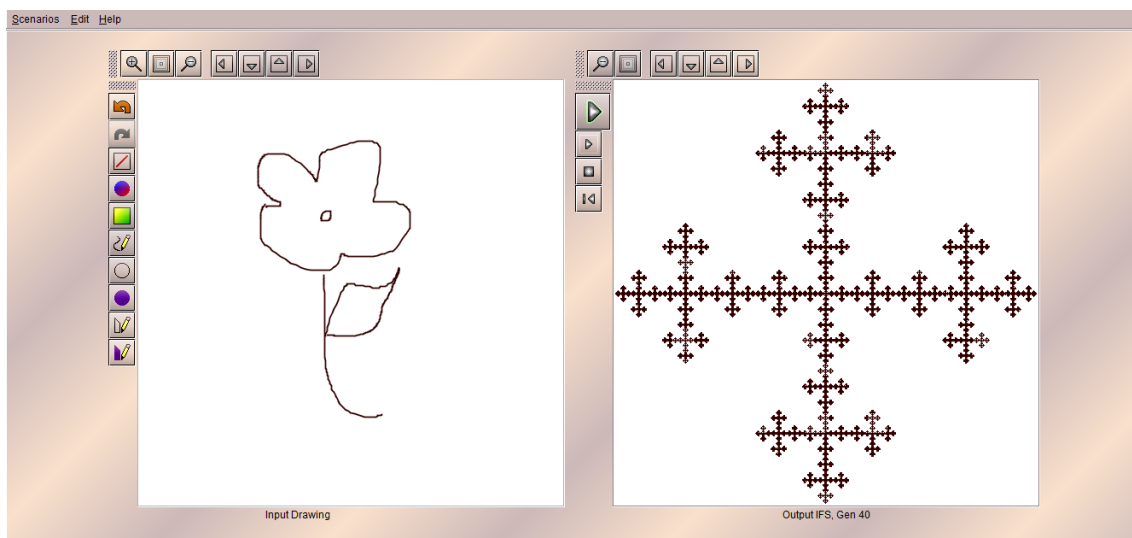
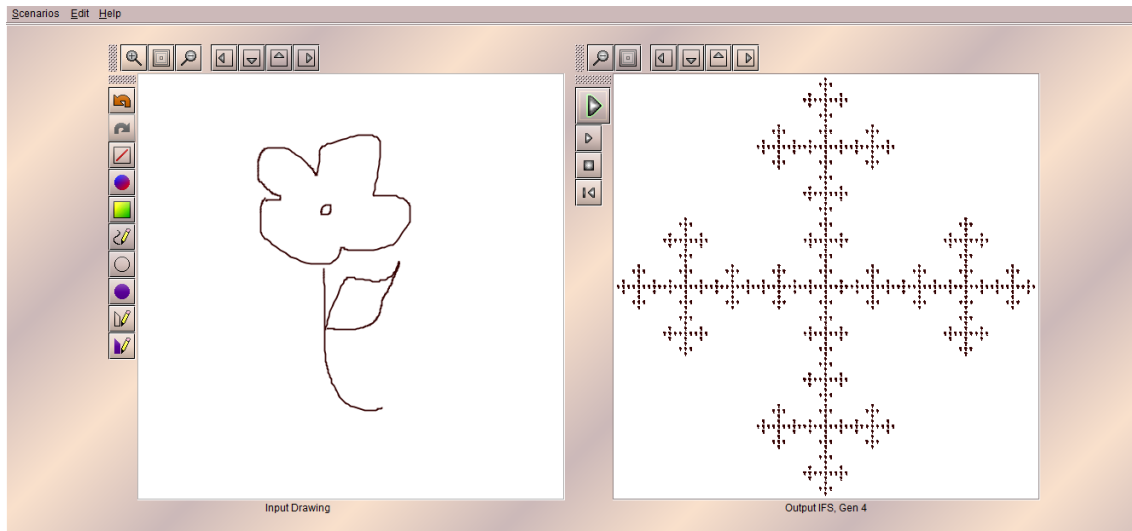
Per realitzar-los necessitarem 5 contraccions d' $1/3$.

1r cas:



Affine Transforms							
Transform #	r	s	theta	phi	e	f	
1	0,333	0,333	0	0	0	0	
2	0,333	0,333	0	0	0,667	0	
3	0,333	0,333	0	0	0,333	0,333	
4	0,333	0,333	0	0	0	0,667	
5	0,333	0,333	0	0	0,667	0,667	
6							
7							
8							
9							
OK Cancel							

2n cas:

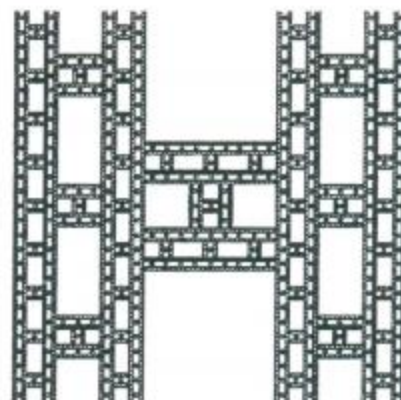
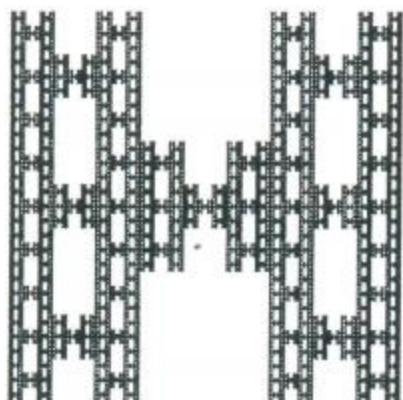


Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,333	0,333	0	0	0,333	0,333
2	0,333	0,333	0	0	0	0,333
3	0,333	0,333	0	0	0,333	0
4	0,333	0,333	0	0	0,667	0,333
5	0,333	0,333	0	0	0,333	0,667
6						
7						
8						
9						

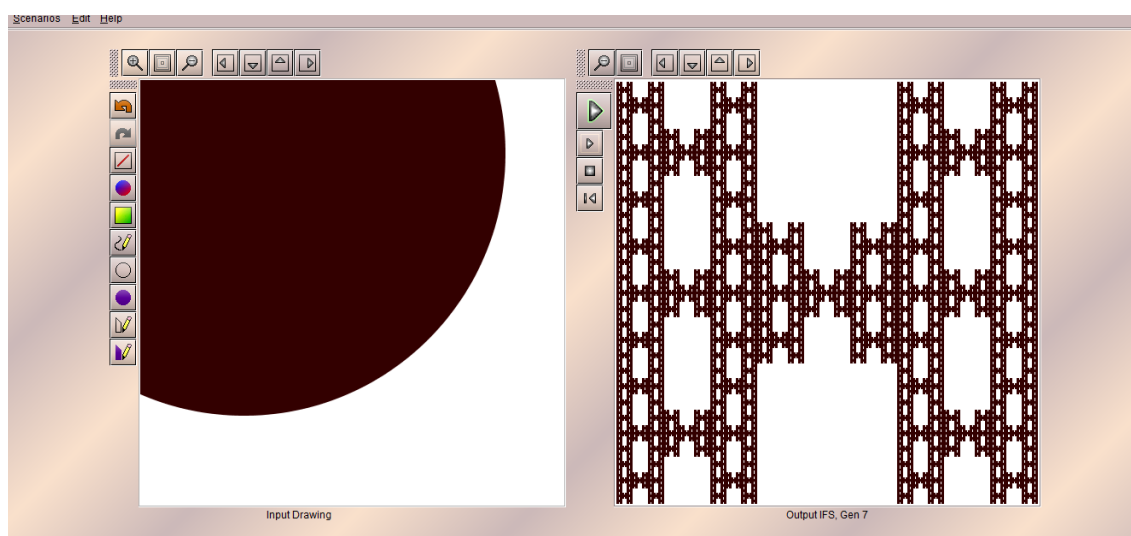
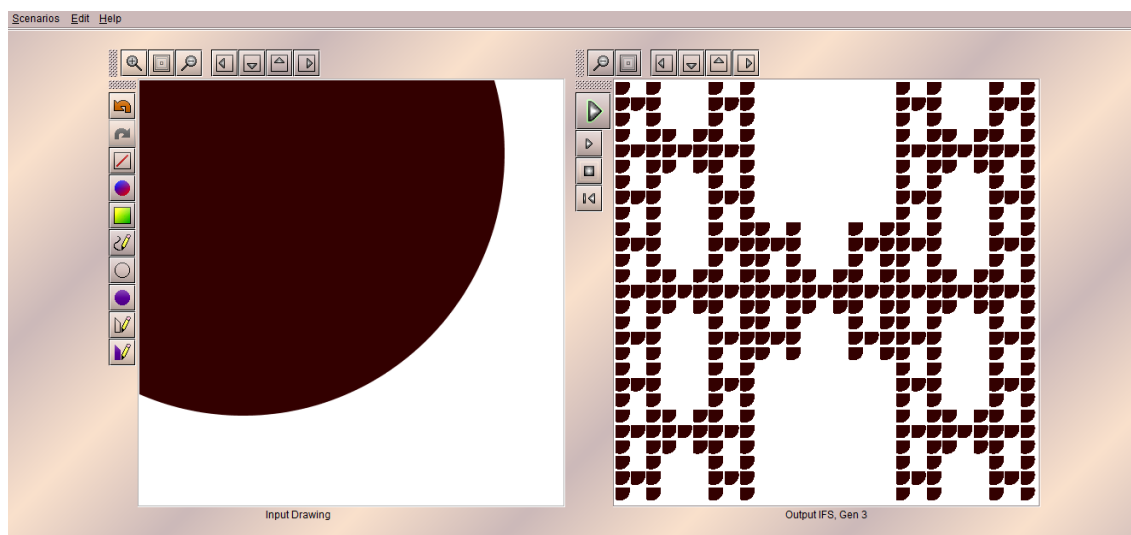
OK Cancel

➤ Els fractals “H”

Generem els fractals següents:

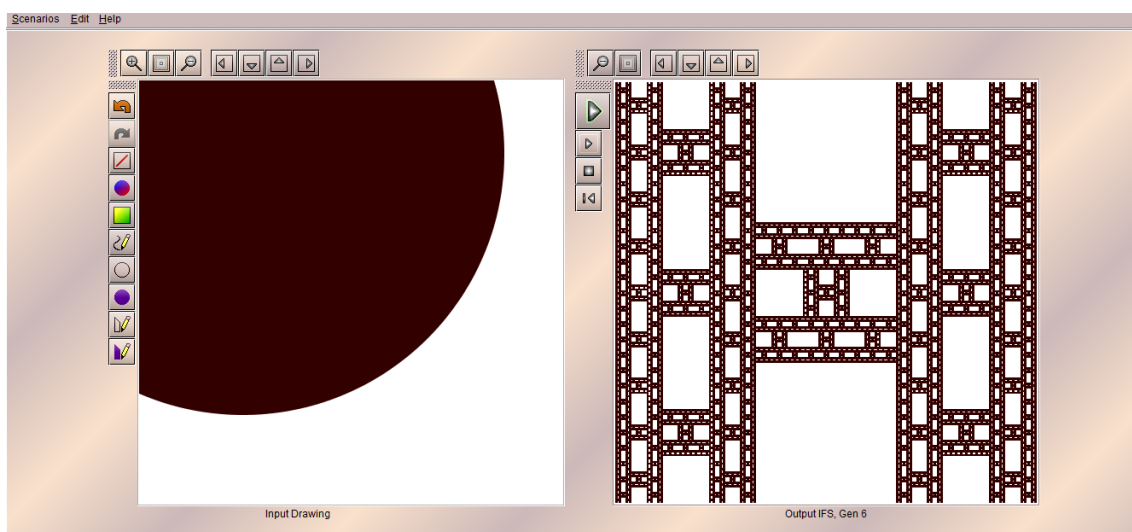
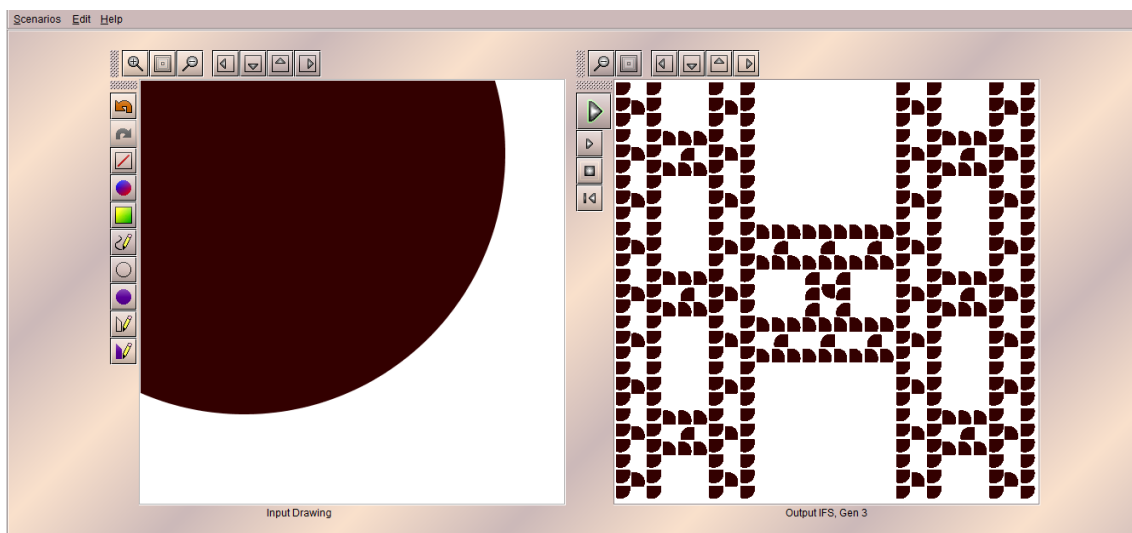


1r cas:



Affine Transforms						
Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,333	0,333	0	0	0	0
2	0,333	0,333	0	0	0,667	0
3	0,333	0,333	0	0	0	0,333
4	0,333	0,333	0	0	0,667	0,333
5	0,333	0,333	0	0	0	0,667
6	0,333	0,333	0	0	0,667	0,667
7	0,333	0,333	0	0	0,333	0,333
8						
9						
10						
11						

2n cas:



Affine Transforms

Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,333	0,333	0	0	0	0
2	0,333	0,333	0	0	0,667	0
3	0,333	0,333	0	0	0	0,333
4	0,333	0,333	0	0	0,667	0,333
5	0,333	0,333	0	0	0	0,667
6	0,333	0,333	0	0	0,667	0,667
7	0,333	0,333	90	90	0,667	0,333
8						
9						
10						
11						

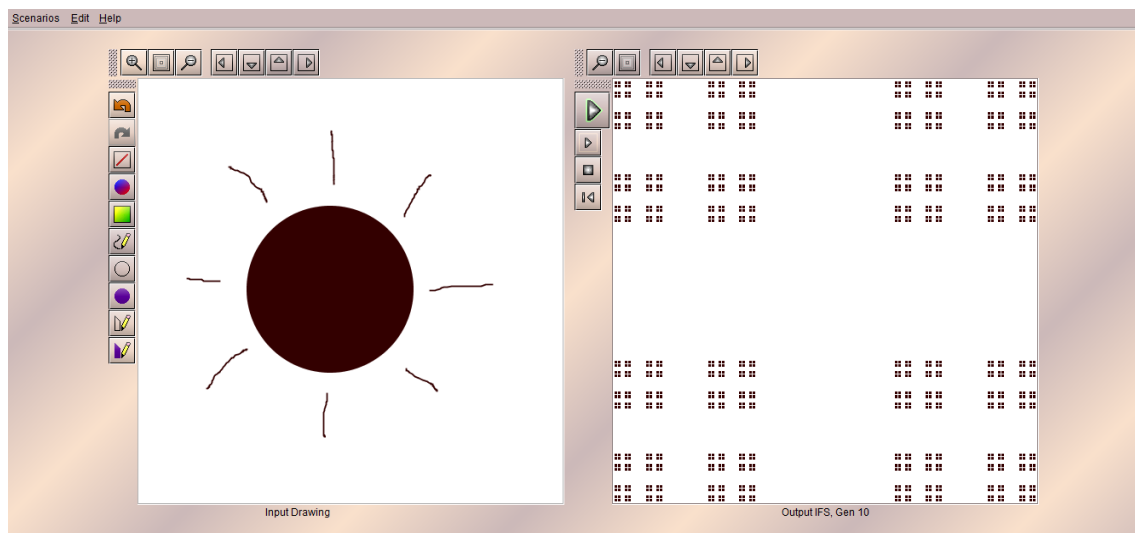
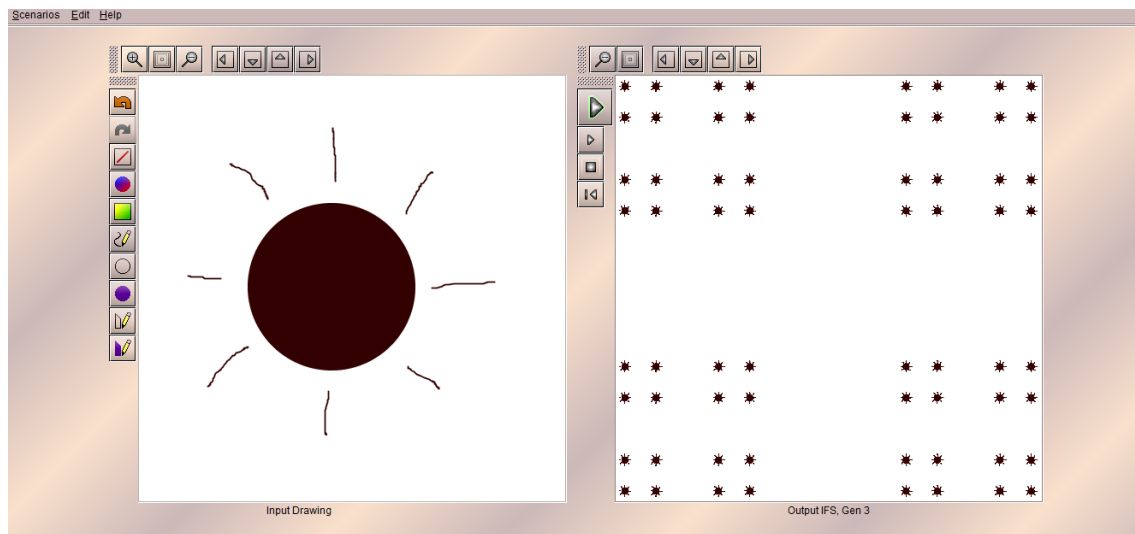
OK Cancel

➤ **La pols de Cantor**



Els dos fractals anteriors es poden crear amb 4 afinitats. Seguidament ho realitzarem.

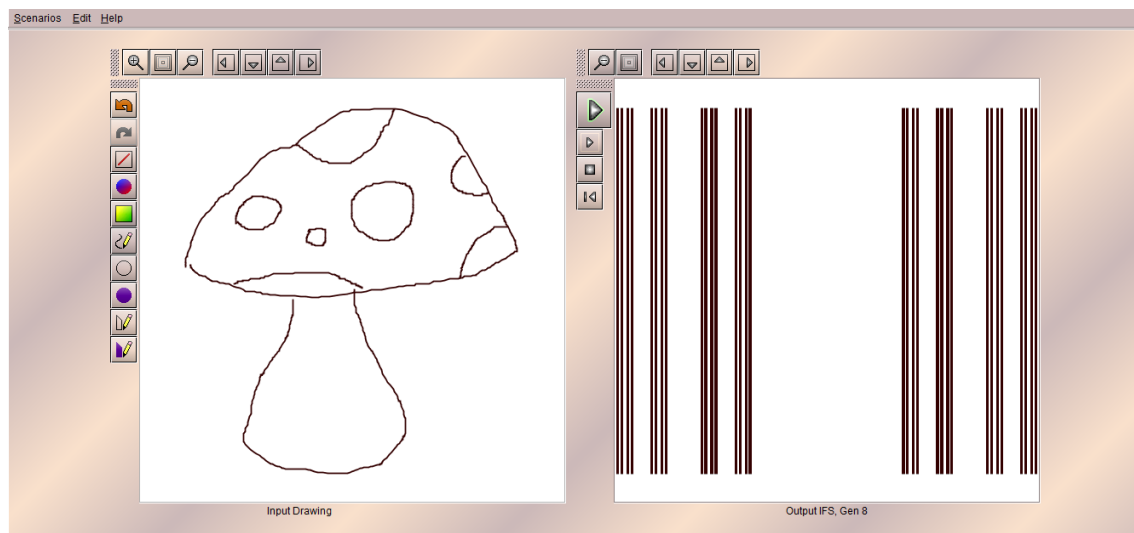
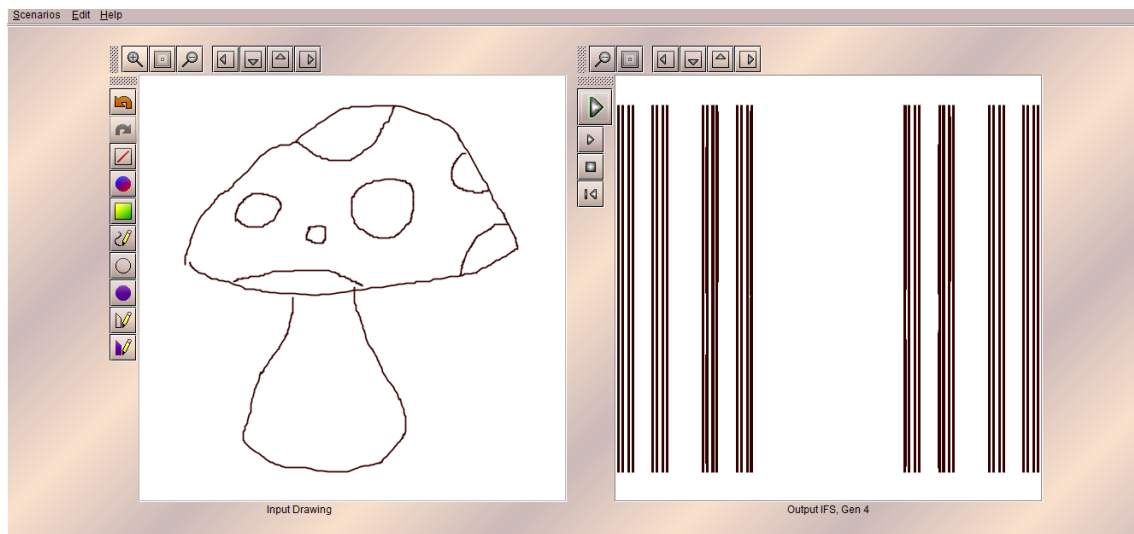
1r cas:



Affine Transforms						
Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,333	0,333	0	0	0	0
2	0,333	0,333	0	0	0,667	0
3	0,333	0,333	0	0	0	0,667
4	0,333	0,333	0	0	0,667	0,667
5						
6						
7						
8						

OK Cancel

2n cas:

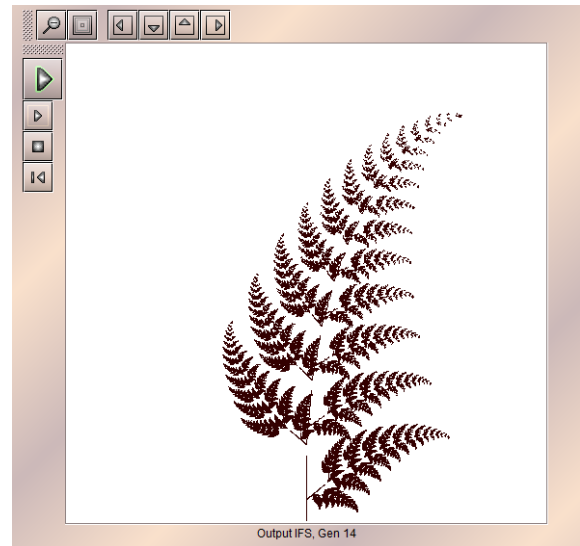
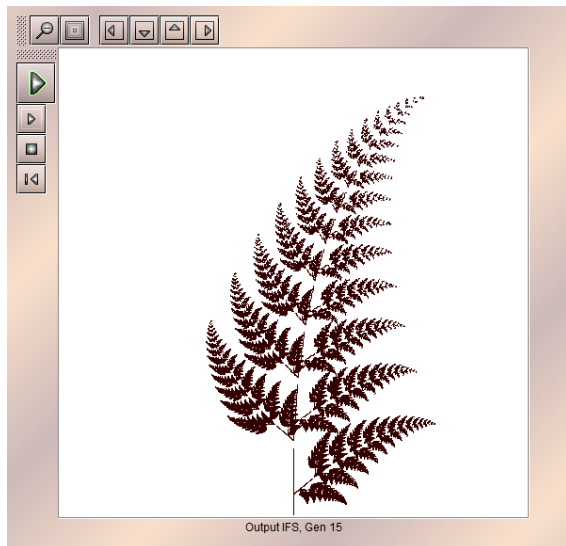


Affine Transforms						
Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,12	1	0	0	0	0
2	0,12	1	0	0	0,88	0
3	0,12	1	0	0	0,68	0
4	0,12	1	0	0	0,2	0
5						
6						
7						
8						

OK Cancel

➤ La falguera

Amb l'aplicatiu formem una fulla de falguera. Seguidament, modificant els coeficients rotacionals de la taula d'afinitats podem aconseguir l'efecte d'una falguera en moviment pel vent.

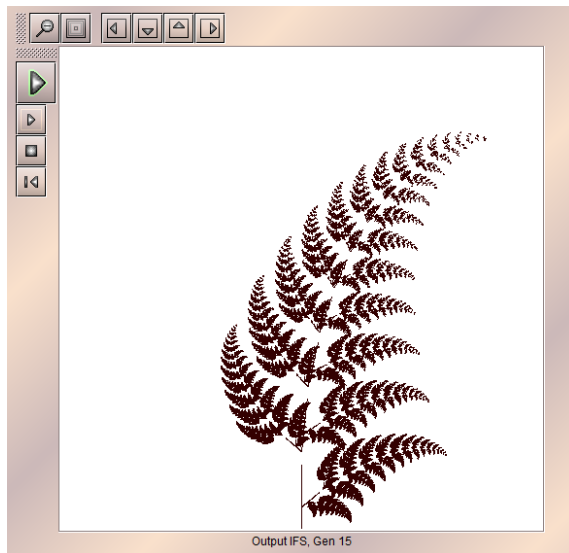


Affine Transforms							
Transform #	r	s	theta	phi	e	f	
1	0	0.16	0	0	0	0	0
2	0.85	0.85	-4	-4	0	1.6	
3	0.3	0.34	49	49	0	1.6	
4	0.3	0.37	-50	-50	0	0.44	
5							
6							
7							
8							

OK Cancel

Affine Transforms							
Transform #	r	s	theta	phi	e	f	
1	0	0.16	0	0	0	0	0
2	0.85	0.85	-5	-5	0	1.6	
3	0.3	0.34	49	49	0	1.6	
4	0.3	0.37	-50	-50	0	0.44	
5							
6							
7							
8							

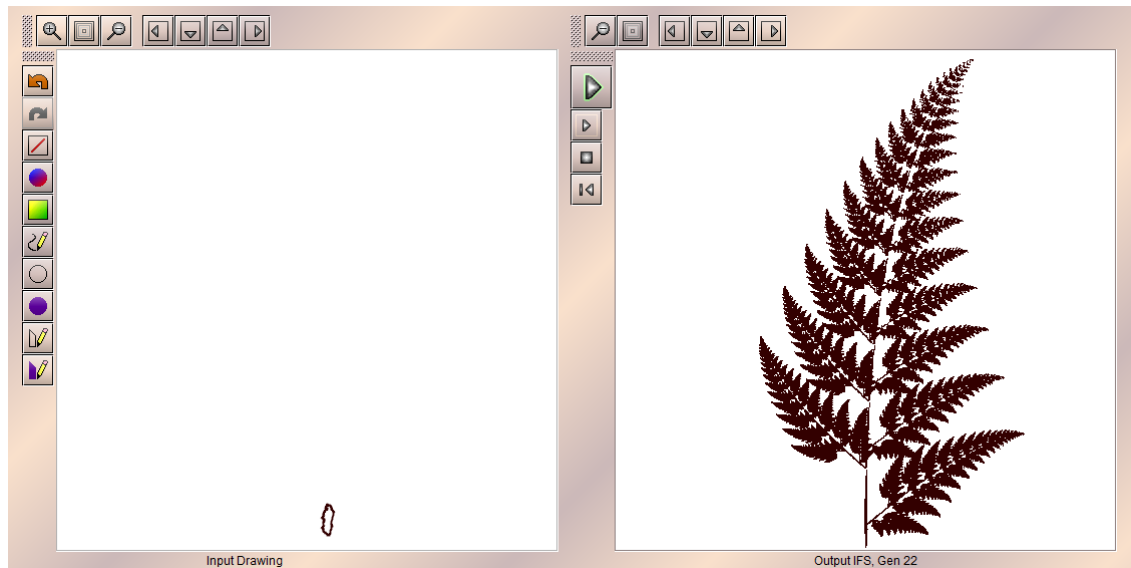
OK Cancel



Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0	0,16	0	0	0	0
2	0,85	0,85	-6	-6	0	1,6
3	0,3	0,34	49	49	0	1,6
4	0,3	0,37	-50	-50	0	0,44
5						
6						
7						
8						

Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0	0,16	0	0	0	0
2	0,85	0,85	-7	-7	0	1,6
3	0,3	0,34	49	49	0	1,6
4	0,3	0,37	-50	-50	0	0,44
5						
6						
7						
8						

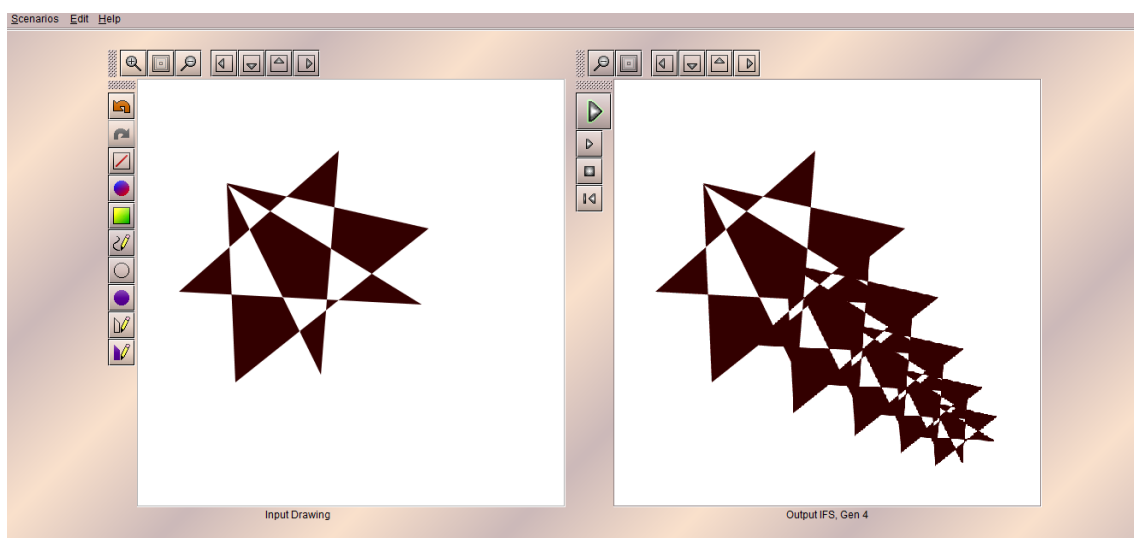
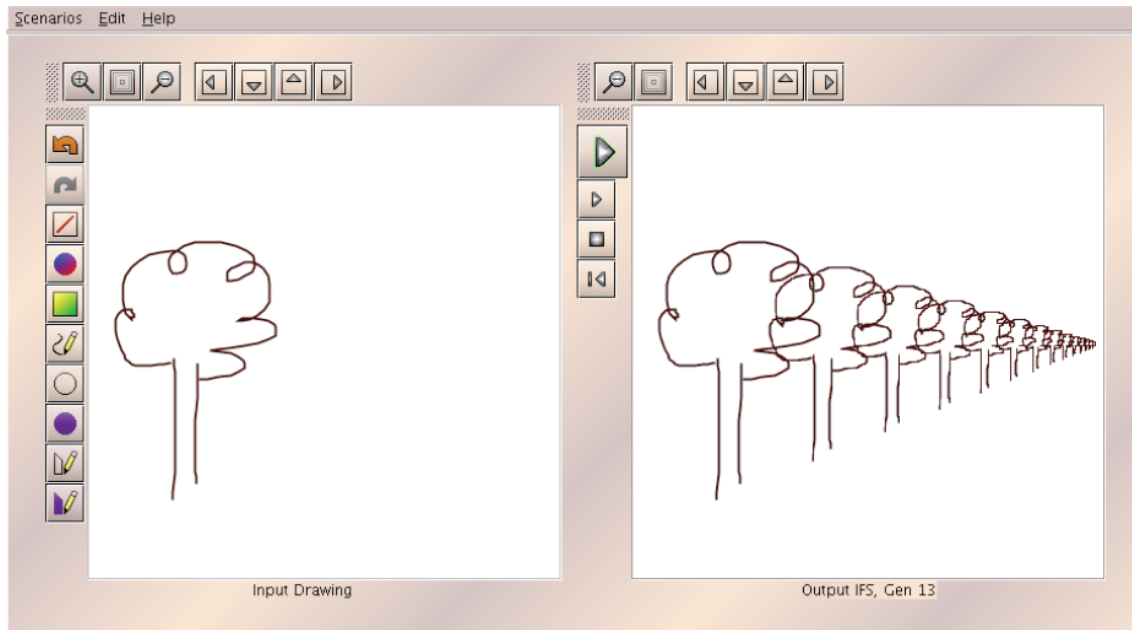
Per engreixar el tronc de la falguera només cal augmentar la r de l'afinitat 1, per exemple a 0.01



ACTIVITAT 2. IFS DE CONDENSACIÓ

Utilitzarem el software *Deterministic IFS*, que hi ha al menú principal.

Crearem fractals IFS de condensació i veurem cap a on convergeixen. Comprovarem que en aquest cas l'atractor sí que depèn de l'iniciador.

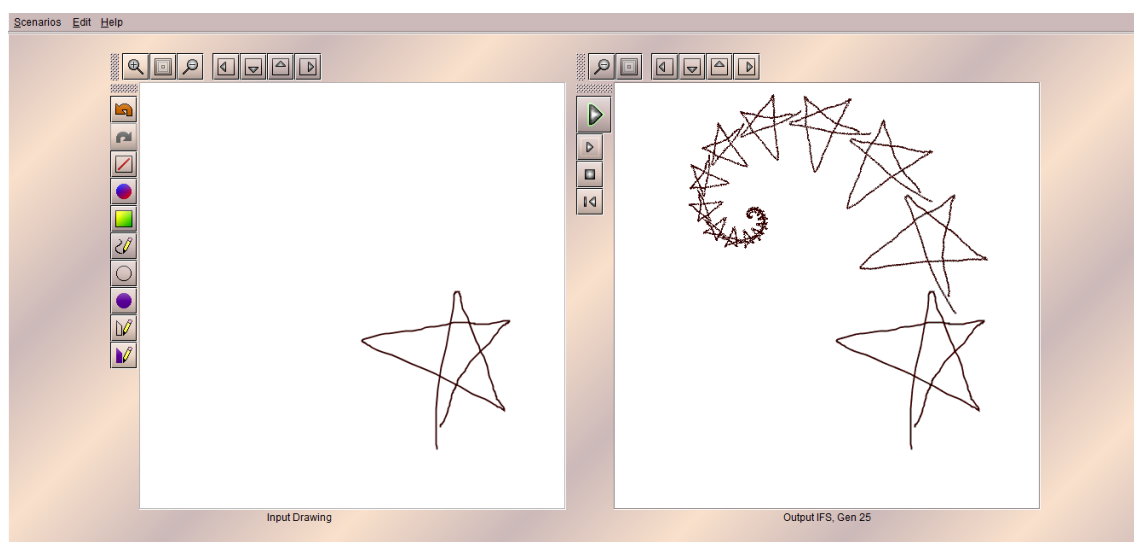
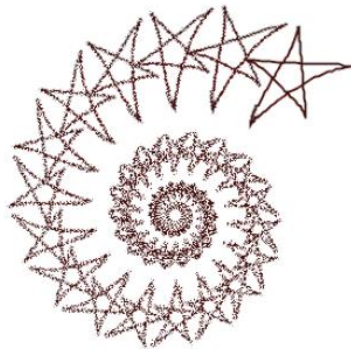


Affine Transforms

Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	1	1	0	0	0	0
2	0,75	0,75	0	0	0,25	0
3						
4						
5						
6						

OK Cancel

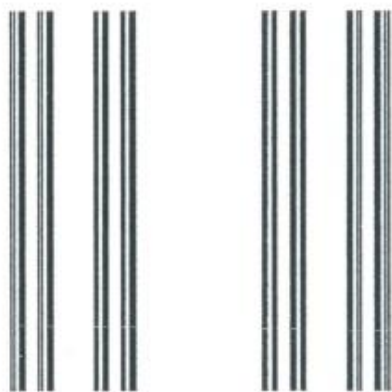
Seguidament, intentarem crear un fractal IFS de condensació on el seu atractor sigui més o menys el mateix que la següent figura:



Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	1	1	0	0	0	0
2	0,8	0,8	30	30	0,4	0,25
3						
4						
5						
6						

OK Cancel

Amb el truc d'usar un conjunt de condensació adequat genera el conjunt "Cantor x interval" usant dues afinitat, de la següent imatge:

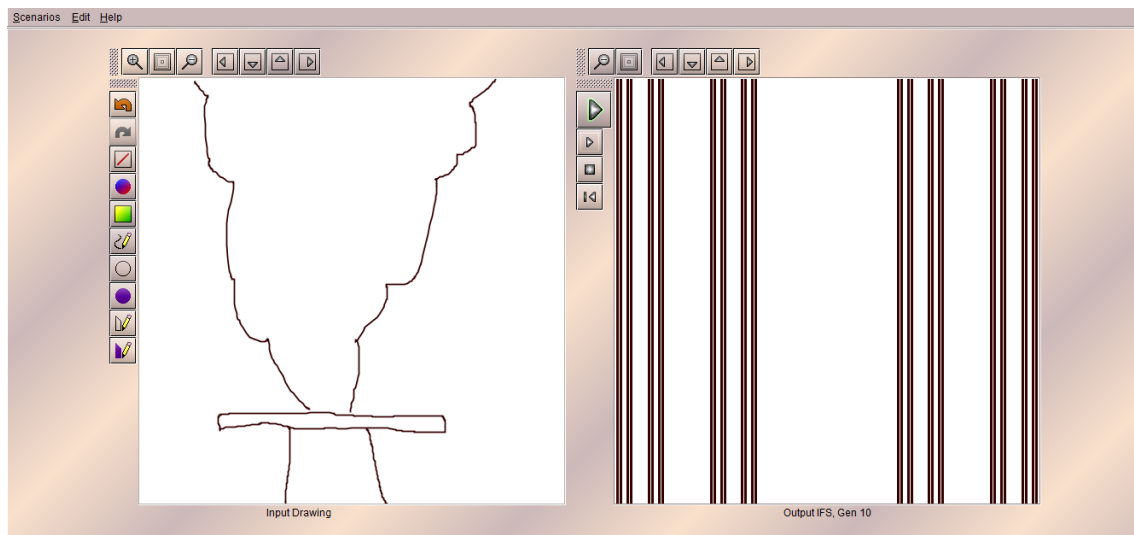
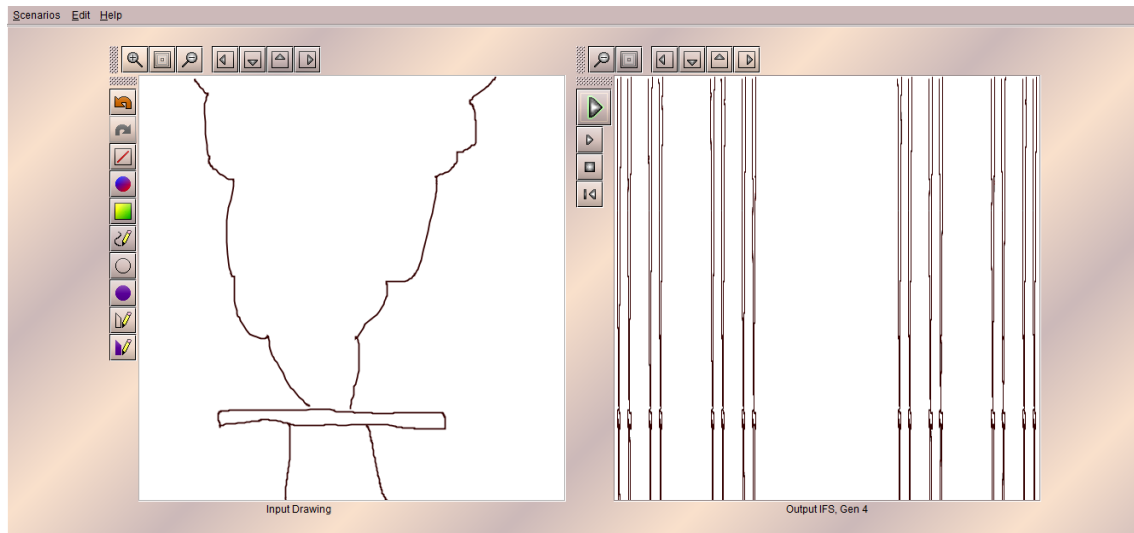


Utilitzant la taula d'afinitats següent:

Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,333	1	0	0	0	0
2	0,333	1	0	0	0,667	0
3						
4						
5						
6						

OK Cancel

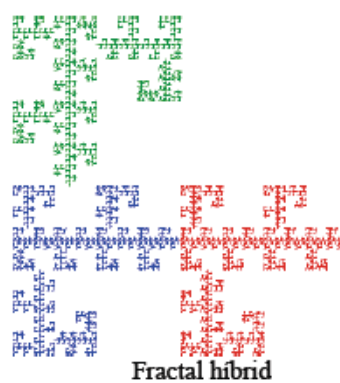
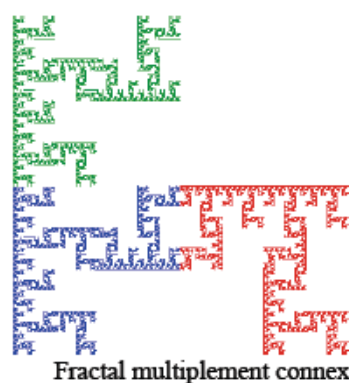
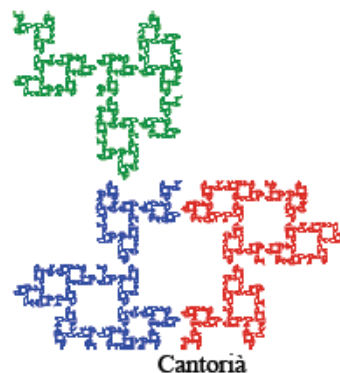
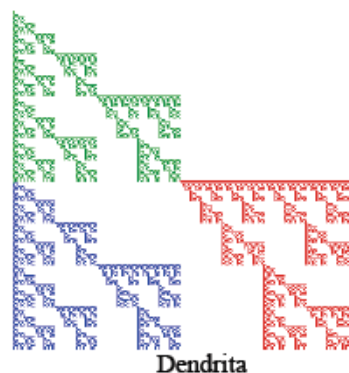
Obtenim les següents figures:



ACTIVITAT 3. LA FAMÍLIA DE SIERPINSKI

Per realitzar la següent activitat, utilitzarem el software *Affine Transformation Calculator*.

En la següent figura hi ha quatre fractals de la família Sierpinski, que generarem. Tenint en compte que s'han de fer rotacions de 90 graus i reflexions. I que els colors faciliten la visualització de les diferents afinitats.



1) Dendrita

Scenarios Print Help CourseWare Affine

Edit source and target points here, then click "Go" to find the transform that maps source to target.

Source Points		
	x	y
●	0	0
●	1	0
●	0	1

Target Points		
	u	v
●	1	0.5
●	1	0
●	0.5	0.5

Go

Source and Target Points

Affine transform result:

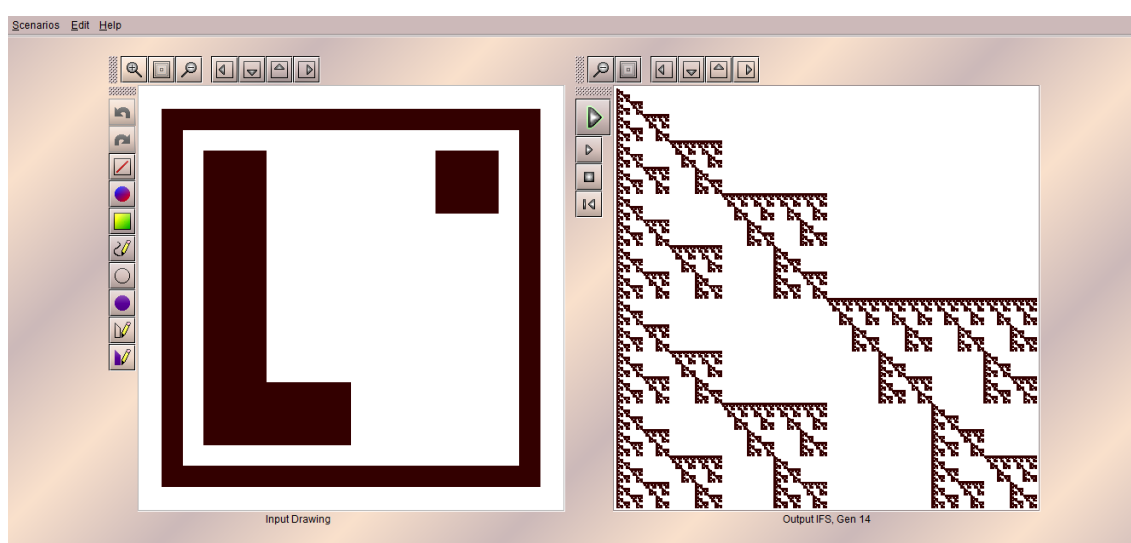
r	s	theta	phi	e	f
-0.5	0.5	90	90	1	0.5

by Michael Frame and Ginger Booth, Copyright (c) 2004 Yale University

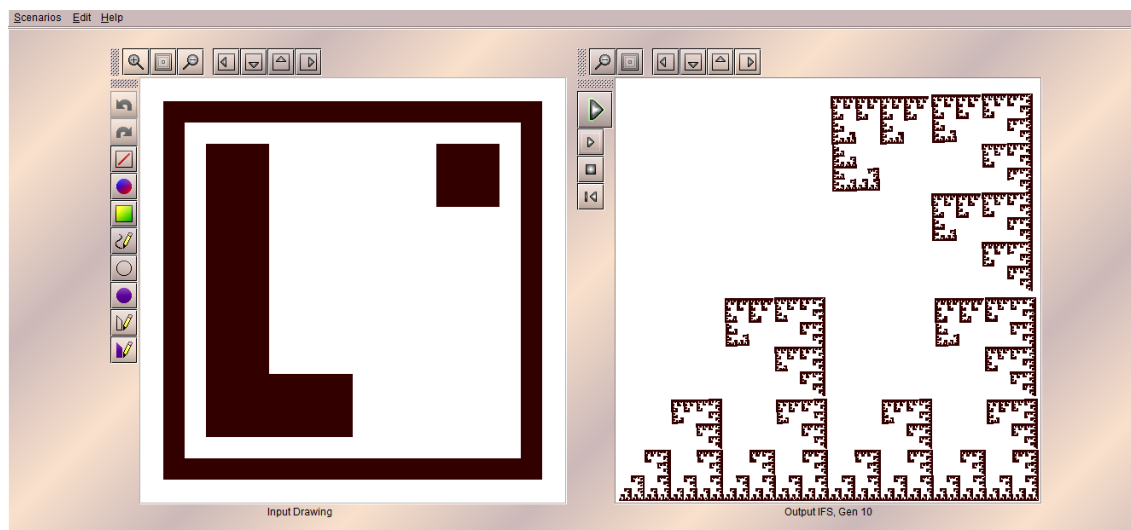
Per tant, la taula de les afinitats de la dendrita serà:

Affine Transforms						
Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,5	0,5	0	0	0	0
2	-0,5	0,5	90	90	1	0,5
3	0,5	0,5	0	0	0	0,5
4						
5						
6						
7						

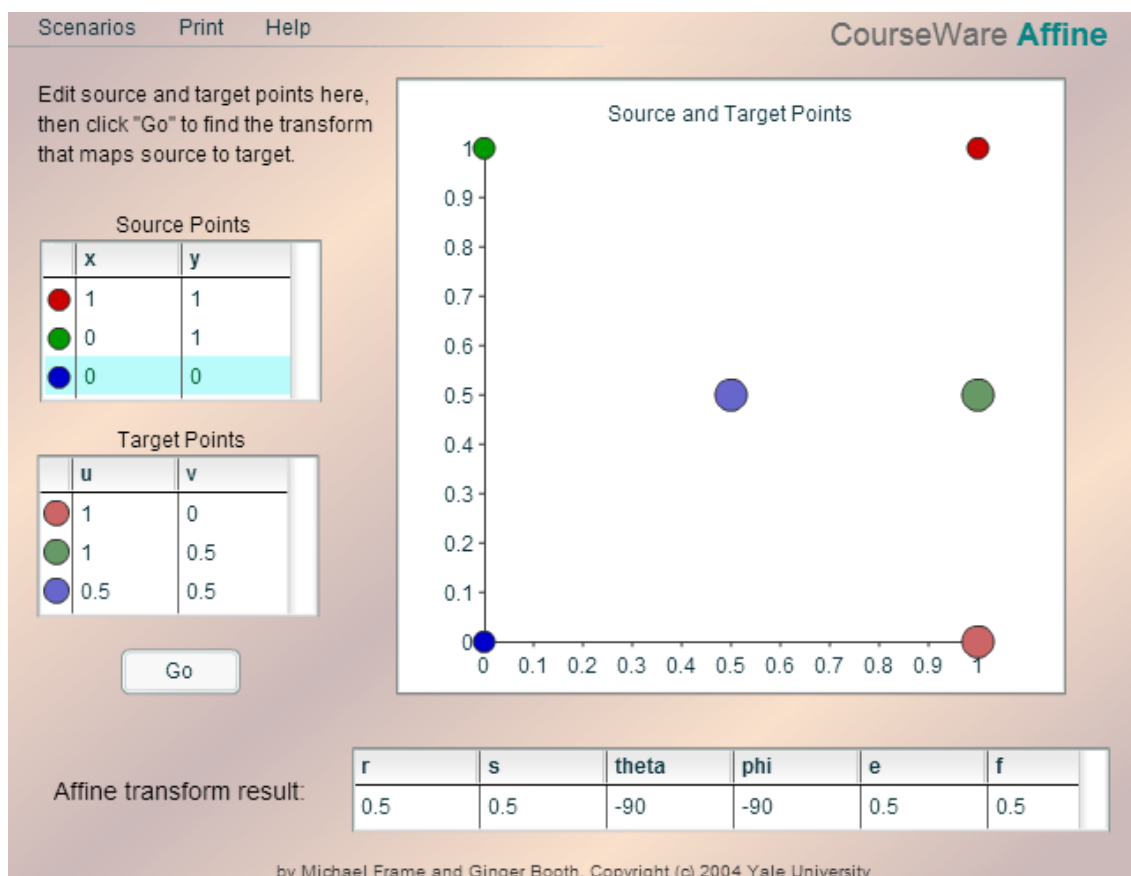
OK Cancel



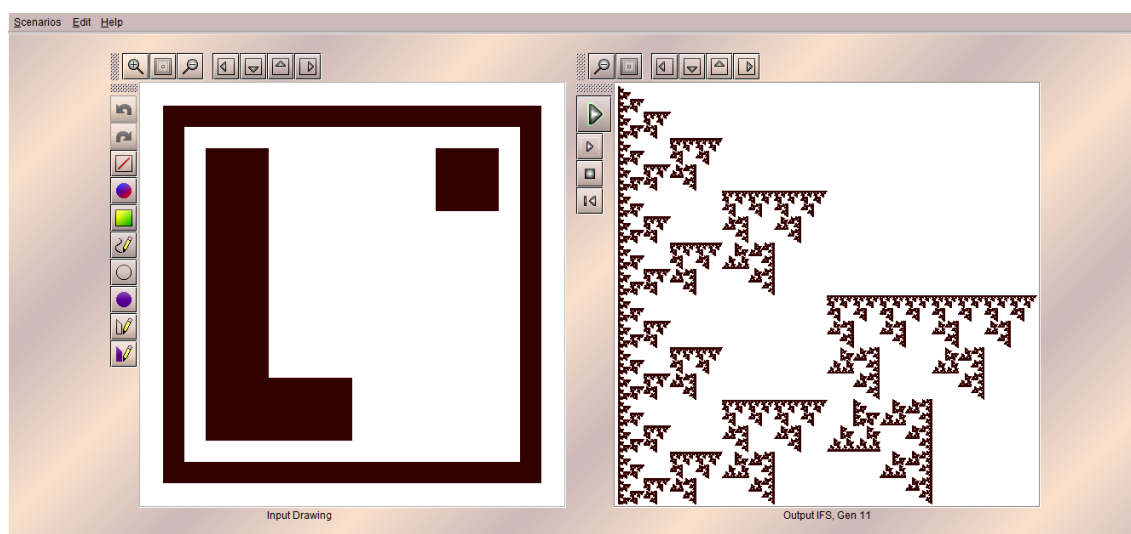
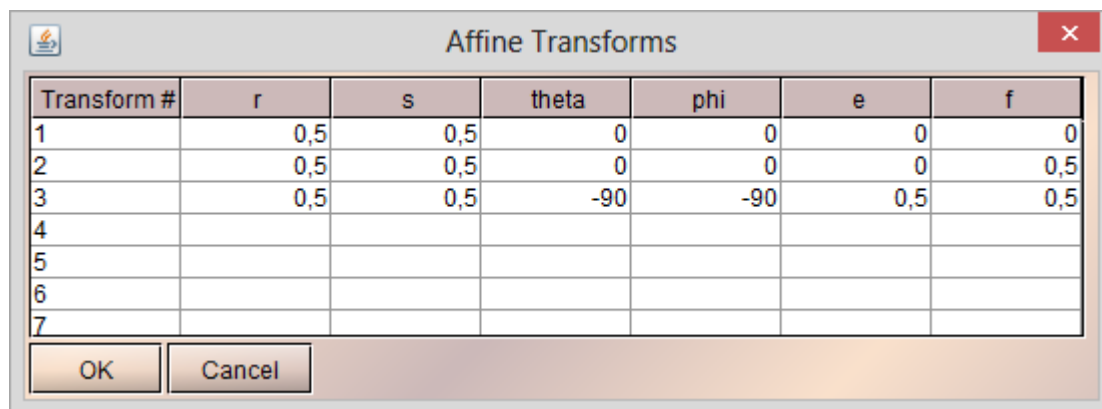
2) Cantorià



3) Fractal múltiplement connex



Per tant, la taula de les afinitats del fractal múltiplement connex serà:



4) Fractal híbridç

Scenarios Print Help CourseWare **Affine**

Edit source and target points here, then click "Go" to find the transform that maps source to target.

Source Points

	x	y
●	0	0
●	0	1
●	0.5	0

Target Points

	u	v
●	0.5	1
●	0	1
●	0.5	0.75

Go

Source and Target Points

Affine transform result:

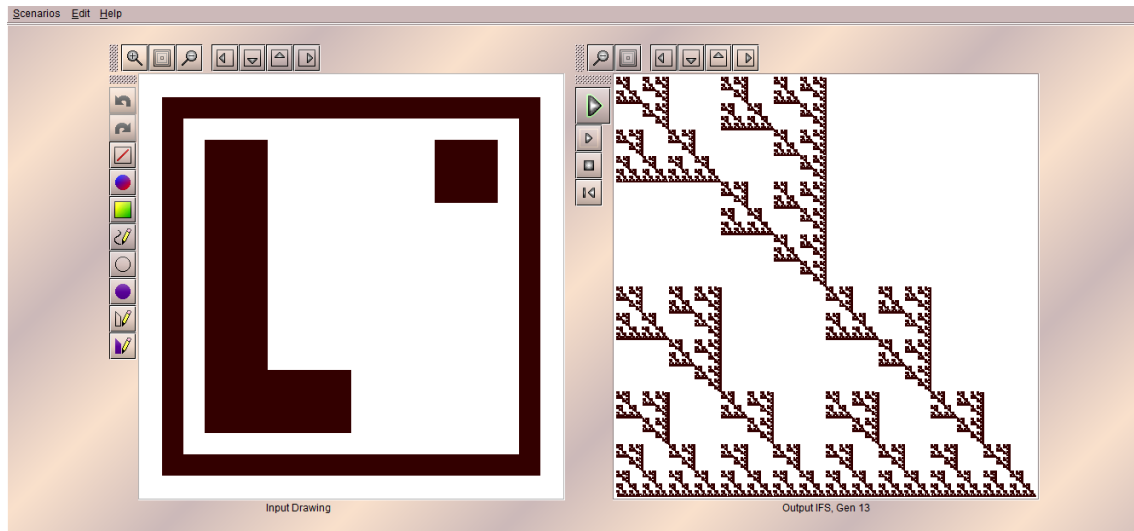
r	s	theta	phi	e	f
-0.5	0.5	90	90	0.5	1

by Michael Frame and Ginger Booth, Copyright (c) 2004 Yale University

Per tant, la taula d'afinitats del fractal híbrid:

Transform #	r	s	theta	phi	e	f
1	0,5	0,5	0	0	0	0
2	0,5	0,5	0	0	0,5	0
3	-0,5	0,5	90	90	0,5	1
4						
5						
6						
7						

OK Cancel



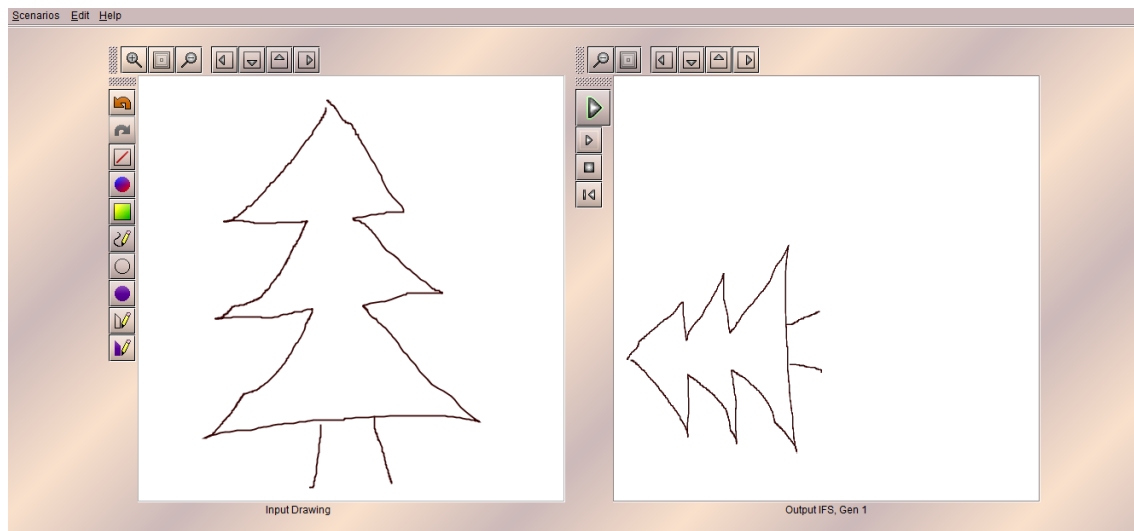
ACTIVITAT 4. AFINITATS

Per fer aquesta activitat utilitzem el software *Affine Transformation Calculator*.

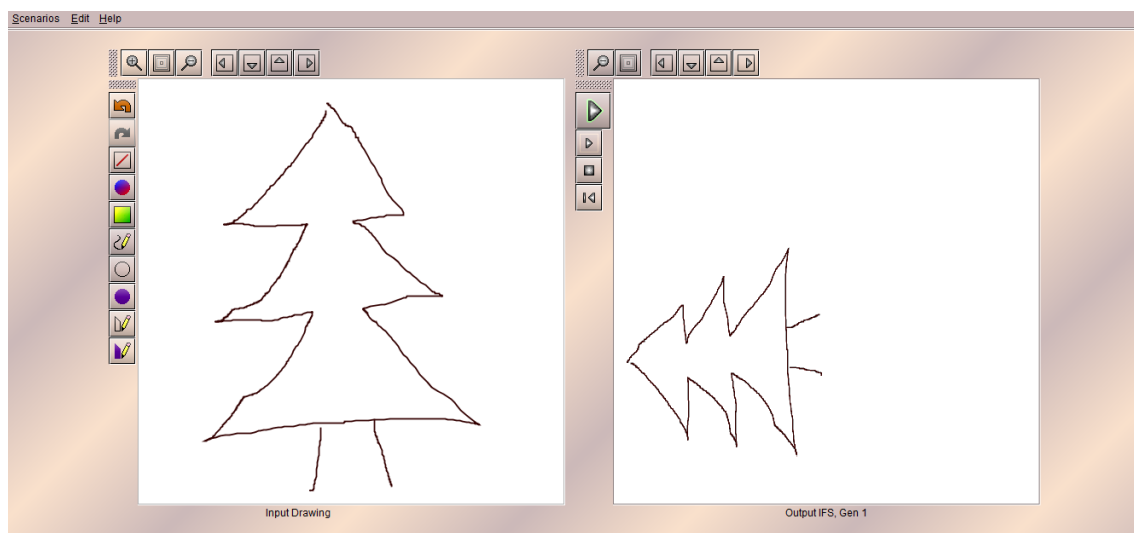
On podem observar diferents característiques:

- Obtenim una reflexió tant per part de l'eix x com de l'eix y, és a dir, una simetria central quan $r = s = -1$.
- Una rotació rígida de 180 graus ($\theta = \varphi = 180$) correspon a una reflexió per part de l'eix x i de l'eix y, és a dir, una simetria central.
- L'afinitat A corresponent a $r = 0.75$, $s = -0.5$, $\theta = 90$, $\varphi = -90$, $e = 0.5$, $f = 0$, també és solució de l'afinitat B que correspon a $r = 0.75$, $s = 0.5$, $\theta = 90$, $\varphi = 90$, $e = 0.5$, $f = 0$.

Afinitat A: $r = 0.75$, $s = 0.5$, $\theta = 90$, $\varphi = 90$, $e = 0.5$, $f = 0$



Afinitat B: $r = 0.75$, $s = -0.5$, $\theta = 90$, $\varphi = -90$, $e = 0.5$, $f = 0$



Els resultats són els mateixos ja que: en el cas A, a causa de la rotació de les verticals ($\varphi = 90$) i de les horitzontals ($\theta = 90$) es produeix una rotació rígida. En el cas B, al ser r negatiu i s positiu es produeix una reflexió respecte el eix x i amb la $\varphi = -90$ es produeix una rotació de 90 en les rectes de l'eix x .

5. EL JOC DEL CAOS

El joc del caos consisteix en un algoritme aleatori. Per poder-lo dur a terme, hem de triar tres punts que siguin els vèrtexs d'un triangle qualsevol. Aleshores, a partir d'un punt inicial qualsevol col·locat al mig del triangle escollirem un dels vèrtexs i a la meitat de la distància entre el punt i el vèrtex hi farem un punt. Seguidament, tornarem a escollir un altre vèrtex i a partir del punt resultant

tornarem a col·locar un altre punt a la meitat de la distància. Aquest procediment s'ha de repetir molts de cops. El resultat és un fractal, en concret el triangle de Sierpinski. Per assegurar-nos de millorar el resultat es poden esborrar els primers punts que segurament quedaran fora del triangle de Sierpinski.

Aquest joc es pot realitzar a mà o bé amb algun aplicatiu que es pot trobar fàcilment per internet.

Jo amb l'ajuda del programador RStudio²³, intentaré programar el joc del caos per tal que em resulti el triangle de Sierpinski.

5.1 PROGRAMACIÓ DEL JOC DEL CAOS

Un cop descarregat el programador RStudio, vaig intentar informant-me amb l'ajuda de terceres persones com poder programar-lo.

En el cas del triangle de Sierpinski, la funció rep com a arguments dos punts *inicial* i *final*, i en retorna un altre aplicant la contracció de factor *r*. És a dir, la funció haurà de ser:

```
midpoint = function (inicial,final) {  
  inicial + (final-inicial) * r  
}
```

Seguidament, marquem en coordenades els vèrtexs de la figura. En aquest cas els d'un triangle equilàter, tot i que podria ser una figura irregular. I també creem una llista per quan es creïn els nombres aleatoris saber a quin vèrtex dirigir-se.

```
v1 = c(0,0)  
v2 = c(0.5,sin(pi/3))  
v3 = c(1,0)  
v = list(v1,v2,v3)
```

Per saber on comença, hem d'indicar un punt aleatori qualsevol, jo elegeixo el:
`p = c(0.1,0.1)`, indicant que: `x = rep(NA,20)` és un vector de dimensió

²³ Aquest programa, RStudio es pot descarregar gratuïtament i sense cap problema per internet.

indefinida que anirà acumulant les primeres components dels punts de l'òrbita. Llavors, $y = x$ guardarà les segones components dels punts de l'òrbita.

Seguidament, indiquem el número de bucles que realitzarà, per obtenir una imatge més rigorosa s'escull un número força gran. També s'origina un número aleatori (referent d'un vèrtex), del qual a mitja distància (en el cas de r sigui $\frac{1}{2}$) del vèrtex al punt anterior, s'hi marca un altre punt. La funció *sample* ($x:y,1$) retorna un nombre aleatori enter comprès en el rang $[x,y]$.

```
for (i in 1:50000) {

k = sample (1:3,1)
p = midpoint(p,v[[k]])

x[i]=p[1]
y[i]=p[2]
}
```

Per acabar i optimitzar el resultat, eliminem els primers 1000 punts.

```
xx = x[1001:50000]
yy = y[1001:50000]
```

La següent funció és la que dibuixa els punts en el pla agafant les primeres coordenades de xx i les segones coordenades de yy .

```
plot(xx,yy,cex=0.1)
```

Programació del joc del caos en un triangle.

Finalment em va resultar aquest codi:

```
# Funció ----
midpoint = function (inicial,final) {
inicial + (final-inicial) * 0.5
}

# Defineixo vèrtexs
v1 = c(0,0)
```

```
v2 = c(0.5,sin(pi/3))
v3 = c(1,0)
v = list(v1,v2,v3)

# Llavor Iteració
p = c(0.1,0.1)
x = rep(NA,20)
y = x

# Iterant
for (i in 1:50000) {

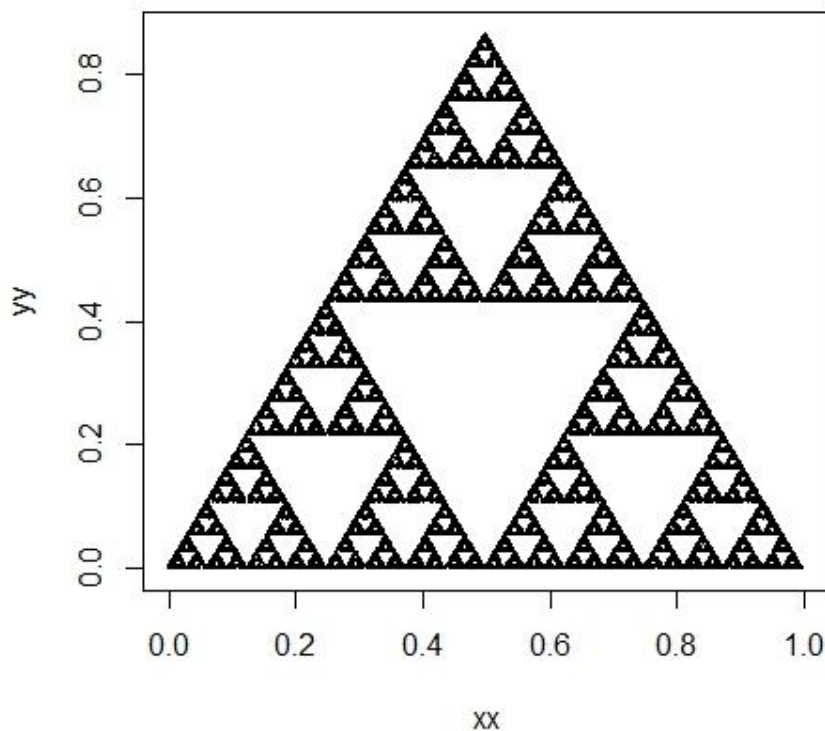
# Genero Número Aleatori entre 1 i 3
k = sample (1:3,1)
p = midpoint(p,v[[k]])

x[i]=p[1]
y[i]=p[2]
}

# Abolició dels primers 1000 punts
xx = x[1001:50000]
yy = y[1001:50000]

plot(xx,yy,cex=0.1)
```

Tal i com estava previs l'execució del codi em resulta un fractal, concretament el triangle de Sierpinski:



Seguidament, em va sorgir dues qüestions:

- 1) Què passaria si en comptes d'aplicar-ho en un triangle, s'apliqués en altres figures geomètriques regulars com en un quadrat, pentàgon o hexàgon?
- 2) Què passaria si el factor de contracció, r , fos qualsevol altre número?

5.1.1. El joc del caos en altres figures geomètriques regulars.

La meua hipòtesis és que a l'aplicar el joc del caos en un quadrat, pentàgon i hexàgon regular encara que canviem de figures continuarà resultant un fractal.

Per comprovar-ho, programaré la funció i l'executaré amb el programa RStudio en figures geomètriques regulars per tal d'establir un paràmetre.

Programació del joc del caos en un quadrat.

Aplicant-hi aquest codi:

```
# Funció ----
midpoint = function (inicial,final) {
```

```
inicial + (final-inicial) * 2/3
}

# Defineixo Vèrtexs
v1 = c(0,0)
v2 = c(0,1)
v3 = c(1,0)
v4 = c(1,1)
v = list(v1,v2,v3,v4)

# Llavor Iteració
p = c(0.1,0.1)
x = rep(NA,20)
y = x

# Iterant
for (i in 1:50000) {

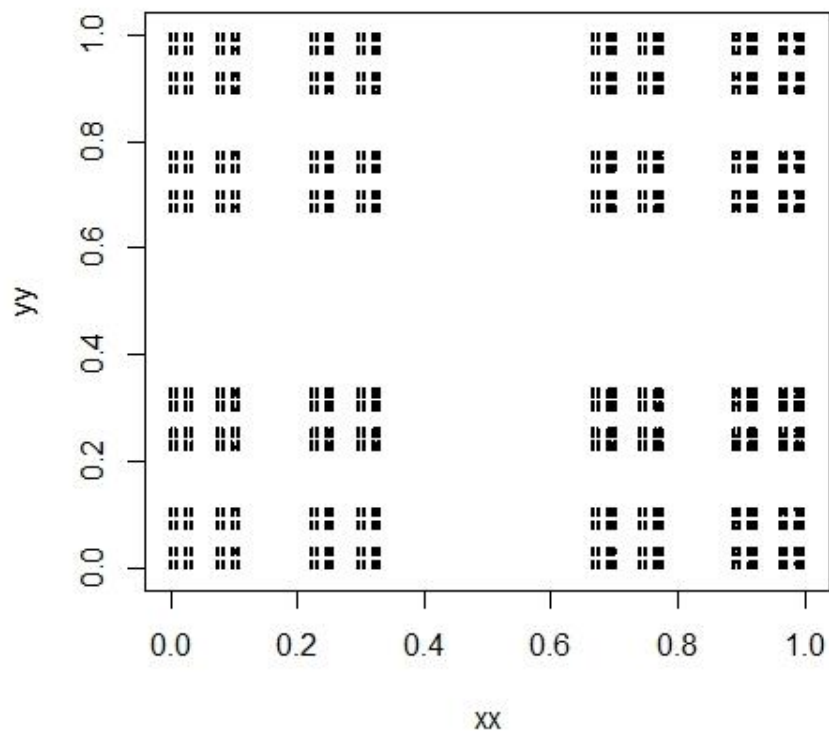
# Genero Número Aleatori entre 1 i 4
k = sample (1:4,1)
p = midpoint(p,v[[k]])

x[i]=p[1]
y[i]=p[2]
}

# Abolició dels primers 1000 punts
xx = x[1001:50000]
yy = y[1001:50000]

plot(xx,yy,cex=0.1)
```

M'ha resultat la figura següent, que resulta ser un fractal.



Programació del joc del caos en un pentàgon regular.

Aplicant-hi aquest codi:

```
# Funció ----
midpoint = function (inicial,final) {
  inicial + (final-inicial) * 2/3
}

# Defineixo vèrtexs
v1 = c(0.5,1)
v2 = c(1,(1-(0.5*tan(pi/5))))
v3 = c(((1-(1-(0.5*tan(pi/5)))/tan(2*pi/5))),0)
v4 = c(((1-(0.5*tan(pi/5)))/tan(2*pi/5)),0)
v5 = c(0, (1-(0.5*tan(pi/5))))
v = list(v1,v2,v3,v4,v5)

# Llabor Iteració
p = c(0.1,0.1)
x = rep(NA,20)
y = x

# Iterant
for (i in 1:50000) {
```

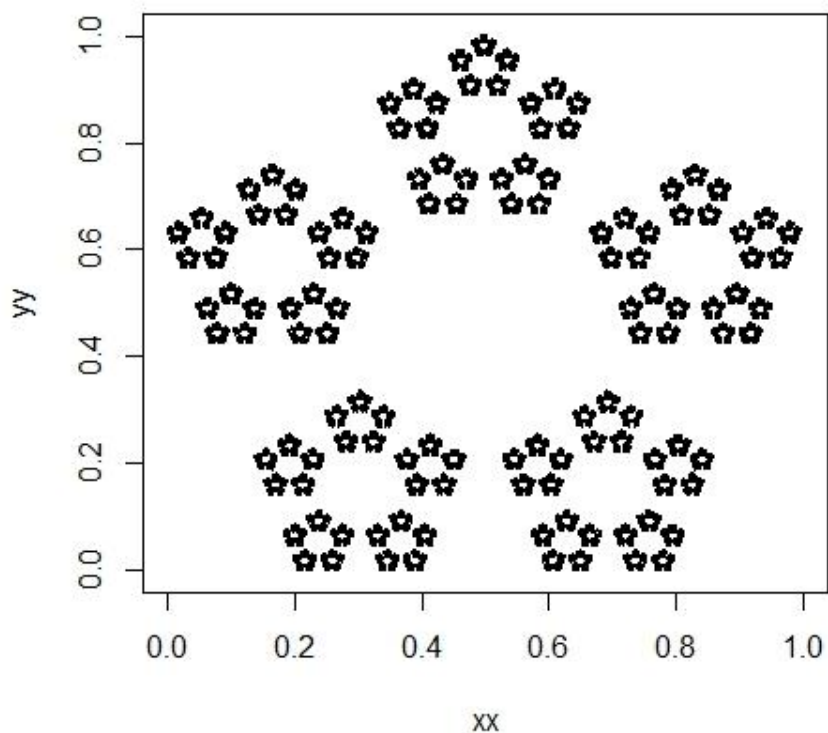
```
# Genero Número Aleatori entre 1 i 5
k = sample (1:5,1)
p = midpoint(p,v[[k]])

x[i]=p[1]
y[i]=p[2]
}

# Abolició dels primers 1000 punts
xx = x[1001:50000]
yy = y[1001:50000]

plot(xx,yy,cex=0.1)
```

M'ha resultat aquest altre fractal:



Programació del joc del caos en un hexàgon regular.

Aplicant-hi aquest codi:

```
# Funció ----
midpoint = function (inicial,final) {
inicial + (final-inicial) * 2/3
}
```



```
# Defineixo Vèrtexs
v1 = c(0,tan(60)*0.25)
v2 = c(0.25,2*tan(60)*0.25)
v3 = c(0.75,2*tan(60)*0.25)
v4 = c(1,tan(60)*0.25)
v5 = c(0.75,0)
v6 = c(0.25,0)
v = list(v1,v2,v3,v4,v5,v6)

# Llavor Iteració
p = c(0.1,0.1)
x = rep(NA,20)
y = x

# Iterant
for (i in 1:50000) {

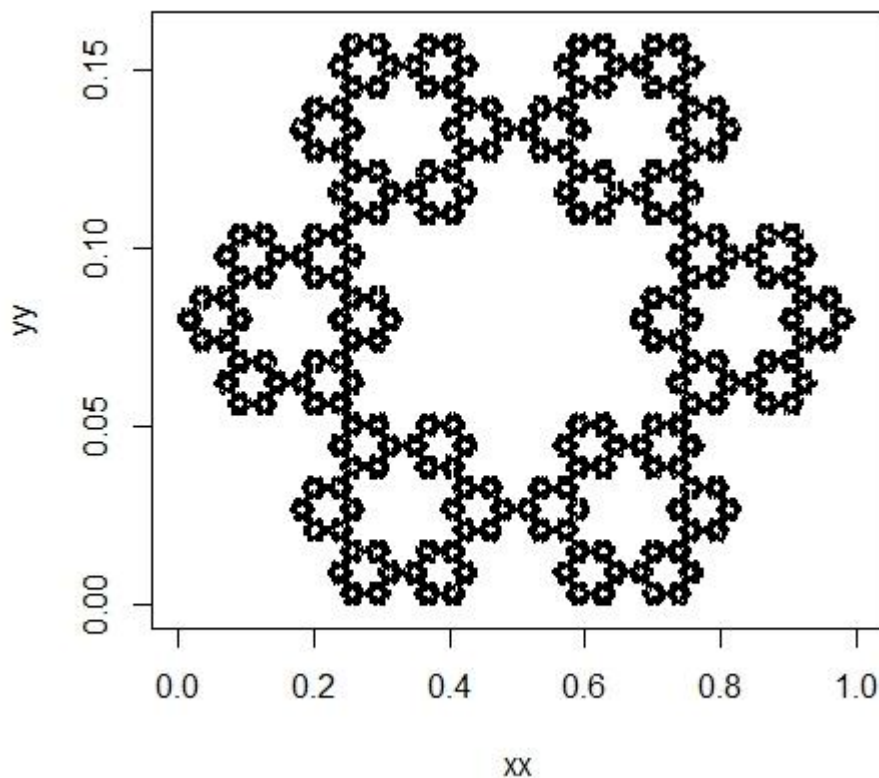
# Genero Número Aleatori entre 1 i 6
k = sample (1:6,1)
p = midpoint(p,v[[k]])

x[i]=p[1]
y[i]=p[2]
}

# Abolició dels primers 1000 punts
xx = x[1001:50000]
yy = y[1001:50000]

plot(xx,yy,cex=0.1)
```

M'ha resultat aquest altre fractal:



5.1.2. El joc del caos en diferents figures geomètriques canviant el factor de contracció, r .

La meua hipòtesis és que a l'aplicar el joc del caos canviant els valors de r en un quadrat, pentàgon o hexàgon regular, només hi haurà un valor de r pel qual es formarà un fractal clarament identificat. Degut a que al principi i al final seran punts sense gaire sentit.

Per comprovar-ho crearem un codi, pel qual puguem veure la successió dels diferents valors de r . En aquesta pràctica anirà variant de 0 a 1, és a dir, formarà una homotècia contractiva.

Aquest cop, la funció tindrà 3 arguments que seran els dos punts *inicial* i *final*, i un valor r . La funció rebrà dos punts *inicial* i *final*, i en retorna a un altre aplicant la contracció de factor r .

```
# Funció ----
midpoint = function (inicial,final,r) {
  inicial + (final-inicial) * r
}
```

Tot seguit, marquem en coordenades el vèrtexs de les figures. En el primer cas, el del triangle, quedaria exactament com abans ja que els vèrtexs no varien.

```
# Defineixo vèrtexs
v1 = c(0,0)
v2 = c(0.5,sin(pi/3))
v3 = c(1,0)
v = list(v1,v2,v3)
```

Igual que abans, aquesta part del codi no variarà. S'indica un punt aleatori qualsevol, un altre cop: $p = c(0.1,0.1)$, i llavors trobem que els vectors de dimensió indefinida aniran acumulant les primeres components dels punt de l'òrbita: $x = rep(NA,20)$, i les segones components de l'òrbita a: $y = x$.

Seguidament, s'han de crear la successió d'imatges per diferents valors de r entre 0 i 1. Aquesta funció englobarà a tot el codi que venia a continuació, és a dir:

```
for (r in 1:100) {
  for (i in 1:20000) {

    k = sample (1:3,1)
    p = midpoint(p,v[[k]],r/100);

    x[i]=p[1]
    y[i]=p[2]
  }

  xx = x[1001:20000]
  yy = y[1001:20000]

  plot(xx,yy,cex=0.1)
}
```

Després de posar-hi tota l'operació es tanca el claudàtor. Com podem veure a la funció: $p = \text{midpoint}(p, v[[k]], r/100)$, només hi hem afegit el valor de r que dividim entre 100. Ja que així queda reduït entre 0 i 1. I també hem reduït el nombre de punts a 20000, per tal que no es saturi ni l'ordinador ni el programa.

Codi de la seqüència del joc del caos en un triangle.

```
# Funció ----
midpoint = function (inicial,final,r) {
  inicial + (final-inicial) * r
}

# Defineixo vèrtexs
v1 = c(0,0)
v2 = c(0.5,sin(pi/3))
v3 = c(1,0)
v = list(v1,v2,v3)

# Llavor Iteració
p = c(0.1,0.1)
x = rep(NA,20)
y = x

# Iterant
for (r in 1:100) {
  for (i in 1:20000) {

# Genero Número Aleatori entre 1 i 3
k = sample (1:3,1)
p = midpoint(p,v[[k]],r/100)

x[i]=p[1]
y[i]=p[2]
}

# Abolició dels primers 1000 punts
xx = x[1001:20000]
yy = y[1001:20000]

plot(xx,yy,cex=0.1)
}
```

Codi de la seqüència del joc del caos en un quadrat.

```

# Funció ----
midpoint = function (inicial,final,r) {
  inicial + (final-inicial) * r
}

# Defineixo Vèrtexs
v1 = c(0,0)
v2 = c(0,1)
v3 = c(1,0)
v4 = c(1,1)
v = list(v1,v2,v3,v4)

# Llavor Iteració
p = c(0.1,0.1)
x = rep(NA,20)
y = x

# Iterant
for (r in 1:100) {
  for (i in 1:20000) {

# Genero Número Aleatori entre 1 i 4
k = sample (1:4,1)
p = midpoint(p,v[[k]],r/100)

x[i]=p[1]
y[i]=p[2]
}

# Abolició dels primers 1000 punts
xx = x[1001:20000]
yy = y[1001:20000]

plot(xx,yy,cex=0.1)
}

```

Codi de la seqüència del joc del caos en un pentàgon.

```

# Funció ----
midpoint = function (inicial,final,r) {
  inicial + (final-inicial) * r
}

```

```

# Defineixo Vèrtexs
v1 = c(0.5,1)
v2 = c(1,(1-(0.5*tan(pi/5))))
v3 = c(((1-(1-(0.5*tan(pi/5)))/tan(2*pi/5))),0)
v4 = c(((1-(0.5*tan(pi/5)))/tan(2*pi/5)),0)
v5 = c(0, (1-(0.5*tan(pi/5))))
v = list(v1,v2,v3,v4,v5)

# Llavor Iteració
p = c(0.1,0.1)
x = rep(NA,20)
y = x

# Iterant
for (r in 1:100) {
  for (i in 1:20000) {

# Genero Número Aleatori entre 1 i 5
k = sample (1:5,1)
p = midpoint(p,v[[k]] ,r/100)

x[i]=p[1]
y[i]=p[2]
}

# Abolició dels primers 1000 punts
xx = x[1001:20000]
yy = y[1001:20000]

plot(xx,yy,cex=0.1)
}

```

Codi de la seqüència del joc del caos en un hexàgon.

```

# Funció ----
midpoint = function (inicial,final,r) {
  inicial + (final-inicial) * r
}

# Defineixo Vèrtexs
v1 = c(0,tan(60)*0.25)
v2 = c(0.25,2*tan(60)*0.25)
v3 = c(0.75,2*tan(60)*0.25)

```

```
v4 = c(1,tan(60)*0.25)
v5 = c(0.75,0)
v6 = c(0.25,0)
v = list(v1,v2,v3,v4,v5,v6)

# Llavor Iteració
p = c(0.1,0.1)
x = rep(NA,20)
y = x

# Iterant
for (r in 1:100) {
  for (i in 1:20000) {

# Genero Número Aleatori entre 1 i 6
k = sample (1:6,1)
p = midpoint(p,v[[k]],r/100)

x[i]=p[1]
y[i]=p[2]
}

# Abolició dels primers 1000 punts
xx = x[1001:20000]
yy = y[1001:20000]

plot(xx,yy,cex=0.1)
}
```

Els resultats de tots aquests codis queden recopilats en quatre vídeos gravats en un disc.

CONCLUSIÓ

Un cop més, després d'haver realitzat aquest treball, les matemàtiques m'han tornat a sorprendre. He pogut conèixer un dels camps més desconeguts de les matemàtiques. Els fractals doncs, a grans trets, són formes geomètriques peculiars que presenten unes propietats característiques: rugositat, semblança i dimensió no entera. Tot i ser objectes tant peculiars es troben molt presents al nostre entorn tant en la matèria viva com en la inerta, des dels arbres fins les muntanyes, i permeten modelitzar tots tipus de fenòmens, des dels més artístics fins als més científics.

Referent als resultats pràctics obtinguts, he après a generar fractals IFS, he conegut el que eren les afinitats i he pogut comprovar el que les seves variacions aporten al fractal. Tot i així, he tingut diversos problemes amb algunes de les activitats ja que no les he pogut resoldre com calia. Com en l'activitat 2 que m'han donat fractals amb petites variacions als que m'havien de donar, o bé, en l'activitat 3 només he aconseguit el primer fractal.

Les hipòtesis que m'he plantejat a mesura que he anat realitzant el treball han estat verificades tal i com m'havia plantejat:

A) Si s'aplica el joc del caos en qualsevol figura geomètrica regular es formarà un fractal sempre que apliquem una homotècia contractiva, és a dir, que el valor de r sigui un nombre enter entre 0 i 1.

B) Si variem el factor de contracció, r , s'obtenen diferents fractals, però només per un valor de r el fractal és "perfecte".

En conseqüència, sempre es formaran fractals IFS quan s'hi apliqui una homotècia contractiva, sigui quin sigui el seu iniciador (ja pot ser una figura regular o irregular). Aquest fet és el que anomenem teorema del Collage²⁴.

M'ha semblat un tema molt interessant, no m'ha decebut sinó tot el contrari, m'ha deixat admirada per la seva complexitat. Perquè he pogut comprovar que tots els elements concrets, aquells que podem veure i manipular, tenen relació amb les matemàtiques. Ja sigui per la forma, la formació, la dimensió, etc. Fins i tot aquells que creia que no tenien cap relació ni semblança, com els elements de la natura.

²⁴ Posteriorment s'explicarà a l'Annex B

M'ha agradat molt poder-lo haver realitzat tant detingudament perquè així he après no solament sobre els fractals sinó que també he pogut aprendre a fer un treball de recerca. Finalment, només dir que ha estat una experiència molt positiva i la realització d'aquest treball m'ha fet més gran la porta de continuar seguint estudiant matemàtiques.

BIBLIOGRAFIA

“La courbe de Peano.” *Fractales Tangente*. 18: 25.

Binimelis, Maria Isabel. *Una nueva manera de ver el mundo: La geometría fractal*. 1a ed. El mundo es matemático. RBA, 2010.

Busser, Élisabeth. “Une idée qui a fait son chemin: les fractales.” *Fractales Tangente*. 18: 6-9.

Octavia, Gaël. “Fractales en bourse.” *Fractales Tangente*. 18: 90.

WEBGRAFIA

Música fractal. Abraham Felpeto. 2010. Slideshare. 26 agost 2013.

<http://www.slideshare.net/abrahamfelpeto/grupo-9-msica-fractal>

Todo es liso en la vida. Eduard Punset. 2008. 14 setembre 2013.

<http://www.eduardpunset.es/425/charlas-con/no-todo-es-liso-en-la-vida>

Les fractals. Geoffrey Bruno et Loic Devilliers. 14 setembre 2013.

<http://geoffreyhistoire.pagesperso-orange.fr/fractales/fractales.html>

Fractals. 1999. Wolfram MathWorld. 4 abril 2013.

<http://mathworld.wolfram.com/topics/Fractals.html>

53. *Fractals*. Robert. 2012. 23 març 2013.

http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/es/maxima_53.html

Fractales. Angelfire. 24 març 2013.

<http://www.angelfire.com/hi/8acasita/INTERESES/fractales.htm>

Fractales para crear naturaleza por ordenador. 2010. Pensador computable. 28 desembre 2012.

<http://www.pensamientoscomputables.com/entrada/fractal/naturaleza/Mandelbrot/conjunto-de-Mandelbrot>

Mandelbrot Fractal Set Trip To e214 HD. Teamfresh. 2009. Vimeo. 16 febrer 2013. <http://vimeo.com/1908224>

Neurocienciacultura. 4 abril 2013

<http://pacotraver.wordpress.com/category/fractales/>

Fractales. Matematicas. 2008. Blogspot. 23 desembre 2012.

<http://matesdiscretas.blogspot.com.es/2008/05/temas.html>

Kenneth Falconer, University of St Andrews. 20 juny 2013. <http://www.mcs.st-and.ac.uk/~kenneth/>

El arte y los fractales: Arte fractal. Rodrigo Amaya. 2008. Sr. Byte Artículos de opinión sobre tecnología, programación e informática en general. 14 agost 2013. <http://www.srbyte.com/2008/12/el-arte-y-los-fractales-arte-fractal.html>

Fractales en la red. Bartolo Luque i Aida Egea. 2 maig 2013.

<http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo7/5.html>

Robots, videojuegos y fractales. 2012. Geometria dinàmica. 14 agost 2013.

<http://www.geometriadinamica.cl/2012/12/robots-videojuegos-y-fractales/>

Fractales. ReDEI. 12 desembre 2012. <http://www.biografica.info/redei/fractales-18.php?split=0>

Fractales. Arantza Marichalar. 23 març 2013.

http://www.upf.edu/pdi/dcom/xavierberenguer/recursos/ima_dig/_5_/estampes/_7.htm

Los fractales. 1997. Astronoo. 4 abril 2013.

<http://www.astronoo.com/es/articulos/fractal.html>

Cuestión de dimensiones. Cuentos Cuánticos 2013. Cuentos Cuánticos. 4 abril 2013. <http://cuentos-cuanticos.com/2013/03/05/fractales-cuestion-de-dimensiones/>

The Mesmerizing Beauty of Nature's Fractals. Megan Garber. 2012. The Atlantic. 4 abril 2013.

<http://www.theatlantic.com/technology/archive/2012/09/the-mesmerizing-beauty-of-natures-fractals/262077/>

Los fractales en la naturaleza. Telnet, Redes Inteligentes. 4 abril 2013.

<http://www.telnet-ri.es/soluciones/infraestructura-y-redes-moviles-gsm3g/fractales-en-la-naturaleza/>

La Buhardilla 2.0 Programa 58: Fractales e Ignobels. Admin. 2012. La Buhardilla 2.0 un podcast de ciència. 22 de desembre 2012.

<http://www.buhardillapodcast.com/la-buhardilla-2-0-pograma-58-fractales-e-ignobels/>

Árbol de Pitàgoras. Wikipedia. 14 agost 2013.

http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81rbol_de_Pit%C3%A1goras

A Java Applet to Compute Fractal Dimensions. 27 juny 2013.

<http://www.stevec.org/fracdim/>

Mandelbrot y la belleza del caos. Max Seitz. 2005. BBC Mundo.com. 6 setembre 2013
http://news.bbc.co.uk/hi/spanish/science/newsid_4164000/4164603.stm

RStudio IDE. RStudio. 12 setembre 2013. <http://www.rstudio.com/ide/download/>

Apollony Fractal. Paul Bourke. 2003. 22 desembre 2012.
<http://paulbourke.net/fractals/apollony/>

Exploring Fractals. Ginger Booth, Michael Frame i Richard Bedient. 14
novembre 2013. <http://classes.yale.edu/fractals/software/software.html>

La geometría del Universo. Astro. 12 desembre 2013.
http://www.astro.ugto.mx/cursos/astrofisicaII/AstrofisicaII_Parte_II/capitulo_11/cap_11_docs/Subcap_4/geometria_del_universo.htm

Paradis, Emmanuel. R para principiantes. Montpellier: Universit Montellier II.
2003. http://cran.r-project.org/doc/contrib/rdebuts_es.pdf. 6 setembre 2013.

ANNEX A

Per dur a terme les pràctiques he necessitat coneixements pel que fa a les afinitats i als moviments en el pla. Per tal de dur a un iniciador o generador qualsevol (figura inicial) a un atractor (figura final).

I. Afinitats.

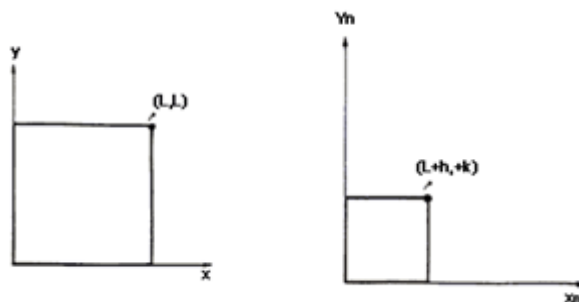
Les afinitats són les aplicacions del pla que utilitzem per generar els fractals. Una afinitat en el pla es pot descriure de la següent forma:

$$u = ax + by + e,$$

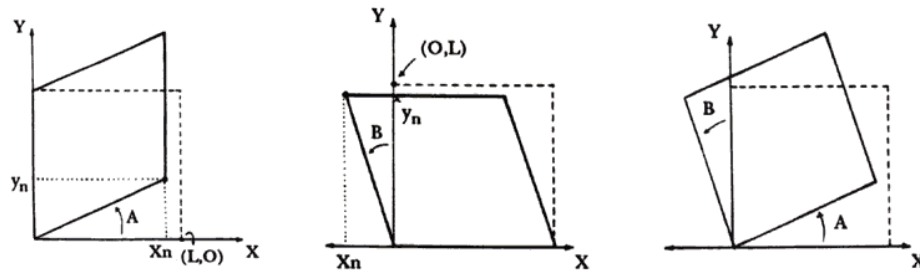
$$v = cx + dy + f,$$

On el punt (x,y) ens diu que va a parar al punt (u, v) i on els coeficients a, b, c, d, e i f determinen l'afinitat, formada pels factors r, s, θ, φ, e i f . Aquests factors es poden classificar segons l'acció que fan.

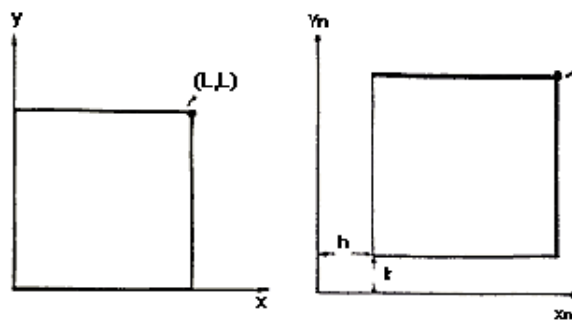
- **Escalament:** està descrit pel factor d'escala r respecte l'eix x i un factor d'escala s respecte l'eix y . De manera que si aquests factors són negatius poden resultar reflexions envers algun eix.



- **Rotació:** està descrit per θ i φ . L'angle θ dona la rotació de les rectes horitzontals i l'angle φ de les rectes verticals. Si aquest angle són iguals obtenim una rotació rígida



- **Translació:** està descrit pel factor e que mesura la translació horitzontal i el factor f mesura la translació vertical.

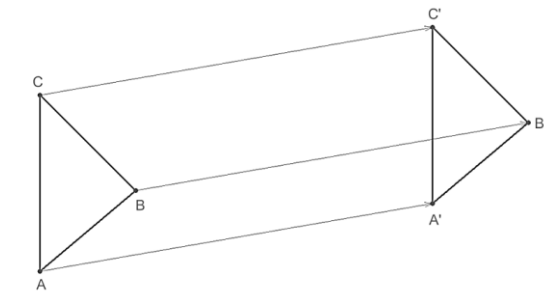


II. Moviments en un pla.

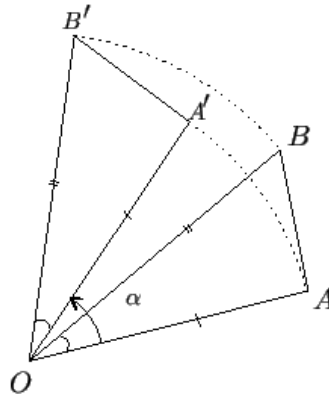
- Isometries

Consisteix en el moviment d'una figura en un pla **que conserva la seva forma i la seva mida**. Depenent de l'orientació direm que és un moviment directe quan es conserva, i si, canvia és un moviment invers. En distingim tres tipus:

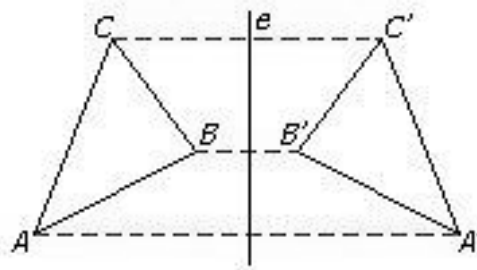
- **Translació:** és un desplaçament determinat per una direcció, sentit i una distància. En el qual cada punt es **desplaça sobre rectes paral·leles** al vector de translació.



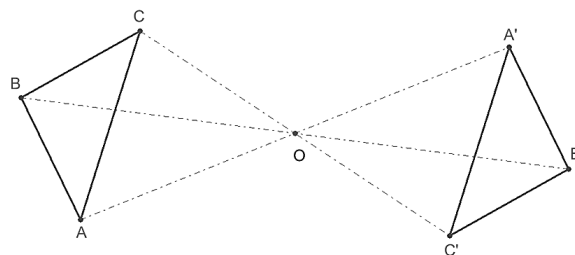
- **Gir:** és un desplaçament determinat per una trajectòria circular. En el qual només **varia l'orientació dels angles**.



- **Simetria:** és un **moviment en el pla respecte un element** de referència.
- **Simetria axial:** quan l'**element de referència és una recta** (eix de simetria). La distància respecte l'eix de simetria és el mateix, únicament canvien l'orientació dels angles i l'orientació de la figura. Els segments que uneixen els punts originals dels simètrics són perpendiculars a l'eix.



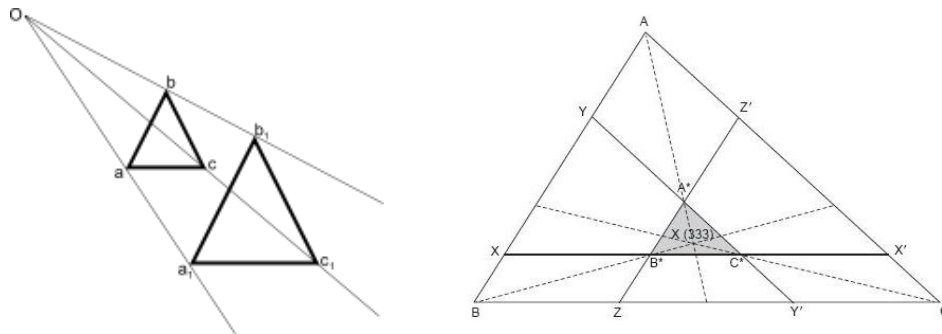
- **Simetria central:** quan l'**element de referència és un punt** (centre de simetria). Les distàncies entre el punt original i el seu simètric són iguals.



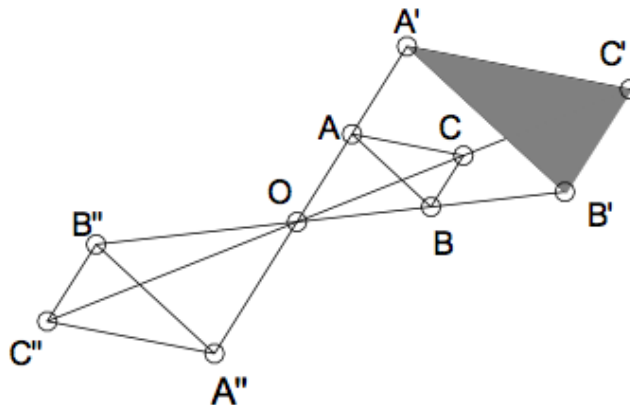
- Homotècia

És una transformació d'una figura en un pla que conserva la forma, però **no en conserva la mida**, i per tant, es creen figures semblants.

- **Homotècia directa:** la figura **conserva l'orientació** de la figura. La figura inicial i la resultant es troben en el **mateix centre** d'homotècia, aquest centre pot ser interior o exterior.



- **Homotècia indirecta:** la figura resultant **no conserva l'orientació** original. Aquestes dos figures estan **separades pel centre** d'homotècia el qual és exterior.



ANNEX B

El teorema del Collage consisteix en una figura del pla a la qual se li aplica una contracció, formant compactes en el pla. Aquests compactes es reorganitzen formant una altra figura en el pla. Llavors, a aquest figura se li torna a aplicar la mateixa contracció. I així, contínuament formant una vegada rere l'altra el mateix triangle.

$T_i : R \rightarrow R^2$ On $i = 1, 2, 3, \dots, N$ contraccions i R significa nombres reals

Funció del collage que hi actua: $T: K(R^2) \rightarrow K(R^2)$

Que actua sobre el conjunt de pactes $T(C) = T_1(C) \cup \dots \cup T_N(C)$

on $T_i(C) = \{T_i(x, y); (x, y) \in C\}$

Per tant, existeix un únic compacte A compleix: $T(A) = A$

Però amb la mètrica de Hausdorf: $K(R^2)$, qualsevol compacte B dona A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(B) = A$$

Aquest teorema s'utilitza per la formació de fractals de IFS.