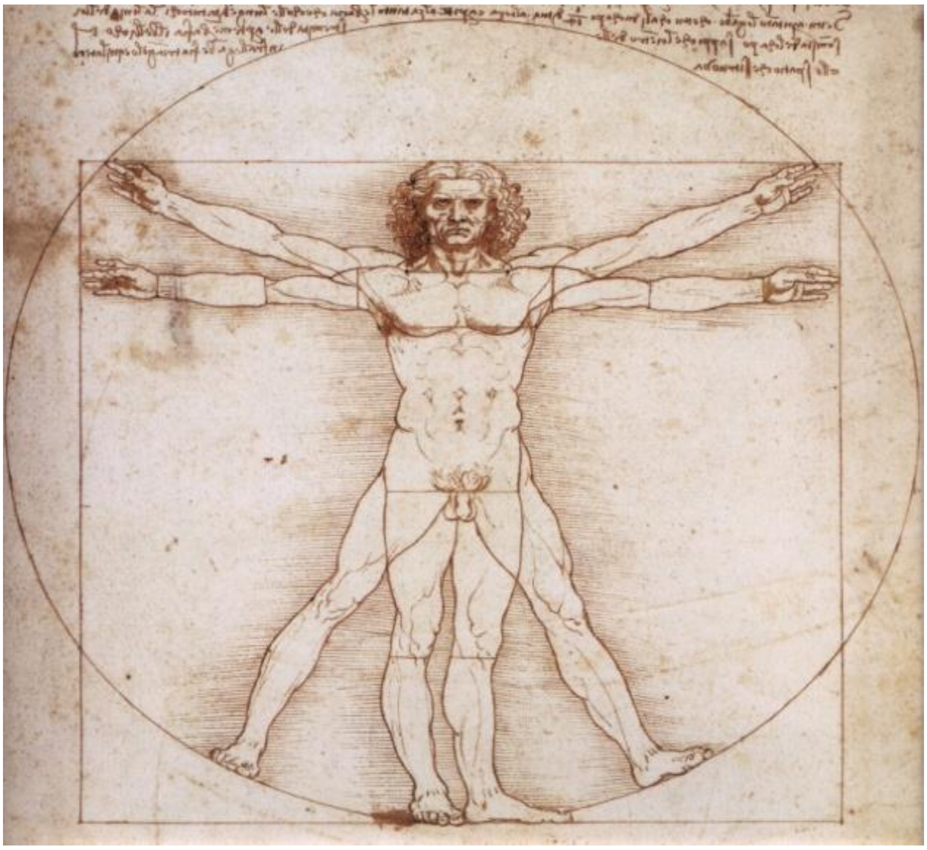
# El nombre d'or $\Phi$




INS Alba del Vallès

2n de Batxillerat

Curs 2011/2012

*“Les matemàtiques són l’alfabet amb el qual Déu ha escrit l’univers.”*

*Galileo Galilei*

*Agraïments a tots els meus amics i familiars per donar-me ànims i per interessar-se per la progressió del meu treball de recerca. Especialment vull donar les gràcies a la meva tutora, que m'ha ajudat el màxim amb les dificultats que m'he anat trobant. També vull donar les gràcies al meu company de classe, que m'ha ajudat a fer funcionar millor el programa informàtic GeoGebra, al meu pare que m'ha ajudat en punts importants d'aquest treball, i a una altra professora de matemàtiques, per deixar-me un dels llibres per llegir en vacances que em va introduir en el tema i també donar les gràcies als alumnes de tercer de l'ESO que van col·laborar en el meu treball.*

# Índex

# 1. Introducció

Fa un parell d'anys, exactament quan estudiava el quart curs de secundària en el primer tema de nombres es treballaven els irracionals. Només coneixia els típics, com el nombre π (pi) o $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ o altres, però van mencionar el nombre Φ (phi), (també anomenat nombre d'or) i el nombre *e* dels que mai abans havia sentit parlar. Em va cridar l'atenció el comentari de la meva professora de matemàtiques quan va dir que el nombre d'or era un bonic tema de treball de recerca, i quan vam portar-nos el full dels temes proposats de cada matèria del treball de recerca, vaig optar per posar-ho com a tercera opció. Certament es tracta d'un nombre totalment desconegut per la majoria de gent i no tots saben totes les propietats interessants d'aquest nombre, però fins i tot segueix sent un nombre misteriós.

El pentàgon regular, el decàgon regular, l'espiral logarítmica, el rectangle auri, la successió de Fibonacci, els quadres de la "*Venus"* de Botticelli, "*L'home de Vitruvi"* i *"Gioconda"*, de Leonardo da Vinci, l'obra *"De Divina Proportione"* de Luca Pacioli, formen part d'un llarg llistat d'exemples meravellosos relacionats amb el nombre d'or des de fa molt de temps. Però amb el pas dels anys, ens adonem que cada vegada descobrim més coses que tenen relació amb el nombre d'or i no han sigut creades per l'home, com per exemple les estrelles de mar, l'espiral de la nostre galàxia la *Via Làctia*, o el propi cos humà (on, com veurem en aquest treball, es troben proporcions perfectes entre la longitud dels peus fins al melic i l'altura).

Dins el treball, ens concentrarem en estudiar i tractar el nombre d'or, algunes de les seves propietats matemàtiques i les seves aplicacions (l'espiral logarítmica o el rectangle auri), i la seva presència en la vida quotidiana, com per exemple en les mides de les nostres targetes més comunes del moneder, com la targeta del DNI o la targeta sanitària, i en la natura.

Una gran part del treball és la part teòrica amb l'estudi del nombre Φ (el seu valor i com obtenir-ho, l'enunciat d'algunes de les seves propietats,...), el rectangle auri i l'espiral logarítmica.

La part experimental consisteix per una banda en la demostració d'algunes de les propietats del nombre d'or i del rectangle auri, la construcció d'un rectangle auri, i per l'altra, en l'aplicació d'aquest en diferents àmbits. També hem comprovat la perfecció del cos humà segons els renaixentistes italians, que deien que el cos humà era perfecte si en ell trobem el nombre d'or.

18/01/2012. Sant Fost de Campsentelles, Barcelona.

# 2. Objectius

Els objectius del meu treball de recerca, que tracta sobre el nombre d’or, són els següents:

- Trobar informació sobre el nombre d’or.

- Presentar algunes propietats del nombre d’or i demostrar-les.

- Trobar objectes matemàtics relacionats amb el nombre d’or.

- Mostrar on s’observa aquest nombre o altres objectes matemàtics relacionats amb ell en la nostra vida quotidiana i en la natura.

- Comprovar si en el cos humà podem trobar la proporció àurea, com deien els italians del Renaixement.

# 3. El nombre d'or, Φ

## 3.1. Definició de Φ

El nombre d'or també anomenat proporció transcendental, nombre diví o divina proporció és un nombre irracional ([1]) amb un valor aproximat 1'618([2])

Es representa amb la lletra grega Φ (phi) en honor a Fidias, per la construcció del *Partenó* d'Atenes, on té en compte la proporció àuria. Aquesta representació és del principi del segle XX i la va proposar el matemàtic Mark Barr.

Φ és un dels anomenats nombres metàl·lics, que són solucions de l'equació: $x^2 - px - q = 0$ , sent $p$ i $q$ nombres reals. Alguns exemples d'altres nombres metàl·lics, per a q = 1 són:

*p=1,* el nombre d'or, solució de:

$$x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1'6180 \ldots$$

*p=2*, el nombre de plata, solució de:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \rightarrow 1 + \sqrt{2} \cong 2'4142135 \ldots$$

*p=3*, el nombre d'argent, solució de:

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \rightarrow \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \cong 3'302777563 \ldots$$

---

[1] Nombre irracional: és tot aquell nombre real que no és racional, és a dir, que no es pot expressar com una fracció a / b, essent a i b enters, i b diferent de 0. Els nombres irracionals són precisament aquells l'expansió decimal dels quals no s'atura mai, i tampoc no entra mai en un cicle periòdic.

[2] Alguns decimals més del nombre d'or: 1'61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270526...

El nombre d’or va ser una troballa dels grecs de l’època clàssica i la seva història comença en el llibre del matemàtic Euclides *“Elements de Geometria”* escrit al voltant de l’any 300 abans de Crist. L’obra d’Euclides és el primer llibre de tema científic. Euclides en la seva obra volia recopilar tots els resultats de matemàtiques coneguts en aquella època i pretenia presentar un model d’actuació per demostrar resultats i construir una teoria matemàtica, amb axiomes i regles de deducció. *“Elements de Geometria”* es compon de tretze llibres i en el llibre VI, com a tercera definició, apareix el text que va començar l’estudi del nombre d’or. La traducció al castellà del cosmògraf de Felipe II, Rodrigo Zamorano, de 1576, és: *“Dize ser dividida una línea recta con razon extrema y media quando fuere que como se ha toda a la mayor parte, assi la mayor a la menor”.* Traduït al català actual el text diu: “Es diu que una recta està dividida en mitja i extrema raó quan la longitud de la línia total és a la part major, com aquesta part major és a la menor”. O dit de forma més concreta: “El tot és a la part més gran com la part més gran és a la resta”.

En el segle XV i a l’inici del segle XVI, a Itàlia dos genis com són Luca Pacioli i Leonardo da Vinci van mencionar el nombre d’or. Luca Pacioli va escriure l’obra *“De divina proportione”* , és a dir, “La divina proporció” publicada a Venècia en 1509. *“De divina proportione”* fixa les proporcions que s’han de complir per aconseguir la bellesa, en forma de reflexió sobre la geometria. En la seva obra apareixen els dibuixos de seixanta poliedres i “ l’home ideal” de Leonardo da Vinci en base a $\Phi$. I l’altre geni, Leonardo da Vinci, a més de les seves aportacions al llibre de Pacioli, també va utilitzar el nombre d’or en les seves obres com *“La Gioconda”* o *“L’últim sopar”.*

## 3.2. Quin és el valor de $\Phi$?

Anem a veure com obtenir el nombre $\Phi$.

Donat un segment *AB* de longitud x, direm que es fa una partició àuria si al dividir-ho en dues parts, (una que es considera la unitat i que a la figura 1 és el segment *AX* i l’altra, la resta, que és *XB*) es compleix que:


*Figura 1. Segment x.*

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Si desenvolupen aquesta igualtat obtenim, multiplicant en creu:

$$x \cdot (x-1) = 1 \cdot 1$$

Desenvolupant el primer membre:

$$x^2 - x = 1$$

Transposant termes:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Resolent l'equació de segon grau:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Solució 1 = $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$

Solució 2 = $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$

$\Phi$ és la solució de l'equació $x^2 - x - 1 = 0$ que equival a:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

# 3.3. Propietats del nombre d’or

A continuació exposem algunes de les propietats del nombre d’or amb la seva demostració.

**Propietat 1**

El nombre $\Phi$ compleix que $\Phi^2 = \Phi + 1$.

Demostració

$\Phi$ és una solució de l’equació $x^2 - x - 1 = 0$. Per tant, $\Phi$ compleix $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. Aïllant $\Phi^2$, obtenim $\Phi^2 = \Phi + 1$.

**Propietat 2**

Qualsevol potència de $\Phi$ és la suma de les dues potències anteriors.

Demostració

Multiplicant varies vegades els dos membres de la igualtat $\Phi^2 = \Phi + 1$ per $\Phi$ obtenim:

$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$

$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2$

$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3$

De manera que, en general, $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$, com volíem demostrar.

**Propietat 3**

Qualsevol potència de $\Phi$ es pot expressar de la forma $m\Phi+n$ amb $m$ i $n$ nombres naturals.

<u>Demostració</u>

Com hem dit en la propietat 2, qualsevol potència de $\Phi$ és la suma de les dues potències anteriors. I si desenvolupem cada potència amb els resultats de la suma anterior, obtenim:

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3$$

$$\Phi^6 = \Phi^5 + \Phi^4 = 8\Phi + 5$$

$$\Phi^7 = \Phi^6 + \Phi^5 = 13\Phi + 8$$

Veiem que els números que multipliquen $\Phi$ pertanyen a la successió de Fibonacci([3]).

## Propietat 4

L'invers de $\Phi$ és $\Phi$-1.

<u>Demostració</u>

El nombre $\Phi$ compleix $\Phi^2 - \Phi = 1$, i si dividim per $\Phi$ la igualtat anterior obtenim:

$$\frac{\Phi^2 - \Phi}{\Phi} = \frac{1}{\Phi}$$

Separant termes:

$$\frac{\Phi^2}{\Phi} - \frac{\Phi}{\Phi} = \frac{1}{\Phi}$$

[3] La successió de Fibonacci és una successió recurrent de nombres naturals tal que cada un dels seus termes és igual a la suma dels dos anteriors. *Si* $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ , llavors per a *n > 2* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
La successió comença *1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...*

Simplificant termes, utilitzant que $\frac{\Phi}{\Phi} = 1$ i $\frac{\Phi^2}{\Phi} = \Phi$ s'obté:

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$$

Per tant, podem dir que l'invers de $\Phi$, $\frac{1}{\Phi}$, és $\Phi - 1$.

## Propietat 5

Si considerem la successió recurrent següent:

$$a_1 = \sqrt{1}\,;\; a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}} = \sqrt{1+a_1}\,;\; a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = \sqrt{1+a_2}$$

és a dir:

$$a_1 = \sqrt{1} \text{ i } a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} \text{ sent } n>1.$$

i diem $A$ al límit d'aquesta successió, és a dir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_{n-1}} = A = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}$$

llavors $A = \Phi$

<u>Demostració</u>

Si $A = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}$, elevem al quadrat aquesta igualtat:

$$A^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}}}}}}}}$$

Observem que $A^2 = 1 + A \rightarrow A^2 - A - 1 = 0$. És a dir, que $A$ és solució de $x^2 - x - 1 = 0$ i $A$ és un nombre positiu. Podem afirmar doncs que $A = \Phi$.

## Propietat 6

La fracció continua ([4]), [1, 1, 1, ...] és $\Phi$, o sigui:

$$[1, 1, 1, \dots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}} = \Phi$$

Demostració

La demostració és semblant a la de la propietat anterior, ja que si diem $B$ a la fracció contínua observem que:

$$B = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}} = 1 + \frac{1}{B}$$

Operant l'expressió anterior, si primer fem la suma del segon membre de la igualtat:

$$B = \frac{B + 1}{B}$$

[4] Les fraccions continues simples són les del tipus:

$$a_1 = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}$$

On tots el $a_i$que apareixen són nombres enters. Per facilitar la representació es solen denotar $[a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$

Després multipliquem en creu i obtenim:

$$B^2 = B + 1$$

$$B^2 - B - 1 = 0$$

$B$ compleix l'equació $x^2 - x - 1 = 0$, per tant $B$ és una de les solucions de l'equació i serà $\Phi$, perquè $B$ és un nombre positiu.

## Propietat 7

Si considerem la successió de Fibonacci es compleix que el límit quan *n* tendeix a infinit del quocient del terme que ocupa el lloc *n + 1* entre el terme anterior és $\Phi$.

O sigui,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi$$

Demostració

Anomenant *L* al límit de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{L}$$

Per sintetitzar:

$$L = 1 + \frac{1}{L} \to L - 1 = \frac{1}{L} \to L^2 - L - 1 = 0$$

Per tant, si l'equació $x^2 - x - 1 = 0$ dóna solució positiva $\Phi$, i veiem que *L* és una altra solució positiva, llavors $L = \Phi$.

Aquesta propietat també ens dóna un mètode per trobar una aproximació del nombre $\Phi$ (com es pot veure a l'annex 1).

# 4. El rectangle auri

Un rectangle és auri si el seus costats estan en una proporció igual a la raó àuria (és a dir, si dividim el costat més gran pel costat més petit ens ha de donar Φ).

*Figura 2. Exemple de rectangle auri.*

## 4.1. Com construir un rectangle auri

En aquest apartat, veurem dos mètodes per construir un rectangle auri.

Mètode 1

Donat un segment AB, busquem un punt, que l'anomenem X, que es trobi en el segment AB i que compleixi que el quocient entre el segment AX i el segment XB, doni com a resultat Φ. És a dir, que el segment AB tingui un punt *X* que sigui mitja i extrema raó.


*Figura 3. Segment amb mitja i extrema raó.*

$$\frac{AX}{XB} = \Phi$$

Sigui $m$ la longitud del segment *AB,* construïm un triangle rectangle de catets $m$ i $\frac{m}{2}$ (que anomeno $\mathrm{m}_1$, com es pot veure a la figura 4).

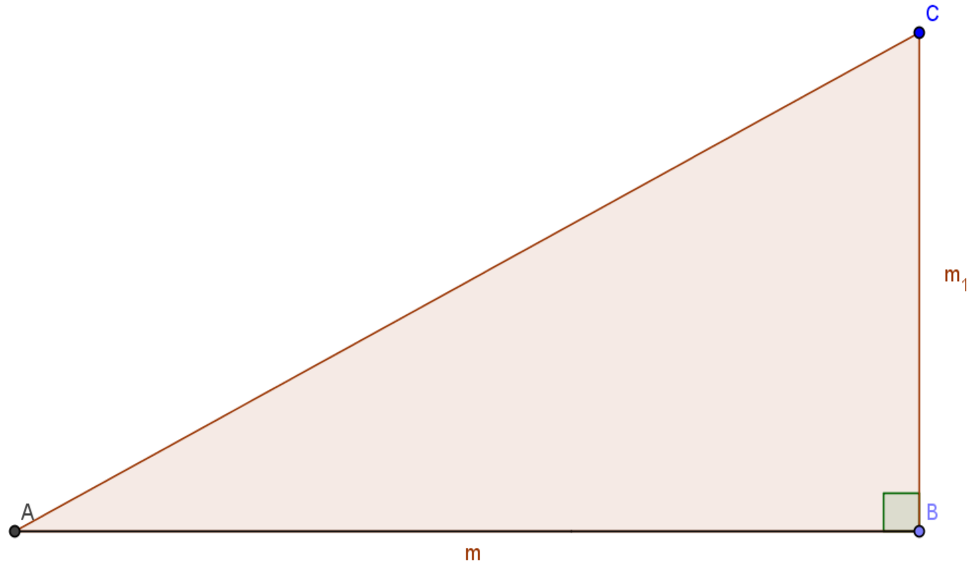



*Figura 4. Triangle rectangle amb catets $m$ i $m_1$.*

Amb centre en *C* i radi CB ($\mathrm{m}_1$), tracem una circumferència que talla a *AC* en el punt *S.*

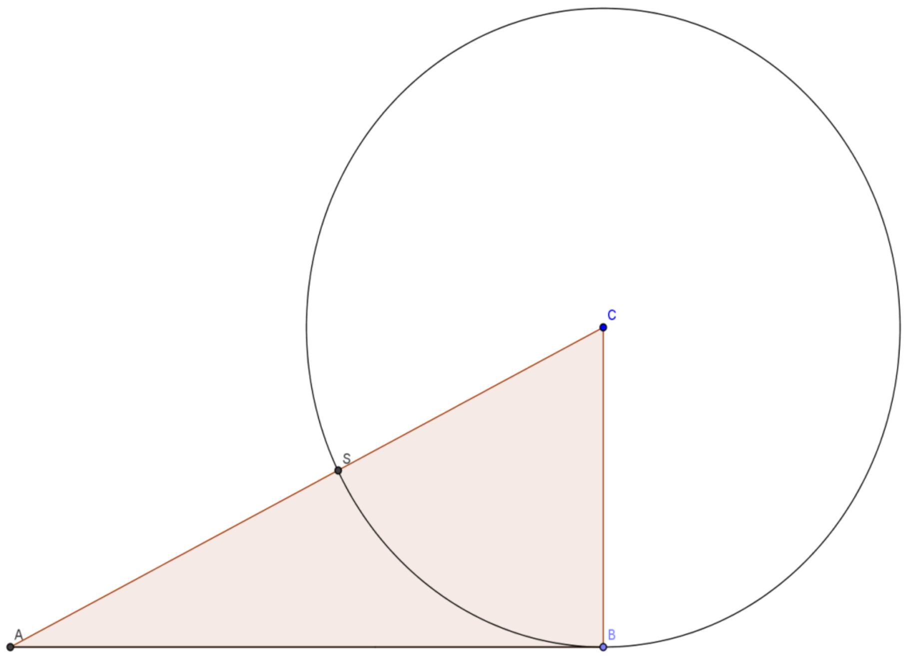



*Figura 5. Triangle rectangle i circumferència de centre C i radi CB.*

Amb centre A i radi AS, tracem un arc de circumferència que talla a AB en el punt *X*.

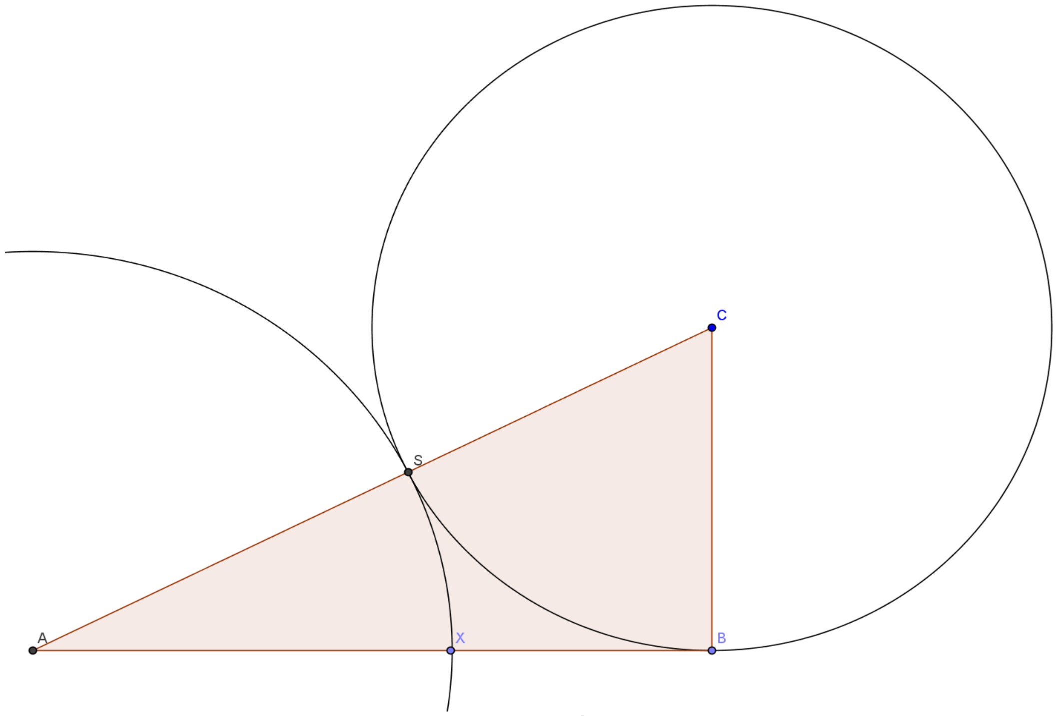



*Figura 6. Triangle rectangle amb circumferència de centre C i radi CB, i arc de circumferència de centre A i radi AS.*

Aquest procediment ens permet obtenir el punt *X* en el segment *AB* amb mitja i extrema raó i el rectangle amb costats *AX* i *XB* serà auri. Anem a veure que *X* és el punt que diem.

Si el quocient del segment *AX* entre *XB* dóna $\Phi$:

$$\frac{AX}{XB} = \Phi$$

Llavors s'ha de complir també que:

$$\frac{AB}{AX} = \Phi$$

O sigui s'ha de complir:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{XB}$$

Utilitzant que $AB = m,\ AX = x\ i\ XB = m - x$, la igualtat anterior és equivalent a:

$$\frac{m}{x} = \frac{x}{m - x}$$

Multiplicant en creu:

$$m \cdot (m - x) = x \cdot x$$

Aplicant la propietat distributiva:

$$m^2 - mx = x^2$$

Sumant $(\frac{m}{2})^2$ als dos termes de la igualtat:

$$m^2 - mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

Traspassant *mx* a l'altra part de la igualtat:

$$m^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 + mx$$

I això, per productes notables([5]) és equivalent a:

$$m^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2$$

Aquesta última expressió és certa gràcies al Teorema de Pitàgores , ja que $m$ i $\frac{m}{2}$ són el catets del triangle *ABC* i $x + \frac{m}{2}$ és la hipotenusa.

Per tant es compleix que:

$$\frac{AB}{XB} = \frac{AB}{AX} = \Phi$$

[5] Productes notables: Quadrat d'una suma:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

<u>Mètode 2</u>

Un altre mètode de construcció d'un rectangle auri és el següent:

- Construïm un quadrat de costat *a* i trobem el punt *M*, punt mig del costat *AB:*

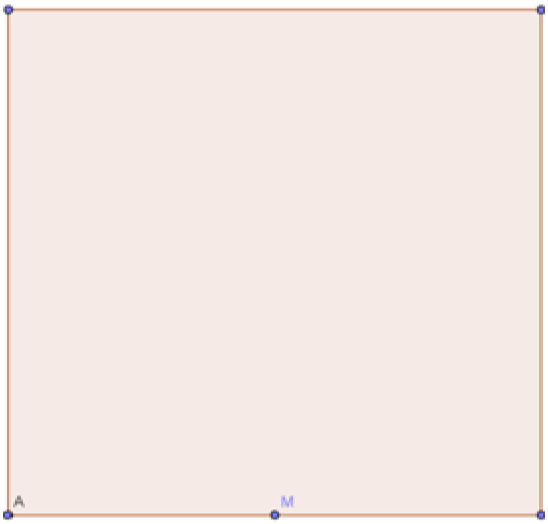



*Figura 7. Quadrat de costats a i el punt M.*

- Després, tracem un arc de circumferència de centre *M* i radi *MD* que talli amb la prolongació de *AB* en el punt *E.*

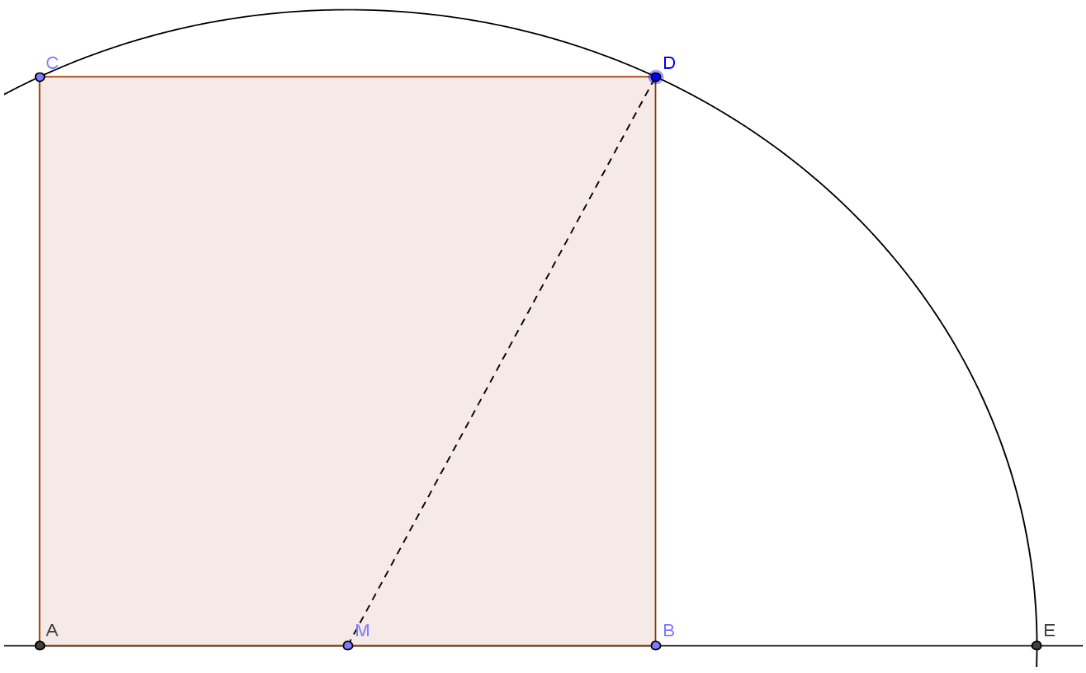



*Figura 8. Quadrat de costats a amb arc de circumferència.*

➢ Després, per finalitzar aquesta construcció, amb el punt obtingut *E*, construïm un rectangle de base *AE* i altura *EF* = *AB*, que és un rectangle auri.

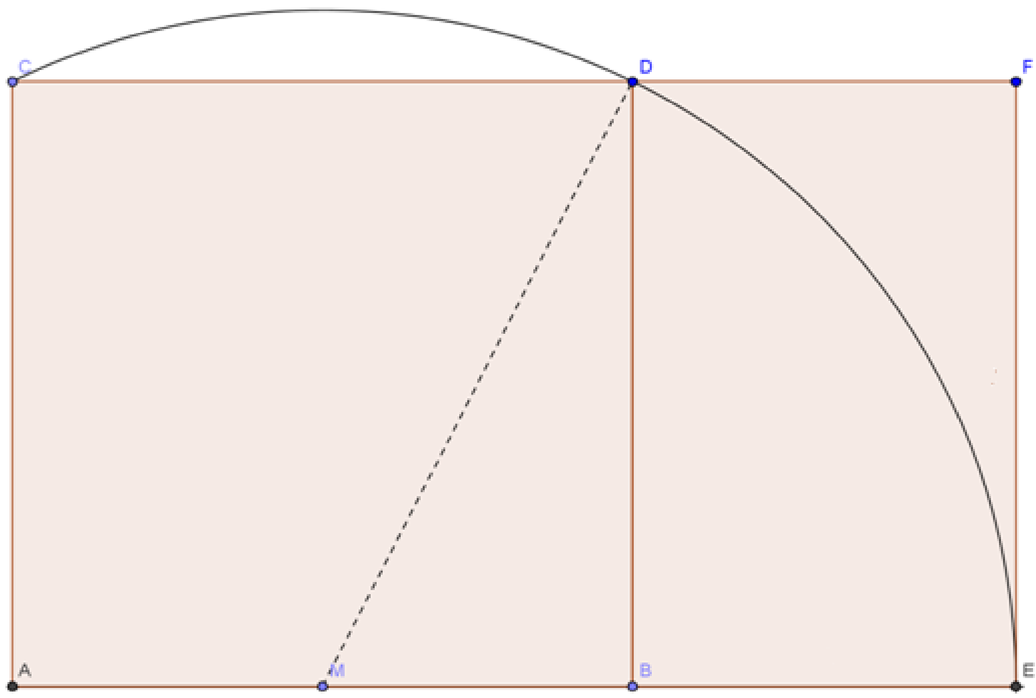



*Figura 9. Rectangle auri ACEF*

Demostració

Anem a veure que el rectangle *ACEF* és auri.

El rectangle serà auri, si verifica:

$$\frac{AE}{EF} = \Phi$$

*ME* = *MD* és la hipotenusa del triangle *BDM.*

$$ME = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 + a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{5}$$

Sabent que la base del rectangle és *AE,* i compleix:

$$AE = AM + ME$$

Substituïm en aquesta igualtat els valors de *AM* i *ME:*

$$AE = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Si traiem factor comú *a* en la igualtat i sumem els termes:

$$AE = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Calculem $\frac{AE}{EF}$ substituint *AE* per la igualtat anterior i *EF* per *a,* ja que coincideix amb el costat del quadrat.

$$\frac{AE}{EF} = \frac{a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Per tant, podem afirmar que el rectangle construït anteriorment és auri perquè els seus costats compleixen la proporció àurea.

## 4.2. Propietats dels rectangles auris

### <u>Propietat 1</u>

Tots els rectangles auris són semblants([6]).

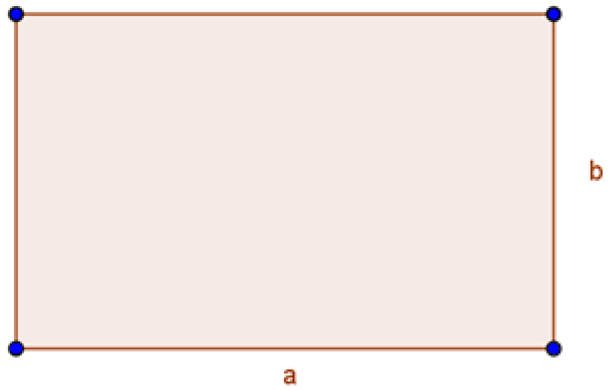



*Figura 10. Rectangle auri R1*

[6] És diu que entre dos objectes geomètrics hi ha una relació de semblança quan els dos objectes tenen el mateixos angles i els costats són proporcionals.

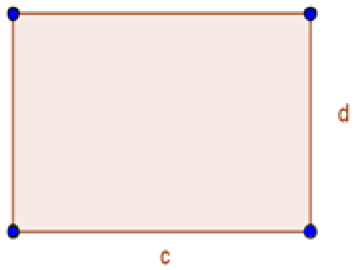



*Figura 11. Rectangle auri R2.*

R1 i R2 són semblants si compleixen:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

O sigui, que si dividim la base del rectangle més gran amb la del petit, i fem el mateix amb les altures, ens ha de donar el mateix resultat.

Equivalentment, hem de veure que $a \cdot d = b \cdot c$ o que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

I això es compleix perquè R1 i R2 són rectangles auris i, per tant:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \Phi$$

## Propietat 2

Si posem dos rectangles auris iguals, un en posició horitzontal i l'altre al costat però posat en posició vertical, la recta que forma la diagonal que passa pels punts *A* i *D*, també passa pel punt G de l'altre rectangle auri com es pot veure a la figura següent:

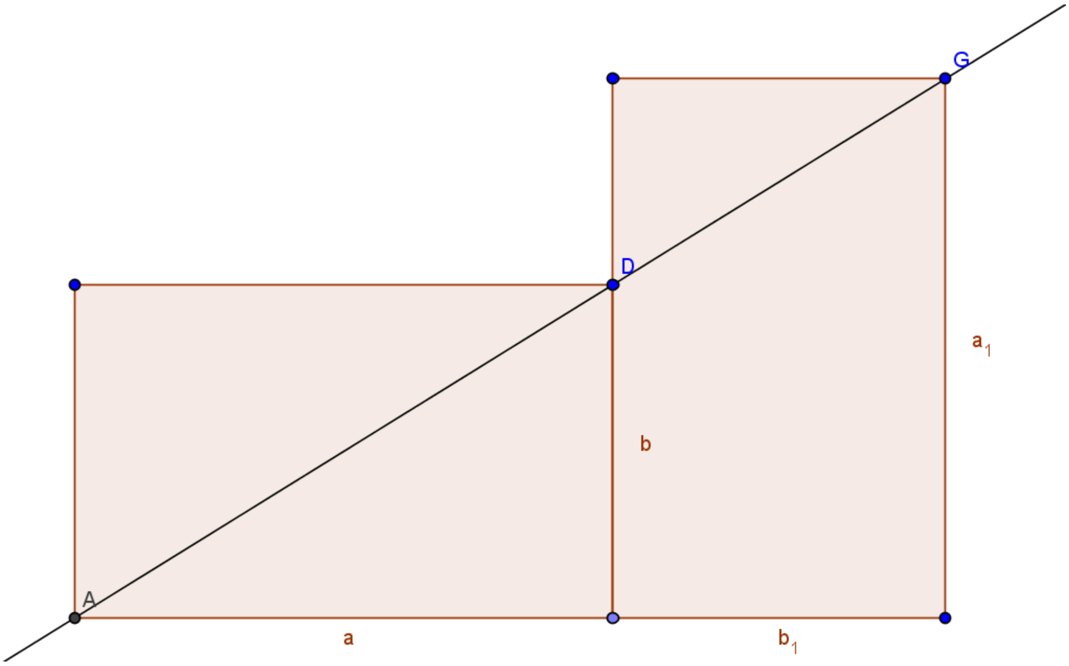



*Figura 12. Rectangles auris i recta que passa pels punts A, D, i G.*

Això no passa si els rectangles que disposem d'aquesta manera no són auris, com es pot veure en la figura 13.

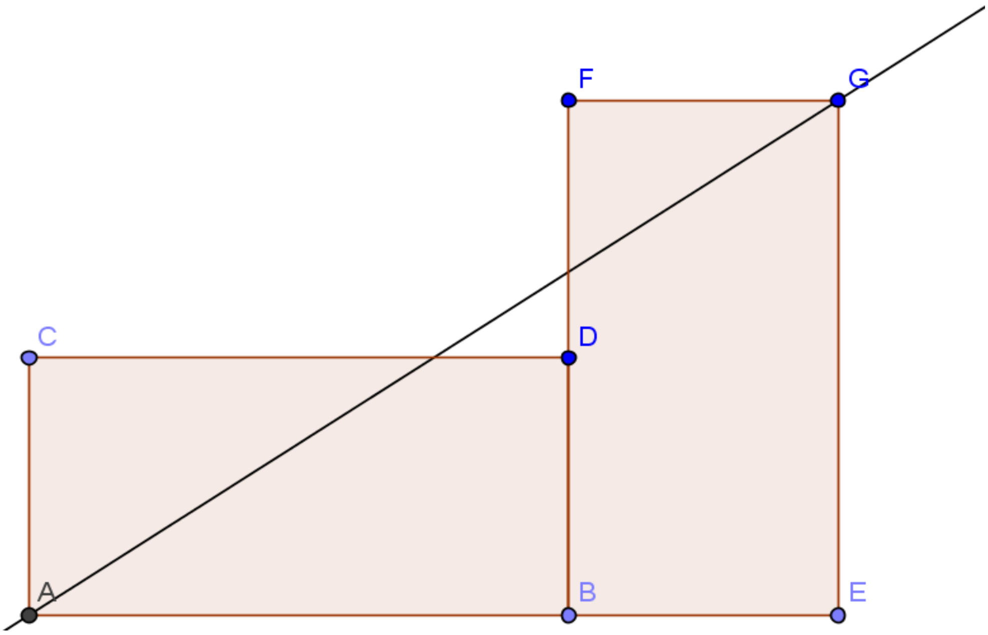



*Figura 13. Exemple de dos rectangles que no compleixen la propietat 2.*

## Propietat 3

Donat un rectangle auri de costats *m* i *M,* si afegim un quadrat de costat *M*, obtindrem un altre rectangle auri de base *m*+*M* i altura *M*:

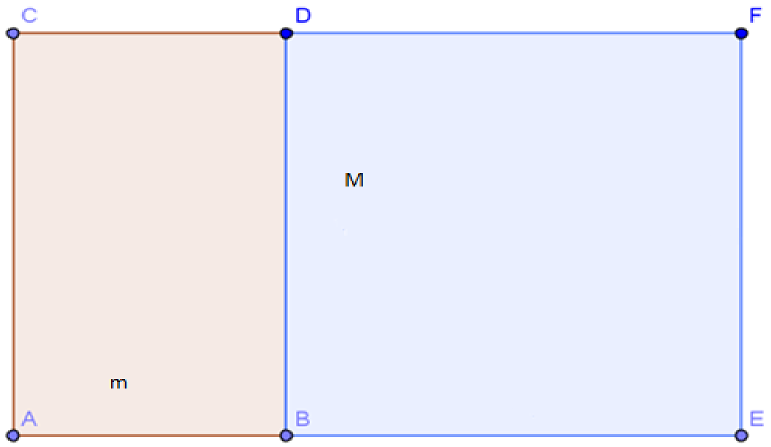



*Figura 14. Rectangle auri de base m+M i altura M.*

Sabem que:

$$\frac{M}{m} = \Phi \;\rightarrow\; \frac{m}{M} = \frac{1}{\Phi}$$

i anem a veure que el rectangle format és auri. Això equival a demostrar que:

$$\frac{M+m}{M} = \Phi$$

Separem els dos termes de la fracció per poder simplificar:

$$\frac{M+m}{M} = \frac{M}{M} + \frac{m}{M}$$

$$\frac{M}{M} + \frac{m}{M} = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

I com hem vist en la propietat 4 de l'apartat 3.3, $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$ , per tant:

$$1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \Phi - 1 = \Phi$$

Per tant tenim demostrat que aquest rectangle més gran és un rectangle auri.

## **Propietat 4**

Donat un rectangle auri de costats *m* i *M* , si li traiem un quadrat de costat igual al menor del rectangle auri, llavors obtenim un altre rectangle de base *m* i altura *M* - *m*, que és auri:

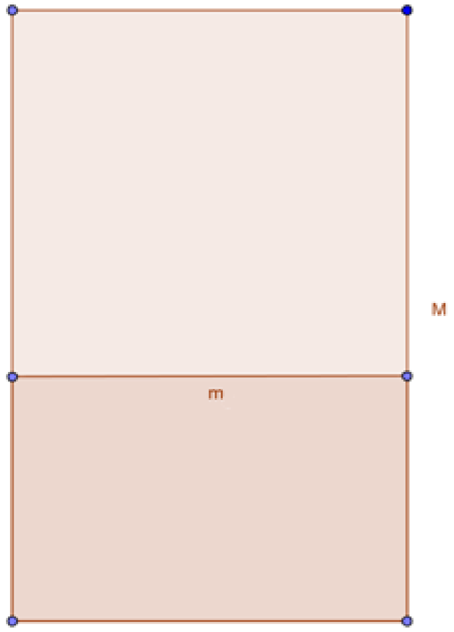



*Figura 15. Rectangle de base m i altura M-m.*

Sabem que $\frac{M}{m} = \Phi$, i volem veure que:

$$\frac{m}{M-m} = \Phi$$

Si fem la inversa de l'expressió anterior:

$$\frac{M-m}{m} = \frac{1}{\Phi}$$

Separem termes de la fracció per poder simplificar:

$$\frac{M}{m} - \frac{m}{m} = \frac{1}{\Phi}$$

Utilitzem que $\frac{M}{m}$ *és* $\Phi$:

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$$

I això és cert per la propietat 4 de l'apartat 3.3, així que aquest rectangle és auri, com volíem demostrar.

# 5. Alguns polígons regulars i el nombre d'or

## 5.1. El pentàgon regular i el nombre d'or

Anem a veure que entre alguns elements del pentàgon regular podem trobar el nombre d'or.

Considerem el pentàgon regular següent:

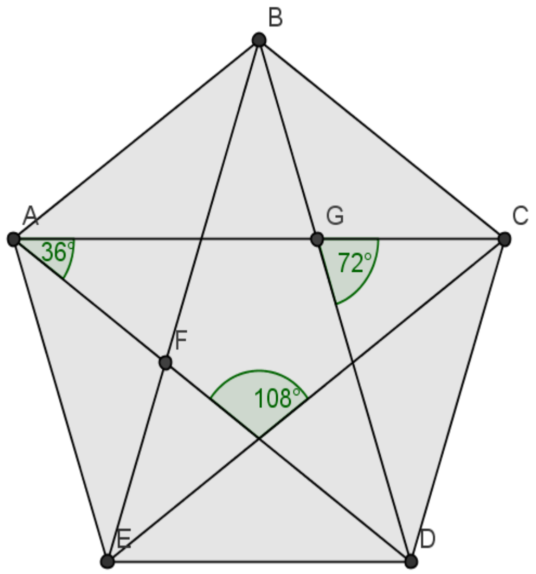
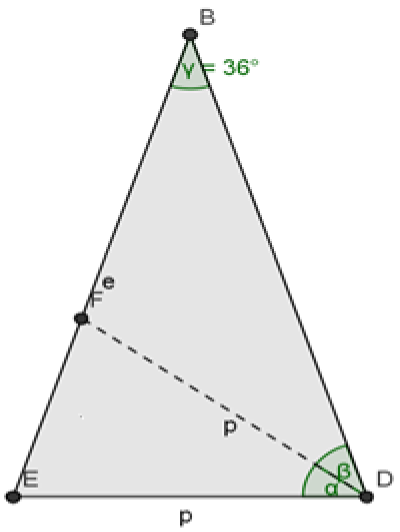



*Figura 16. Pentàgon regular ABCDE.*

Considerem el triangle isòsceles *BDE*, amb costats *BE* = *BD* = *e* i amb base *DE* = *p* i comprovem que $\frac{e}{p} = \Phi$, o sigui, que:

$$\frac{BE}{DE} = \Phi$$




:

*Figura 17. Triangle isòsceles BDE*

Fent la bisectriu del angle *D,* obtenim el triangle *DEF*. Aquest triangle i el triangle *BDE* són semblants, perquè tenen el mateixos angles, (l'angle *BED* i l'angle *FED* és el mateix, l'angle *EFD* és igual a l'angle *FED* i al *BDE,* i l'angle *EBD* és Igual l'angle *EDF*)*.* Per tant es compleix que els costats corresponents són proporcionals:

$$\frac{BE}{DE} = \frac{DE}{EF}$$

Substituint *DE* = *p*, *BE* = *e* i *EF* = *e* - *p* en l'expressió anterior:

$$\frac{e}{p} = \frac{p}{e-p}$$

Multiplicant en creu:

$$e(e-p) = p^2$$

Fent la multiplicació:

$$e^2 - ep = p^2$$

Transposant termes:

$$e^2 - ep - p^2 = 0$$

Resolent l'equació de segon grau en funció de *p:*

$$e = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-p^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{p \pm \sqrt{5p^2}}{2}$$

Menyspreem la solució negativa perquè *e* és una longitud.

Una vegada tenim *e* en funció de *p,* ho substituïm en la igualtat anterior:

$$\frac{BE}{DE} = \frac{e}{p} = \frac{\frac{p + \sqrt{5p^2}}{2}}{p} = \frac{\frac{p + p\sqrt{5}}{2}}{p}$$

Simplificant ja que podem extreure *p* de factor comú en el numerador, obtindrem Φ:

$$\frac{\frac{p + p\sqrt{5}}{2}}{p} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Per tant, podem dir amb seguretat que la divisió entre la diagonal del pentàgon regular i el costat del pentàgon regular dóna Φ.

## 5.2. El decàgon regular i el nombre d'or

Anem a veure si en aquest polígon regular de deu costats podem trobar una relació que ens apropi al nombre d'or.

Si dividim la distància entre el centre de la circumferència circumscrita del decàgon regular a un vèrtex i la longitud del costat d'aquest polígon, ens ha de donar Φ.

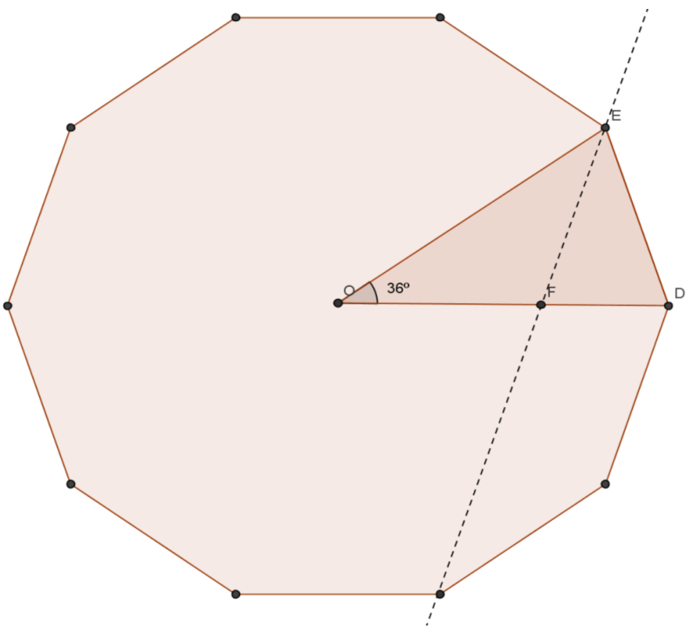


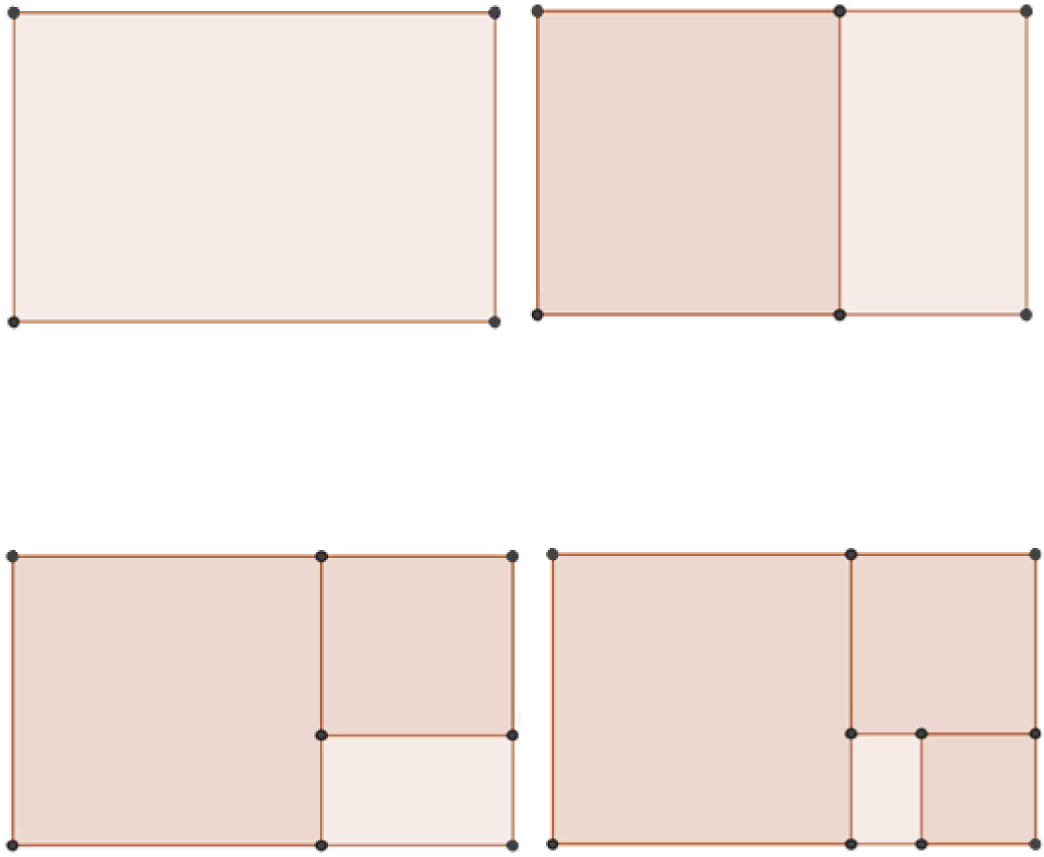

*Figura 18. Decàgon regular i triangle isòsceles EOD.*

Per començar, dividim el decàgon en 10 triangles a partir del punt *O* (el centre del decàgon regular), i ens fixarem en un dels deu triangles formats. L'angle *EOD* és de 36°, i els dos altres angles del triangle tenen el mateix valor, 72°. Si fem la bisectriu de l'angle *EDO,* obtenim dos triangles, el triangle *EDF* i *ODE.* Aquests dos triangles són semblants, perquè tenen el mateixos angles i es demostraria que $\frac{OE}{ED} = \Phi$ de la mateixa manera que ho hem fet amb el pentàgon regular a l'apartat anterior.

# 6. L'espiral logarítmica mitjançant rectangles auris

Mitjançant rectangles auris podem obtenir l'espiral logarítmica([7]).

Partint d'un rectangle auri, li restarem un quadrat per obtenir un nou rectangle auri, com hem vist en la propietat 4 (de l'apartat 4.2.). Si apliquem aquesta propietat successivament, anirem construint rectangles auris encaixats cada vegada més petits.



[7] És aquella corba que es genera quan un punt es mou sobre una semirecta amb una velocitat que augmenta proporcionalment a la distància de l'origen.

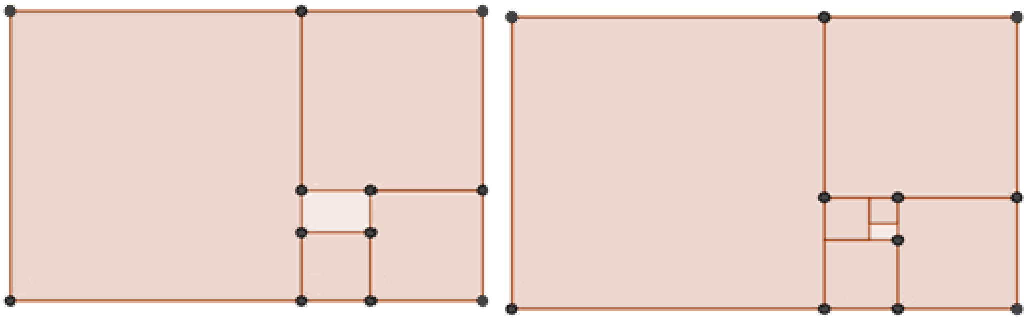


*Figura 19. Rectangles auris.*

Ara en cada quadrat, tracem quadrants de circumferència amb radi el costat del quadrat i centre un vèrtex de cadascú d’aquests. Obtenim així una corba que s’anomena espiral logarítmica, i aquesta corba tendeix a acabar en un punt, que anomenen “*ull de Déu*” (veure l’annex 5).

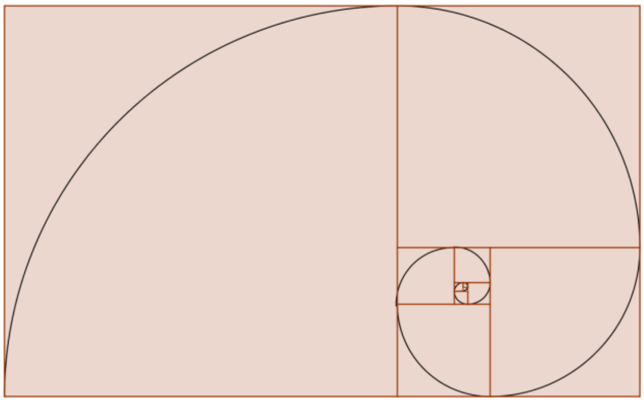


*Figura 20. Espiral logarítmica mitjançant rectangles auris.*

# 7. El nombre d'or a la natura i a la vida quotidiana

El nombre d'or es troba a la natura i en alguns objectes. Ho detallem a continuació.

El nombre d'or té una presència important en la fil·lotaxis ([8]). Si observem la natura, les plantes no creixen unes a dalt de les altres, perquè es taparien els raigs de Sol i moririen. Leonardo da Vinci va fer un estudi sobre aquest fenomen. Va descobrir que les fulles de la planta creixen seguint la successió de Fibonacci. Les fulles situades més avall tendeixen a estar més allunyades del tall (l'òrgan que sosté les fulles, les flors o les fruites). Es va descobrir que les noves fulles avancen rotant sempre amb el mateix angle, aproximadament 137'5°, que es va anomenar angle auri (veure annex 6).

La proporció àurea també s'observa en dimensions vegetals, com per exemple, l'*om de muntanya* o l'*auró japonès* i, segons fonts consultades, la relació entre la quantitat d'abelles mascles i abelles femelles en un rusc és una aproximació del nombre $\Phi$.

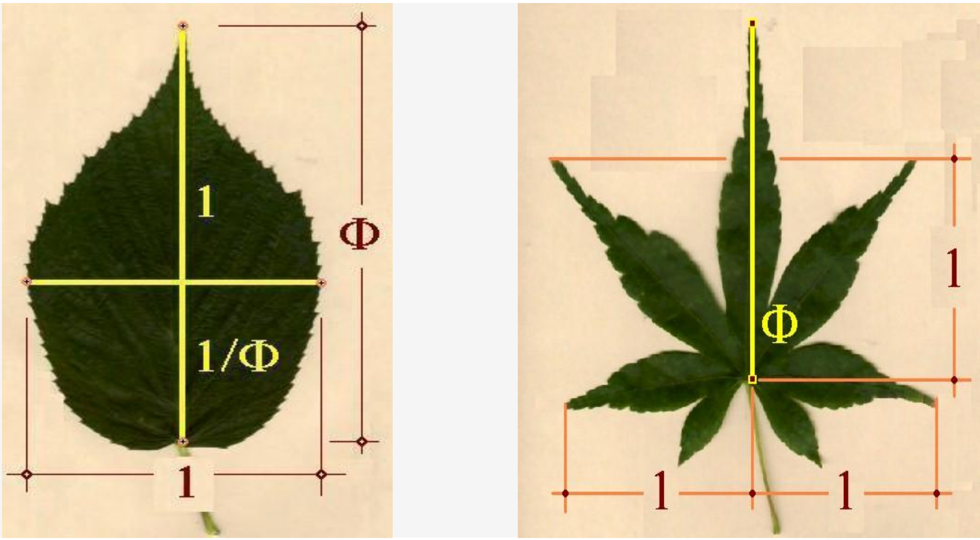



*Figura 21. Om de muntanya a la esquerra i auró japonès a la dreta*

[8] La fil·lotaxis és la disciplina de la botànica (la ciència que estudia els vegetals) que estudia la disposició de les fulles sobre el tall, que segueix pautes geomètriques i numèriques.

En el gira-sol, s’observen varies espirals logarítmiques: unes giren en el sentit de les agulles del rellotge i d’altres en contra. També s’observen espirals logarítmiques en la forma dels cargols, l’exemple més evident és el *Nàutil*.

*Figura 22. Gira-sol i una petxina d’un Nàutil (Nautilus pompilius)*

També observem que l’espiral logarítmica té presència en la forma enrotllar-se sobre si mateix dels cucs, en la trajectòria del vol d’una àguila a l’hora de caçar a la seva pressa i fins i tot als braços de la nostra galàxia, la Via Làctia.

*Figura 23. Via Làctia*

Un altre objecte on trobem el nombre d’or és, com ja hem vist en l’apartat 5.1, el pentàgon regular. Aquest cos geomètric s’observa en molts símbols, però a la vida quotidiana, s’observa en l’estrella de mar, o també en el cos humà si imitem la posició de l’*home de Vitruvi* (figura 24).

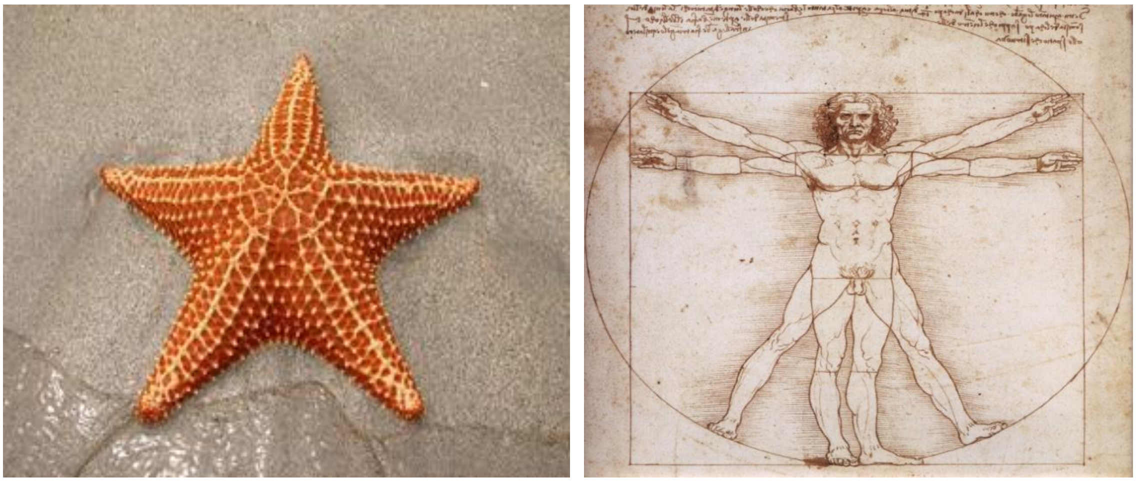


*Figura 24. A l’esquerra una estrella de mar, i a la dreta “L’home de Vitruvi” de Leonardo da Vinci*

I per últim el rectangle auri. Aquest sembla que no sigui abundant, però el rectangle auri apareix en molts llocs. Per exemple les targetes de crèdit, el paquet de tabac o en la forma de la pantalla d’alguns televisors (a l’annex 3 demostrarem que les targetes que tenim al nostre moneder compleixen la propietat geomètrica, propietat 2, dels rectangles auris que hem vist a l’apartat 4.2).

# 8. Experiència relacionada amb el cos humà

Els renaixentistes italians Leonardo da Vinci i Luca Pacioli, creien que el cos humà era perfecte si en ell trobàvem la divina proporció.

Anem a veure si el quocient entre l'altura d'una persona i la longitud dels peus fins al melic dóna el nombre d'or. Aquesta proporció segurament sigui errònia en molts casos però vam pensar que ho podríem comprovar. Per això, vam agafar les mesures de 38 alumnes de 3r de l'ESO. Anomenem *A*: l'alçada i *L*: longitud des del melic fins al terra.

A la següent taula exposem les dades obtingudes a les dues primeres columnes, i a la tercera columna el quocient:

| ***A*** | ***L*** | $\frac{A}{L}$ | | ***A*** | ***L*** | $\frac{A}{L}$ | | ***A*** | ***L*** | $\frac{A}{L}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,82 | 1,22 | 1,491 | | 1,59 | 1,03 | 1,543 | | 1,72 | 1,14 | 1,508 |
| 1,63 | 1,01 | 1,613 | | 1,63 | 1,05 | 1,552 | | 1,7 | 1,12 | 1,517 |
| 1,5 | 0,95 | 1,578 | | 1,64 | 1,06 | 1,547 | | 1,68 | 1,03 | 1,631 |
| 1,68 | 1,05 | 1,6 | | 1,65 | 1 | 1,65 | | 1,71 | 1,09 | 1,568 |
| 1,59 | 1 | 1,59 | | 1,65 | 1,07 | 1,542 | | 1,7 | 1,07 | 1,588 |
| 1,6 | 1,04 | 1,538 | | 1,61 | 1,07 | 1,504 | | 1,57 | 0,99 | 1,585 |
| 1,68 | 1,1 | 1,527 | | 1,6 | 1,02 | 1,568 | | 1,58 | 1,05 | 1,50 |
| 1,82 | 1,16 | 1,568 | | 1,73 | 1,09 | 1,587 | | 1,63 | 1,06 | 1,537 |
| 1,73 | 1,02 | 1,69 | | 1,72 | 1,12 | 1,535 | | | | |
| 1,73 | 1,02 | 1,696 | | 1,6 | 1,08 | 1,481 | | | | |
| 1,7 | 1,01 | 1,683 | | 1,71 | 1,07 | 1,598 | | | | |
| 1,69 | 1,06 | 1,594 | | 1,59 | 1,02 | 1,558 | | | | |
| 1,72 | 1,14 | 1,508 | | 1,62 | 1,01 | 1,603 | | | | |
| 1,72 | 1,05 | 1,63 | | 1,685 | 1,11 | 1,518 | | | | |
| 1,78 | 1,14 | 1,56 | | 1,61 | 1,05 | 1,533 | | | | |

Com veiem, a la tercera columna de la taula, el quocient no surt Φ però s'apropa. Calculem la mitjana aritmètica ($\bar{x}$) dels resultat de la tercera columna per saber si la mitjana dóna el nombre d'or.

Li diem $\sum f_i x_i$ a la suma de tots els resultat de la columna $\frac{A}{L}$ i $\sum f_i$ al nombre d'alumnes:

$$\sum f_i x_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = 61'235$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{61'235}{38} = 1'6114$$

La mitjana aritmètica surt 1'6114 (molt més propera a Φ = 1'618). Per tant, podem dir que els renaixentistes italians tenien bastant raó si agafem com a resultat el de la mitjana aritmètica dels 38 alumnes.

# 9. Conclusions

En aquest treball he complert tots els objectius que m’havia proposat a l’inici. Consultant documents antics d’autors diferents a *Internet* i a llibres on es refereixen a la proporció àurea, he trobat el valor de $\Phi$, com obtenir $\Phi$ (com a solució de l’equació $x^2 - x - 1 = 0$, o la longitud d’un segment que està en mitja i extrema raó) i algunes de les seves propietats que he demostrat.

També he trobat objectes matemàtics relacionats amb el nombre d’or: el rectangle auri (que és aquell que compleix que el quocient de les seves dimensions és $\Phi$), l’espiral logarítmica (corba que podem generar a partir d’una sèrie de rectangles auris encaixats) i l’angle auri (l’angle que formen dues fulles disposades en el tall).

El nombre d’or també es troba si calculem el quocient de la longitud de la diagonal d’un pentàgon regular i la del seu costat, i si dividim la longitud del radi del decàgon regular entre la longitud del seu costat. Desprès hem vist alguns exemples on s’observa aquest nombre en la natura, algunes bastant impressionants (com la relació entre la quantitat d’abelles mascles i abelles femelles en un rusc, en els braços de la *Via Làctia* i en algunes plantes, com l*’Om de muntanya* i l*’auró japonès*). El nombre d’or forma part de la nostra vida. Sense adonar-nos, molts de nosaltres ho tenim a la butxaca (el nostre DNI, la targeta sanitària i el paquet de tabac, són alguns dels exemples de rectangles auris).

I l’altre objectiu complert ha estat comprovar la proporció àurea en el cos humà, per a mi la part més didàctica del treball. No puc assegurar que el resultat obtingut fos un altre si en lloc d’adolescents (encara en edat de creixement) ho hagués comprovat amb adults. El nombre d’or forma part de la nostra vida. Sense adonar-nos, molts de nosaltres ho tenim a la butxaca (el nostre DNI, la targeta sanitària i el paquet de tabac, són alguns dels exemples de rectangles auris).

En la realització d'aquesta recerca he necessitat l'ajuda d'alguns programes informàtics. L'*Excel* l'he utilitzat per fer l'annex sobre el límit de la successió de Fibonacci i per trobar la proporció àurea en el cos humà. Tot i que ja l'havia utilitzat abans, m'havia oblidat de fer-ho servir bé, i m'ha ajudat a refrescar la memòria. També he utilitzat el programa *Microsoft Word,* programa que qualsevol alumne ha de saber com funciona, però he après a introduir equacions. I l'altre programa que he utilitzat és el *GeoGebra,* per a mi desconegut fins el moment i que he après a fer-ho funcionar bastant bé en alguns aspectes. A banda dels programes informàtics, aquest treball ha estat el primer treball rigorós que he fet fins ara. He hagut d'organitzar-me, treballar molt i diàriament per poder fer aquest treball, i he hagut de buscar informació sobre un tema en diferents fonts. Segur que hauré de fer més com aquest en un futur.

# 10. Bibliografia

Llibres:

BOADAS, J., ROMERO, R. i VILLALBI, R. (1977), *Matemática, 1º Bachillerato*, Barcelona, Ed. Teide.

BOYER, Carl B. (1986), *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, S.A.

COLERA, J., GARCÍA, R. i OLIVEIRA, M. J. (2008), *Matemàtiques, 1r Batxillerat*, Barcelona, Barcanova.

COLERA, J., GARCÍA, R. i OLIVEIRA, M. J. (2008), *Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials, 1r Batxillerat*, Barcelona, Barcanova.

COLERA, J., GARCÍA, R., GAZTELU, I., MARTÍNEZ, M. M. i OLIVEIRA, M. J. (2008), *Matemàtiques, 4t ESO*, Barcelona, Barcanova.

CORBALÁN, F. (2010), *La proporción áurea*, Barcelona, RBA.

REDAL, E.J. (2005), *Matemáticas I, La Enciclopedia del Estudiante*, Madrid, Santillana, El País.

REDAL, E.J. (2005), *Matemáticas II, La Enciclopedia del Estudiante*, Madrid, Santillana, El País.

Enllaços de pàgines web:

ca.wikipedia.org

dlc.iec.cat

roble.pntic.mec.es

rt000z8y.eresmas.net

www.edu365.cat

www.figueraspacheco.com

www.santafe-conicet.gov.ar

www.xtec.es

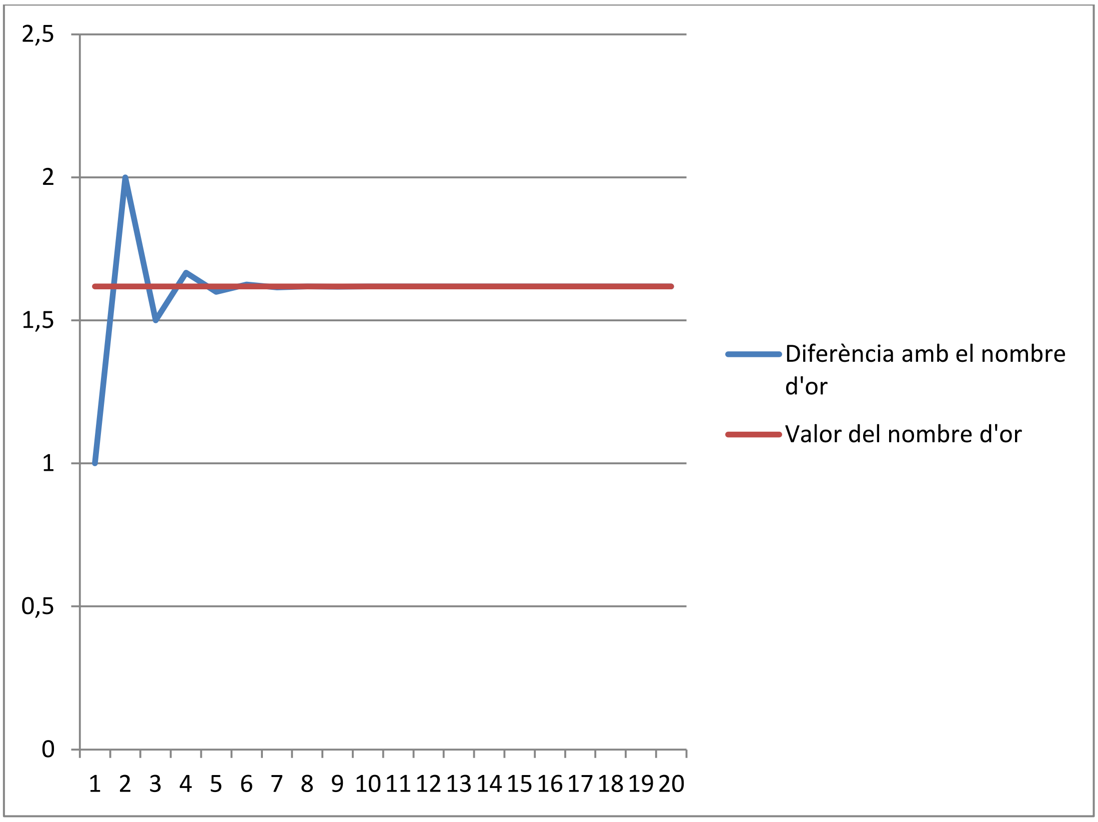
# Annexos

## Annex 1

Càlcul de decimals del nombre d'or utilitzant la successió de Fibonacci

| Successió de Fibonacci | Quocient entre números de la successió de Fibonnaci | Diferència entre el quocient i el nombre d'or |
|---:|---:|---:|
| 1 | - | - |
| 1 | 1,000000000000000000000000000000 | 0,618033988749890000000000000000 |
| 2 | 2,000000000000000000000000000000 | -0,381966011250110000000000000000 |
| 3 | 1,500000000000000000000000000000 | 0,118033988749890000000000000000 |
| 5 | 1,666666666666667000000000000000 | -0,048632677916776700000000000000 |
| 8 | 1,600000000000000000000000000000 | 0,018033988749889900000000000000 |
| 13 | 1,625000000000000000000000000000 | -0,006966011250109980000000000000 |
| 21 | 1,615384615384620000000000000000 | 0,002649373365274600000000000000 |
| 34 | 1,619047619047620000000000000000 | -0,001013630297729050000000000000 |
| 55 | 1,617647058823530000000000000000 | 0,000386929926360580000000000000 |
| 89 | 1,618181818181820000000000000000 | -0,000147829431928148000000000000 |
| 144 | 1,617977528089890000000000000000 | 0,000056460660002422000000000000 |
| 233 | 1,618055555555560000000000000000 | -0,000021566805665562700000000000 |
| 377 | 1,618025751072960000000000000000 | 0,000008237676928590790000000000 |
| 610 | 1,618037135278510000000000000000 | -0,000003146528624542460000000000 |
| 987 | 1,618032786885250000000000000000 | 0,000001201864644029270000000000 |
| 1597 | 1,618034447821680000000000000000 | -0,000000459071791913956000000000 |
| 2584 | 1,618033813400130000000000000000 | 0,000000175349764708344000000000 |

| | | |
|---|---|---|
| 4181 | 1,618034055727550000000000000000 | -0,000000066977664081591100000000 |
| 6765 | 1,618033963166710000000000000000 | 0,000000025583183571598100000000 |
| 10946 | 1,618033998521800000000000000000 | -0,000000009771913278555640000000 |
| 17711 | 1,618033985017360000000000000000 | 0,000000003732532061206940000000 |
| 28657 | 1,618033990175600000000000000000 | -0,000000001425707107927110000000 |
| 46368 | 1,618033988205320000000000000000 | 0,000000000544565059712454000000 |
| 75025 | 1,618033988957900000000000000000 | -0,000000000208012052027584000000 |
| 121393 | 1,618033988670440000000000000000 | 0,000000000079446893508361400000 |
| 196418 | 1,618033988780240000000000000000 | -0,000000000030352609314832100000 |
| 317811 | 1,618033988738300000000000000000 | 0,000000000011586953618802900000 |
| 514229 | 1,618033988754320000000000000000 | -0,000000000004432454403513470000 |
| 832040 | 1,618033988748200000000000000000 | 0,000000000001686428774405610000 |
| 1346269 | 1,618033988750540000000000000000 | -0,000000000000650812737035267000 |
| 2178309 | 1,618033988749650000000000000000 | 0,000000000000241806574763359000 |
| 3524578 | 1,618033988749990000000000000000 | -0,000000000000099031893796564000 |
| 5702887 | 1,618033988749860000000000000000 | 0,000000000000031086244689504400 |
| 9227465 | 1,618033988749910000000000000000 | -0,000000000000018651746813702600 |
| 14930352 | 1,618033988749890000000000000000 | 0,000000000000000000000000000000 |




## Annex 2

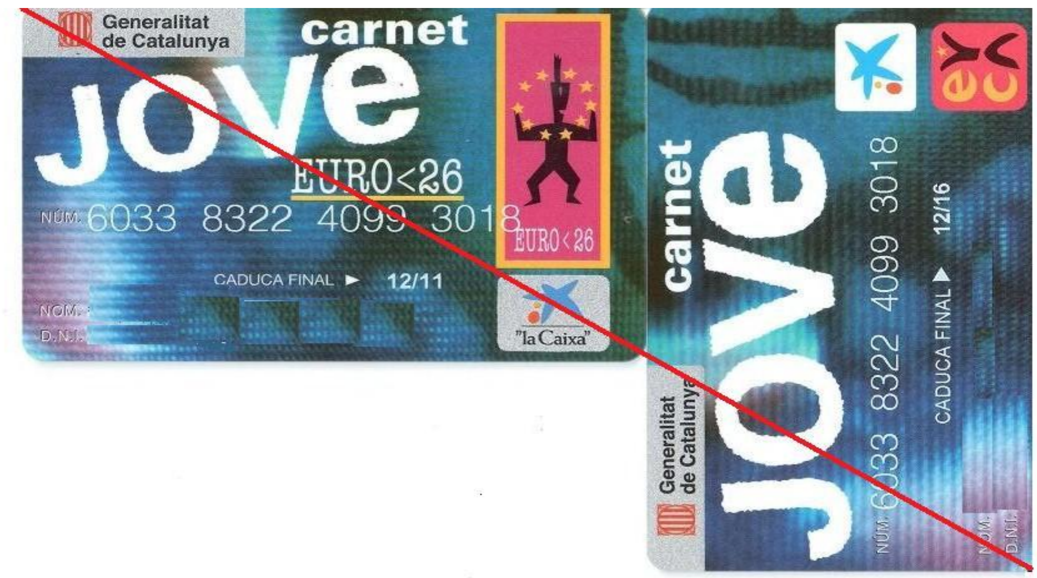
Els primers mil decimals del nombre d'or.

1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024497072072041893911374847540880753868917521266338622235369317931800607667263544333890865959395829056383226613199282902678806752087668925017116962070322210432162695486262963136144381497587012203408058879544547492461856953648644492410443207713449470495658467885098743394422125448770664780915884607499887124007652170575179788341662562494075890697040002812104276217711177780531531714101170466659914669798731761356006708748071013179523689427521948435305678300228785699782977834784587822891109762500302696156170025046433824377648610283831268330372429267526311653392473167111211588186385133162038400522216579128667529465490681131715993432359734949850904094762132229810172610705961164562990981629055520852479035240602017279974717534277759277862561943208275051312181562855122248093947123414517022373580577278

7861600868838295230459264787801788992199020776903895321968198615143780314997411069260886742962267575605231727775203536139 36.

## Annex 3

Comprovem que les targetes de crèdit són rectangles auris, ja que compleixen la propietat 2.




## Annex 4

Altra manera de demostrar que el límit de la successió de Fibonacci és $\Phi$, utilitzant el seu terme general.

El terme general de la successió de Fibonacci el va trobar el matemàtic francès Jacques Binet al 1843, i és:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(-1)^{n+1}\Phi^n + \frac{1}{\Phi^n}\right]$$

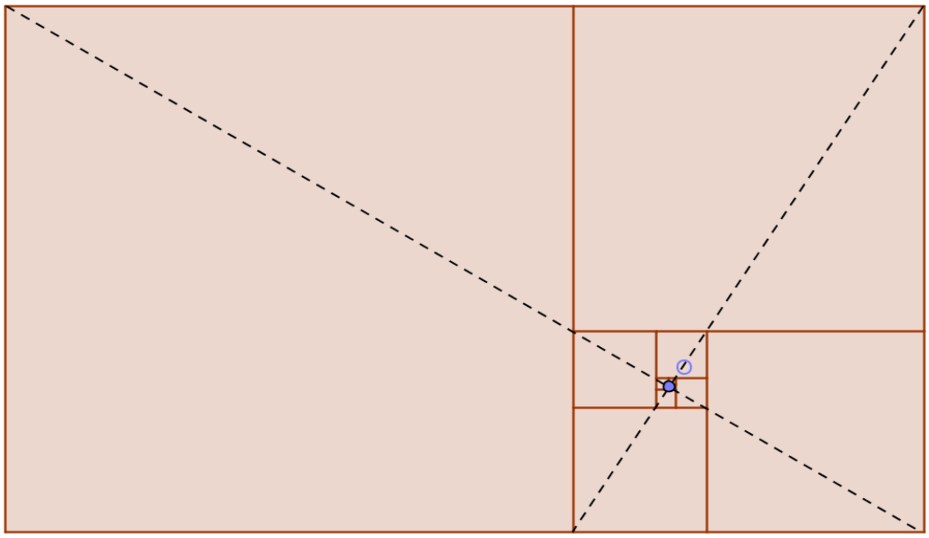
Mitjançant aquesta fórmula es pot demostrar que la successió dels quocients entre un terme i l'anterior de la successió de Fibonacci té per límit el nombre d'or, però és massa difícil:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\Phi$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(-1)^{n+1}\Phi^{\mathrm{n}}+\frac{1}{\Phi^{\mathrm{n}}}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(-1)^{n}\Phi^{\mathrm{n-1}}+\frac{1}{\Phi^{\mathrm{n-1}}}\right]}$$

## Annex 5

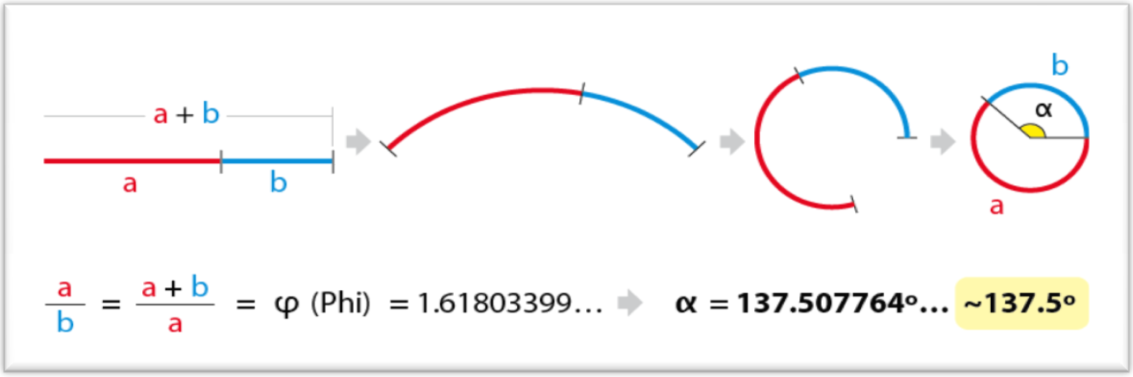
Dibuix on veiem el punt anomenat *"Ull de Déu*", punt on es tallen totes les diagonals dels rectangles auris formats en la figura 19:



# Annex 6

Angle auri:137,5º

L'angle auri és la relació angular existent en un segment en mitja i extrema raó.




Aquest angle és el resultat de la següent relació:

$$360º \cdot \frac{1}{\Phi^2} = \frac{360º}{\Phi^2} \cong 137{,}5º$$

Els 360º representa la volta sencera i l'expressió $\frac{1}{\Phi^2}$ surt del quocient entre el termes de la successió de Fibonacci:

$$\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{1}{\Phi^2}$$

Sabent que $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ dóna Φ, podem afirmar que la relació anterior és certa ja que:

$$\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2}$$