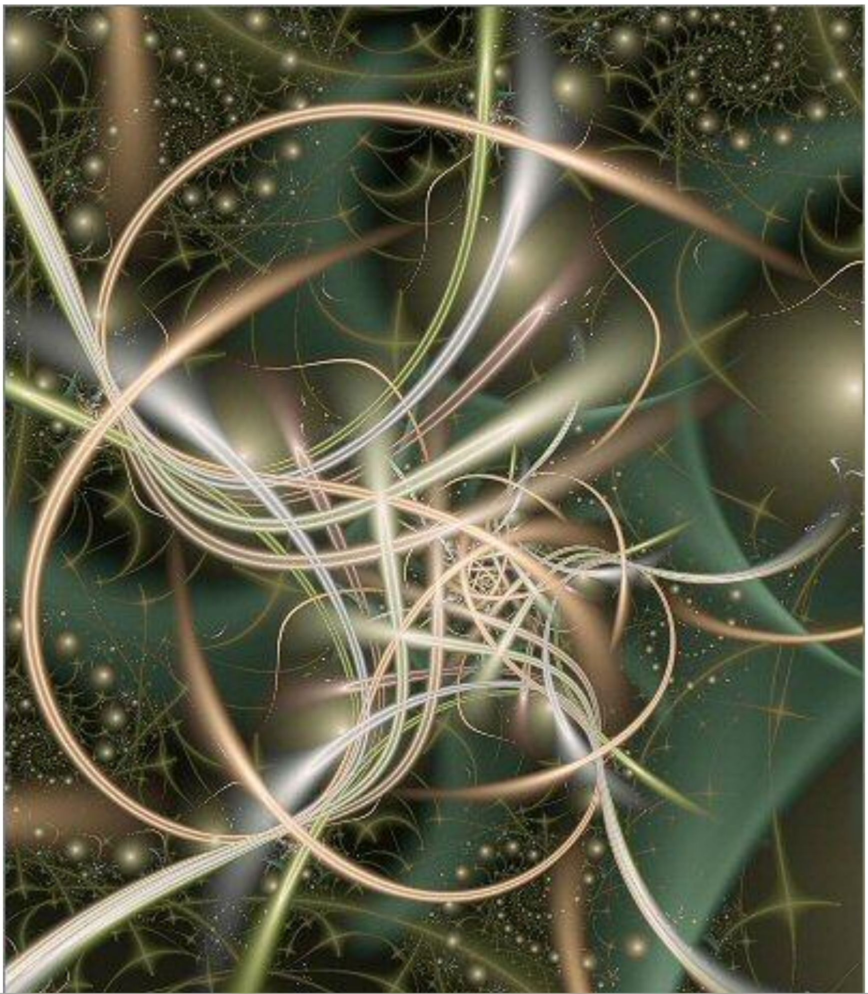


EL MÓN VIST AMB UNS ALTRES ULLS: ELS FRACTALS

2n de Batxillerat

INS Eugeni Xammar

Treball de Recerca

“La geometria fractal canviarà a fons la seva visió de les coses. Seguir llegint és perillós. S’arrisca a perdre definitivament l’inofensiva imatge que té de núvols, boscos, galàxies, fulles, plomes, flors, roques, muntanyes, llamps i moltes altres coses. Ja mai més podrà recuperar les interpretacions de tots aquests objectes que fins ara li eren familiars”

Benoît Mandelbrot

Vull agrair el suport i mestratge de la meva tutora, que m’ha orientat i ajudat en tot moment per l’elaboració d’aquest treball. També vull agrair l’ajuda mostrada per part de la meva família i amics.

Índex

Annexos

1.Introducció

Els fractals, aquest és el tema del meu treball de recerca.

Aquest nou concepte matemàtic em va xocar tan bon punt el vaig sentir. Vaig descobrir-lo gràcies als professors del centre, tot parlant de curiositats matemàtiques per tractar en un treball de recerca. A partir de llavors la meva curiositat va voltar per Internet i vaig investigar més a fons què eren “els fractals”.

Al principi vaig dubtar, ja que aquest és un tema complicat tant d’entendre, com de definir i explicar. Mentre m’informava d’aquella nova geometria matemàtica, anava veient múltiples imatges i vídeos d’impressionants formes i diversos colors. Fins llavors encara no entenia del tot el concepte i, per suposat, desentenia la matemàtica en aquells dibuixos tan rars. Gràcies a l’explicació més extensa dels professors d'aquella geometria, vaig entendre que els diferents nivells d’observació on es podien repetir aquestes difícils formes, eren la tendència a un límit. És a dir, un fractal és una funció a la qual el seu límit és infinit, i per tant la seva escala d’observació podia variar, però sempre reproduint una mateixa forma del fractal. Quan visualment vaig veure una ampliació d’un fractal vaig comprendre la idea general de fractal i la seva relació amb la matemàtica. Però encara tenia moltíssims dubtes: per què és repeteixen aquestes formes, què representen els colors, com s’obtenen aquests gràfics i, aquestes funcions, com es poden estudiar, quines són les seves aplicacions o relacions amb la vida real ... Aquestes preguntes, juntament amb aquelles meravelloses formes irregulars, em van despertar la curiositat.

És complicat donar una definició general dels fractals perquè moltes d’aquestes no es poden aplicar a totes les famílies de fractals existents. Però, la definició general de fractal podria ser: el model matemàtic o objecte real que manté la seva forma essencial, fragmentada i irregular, tot i variant l'escala d'observació. Aquesta és una figura, que pot ser espacial o plana, formada per components infinits. Això dóna lloc a l'extraordinària complicació d'aquestes, ja que cada tros de l'objecte té l'informació necessària per reproduir-lo tot i, la dimensió fractal pot ser fraccionaria.

En aquest treball volem descobrir els fractals des d'un punt de vista més pràctic. Volem analitzar diferents tipus de fractals a partir dels seus gràfics i funcions, i pretenem que sigui un treball molt visual. Volem que el lector se senti atret per aquesta geometria desconeguda fora de l'àmbit científic i matemàtic, que se'n faci una idea només en llegir aquest nom.

També volem afegir informació detallada de què és un fractal, la seva història, la necessitat d'aquesta geometria, les parts d'aquesta, les aplicacions reals i més.

2.Hipòtesi

Els fractals són una geometria que estudien la irregularitat de la natura, fins aquí el que ser jo en començar el treball. Ja que el terme fractal és un terme poc conegut entre la població no matemàtica i, jo també començo de zero, vull aconseguir entendre i poder explicar què són i per a què serveixen els fractals.

Pretenem que aquest treball serveixi per expandir el terme fractal de manera que una persona que temptegi el terme o, fins i tot, que sigui el primer cop que el senti, pugui comprendre amb certa base, després de llegir aquest treball.

Així doncs, jo vull aconseguir aprendre el màxim de coses sobre els fractals i, a la vegada poder-los defensar davant d'aquells que en tinguin dubtes o qüestions. Per tant, la manera d'exposar-la no haurà de ser molt complicada ja que per comprendre i després compartir el coneixement, ha de ser el més fàcil i argumentat possible. Els fractals són molt complexos i, per tant, explicar-los de la manera més senzilla possible o ben argumentats, a vegades no és suficient, així que l'ús d'imatges il·lustratives o explicatives, serà present al llarg del treball.

Quan acabis de llegir aquest treball, espero que hagis entès el terme fractal i que amb l'ajuda d'explicacions i fotografies presents, vegis el món amb una visió més irregular, amb una visió més fractal.

Per altra banda, a la part pràctica, ens hem preguntat: és l'Ametlla del Vallès un fractal? Per respondre a aquesta pregunta ens basarem amb la part teòrica del treball i, intentarem esbrinar si el nostre municipi és un fractal o es comporta com a tal. Volem comprovar si ho és, per mitjà de la dimensió fractal del municipi.

Uns quants s'hauran estranya't, i es deuen preguntar què vol dir la dimensió fractal. Els fractals tenen una propietat especial i, és que la seva dimensió pot ser fraccionària i depèn de la repetició d'elements del fractal segons si es fan més grans o més petits. I quina és la relació entre aquesta dimensió fractal i l'Ametlla? Qualsevol frontera política o natural, forma una línia que no és recta i, per tant, una corba. Aquesta corba, té un comportament fractal, ja que és irregular i, per tant, se'n pot calcular la dimensió. Aquesta dimensió haurà d'estar entre 1 i 2. Tot i que és molt abstracta a dins trobareu la teoria pertanyent per arribar a entendre-ho tot.

Finalment, tot explicant de manera clara i esbrinant si l'Ametlla és un fractal, espero gaudir amb aquest treball i aprendre una nova geometria.

3.Marc teòric

3.1.Fractals

3.1.1.Història i els orígens

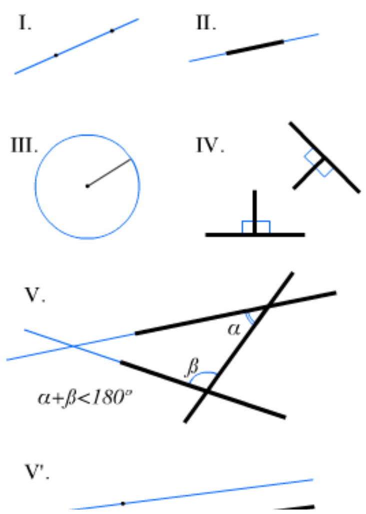
Durant gran part dels dos mil·lennis passats, els éssers humans han vist el nostre món geomètric només de forma euclidiana. És a dir, l'estudi de les propietats geomètriques reals del pla i tridimensional, introduït pels cinc postulats d'Euclides.

Els cinc postulats d'Euclides són enunciats senzills i evidents de la geometria plana. El fet que siguin *evidents* en fa impossible una demostració absolutament rigorosa i s'admeten com a certs sense necessitat de demostrar-los. Els cinc postulats són els següents:

I. Dos punts diferents es poden unir per una recta.

II. Un segment rectilini pot ser allargat indefinidament mitjançant una recta.

III. Donats un segment rectilini i un punt qualsevol, existeix una circumferència de centre aquest punt i radi el segment donat.



5 Postulats d'Euclides. Geometria lineal

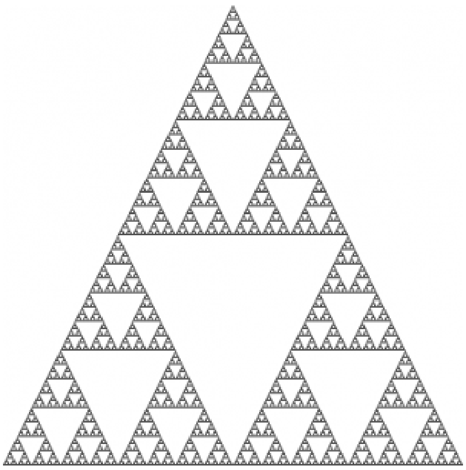
IV. Tots els angles rectes són iguals.

V. Si dues rectes intersequen amb una tercera de manera que la suma dels angles interiors a un costat és menor que dos angles rectes, llavors les dues rectes inevitablement es tallen en el mateix costat si s'allarguen suficientment.

El cinquè postulat, anomenat de les paral·leles, tradicionalment s'ha substituït pel postulat equivalent: *Donats una recta i un punt exterior a la recta, existeix una única recta que conté aquest punt i que és paral·lela a la recta donada*.

Tot i saber que el nostre planeta és de forma esfèrica, els científics han desenvolupat les matemàtiques de la geometria no euclidiana només en els últims 200 anys. De la mateixa manera, només en el segle passat, aquests mateixos, van desenvolupar una manera matemàtica per comprendre la naturalesa, com els flocs de neu, els núvols, les costes, els llamps, els rius, els patrons en la vegetació i la trajectòria de les molècules en moviment brownià[1]. Aquesta branca de les matemàtiques es coneix com geometria fractal.

Un fractal és una forma geomètrica que es pot dividir en parts, cadascuna de les quals és un petit duplicat de la totalitat. Aquesta propietat de reiteració, encara que poden presentar-se a diferent escala i poden estar lleugerament deformades, és l'anomenada autosimilitud. En matemàtiques, un fractal es basa en una equació que se sotmet a una iteració o recursió; és a dir, una repetició de la mateixa. L'objecte no ha d'exhibir exactament la mateixa estructura en totes les escales, però el mateix tipus d'estructures han de ser evidents en totes les escales d'aquesta.



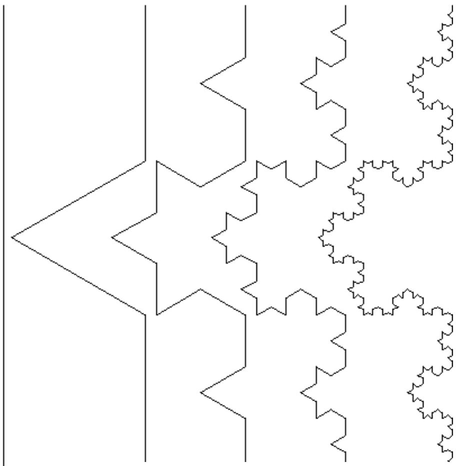
Triangle de Sierpiński. Apreciació de l'autosimilitud fractal

[1] **Moviment Brownià:** Agitació contínua de partícules de dimensions microscòpiques (~1μm) en suspensió dins d'un fluid .

Fins als anys 70, la geometria fractal ha estat, rellevada als peus de pàgina o marges de llibres. Quan algun matemàtic es trobava un gràfic estrany, el considerava com una anècdota i no es parava a estudiar-lo.

Els fractals van començar a inquietar els matèmatics al segle XVII quan el matemàtic i filòsof Gottfried Leibniz va considerar que només la línia recta tenia autosimilitud recursiva. Leibniz va dir que "la línia recta és una corba que té totes les seves parts similars a la seva totalitat". Estava posant les bases de la topologia[2]. Leibniz va proposar al seu amic Des Bosses que s'imaginés un cercle, llavors que hi inscrivís tres cercles congruents amb màxim radi possible. Aquest procés es pot continuar infinitament, del que es dedueix una bona idea d'autosimilitud.

Però no va ser fins l'any 1872 quan apareix una funció considerada fractal per la seva gràfica, quan Karl Weierstrass dóna un exemple de funció amb la no-intuïtiva propietat de poder existir en totes les parts contínues però no diferenciable en cap punt. Trenta-dos anys més tard, Helge von Koch es va expandir en el treball de Weierstrass, proporcionant una geomètrica definició d'una funció similar. Aquesta es va anomenar, corba de Koch. Al 1915, Wacław Sierpiński construeix el seu triangle i, un any més tard, la seva catifa. Al 1919 Hausdorff va idear un mètode per mesurar les dimensions i mesures dels fractals, l'anomenada mesura i dimensió de Hausdorff[3]. L'any següent, fixant-se en particular per la dimensió Hausdorff 1, va crear la teoria geomètrica de la mesura.



Corba de Koch (fases reiterades).

Gastón Julia va ser un dels grans precursors de la matemàtica fractal. Nascut al 1893 va ser ferit a la cara durant la Primera Guerra Mundial. Durant

[2] **Topologia:** és una branca de les matemàtiques que estudia les propietats espacials i les deformacions bicontínues (dues dimensions) de l'espai.
[3] **Dimensió de Hausdorff:** és una generalització mètrica del concepte de dimensió d'un espai topològic, que permet definir la dimensió d'una dimensió fraccionaria (no-entera) per a un objecte fractal.

la seva estància a l'hospital es va interessar per les interaccions de funcions complexes i finalment va publicar l'article "*informe sobre la iteració de les funcions racionals*" amb quasi 200 pàgines a la revista matemàtica francesa, Journal de Mathématiques Pures et Apliques. Gràcies a això, li va merèixer un guardó per part de l'Acadèmia de ciències de França. En aquest article es mostrava les bases de la creació del conjunt de Julia.

Les funcions iterades en el pla complex també van ser investigades cap a finals del segle XIX i a principis del XX per Henri Poincaré, Felix Klein, Pierre Fatou.

La idea de corbes autosimilars va ser proposada també per Paul Pierre Lévy, qui, en el seu escrit *Corbes i Superfícies Planes o Espacials Consistents en Parts Similars al Tot* de 1938, va descriure una nova corba fractal, la corba C de Lévy. Georg Cantor també va donar exemples de subconjunts de la línia real amb propietats inusuals. Aquest conjunt de Cantor també va ser reconegut com a fractal.

El 1963 Edward Lorenz, meteoròleg, intuïa l'efecte papallona en arrodonir uns decimals en el seu programa d'ordinador que simulava situacions meteorològiques. En variar lleugerament el número de decimals després de la coma i introduir-los en el seu ordinador, el programa retornava uns resultats sorprenentment diferents als anteriors. Era l' inici del caos matemàtic.


Efecte papallona (dibuix representatiu)

Edward Lorenz va exemplificar el seu descobriment del caos a partir de l'intercanviï de decimals. Aquest és l'efecte papallona: aquesta expressió prové del fet que el moviment de les ales d'una papallona en un remot lloc de la Terra, pot originar un tornado a milers de quilòmetres lluny. Exageracions a part, el caos demostra que unes lleugeres variacions en les condicions inicials poden originar resultats impredictibles.

Tot i això, aquest petit canvi demostra que el caos, provinent de variacions infinitesimals, té un cert ordre i per tant, aquest és determinat i no és fruit de l'atzar.

Cap a la dècada dels anys 60 i posteriors, Benoît Mandelbrot va treballar i, per fi desxifrar, la nova geometria no euclidiana, els fractals. Ell ha estat el pare de la geometria fractal i l'home que va marcar les bases i característiques d'aquests.


Benoît Mandelbrot, Març del 2010

Benoît Mandelbrot va néixer a Polònia el 1924 en una família amb molta tradició acadèmica. El seu pare, però, es guanyava la vida comprant i venent roba, mentre que la seva mare era metgessa. Des de ben petit, Mandelbrot va ser iniciat en les matemàtiques pels seus dos oncles.

La família Mandelbrot va emigrar a França el 1936 i el seu oncle Szolem Mandelbrojt , que era professor de matemàtiques al *Collège de France* i el successor de Hadamard, es va fer càrrec de la seva educació. De fet, la influència de Szolem Mandelbrojt va ser alhora positiva i negativa des que era un gran admirador de Hardy [4] i la seva filosofia sobre les matemàtiques. Això va provocar una reacció per part de Mandelbrot en contra de la matemàtica pura, encara que com va dir el propi Mandelbrot, ell ara entenia com Hardy, amb un profund sentit pacifista, li va fer témer que les matemàtiques aplicades, en les mans equivocades, podrien ser utilitzades per fer mal en temps de guerra.

Mandelbrot estudiava al Liceu o Escola secundària de París quan la Segona Guerra Mundial esclatà. Es va traslladar al sud de Tulle, on va assistir al Liceu a Clermont-Ferrand. Tot i això, la seva mare l'intentava apartar de l'escola i llocs públics, a causa de la gran quantitat de malalties i epidèmies de

[4] **G. H. Hardy**: matemàtic que s'identificava amb les matemàtiques pures, pel seu odi a la guerra i els usos militars a les que les matemàtiques havien estat aplicades.

l'època. Com recordaria més tard, "la pobresa i el desig de mantenir-se allunyat de les grans ciutats per maximitzar les possibilitats de supervivència, va designar a la millora de comprensió de les matemàtiques, i que no ho hagués pogut fer la universitat, així que sóc essencialment autodidacta en moltes aspectes".

Mandelbrot va estudiar a l' École Polytechnique (1945-1947) a París i a l'Institut de Tecnologia de Califòrnia (1947-1949). Ell va estudiar per al seu doctorat a París entre 1949 i 1952 i després va realitzar una investigació durant un any a l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton, Nova Jersey. De 1958 a 1993 va treballar per IBM[5] amb el seu company Thomas J. Watson al Research Center de Nova York, convertint-se en un investigador el 1974. A partir de 1987 va ser professor a la Universitat de Yale , convertint-se en el professor estrella de Ciències Matemàtiques el 1999.

Durant el seu pas per l'IBM va poder, finalment, aconseguir el seu objectiu, ser el primer a trobar l'ordre allà on tothom havia vist només el caos.

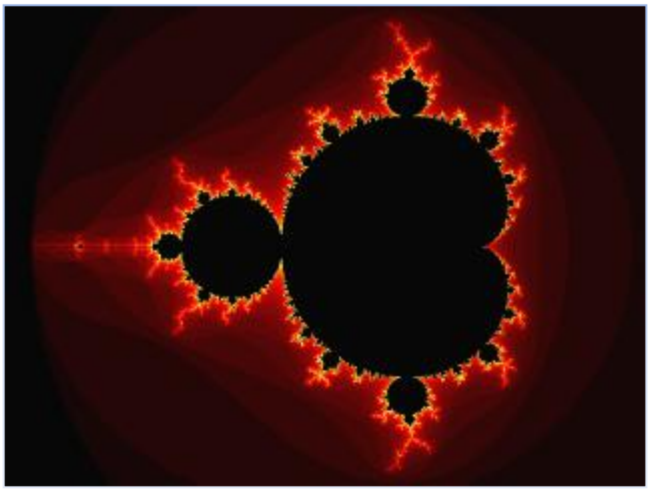
Com Mandelbrot va dir: *"La meva aposta salvatge va començar a donar els seus fruits durant 1961-1962. Llavors, no hi havia dubte en la meva ment que jo havia identificat un nou fenomen present en molts aspectes de la natura, però tots els exemples eren perifèrics en els seus camps".* I va afegir*: "Molts anys havien de passar abans que formulés la geometria fractal, ja que portava molt de temps preocupat pels aspectes fractals de la naturalesa, amb la recerca d'exemples i amb la construcció de teories al seu voltant".* La geometria havia revifat després d'anys de desert analític.

El 1967 Mandelbrot va plantejar la pregunta: "Quant mesura la costa de Gran Bretanya". La resposta habitual era: tot depèn, però ell va ser capaç de demostrar que qualsevol línia corba, com ara una costa, es pot mesurar utilitzant la dimensió fractal.

[5] **International Business Machines** (**IBM**): És una empresa multinacional d'Estats Units tecnològica que fabrica i comercialitza hardwares i softwares per ordinadors. Aquí Mandelbrot va poder crear els primers programes informàtics, per representar gràficament, els primers fractals.

Mandelbrot va resumir la nova geometria: *"Hem concebut, desenvolupat i aplicat en moltes àrees una nova geometria de la naturalesa, que troba ordre en formes i processos caòtics"*. Aquest terme va créixer sense nom fins al 1975, quan va crear una nova paraula per referir-s'hi, geometria *fractal*, de la paraula llatina *fractus,* per irregular i trencat*.*

Mandelbrot descriu els fractals com *"Mitjà geomètric entre l'ordre excessiu d'Euclides i el caos geomètric de les matemàtiques en general"*. Justifica la definició, amb els exemples següents: *"Els núvols no són esferes, les muntanyes no són cons, les costes no són cercles, l'escorça no és llisa ni els llampecs són línies rectes"*.



Conjunt de Mandelbrot

Mandelbrot va il·lustrar la seva definició matemàtica amb un impactant conjunt visual. Aquestes imatges capten la imaginació popular, desvetllant a molta gent el significat del terme "fractal". Ell va fer el primer gran pas en publicar el llibre sobre la qual hi resten les bases de la matemàtica fractal: *The Fractal Geometry of Nature* (La geometria fractal de la natura 1977, 1982, 1983).

Benoît Mandelbrot va morir el 14 d'octubre de 2010 a Massachusetts, EUA, després de rebre gran quantitat de guardons, premis i honors.

Al 1987, el matemàtic anglès Michael F. Barnsley va descobrir la transformació fractal, capaç de detectar fractals en fotografies digitalitzades. Allò va permetre crear la compressió fractal d'imatges, amb resultats acceptables però inferiors a la compressió JPEG[6].

[6] **JPEG:** acrònim de (Joint Photographic Experts Group), és un algorisme dissenyat per a comprimir imatges.

Probablement el verdader protagonista de la història fractal és l'ordinador, aquell gran invent que revolucionà el món i permeté donar passos de gegant en nombroses ciències, com ara la matemàtica. La manca de tecnologia i recursos necessaris van ser patits pels matemàtics pioners en el món fractal, ja que no van poder observar la bellesa de molts objectes que van descobrir. Potser si no hagués sigut per l'ordinador, els fractals seguirien sent monstres gràfics destinats als peus de pàgina.

3.1.2.Necessitat d'aquesta geometria

La geometria euclidiana ha simplificat les irregularitats. En concret, ha linealitzat les lleis, n'ha fet una aproximació i ha regularitzat les formes geomètriques, és a dir, ha suposat de suaus o llises les superfícies que en la realitat no ho són.

Fa escassament mig segle, s'ha descobert que la natura és caòtica, les seves lleis de vegades es comporten d'una manera determinista i inconcreta de manera que un lleuger canvi en un lloc de la Terra pot tenir conseqüències previsibles però indeterminades. Dins la natura podem trobar exemples que d'un petit canvi en sorgeixi un de més gros, com pot ser l'augment de temperatura, una ràfega d'aire, la modificació del relleu terrestre, etc. Aquests petits canvis juntament amb la geografia o comportaments físics certifiquen que la naturalesa és irregular, i per tant, la mesura amb elements regulars és molt imprecisa.

Els fractals neixen quan l'ésser humà vol trobar una geometria més apropiada per descriure els objectes de la natura, ja que amb la geometria euclidiana no els podien representar. Aquesta geometria és la part de la matemàtica que s'encarrega de trobar un ordre i una regla en aquest caos natural, tal com Dedekind va racionalitzar el nombre irracional.

En aquesta recerca, Mandelbrot, principal descobridor i estudiós de la geometria, es va trobar una sèrie d'objectes matemàtics (conjunt de Cantor, triangle de Sierpiński, corba de Peano, floc de neu de Koch, etc.) que havien estat considerats curiositats dins les matemàtiques, però que no havien tingut major interès fins al moment. Mandelbrot s'adonà que tots tenien aspectes en comú, la iteració i auto-semblança.

Costa amb tendència fractal

3.1.3.Què és un fractal?

El fractal és un terme molt difícil de descriure perquè no té una definició precisa i no es pot aplicar a totes les famílies de fractals existents.

Tots els “fractals” tenen en comú la iteració d’un procés geomètric elemental que conté la informació necessària per reproduir la funció original sencera.

El concepte genèric el podem definir des de diferents àmbits:

<u>Geometria:</u> Són objectes geomètrics compostos d’elements o parts també geomètriques de grandària i orientació variable i d’aspecte semblant. Estan formades per figures de diferent dimensió generades per un procés d’iteració. Aquesta dimensió no és entera, és fraccionària.

Matemàtiques: Són equacions o funcions infinitesimals, generades per la repetició constant d'un càlcul simple.

Visualització: És la forma idònia per veure l'aproximació a l'infinit de manera visual. Tot i que a les gràfiques no podem observar la increïble dificultat i complexitat de la funció, podem observar la iteració.

Matèria: Podria ser el prototip complex d'un objecte. Ens permetria mostrar major detall i diferent escala. No es basa en la dificultat de producció, sinó en la millora de la precisió mostrada.

Natura: És l'única geometria capaç d'explicar les formes de la natura, ja que aquesta no està constituïda per formes regulars i perfectament geomètriques.

Aquestes definicions anteriors poden ser difícils de comprendre i poden semblar abstractes, per això podem recórrer als paràmetres d'aquesta geometria d'una manera més general.

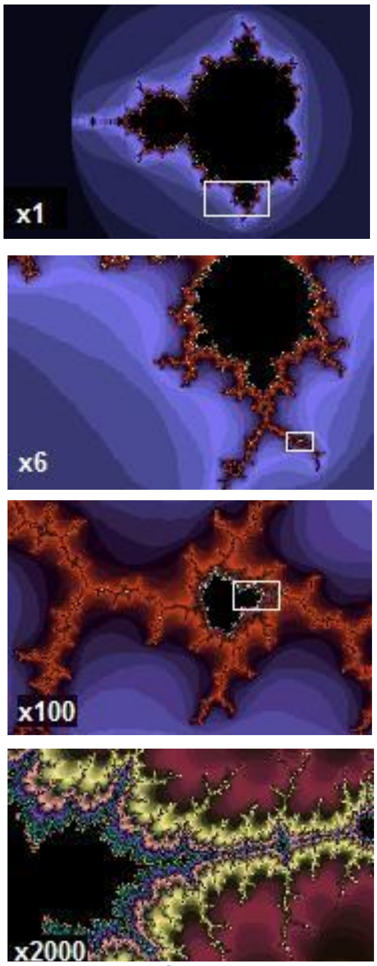
La paraula "fractal" prové del llatí fractus, que significa "fragmentat", "fracturat", o simplement "trencat", nom molt apropiat per a objectes, la seva dimensió dels quals, és fraccionària. El terme va ser designat per Benoît Mandelbrot el 1977 aparegut en el seu llibre *The Fractal Geometry of Nature*, a l'estudi dels objectes fractals.

Benoît Mandelbrot, durant la seva investigació, ho definia com: *"El mitjà geomètric entre l'ordre excessiu d'Euclides i el caos geomètric de les matemàtiques en general".*

Així doncs, per trobar una definició més clara i entenedora, començarem designant les **propietats** de tot fractal, tal com va escriure Mandelbrot al seu primer llibre.

Tots els fractals tenen una dimensió fraccionària, és a dir, no tenen una dimensió entera o racional, com les figures geomètriques euclidianes. Això vol dir que si una línia té dimensió 1, un pla té dimensió 2, i un volum té dimensió 3, als fractals apareixen dimensions que es poden escriure en forma de fracció. Una dimensió 7/4, per exemple, significa un nombre de 1.75 i, per tant, correspon a un cos que es troba a cavall entre una línia i un pla.

Tots els fractals tenen la propietat de l'infinitud en el càlcul i representació, és a dir, els fractals es consideren infinits perquè a mesura que s'augmenta o disminueix la precisió de mesura, observem la variació de longitud i perímetre i això sense tenir fi. Aquesta infinitud ha estat relacionada amb el caos. Aquest caos es dóna quan no hi ha una visió clara d'on estàs, quan no pots veure el que passarà en l'instant següent, quan la seqüència pot dependre de l'instant anterior, etc ...Per exemple, en el cas del fum en un corrent d'aire. La trajectòria que agafarà aquest és imprevisible perquè dependrà de molts factors.



Representació d'infinitud i d'autosimilitud. Fins i tot amb 2000 augments el fractal de Mandelbrot mostra en tot detall similituds amb l'original

L'altra propietat és l'autosimilitud. Això és que les seves parts tenen la mateixa forma o estructura que el tot, encara que aquestes poden presentar-se a diferent escala i poden estar lleugerament deformades. Així que les diferents escales de detall tenen formes similars.

El fet que gaudeixi d'autosimilitud significa que l'objecte fractal no depèn de l'observador. Si prenem algun fractal podem comprovar que en fer un augment doble el dibuix és exactament igual a l'inicial i si l'augmentem 1000 vegades mantindrà la mateixa forma. Si augmentem *n vegades* el dibuix que obtenim és igual a l'inicial ja que les parts s'assemblen al tot.

Un conjunt o objecte és considerat fractal, quan la seva grandària creix a mesura que l'escala de l'instrument de mesura disminueix. Per exemple: si és C una corba qualsevol i k l'escala de l'instrument de mesura, quan k es fa infinitament petit i C tendeix a infinit llavors es considera fractal.

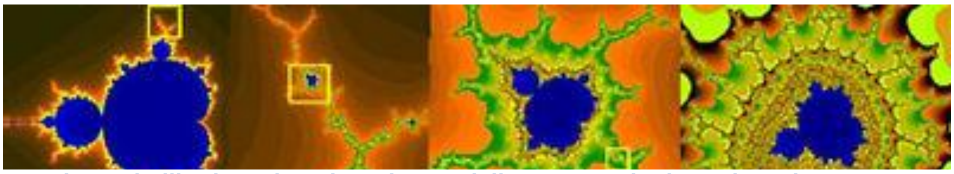
$$\lim_{k \to -\infty} C = \infty$$

Els fractals poden presentar tres tipus d' **autosimilitud**:

- Autosimilitud exacta: aquest és el tipus més restrictiu d'autosimilitud i exigeix que el fractal sigui idèntic a diferents escales. Sovint es troba en fractals definits per sistemes de funcions iterades (IFS).

- Quasiautosimilitud: exigeix que el fractal sembli aproximadament idèntic a diferents escales. Els fractals d'aquest tipus contenen còpies menors i distorsionades d'ells mateixos. Matemàticament, D.Sullivan va definir el concepte de conjunt quasiautosimilar a partir del concepte de quasi-isometria. Els fractals definits per relacions de recurrència són normalment d'aquest tipus.

- Autosimilitud estadística: és el tipus més dèbil d'autosimilitud, exigeix que el fractal tingui mesures numèriques o estadístiques que es preservin amb el canvi d'escala. Els fractals aleatoris són exemples de fractals d'aquest tipus.



Quasiautosimilitud en el conjunt de Mandelbrot: en variar l'escala s'obtenen còpies del conjunt amb petites diferències

Els fractals, que com anteriorment hem esmentat, són molt diferents entre ells i és per això que no podem concloure una definició universal d'aquests. Hem vist que tot fractal per ser designat ha de seguir les tres propietats bàsiques: dimensió fraccionària, infinitud i autosimilitud.

Seguidament s'exposen els **tipus de fractals**, organitzats segons característiques comunes:

Sistema iterat de funcions o conjunt de regles: aquests tenen una regla de punt fix geomètric, és a dir, no necessariament ha de tenir funció o equació sinó que el comportament caòtic d'aquests és modelat per un conjunt de regles**.**

Exemples: conjunt de Cantor, Triangle de Sierpiński, corba de Peano, floc de neu de Koch, corba del drac.

Els fractals recurrents o no lineals: els fractals són definits per una relació de recurrència en cada punt d'un espai (com el pla complex[7]), és a dir, utilitzant el resultat d'una equació com a valor inicial de la següent i així s'obté un conjunt de punts. La representació del seguit de punts forma gràficament unes imatges meravelloses.

Un exemple n'és el conjunt de Mandelbrot o el conjunt de Julia.

Fractals aleatoris: generats per processos estocàstics[8]. Els fractals estocàstics estan relacionats amb la teoria del caos, és a dir, quan diem que un fractal segueix un procés estocàstic volem dir que té una autosimilitud irregular perquè la variació no és constant. Els fractals aleatoris tenen una gran aplicació pràctica, ja que són els més apropiats per descriure diversos objectes irregulars del món real.

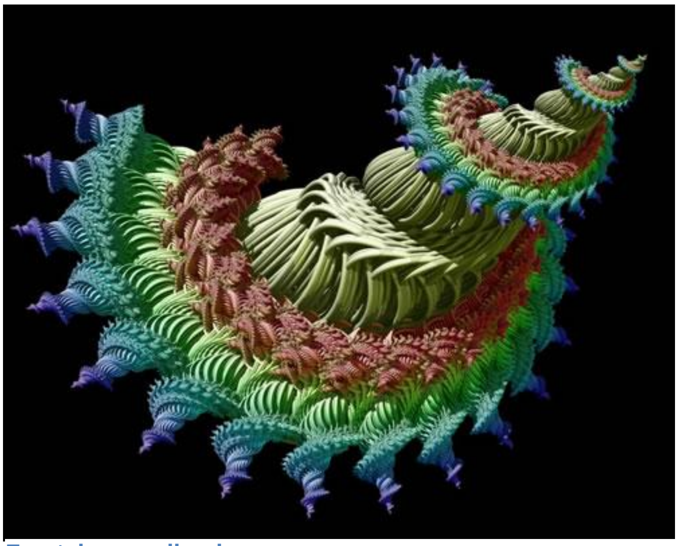
Exemples en són els núvols, muntanyes, turbulències, costes, arbres, un bròquil, un cargol de mar...

[7] **Pla complex**: és una forma de visualitzar l'espai dels nombres complexos. Pot entendre's com un pla cartesià, en el que la part real està representada a l'eix x i la part imaginària a l'eix y.

[8] **Procés estocàstic**: és un concepte matemàtic que serveix per caracteritzar una successió de variables aleatòries que evolucionen en funció d'una altra variable, generalment, el temps.

- Fractals oscil·lants: existeixen uns tipus de fractals derivats del mètode de Júlia o de Mandelbrot, anomenats fractals oscil·lants, ja que de forma alternativa s'iteren dues o més funcions diferents.

Podem dir, doncs, que bàsicament hi ha dos tipus de fractals: els que hem creat nosaltres, que serien tant els creats només per ordinador com en els que no és imprescindible tenir un ordinador o equacions per crear-los i els que trobem a la natura. Tots tenen les mateixes propietats, però els que trobem a la natura no són perfectes. Tot i això, algunes fonts d'informació no consideren els fractals que trobem a la natura com a fractals, sinó com a objectes que presenten algunes de les propietats dels fractals.


Fractal per ordinador

Per tant, veiem que el llenguatge fractal és un llenguatge adequat per descriure la realitat del món, i per estudiar fenòmens complexos que no ens ensenyen a l'escola com: l'estructura d'una muntanya, que no és un con, la disposició d'un arbre, que no és un cilindre... Tot i que, aquesta no és la seva única utilitat, nosaltres convivim amb gran quantitat d'objectes ordinaris que, degut a la seva estructura o comportament, es consideren fractals naturals, tot i que no els reconeixem així. En són un exemple els núvols, muntanyes, costes, arbres, rius, vegetals... Tots aquests objectes o elements són considerats fractals naturals, tot i que són finits i, per tant, no ideals, al contrari d'un fractal ideal que gaudeix d'infinitud.

Cal dir també que els fractals són un dels llocs on les matemàtiques, la ciència i l'art van junts. Ens demostren visualment la relació entre les estructures matemàtiques abstractes i la realitat de l'univers i la natura. També ens permeten veure la complexitat del caos interaccionant amb l'ordre.

La definició final aportada per Mandelbrot, pare dels fractals, és: *"Forma molt irregular o extremament interrompuda i fragmentada, sigui quina sigui l'escala d'observació i d'examen, que conté elements distintius, les escales dels quals són molt variades i que abracen una extensa gamma "*.

Definicions senzilles extretes d'assaigs i llibres, i cites relacionades amb el tema, totes traduïdes al català:

- *Models infinits comprimits d'alguna manera en un espai finit.* (Anònim)

- *Bellíssims i fascinants dissenys de l'estructura i complexitat infinita.* (Anònim)

- *De les lleis més simples neixen infinites meravelles que es repeteixen indefinidament.* (Benoît Mandelbrot)

- *La imaginació es cansa abans que la naturalesa.* (Blaise Pascal)

- *Un arbre està compost d'arbres petits.* (Delacroix)

- *La geometria fractal canviarà a fons la seva visió de les coses. Seguir llegint és perillós. S'arrisca a perdre definitivament l'inofensiva imatge que té de núvols, boscos, galàxies, fulles, plomes, flors, roques, muntanyes, llamps i moltes altres coses. Ja mai més podrà recuperar les interpretacions de tots aquests objectes que fins ara li eren familiars.* (Benoît Mandelbrot)

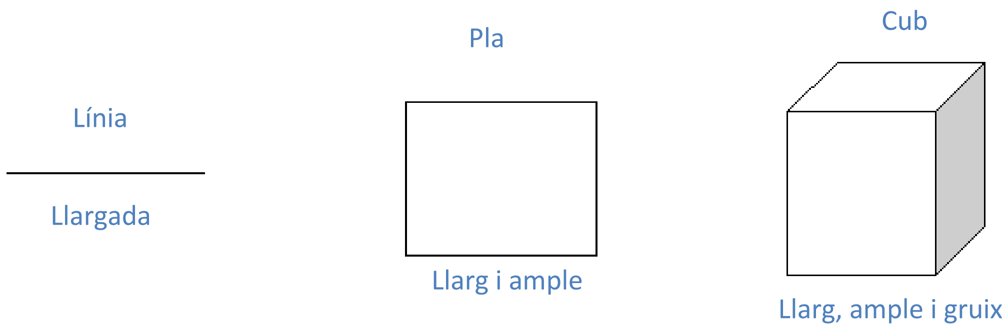
- *Crec que el coneixement científic té propietats fractals: que per molt que aprenem, el que queda, per petit que sembli, és tan infinitivament complex com el tot pel que comencem. Aquest, crec jo, és el secret de l'univers.* (Isaac Asimov)

3.1.4.Dimensió

Actualment nosaltres vivim en una dimensió euclidiana i, ha simple raonament, podem comprendre que les diferents dimensions poden ser primera, segona, tercera... Totes aquestes són enteres. Això és fals ja que actualment hi ha gran varietat de dimensions, des d'un punt de vista matemàtic. En són un exemple, la dimensió vectorial, la topològica, la fractal o euclidiana.

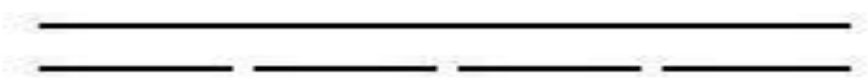
Nosaltres volem aconseguir definir la dimensió fractal i, per això, necessitem entendre el concepte de dimensió.

Partint de la dimensió euclidiana o tradicional, on un punt és adimensional, una línia té dimensió 1, un pla dimensió 2 i un cub 3, estudiarem la dimensió fractal. En un principi, ens hem de preguntar perquè és així i veure si aquests fets són certs.



Sovint es diu que una línia té dimensió 1 perquè només hi ha una manera de moure's en una línia. De la mateixa manera, el pla té dimensió 2 perquè hi ha dues direccions per on es pot moure. Però, hi ha dues direccions en una línia (cap enrere i cap endavant) i un nombre infinit en el pla. El que s'està intentant dir és que, en el pla, hi ha 2 direccions linealment independents. Per descomptat, és cert, però ja que la noció d'independència lineal és bastant difícil de comprendre, solem dir que el pla és bidimensional perquè té dues dimensions, longitud i amplada, de la mateixa manera que un cub és tridimensional, ja que té tres dimensions, longitud, amplada i alçada. Aquesta és una noció vàlida tot i que no s'expressa explícitament en el llenguatge matemàtic.

I doncs, per què una línia és unidimensional i el pla és de dues dimensions? Tingueu en compte que aquests dos objectes tenen autosimilitud. Podem trencar un segment d'una recta en 4 intervals autosimilars, cada un amb la mateixa longitud, i pot ser augmentada per un factor de 4 per produir el segment original. En general, podem dividir un segment de línia en N parts autosimilars, cadascuna amb factor d'augment N.

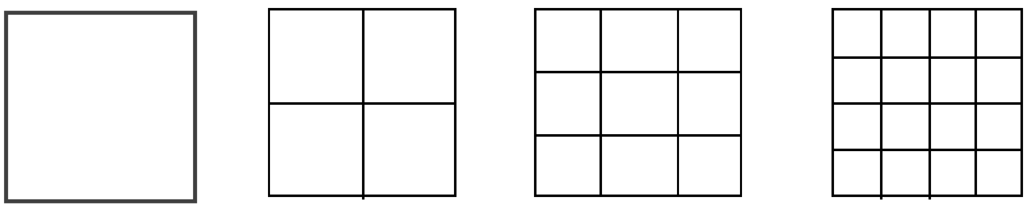


N = 1

N = 4

Un quadrat és diferent, el podem descompondre en 4 quadradets autosimilars i aquí, el factor d'ampliació és 2. Sucessivament, podem trencar el quadrat en 9 quadradets autosimilars amb factor d'augment 3. Clarament, el quadrat pot ser dividit en N^2 còpies autosimilars de si mateix, cada un dels quals ha de ser augmentat en un factor de N per produir la figura original.

Pla $\longrightarrow N^2 \longrightarrow$ N= nombre peces autosimilars per costat

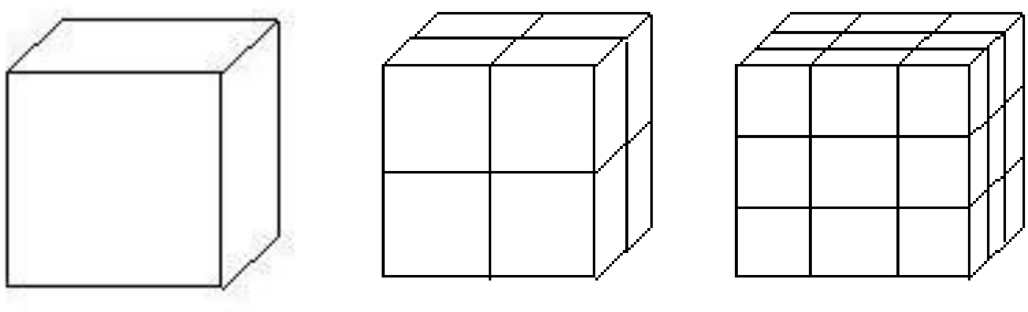


$1^2 = 1$ $2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$

Finalment, es pot descompondre un cub en N^3 parts autosimilars, cadascuna de les quals té un augment en factor de N.

Cub $\longrightarrow N'^3 \longrightarrow$ N'= nombre peces autosimilars per costat

$1^3 = 1$ $2^3 = 8$ $3^3 = 27$



Però fins aquí encara no hem justificat cap dimensió, per tant, una forma alternativa d'especificar la dimensió d'un objecte que presenta autosimilitud és bàsicament l'exponent del nombre de peces autosimilars amb N. Per això, necessitem logaritmes. Recordeu que, per els cossos plans, obtenim peces autosimilars quan augmentem el factor N (N^2). Aleshores podem escriure, que la dimensió d'un quadrat és:

$$\text{Dimensió del quadrat} = \frac{\text{Log (nombre de peces autosimilars)}}{\text{Log (factor d' augment)}} =$$

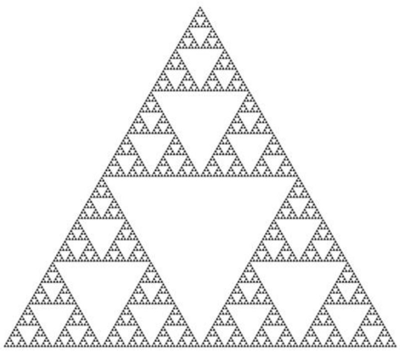
$$= \frac{\text{Log } N^2}{\text{Log } N} = \frac{2 \text{ Log } N}{\text{Log } N} = 2$$

De la mateixa manera, la dimensió d'un cub és:

$$\text{Dimensió del cub} = \frac{\text{Log (nombre de peces autosimilars)}}{\text{Log (factor d' augment)}} =$$

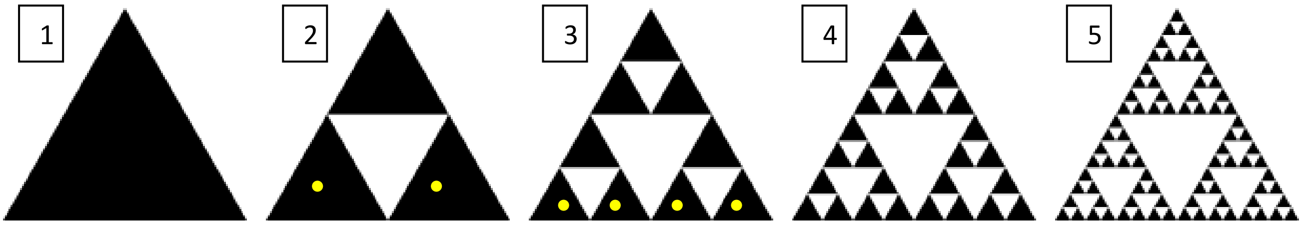
$$= \frac{\text{Log } N^3}{\text{Log } N} = \frac{3 \text{ Log } N}{\text{Log } N} = 3$$

Comprenent la definició de dimensió en cossos de la geometria euclidiana, ens disposem a descriure i justificar la dimensió fractal. Amb aquesta dimensió trobarem que els resultats de dimensió seran decimals i, per tant, el procés per arribar-hi pot ser un pèl més complicat.



Per explicar la dimensió fractal ens ajudarem amb l'exemple del triangle de Sierpiński. Aquest fractal em va despertar la curiositat des del principi, ja que a simple vista no t'imagines que tingui una dimensió fractal, tot i la seva extensa autosimilitud amb tendència a l'infinit.

Seguidament mostrarem les primeres fases de la iteració del fractal, per que ajudi a l'hora de descriure-les. Estan modificades gràficament, per millor comprensió.



5 primeres fases de la iteració del fractal, Triangle de Sierpiński.

El triangle de Sierpiński és un fractal on, en les primeres fases d'aquest, es veu molt clar les peces autosimilars i el factor d'augment. Com posteriorment mostrarem en els càlculs, anem a verificar les peces autosimilars i el factor d'augment en diferents fases o iteracions, segons la imatge anterior.

Fase 1:

No hi ha iteració i és d'on partim, per tant, peces autosimilars 1 (ella mateixa) i el factor d'augment és 1, ja que si fos per 0 no hi hauria fractal, i qualsevol nombre dividit entre 1 és ell mateix.

Fase 2:

Aquí comencem a iterar i podem observar 3 peces autosimilars (trianglets en negre) i un factor d'augment 2, ja que per cada costat s'ha designat dos triangles petits (marcats amb una rodoneta interior).

Fase 3:

Segueix la iteració i es pot comptar que hi ha 9 peces autosimilars (trianglets en negre) i un factor d'augment 4, ja que per cada costat, han sorgit quatre triangles petits (marcats amb una rodoneta interior).

Fases següents:

La iteració persisteix i és infinita, així que cada cop es pot anar designant a triangles més petits. D'aquesta manera, sabent les peces autosimilars i els factors d'augment, volem esbrinar quina és i el per què de la dimensió fractal amb l'exemple d'aquest triangle.

Partint de la definició anterior, de la dimensió fractal en un objecte autosimilar:

$$\text{Dimensió d'un fractal autosimilar} = \frac{\text{Log (nombre de peces autosimilars)}}{\text{Log (factor d' augment)}}$$

Volem calcular la dimensió fractal del triangle de Sierpiński, la qual anomenarem S. El triangle consta de 3 peces autosimilars i 2 factors d'augment. Així que la dimensió fractal és:

$$\text{Dimensió de S} = \frac{\text{Log (nombre de peces autosimilars)}}{\text{Log (factor d' augment)}} =$$

$$= \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2} \approx 1{,}585$$

De manera que la dimensió S està entre 1 i 2. Però a la vegada també es compon de 9 peces autosimilars i 4 factors d'augment. No hi ha problema:

$$\text{Dimensió de S} = \frac{\text{Log (nombre de peces autosimilars)}}{\text{Log (factor d' augment)}} =$$

$$= \frac{\text{Log } 9}{\text{Log } 4} = \frac{\text{Log } 3^2}{\text{Log } 2^2} = \frac{2 \text{ Log } 3}{2 \text{ Log } 2} = \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2} \approx 1{,}585$$

Per tant, qualsevol iteració del triangle de Sierpiński tindrà la dimensió S, ja que irromp en 3^{M} peces autosimilars amb factor d'augment 2^{M}, de manera que tornarem a tenir:

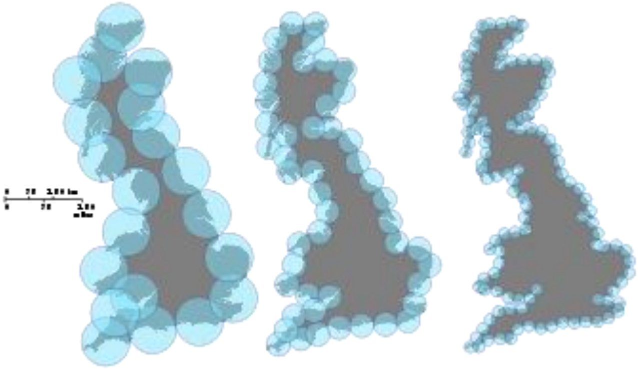
$$\text{Dimensió de S} = \frac{\text{Log (nombre de peces autosimilars)}}{\text{Log (factor d' augment)}} =$$

$$= \frac{\text{Log } 3^{M}}{\text{Log } 2^{M}} = \frac{M \text{ Log } 3}{M \text{ Log } 2} = \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2} \approx 1{,}585$$

La dimensió fractal és una mesura tan complicada que les peces autosimilars no necessariament han de ser idèntiques sinó que poden ser semblants. Els fractals poden arribar a ser molt complicats ja que, en alguns casos són molt irregulars.

Per tant, la dimensió fractal es refereix a tot objecte geomètric que ocupa un lloc a l'espai on està immers i on la seva dimensió és fraccionària.

Al món real, el càlcul fractal és molt variat, però per mesurar la dimensió d'una costa, núvol o qualsevol altre fractal real s'utilitza:



$$D_F = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

∈ = *cercles cada vegada de radi més petit*

Les fórmules que la defineixen tenen a veure amb el recompte de les boles necessàries per recobrir el conjunt, o amb el de caixes d'una quadrícula que contenen part del conjunt quan les dimensions d'unes i altres tendeixen a zero.

3.1.5.Teoria de les funcions iterades

Anteriorment ja hem esmentat la paraula iteració. Iterar vol dir literalment repetir i iteració és l'acció d'iterar. Els fractals, doncs, es basen en fórmules matemàtiques iterades infinitament o fins que l'apreciació ho permeti.

A les matemàtiques s'utilitza el concepte d'iteració de funcions, que no és més que l'aplicació d'una funció a partir d'un valor inicial i, desprès, tornar a aplicar a la funció el resultat de la funció anterior. Aquest procés, s'ha de repetir tantes vegades com calgui. Així doncs, la iteració d'un procés geomètric a moltes escales genera un fractal. Per justificar aquest procés, farem una demostració del funcionament d'un sistema de funcions i la relació entre una fórmula o funció i el fractal.

Recordem que una funció real *f* actua sobre un conjunt de nombres reals anomenat domini. Els nombres del domini són assignats a un nombre real *x*, o antiimatge (pertanyent al domini), i a un altre nombre real *y*, imatge (y = f(x)).

Per començar el procés iteratiu ens han de donar un valor inicial (x_o) a la fórmula. Aquest valor, que en podem dir llavor, és el punt del qual parteix la iteració i del qual pretenem cercar el límit de la funció. Aquest valor ja ens ve donat juntament amb la funció.

Així doncs, si partim de la funció, $f(x) = \frac{5}{3}x + 1$ i de la x_o= 3, i la iteració d'una funció consisteix a la resolució de la funció a partir del nombre obtingut anteriorment, podem iniciar el cicle iteratiu:

$f(x) = \frac{5}{3}x + 1$ i x_o= 3

•Fase iterant 1 (substituir x, per x_o):

$f(x_o)= \frac{5}{3} \cdot x + 1$

$f(3)= \frac{5}{3} \cdot 3 + 1$

$f(3)= 5 + 1 = 6$

Repetim el procés sucessivament amb el resultat anterior, així veiem com a partir d'un nombre petit podem designar a resultats més grans.

•Fase iterant 2:

$f(x_1)= \frac{5}{3} \cdot x + 1$

$f(6)= \frac{5}{3} \cdot 6 + 1$

$f(6)= 10 + 1 = 11$

•Fase iterant 3:

f(x_2)= $\frac{5}{3} \cdot x + 1$

f(11)= $\frac{5}{3} \cdot 11 + 1$

f(11)= $\frac{55}{3} + 1$

f(11)= $\frac{55+3}{3}$ = $\frac{58}{3}$ = 19,33

[...]

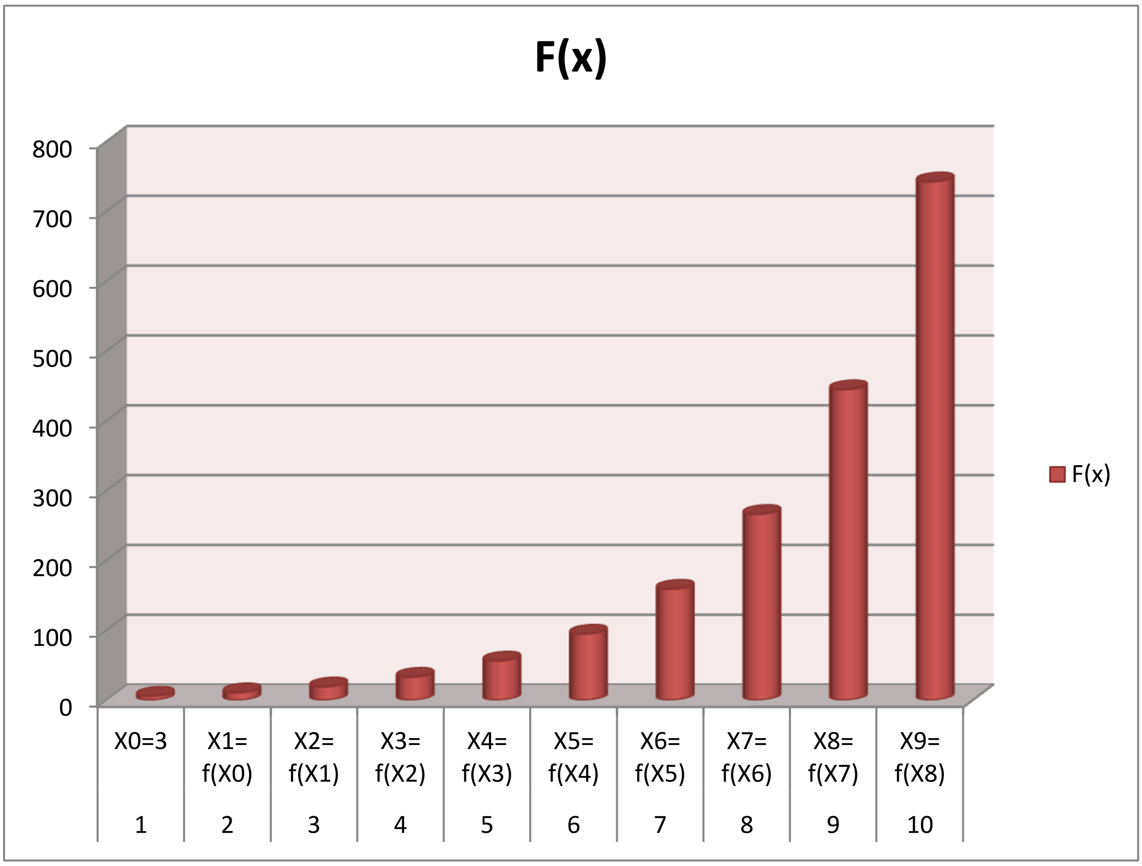
La iteració d'una funció per aconseguir que sigui fractal hauria de tendir cap a un punt, és a dir, que els resultats obtinguts s'apropessin cada cop més cap a un punt més gran o més petit que el valor.

Per contra, la iteració no és un procés exclusiu fractal per tant, si els valors obtinguts tendeixen cap a més o menys infinit, són perfectament vàlids. La tendència cap a l'infinit depèn, si és a partir d'una llavor petita, designem la tendència al més infinit (augmentem), o bé al contrari, a partir d'una llavor gran designem la tendència al menys infinit (disminuïm). Que els resultats tendeixin a una o altra banda de l'infinit depèn de la funció.

Aquesta funció en particular, augmenta radicalment amb la tendència de nombres més grans, per tant, tendirà al +∞. Aquí tenim una taula de les 10 primeres iteracions:

Fase d'iteració	X	F(x)
1	$x_o = 3$	6
2	$x_1 = f(x_o)$	11
3	$x_2 = f(x_1)$	19,33
4	$x_3 = f(x_2)$	33,22
5	$x_4 = f(x_3)$	56,37
6	$x_5 = f(x_4)$	94,95
7	$x_6 = f(x_5)$	159,25
8	$x_7 = f(x_6)$	266,42
9	$x_8 = f(x_7)$	445,03
10	$x_9 = f(x_8)$	742,72

Com ja es veia a les primeres iteracions i com nosaltres suposàvem, les iteracions creixen notablement segons augmenten les variables anteriors. Així doncs el gràfic quedaria així:



3.1.6. Què és un atractor?

Atractor és un concepte bàsic de la iteració fractal. Una funció té un atractor quan iterant-la arriba un moment que tots els valors són iguals. Una funció iterada pot tenir 1, 2, 3... atractors. Perquè el conjunt sigui un atractor les trajectòries suficientment pròximes han de mantenir-se apropades, fins i tot si són lleugerament diferents. Geomètricament, un atractor pot ser un punt, una corba, una variació o fins i tot un conjunt complicat d'estructura fractal conegut com atractor estrany.

3.2. Anàlisi de diferents fractals clàssics

3.2.1. Conjunt de Cantor

El conjunt de Cantor, anomenat per Georg Cantor al 1883, ha estat un destacat subconjunt fractal de l'interval real [0, 1], que admet dues definicions equivalents:

- La definició geomètrica: Eliminació del terç central de cada interval.

- La definició numèrica: És el conjunt de tots els punts de l'interval real [0,1] que admeten una expressió en base 3 que no utilitzi el dígit 1.

El que Cantor no sabia era que aquest conjunt ja havia estat estudiat al 1875 per un matemàtic de Dublín, Henry John Stephen Smith (1826-1883). Però, quan Smith va morir el seu descobriment era pràcticament desconegut, així que va ser Cantor l'associat a aquest conjunt.

3.2.1.1. <u>Construcció geomètrica</u>

Es construeix per repetició, seguint els següents passos:

- El primer pas és prendre l'interval [0, 1].

- El segon pas és treure el seu terç interior o central, és a dir l'interval obert (1/3, 2/3).

- El tercer és extreure els dos segments restants dels seus respectius terços centrals, és a dir, els intervals oberts (1/9, 2/9) i (7/9, 8/9).

- Els passos següents són idèntics: treure el terç central de tots els intervals que queden. El procés no té fi.

El conjunt de Cantor és el conjunt dels punts restants, és a dir, els extrems (no trets) de l'interval corresponent. En tots aquests punts hi ha una infinitud i, per tant, es compleix una reiteració en $(1/3)^n$, on *n* representa qualsevol nombre natural. Segons el subinterval, els extrems varien: 0 i 1; 1/3 i 2/3; 1/9, 2/9, 7/9 i 8/9; 1/27 ...

La seva dimensió de Hausdorff és menor que 1, concretament:

$$\text{Dim} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}631$$

3.2.1.2.<u>Propietats del Conjunt de Cantor</u>

Les propietats principals d'aquest conjunt són: mesura, cardinalitat, propietats topològiques i autosimilitud.

•Mesura: El conjunt té una longitud petita ja que l'interval inicial [0,1] mesura 1 i, a cada pas, se li extreu un terç, això provoca una multiplicació de 2/3 respecte a la seva longitud anterior. Aquesta llargada disminueix a cada subinterval, així doncs la successió geomètrica $u_n = (2/3)^n$ tendeix cap a zero, cosa que fa que el conjunt de Cantor tingui una mesura nul·la.

•Cardinalitat: El conjunt de Cantor està en bijecció[9] amb el segment [0, 1], és a dir, té tants elements com ell.

[9] **Bijecció**: És una funció *f* d'un conjunt *x* amb la propietat que per a cada *y* hi ha exactament una *x*, *f*(*x*) = *y*.

Per demostrar això, construirem una funció derivada del conjunt de Cantor (diguem C) al conjunt dels reals [0, 1]. D'aquesta manera, la cardinalitat de C ha de ser no menor que la de [0, 1]. D'altra banda, com C és un subconjunt de [0, 1], C a més ha de tenir una cardinalitat no major. Per tant es conclou que les cardinalitats de C i [0, 1] han de ser iguals.

•Propietats topològiques: El conjunt de Cantor és tancat en els reals, en ser el complement de la unió d'oberts. En ser també tancat, per aplicació del teorema de Heine-Borel[10], es pot afirmar que és compacte.

•Autosimilitud: El conjunt de Cantor, apreciable a la imatge, es repeteixen els intervals a diferents nivells, això és una manifestació d'autosimilitud, que és una de les propietats bàsiques dels fractals. Així que si agafem l'interval [0, 1/9] i ho ampliem 9 vegades obtindrem de nou el Conjunt de Cantor. De fet, des de qualsevol nivell podem aconseguir-ho de manera que tota part, per minúscula que sigui, conté la informació de tot el fractal.

3.2.1.3. Presència a la natura

➢Mandelbrot relaciona el conjunt de Cantor amb els errors a les línies de telecomunicació, ja que aquests se sap que estan agrupats en ràfegues (semblant al què passa als punts del conjunt de Cantor, però no tan ordenats).

3.2.2. Corba de Peano

El matemàtic italià, Giuseppe Peano, va descobrir l'any 1890 una corba continua que passava per tots els punts d'un quadrat de costat 1.

Peano tot i seguir els passos de Cantor, va voler obtenir una funció contínua de l'interval unitat sobre el quadrat unitat, encara que no fos bijectiva

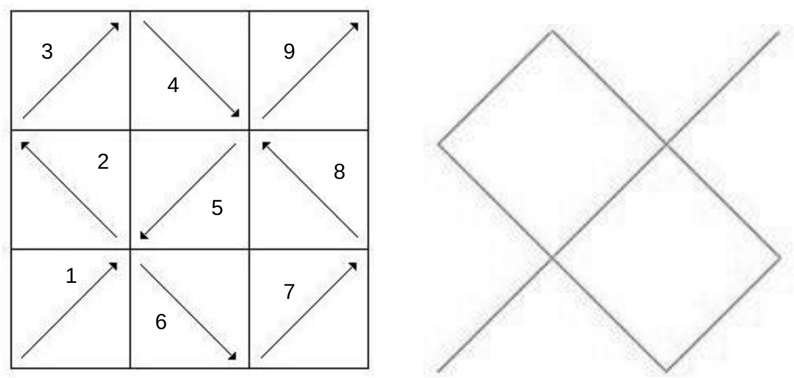
[10] **Heine-Borel**: és un teorema que estableix condicions pels subconjunts de $\mathbb{C}^n$ o de $\mathbb{R}^n$ perquè sigui compacte.

(tenir imatge per cada punt de l'eix x). Prèviament a Peano, el matemàtic Jordan al 1887 va introduir la descripció de corba continua: "Un segment de corba és una funció contínua que està definida per tots els valors de l'interval unitat".

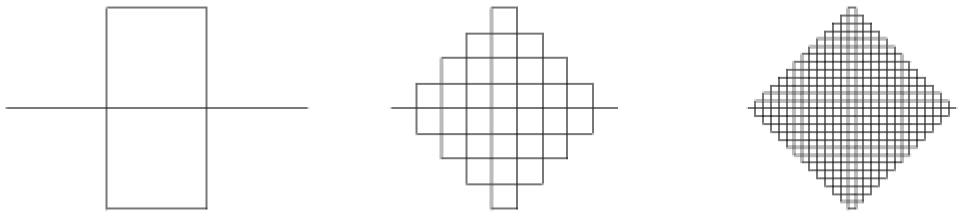
Aquest tipus de corbes s'obtenen mitjançant una successió de corbes contínues sense interseccions que convergeixen a una corba límit. La corba límit de Peano, de fet, és un objecte fractal interessant ja que encara que la seva dimensió topològica és 1 la seva dimensió fractal d'Hausdorff-Besicovitch és 2. És a dir, que aquesta corba és un objecte de dimensió 1 que pot transformar-se en dimensió 2.

3.2.2.1. Construcció geomètrica

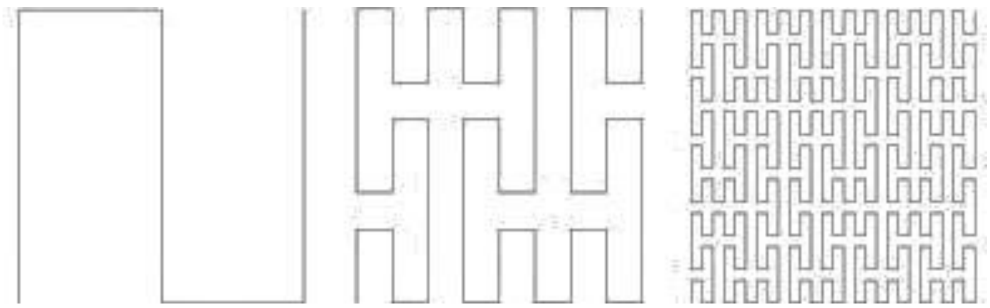
El mètode de construcció d'una corba de Peano es divideix en dues possibilitats, la primera consisteix en un procés repetitiu que parteix d'una corba inicial de 9 segments, els quals van sent substituïts per cada figura generada a cada iteració anterior. El dibuix dels nous segments de partida segueix l'esquema següent:



A continuació, repetim el procés per cada un dels nou segments inicials, és a dir, substituïm cada un dels segments anteriors per la figura anterior i, així una i altra vegada. El resultat és el que tenim en les següents 3 primeres iteracions de la corba de Peano.



L'aportació original de Peano va ser molt analítica i no definia gaire el procés iteratiu o la visualització gràfica de la corba. Van ser altres matemàtics que van descobrir la segona manera de construcció del fractal, amb l'objectiu d'omplir el quadrat. Els descobridors d'aquest segon mètode el van completar gràcies a l'intent de visualitzar la gràfica de la funció abstracta, els que van proposar series iteratives de corbes com l'anterior o el següent:



En conseqüència, no sabem exactament a quina d'aquestes series de corbes podem anomenar corba de Peano. Les dues corbes pretenen descriure una corba que recobreixi el pla i, per tant, tendeixen cap al mateix límit, el quadrat.

3.2.2.2.<u>Propietats de la corba de Peano</u>

Les propietats de la corba de Peano són les següents:

- És una corba contínua.

- No té punts que es creuin, és a dir, la corba no passa dos cops per un mateix punt.

- És una corba que omple el pla, en aquest cas un quadrat.

- És una corba unidimensional que pot ocupar un espai bidimensional. Peano va ser el descobridor d’aquesta propietat.

3.2.2.3.Presència a la natura

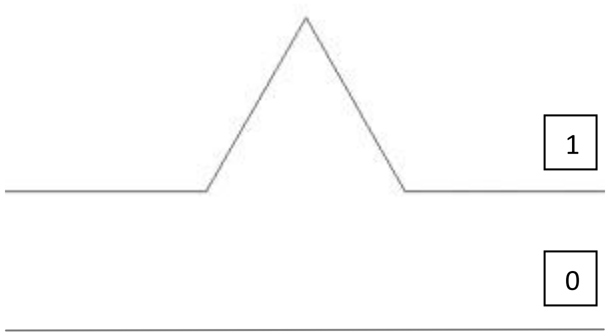
- Una molècula d'ADN, que a plena extensió pot arribar fins als dos metres, s’empaqueta en les petites dimensions del nucli d'una cèl·lula eucariota, de només unes micres. Doncs bé, l'ADN en realitat no es plega sense forma al nucli sinó que s'acosta a un patró regular i matemàtic, que és precisament la corba de Peano.

- La corba de Peano descriu certs reticles de plantes.

- La corba de Peano pot servir també per descriure xarxes fluvials i, fins i tot, talls cerebrals.

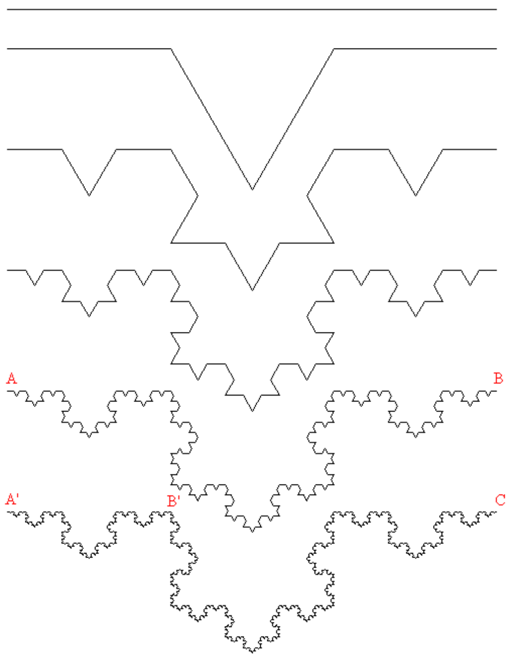
3.2.3.Corba de Koch

El creador d’aquest monstre va ser Niels Fabian Helge von Koch, matemàtic suís al 1904. Va destapar aquest fractal a l’article “Sobre una corba contínua sense tangents, construïble mitjançant geometria elemental”. Per descriure aquesta corba començarem considerant una recta horitzontal de longitud 1. Si substituïm la recta per quatre segments iguals de longitud $\frac{1}{3}$, es forma així la primera corba a la sèrie iterativa. Al sorgir 4 segments iguals en $\frac{1}{3}$ de longitud, ens apareix un triangle equilàter al centre, disposat com es mostra a la figura:



3.2.3.1.Construcció geomètrica

Fins ara hem explicat que és la corba de Koch i hem mostrat la primera iteració on es pressuposa que en les següents iteracions cada $\frac{1}{3}$ de segment serà substituït per la iteració anterior, com es mostra a la següent sèrie:

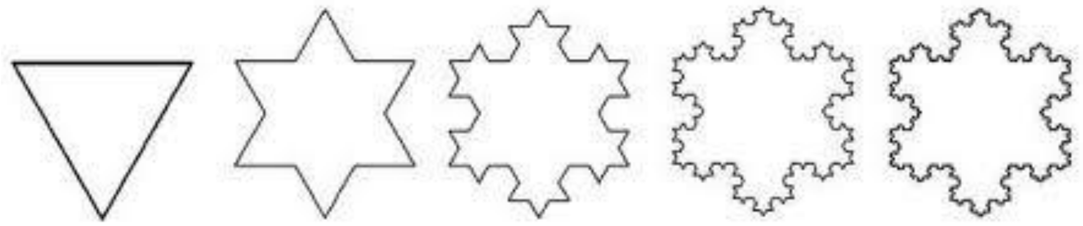


Cal destacar que la corba de Koch presenta una aparent longitud infinita procedent del procés de construcció, ja que a cada procés d'iteració la longitud augmenta i, per tant, és infinita.

Però quan el número d'iteracions incrementa la longitud de la corba varia, així que la longitud no és una mesura clara per descriure aquesta corba, ja que no és possible definir el límit d'un nombre infinit d'iteracions.

Per altra banda també sorgeix el terme del floc de neu de Koch amb una aparença més coneguda. El floc de neu de Koch no és més que, en comptes de partir d'una línia, partir d'un triangle equilàter. El mètode de construcció és el següent:

Si partim del triangle equilàter esmentat, de costat 1, en cada iteració substituirem cadascun dels terços centrals de cada segment pel triangle de partida. És a dir, dividirem cada segment en tres parts iguals i el terç central l'intercanviarem pel triangle equilàter. Deixant, a la primera iteració del floc, un hexàgon regular estrellat. Seguidament, repetim altre cop el procés en cadascun dels 12 costats i, així successivament, fins a obtenir el floc de neu de Koch. La sèrie està disposada de la forma següent:



3.2.3.2. <u>Propietats de la corba i del floc de neu de Koch</u>

La corba de Koch té les propietats següents:

- La longitud és infinita, però no és un paràmetre per descriure la corba. Tot i que la longitud és infinita, l'àrea que dibuixa és finita.

- La corba de Koch no és derivable ja que les derivades de la funció pels extrems del vèrtex no coincideixen i, en no tenir la mateixa tangent, es justifica que no és derivable en cap dels punts.

•La corba de Koch no és llisa i no és diferenciable en cap part.

Les propietats del floc de neu contempla algunes característiques de la seva corba. Les propietats del floc són les següents:

•És una corba contínua i tancada.

•No és derivable, per la mateixa raó que la corba de Koch.

•Donats punts qualsevol, la longitud del seu arc entre ells és infinita.

•Aquesta corba té un perímetre infinit tot i tancar una àrea finita.

3.2.3.3.<u>Presència a la natura</u>

➢La corba de Koch descriu la irregularitat de les costes.

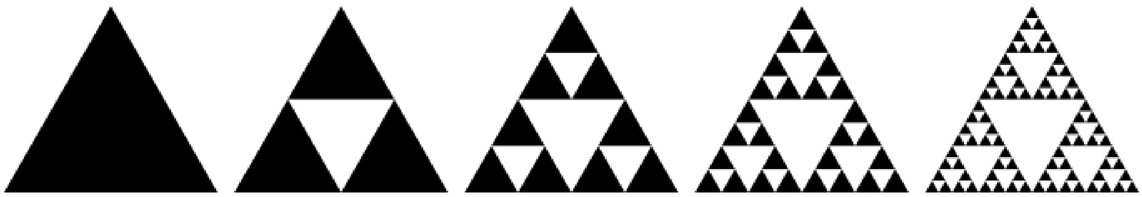
➢La corba de Koch pot servir també com a model d'un floc de neu.

3.2.4.Triangle Sierpiński

Waclaw Sierpiński va ser un important matemàtic polonès que va dedicar part de les seves investigacions a l'estudi de diverses formes fractals. El primer fractal que va descobrir i origen dels següents, és el triangle de Sierpiński al 1915. És un dels exemples bàsics de conjunt auto-semblant, una de les propietats fonamentals dels fractals. Aquest fractal és la iteració de triangles més petits dins del triangle del que partim. Encara que va ser construït inicialment a partir d'un triangle equilàter, es pot fer la construcció a partir de qualsevol triangle.

3.2.4.1. Construcció geomètrica

El triangle Sierpiński és creat a partir d'un triangle, usualment equilàter i, de costat 1. Per aconseguir la seva primera iteració hem d'agafar els punts centrals de cada costat i traçar un triangle a través d'ells, formant un triangle igual invertit però de costat $\frac{1}{2}$. Així que a la primera iteració ens queden quatre triangles de costat $\frac{1}{2}$ i el blanc és invertit. El procés és repeteix per la següent iteració, de cada triangle negre, es traça un triangle a partir dels seus punts mitjos. De la segona iteració s'obtenen triangles inscrits de costat $\frac{1}{4}$. Per aconseguir les següents iteracions s'ha de repetir el procés dins dels triangles negres, ja que el triangles blancs són buits. La sèrie és la següent:



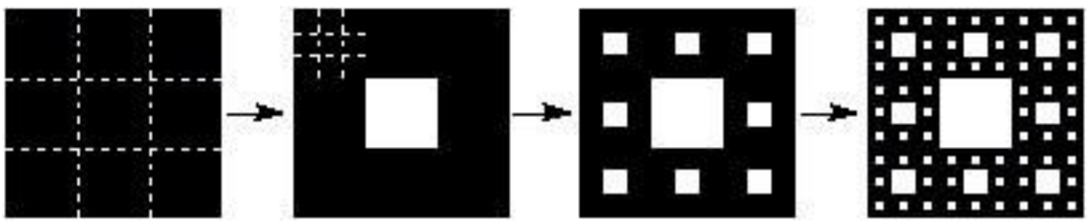
Com abans ja hem esmentat, aquest triangle és un clar exemple de fractal auto-similar. A més a més, en ser una figura plana tan simple com un triangle ajuda a la interiorització de concepte i propietats dels fractals. Per això en apartats anteriors n'hem fet referència i hem aconseguit arribar a la conclusió, que té una dimensió fractal de 1,585.

Per justificar-ho en farem una breu comprovació. El triangle de Sierpiński té un factor d'augment de 2 i 3 peces autosimilars, és a dir, que per cada iteració, cada triangle en negre divideix el seu costat 2 (factor d'augment) i sorgeixen 3 trianglets dins del triangle iterat (peces auto-similars). En cada iteració augmenta la quantitat de factor d'augment i les peces auto-similars, però aquests sempre són múltiples de 2 i 3 respectivament. Així que podem concloure que si tenim aquestes dades, i volem obtenir la dimensió, haurem de dividir el logaritme de peces auto-similars entre el logaritme de factor d'augment, justificada anteriorment.

$$\text{Dim} = \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2} \approx 1{,}585$$

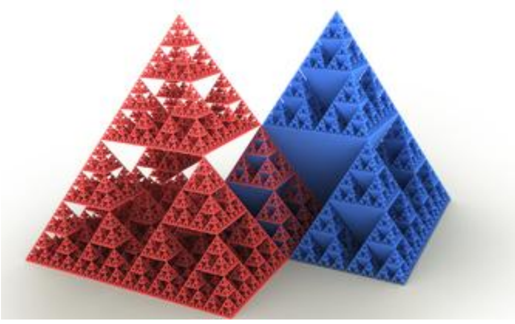
Però Sierpiński no es va aturar aquí. Un cop trobat i descrit aquest triangle, va voler buscar nous fractals, molt semblants al descobert amb formes simples diverses.

Així que Sierpiński va agafar una altra figura plana bàsica i la va sotmetre a iteració. Ell va escollir el quadrat, una figura euclidiana coneguda per tothom. Va partir del quadrat esmentat i el va dividir en 9 parts iguals, 9 quadrats d' 1/3 de la longitud inicial del quadrat. La primera iteració, consistia en extreure el quadradet central i deixar una espècie de marc al voltant d'un quadradet buit. La següents iteracions patirien el mateix canvi, cada quadradet es dividiria en 9 quadradets més i s'eliminaria el central. Aquest nou fractal el va anomenar, la catifa de Sierpiński, on seguidament en mostrarem la sèrie:

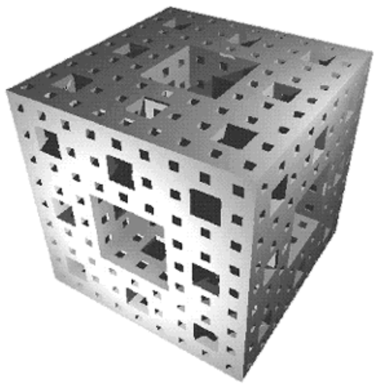


Aquesta catifa de Sierpiński, pateix una curiositat sorprenent, si tracem una línia paral·lela passant per un costat del quadrat, és pot obtenir el conjunt de Cantor.

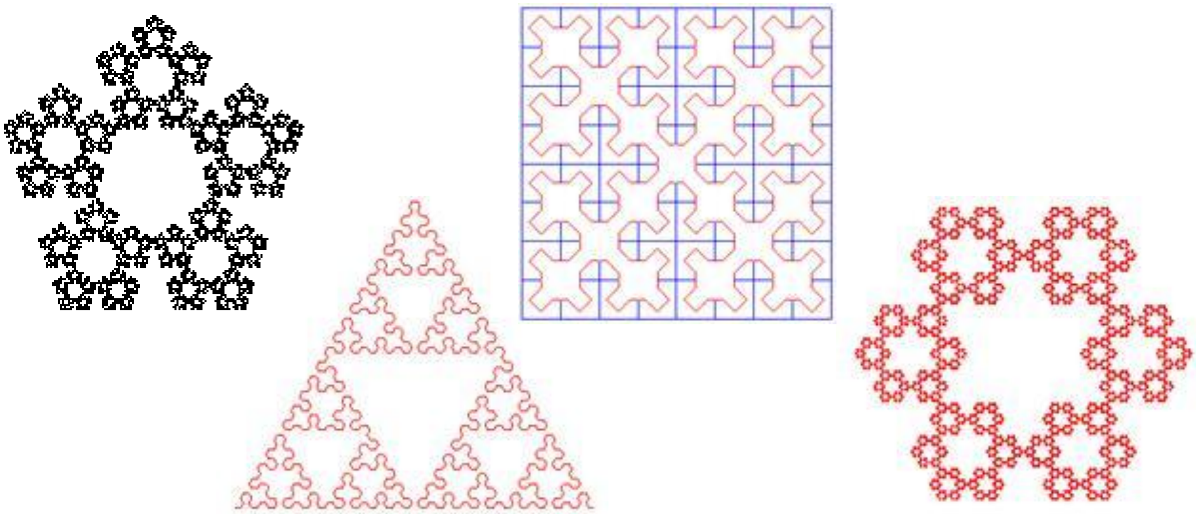
Per altra banda, Sierpiński, va desenvolupar una variant del mateix triangle de Sierpiński, va crear el tetraedre de Sierpiński. Aquest és el mateix procés iteratiu que el seu triangle però de manera tridimensional. És una manera d'apropar encara més, la fractalitat a la nostra realitat.


Tetraedre de Sierpiński

Anys més tard, al 1926 el matemàtic austríac Karl Menger, va proposar una segona manera tridimensional d'un fractal. Menger va crear l'esponja de Sierpiński-Menger, una variant de la catifa de Sierpiński. Aquesta és un cub amb les mateixes propietats que la catifa de Sierpiński, on cada cara es comporta com a tal. Per la seva forma, també se l'anomena el cub de Sierpiński-Menger.


Esponja de Sierpiński-Menger

Sierpiński, un gran amant d'aquests monstres, va seguir provant noves iteracions amb formes tradicionals com ara pentàgons, hexàgons i octàgons, i va seguir complementant els passos de Peano o Hilbert per cercar noves corbes que omplissin el pla. En són un exemple el següent recull:



3.2.4.2.<u>Propietats del triangle i catifa de Sierpiński</u>

Els dos fractals comparteixen les propietats següents:

•L'àrea dels dos fractals és nul·la, ja que a cada iteració la superfície disminueix un 25% de la iteració anterior i sempre tendeix al 0, perquè és infinitesimalment petit.

•Si es traça una recta paral·lela en un dels costats d'ambdós fractals, es pot obtenir una figura semblant al conjunt de Cantor, en el cas del triangle de Sierpiński, i el mateix conjunt de Cantor a la catifa de Sierpiński.

3.2.4.3.Presència a la natura

➢A enginyeria, un exemple recent són les antenes fractals. Moltes antenes estan compostes per una distribució de petites antenes. Si la distribució és regular, l'antena presenta alt rendiment i si és aleatòria, ofereix una estructura robusta. Sembla ser que un disseny fractal de l'estil del triangle de Sierpiński combina les dues propietats. En el cas d'un sol fil, seguint la forma fractal, aquest es doblega i permet empaquetar més fil en el mateix espai, i la forma dentada genera capacitància i inductància extra.

➢Patrons semblants al triangle de Sierpiński apareixen ja en certs mosaics de segle XIII de la catedral de Anagni, d'Italia.

3.2.5.Corba del drac

Ens aturarem a la darrera corba, la corba del drac o el drac de Parc Juràssic. Aquesta corba va ser estudiada per primera vegada al 1960 per tres físics de la NASA, Heighway, Banks i Harter i, popularitzat més tard per Martin Grander a la columna de jocs matemàtics de la revista *Scientific American*. La corba del drac és d'una construcció simple i, jo la trobo personalment fascinant, més endavant ho veureu.

3.2.5.1.<u>Construcció geomètrica</u>

Segons Grander, Heighway la va construir doblegant un paper. D'aquesta corba, se'n poden apreciar les seves iteracions inicials doblegant un paper. Així que, partint d'un full ens disposem a captar la idea de quina és la forma i procés, per desprès entendre la iteració.

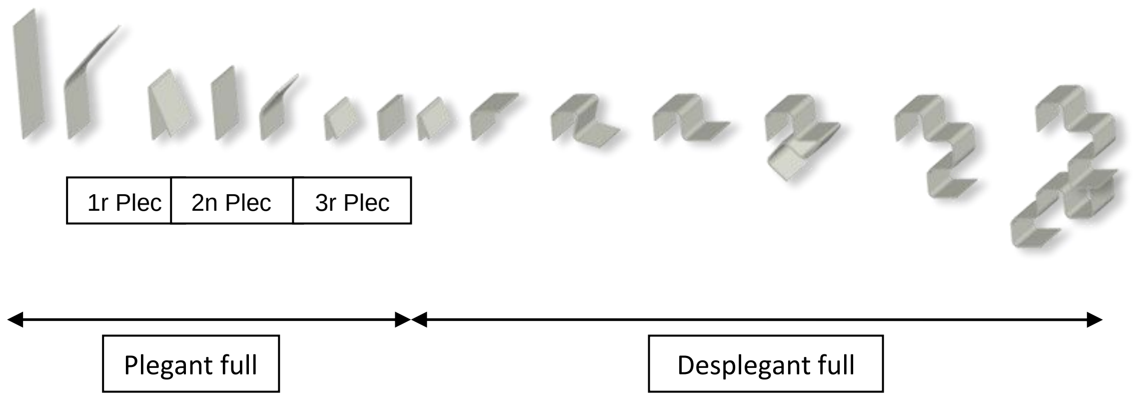
1.Agafar un full i observar-lo de perfil, per partir d'una línia recta.

2.Doblegar el full per la meitat en forma de "V" (primera iteració).

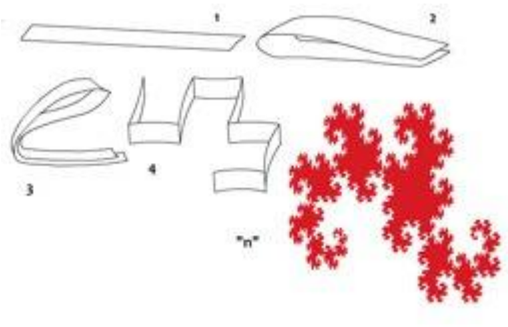
3.Tornar a doblegar el full per la meitat, el full ja doblegat (segona iteració).

4.Tornar a doblegar en el mateix sentit que l'anterior, tot el full doblegat, per aconseguir veure la tercera iteració.

5.Desplegar-lo fent que els plecs adoptin 90 graus, i ja tindrem la tercera iteració de la corba, mirant el full de perfil.

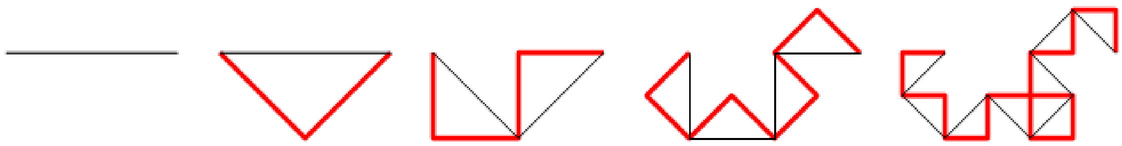


Per aconseguir veure les primeres iteracions, hem d'observar-les abans de doblegar les següents iteracions. Per observar-ne més, seguir doblegant i observant les iteracions posteriors.

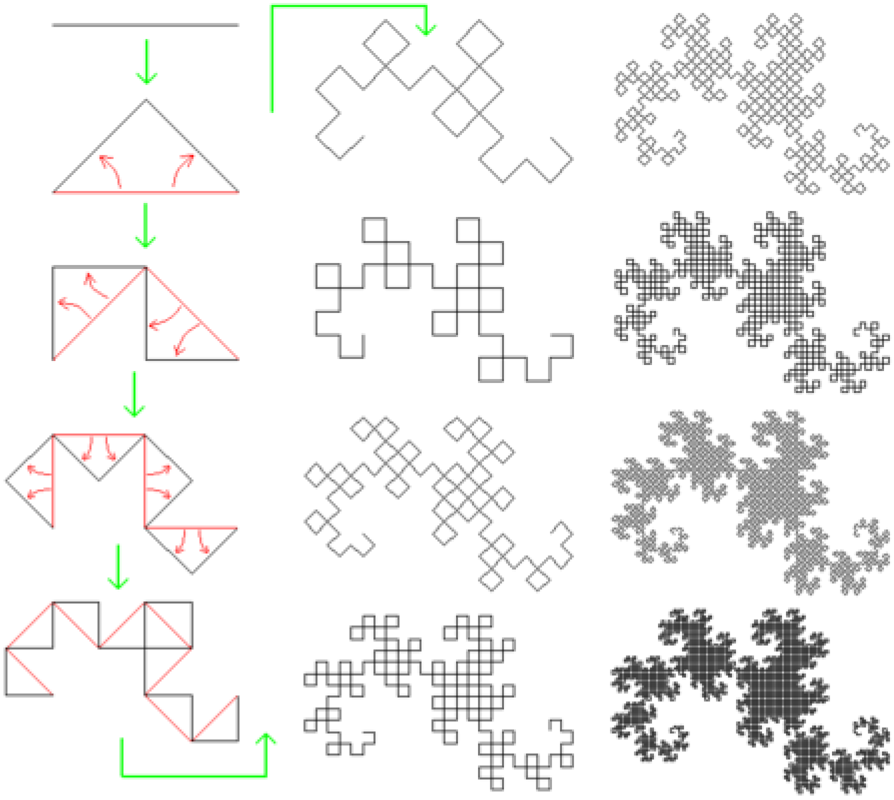


Però els físics no podien dependre del paper, havien d'esbrinar quina era aquesta iteració i quin patró seguia. Aquesta corba té diverses maneres de ser creada, una és l'opció anterior i una altra és l'explicada seguidament.

Si partim d'una línia recta, podem iterar en cada cas reemplaçant cadascun dels segments per segments més curts i estan en angles rectes entre si. És a dir, a cada iteració haurem de dividir cada segment en dos més petits i rotar els dos segments 45 graus a dreta o esquerra perquè entre ells quedi un angle recte. S'ha de repetir el procés per aconseguir la corba del drac. Sèrie mostrada seguidament:



Els segments cada cop són més petits i les formes són més extravagants. Aquí es pot apreciar que la línia negre més fina és d'on partim i que a cada iteració, en la que dividim cada segment en dos, en sorgeix una altra línia, la més gruixuda. Però la corba del drac no és aquesta, la corba del drac és aquella que s'obté de moltes iteracions i que sempre ocupa el mateix espai. Aquesta corba és un altre exemple d'una corba que cobreix el pla, com va definir Peano, una línia unidimensional que ocupa un espai bidimensional. La sèrie amb més iteracions és la següent:



Deixant un moment de banda les matemàtiques, expliquem una darrera curiositat d’aquesta corba que la va fer més coneguda. Abans hem puntualitzat que aquesta corba també podia anomenar-se drac del Parc Juràssic. L’escriptor nord-americà Michael Crichton, de *Parc Juràssic,* va utilitzar la corba del drac d’una manera enigmàtica i suggerent a la seva obra. Cada capítol de la novel·la estava encapçalat per un dibuix de la iteració d’aquesta corba seguit d’un petit comentari de Ian Malcom, un dels personatges de la novel·la, que la seva professió era matemàtic i especialista en el caos. L’argument del llibre girava al voltant de la clonació del dinosaures a partir del seu ADN i Crichton va reproduir la corba com a metàfora visual de la complexitat i inestabilitat d’aquest procés.

3.2.5.2.<u>Propietats de la corba del drac</u>

La corba del drac té les propietats següents:

•És una corba d’una dimensió que ocupa dues dimensions.

•Arribat a un límit d'iteracions, la seva forma no varia més.

•Diferents corbes del drac amb mateixa iteració, poden unir-se i els punts no es creuaran. És a dir, el seu perímetre és idèntic i encaixaran perfectament.

3.2.5.3.Presència a la natura

➢Aquesta corba va ser utilitzada a l'encapçalament de cada capítol de la novel·la Parc Juràssic, com a metàfora visual del canvi d'ADN dels dinosaures.

➢Ha sigut un estimulant a diversos camps de les matemàtiques, gràcies a les seves propietats fascinants.

3.2.6.Conjunt de Julia

Gaston Julia (1893-1978) va ser un matemàtic francès i gran estudiós de la dinàmica complexa. Julia va descobrir un conjunt fractal al 1918 i el va anomenar, conjunt de Julia. Aquest conjunt no és un sol fractal, sinó que és el nom adaptat a un grandíssim abast de fractals amb propietats semblants i només diferents en la iteració. Aquest matemàtic francès, va destapar un enorme camí als propers estudiosos dels fractals, entre ells Benoît Mandelbrot, considerat pare dels fractals. Aquest conjunt és la font d'alguns dels fractals més interessants coneguts a l'actualitat.

Fotografia del matemàtic Gaston Julia

El conjunt de Julia és una forma fractal definida en un pla complex. El pla complex és una manera de visualitzar l'espai dels nombres complexos. Aquest pla complex és un lloc on es pot determinar el lloc d'un punt o vector per mitjà de dos eixos. L'eix horitzontal mostra els nombres reals i l'eix vertical mostra les components imaginaries per situar un nombre complex. Aquest conjunt però, s'obté de la iteració de punts en el pla complex per trobar altres nombres del mateix pla complex i, així formar gràficament el fractal.

Així que podem descriure el conjunt de Julia com: un fractal comprés dins d'un pla complex, el qual prové de la iteració de nombres del mateix pla complex.

3.2.6.1.Construcció geomètrica

La construcció d'aquest conjunt no és pas una construcció lineal com hem observat en els anteriors fractals sinó que prové d'una funció iterada. El conjunt de Julia (J_c), és un fractal definit al pla complex que es basa en la iteració de la fórmula $f(z) = z^2 + c$, on c és un nombre complex (veure annex I). Aquesta funció també anomenada J_c, es compon d'una part variable z a causa de la iteració i, una altra part fixa c, essent ambdues nombres complexes. Per obtenir diferents conjunts de Julia, tan sols dependrà de la part fixa c. Així que hi ha tants conjunts de Julia com nombres complexos en el pla complex ja que per cada nombre complex c, es defineix una conjunt de Julia diferent. La z només varia el punt del pla complex amb la iteració de cada conjunt específic.

Per començar a iterar a partir de la funció J_c, ens cal un paràmetre inicial en el qual ens basarem com a primer nombre a iterar (explicat en apartats anteriors). El nombre complex del que partirem l'anomenarem z_o, i les seves iteracions aniran augmentant el subíndex unitat a unitat (z_o, z_1, z_2, z_3 ...) de manera que la successió de nombres iterats tendirà a quedar-se acotada a un nombre o anar creixent cap a infinit.

Els nombres resultants provinents de la iteració hauran de sortir al pla complex en forma de punt. Per tant, si el punt z_x pertany al conjunt de Julia el punt es pintarà de color negre, mentre que si per contrari el punt iterat no surt a J_c el punt es pintarà blanc. Després de moltes iteracions el pla complex mostra el fractal obtingut, en color negre. Tot i que actualment s'usen un degradat de colors per saber visualment si cada punt és més proper o llunyà al nombre acotat, al qual tendeixen les iteracions.

Per entendre-ho millor, ho representarem amb un exemple:

Partim de $f(z) = z^2 + c$, on el nombre fix és $\mathrm{c} = 0{,}108 + 0{,}620i$ i el nombre inicial a iterar és $Zo = 1 + i$. Per tant diem que construirem el conjunt de Julia $J_{0,108+0,620i}$.

Comencem a iterar:

f(1+i) = $(1+i)^2$ +0,108 +0,620i = 1 –2i +i^2 +0,108 +0,620i = 0,108 –1,38i =
= |0,108 –1,38i| = **1,384**

f(0,108 –1,38i) = $(0{,}108-1{,}38i)^2$ +0,108+0,620i =
=0,011664 –0,13392i +1,9044i^2 +0,108 +0,620i = –1,784736 +0,48608i =
= |–1,784736 +0,48608i| = **1,849**

f(–1,784736 +0,48608i) = $(–1{,}784736 +0{,}48608i)^2$ +0,108 +0,620i =
= 3,1852825 –1,73504895i +0,236273766i^2 +0,108 +0,620i =
= 3,057008734 –1,11504895i = |3,057008734 –1,11504895i| = **3,254**

Els mòduls del valor obtingut tenen un ordre creixent i si poguéssim veure més iteracions observaríem que aquesta successió té un ordre creixent permanent i, per tant, té un creixement cap a l'infinit. Com que un creixement a l'infinit no és un nombre adequat perquè sigui dins un conjunt de Julia. Així que aquest punt dins el pla complex serà blanc.

En aquest cas hem obtingut un punt fora del conjunt de Julia, mitjançant un segon punt i la seva iteració, volem aconseguir obtenir un punt dins del conjunt.

A la segona iteració partim de $f(z) = z^2 + c$, on el nombre fix és $c = 0{,}108 + +0{,}620i$ i el nombre inicial a iterar és $Zo = 0 + 0i$. I igualment diem que construirem el conjunt de Julia $J_{0,108+0,620i}$.

Comencem a iterar el segon:

f(0+0i) = (0+0i)^2 +0,108 +0,620i = 0,108 +0,620i = |0,108+0,620i| = **0,629**

f(0,108 +0,620i) = (0,108+0,620i)^2 +0,108+0,620i = 0,011664 +0,13392i + 0,3844i^2 +0,108 +0,620i = –0,264736 +0,75392i |–0,264736 +0,75392i| = = **0,799**

f(–0,264736+0,75392i) = (-0,264736+0,75392i)^2 +0,108 +0,620i = 0,070085149 –0,39927953i +0,568395366i^2 +0,108 +0,620i = –0,390310217 +0,22072047i = |–0,390310217+0,22072047i| = **0,448**

f(–0,390310217 +0,22072047i) = (-0,390310217+0,22072047i)^2 +0,108 + +0,620i = 0,152342065 –0,172298909i +0,048717525i^2 +0,108 +0,620i = 0,21162454+0,447701091i = |0,21162454 +0,447701091i| = **0,144**

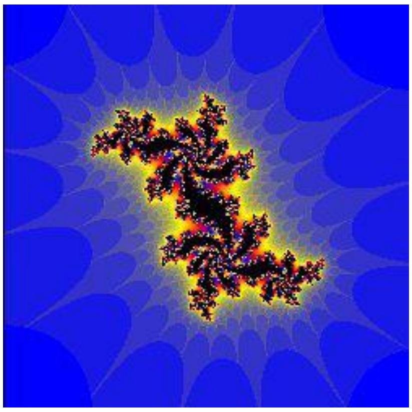
f(0,21162454+0,447701091i) = (0,21162454 +0,447701091i)^2 +0,108 +0,620i = 0,044784945 +0,189489074i +0,200436266i^2 +0,108 +0,620i = –0,047651321 +0,809489074i = |-0,047651321+0,809489074i| = **0,81**

f(–0,047651321 +0,809489074i) = (–0,047651321 +0,809489074i)^2 +0,108 +0,620i = 0,002270648 –0,077146447i +0,655272561i^2 +0,108 +0,620i = –0,545001913 +0,542853553i = |–0,545001913 +0,542853553i| = **0,769**

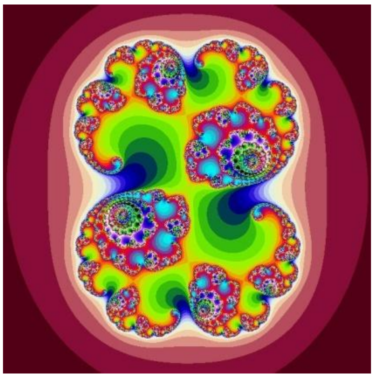
Hauríem de fer moltes més iteracions per comprovar que de veritat el punt pertany al conjunt de Julia però, amb aquestes que tenim fetes en l'exemple, podem veure que el mòdul no passa de 1, es queda restringit i no va augmentant. Per tant, i per la informació exterior, podem afirmar que el punt

0+0i pertany al conjunt de Julia, $J_{0,108+0,620i}$. Així que podem comprendre que aquest punt és de color negre.

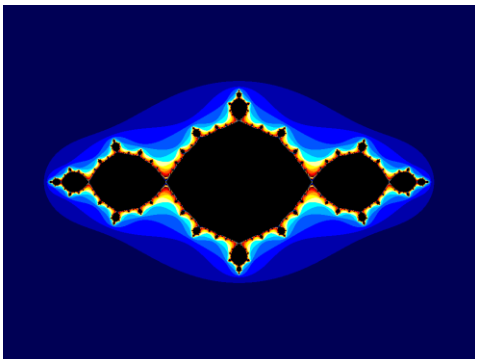
Aquest conjunt, vist gràficament en un pla complex, tindria l'aspecte següent:



Com ja hem dit, actualment es representa amb molts colors i varia segons la seva distància respecte al punt al qual tendeix. Tot i això hi ha infinitat de possibilitats de conjunts de Julia amb multitud de colors, seguidament en mostrarem gràficament, uns quants:



C = 0.285, 0.01i



C = -1

3.2.6.2.<u>Propietats del conjunt de Julia</u>

El conjunt de Julia té la propietat següent:

•Aquest conjunt és connex al de Mandelbrot, és a dir, que té una relació estreta dins el pla complex. Més endavant en farem referència.

3.2.6.3.Presència a la natura

El conjunt de Julia no té aplicacions a la natura.

3.2.7.Conjunt de Mandelbrot

Benoît Mandelbrot (1924-2010), possiblement el matemàtic més conegut en relació amb els fractals, ja que també n'és considerat el pare. Mandelbrot, després de posar les bases dels fractals va dedicar-se a estudiar el conjunt de punts en el pla complex. Al voltant del 1979, va descobrir el conjunt de Mandelbrot, un fractal excepcional. El va descobrir després de llegir la feina de Gaston Julia, font de la seva inspiració. Aquest fractal segueix molts passos del conjunt de Julia ja que tenen una connexió en el procés i resultats, posteriorment explicats. El conjunt de Mandelbrot és la representació al pla complex d'un conjunt de nombres complexos obtinguts d'iteracions.

Benoît Mandelbrot, 2010

El conjunt de Mandelbrot està considerat com l'objecte geomètric més complicat creat, fins el moment, per l'home. La frontera d'aquest objecte és molt enrevessada però continua. Tan enrevessada que la seva dimensió cobreix el pla i és 2.

3.2.7.1. Construcció geomètrica

El conjunt de Mandelbrot (M_c) és un fractal que s'obté iterant un nombre finit de funcions sobre el pla complex. Aquest conjunt està format per totes les funcions de tipus: $f(z) = z^2 + c$. On *c* és el nombre complex que estudiem, i *z* és el valor que s'itera amb z_o sempre igual a zero. És a dir, per obtenir el Conjunt de Mandelbrot iterem la funció, partint sempre del zero, un nombre determinat d'iteracions, on la *c* ens indica la posició del punt.

Aquesta fórmula està igual escrita que la del Conjunt de Julia i, aparentment podria semblar igual, però hi ha una diferència fonamental en el significat de les variables.

Fixem-nos en que per a fer un conjunt de Julia el valor que indicava el punt del pla era el valor inicial del que partíem per iterar (z_o), però en el conjunt de Mandelbrot el valor que ens marca el punt del pla és el paràmetre *c*. Aquest varia cada vegada que canviem de punt i en canvi, la z inicial, z_o, sempre és zero. Així, observem que cada valor de *c* dóna lloc a un polinomi diferent, canvia la fórmula per cada punt del pla complex.

Aquí tenim una taula que ens mostra algunes diferències entre els dos conjunts, Julia i Mandelbrot:

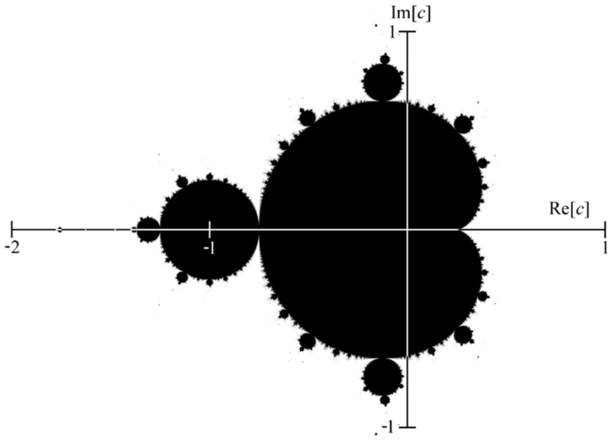
DIFERÈNCIES		
Terme o variable comú	**Conjunt de Julia**	**Conjunt de Mandelbrot**
z_o	Atractor a escollir. Punt que ens mostra la **posició del pla complex**	L'atractor sempre és 0
c	És únic i exclusiu per cada conjunt	Ens mostra la **posició del punt al pla complex** i varia per cada funció
Nombre de conjunts	Infinits, ja que depèn de c	1
Precisió	/	Més precís amb un nombre determinat d'iteracions més gran

Si iterem aquesta funció per diferents valors de c i sempre partint de $z_o = 0$, ens adonarem de que per a alguns valors de c, resultats d'una mateixa sèrie d'iteració tendiran a un nombre determinat (restarà acotada), mentre que per altres valors tendirà a infinit.

El conjunt de Mandelbrot, igual que el de Julia, es compon de nombres complexos que el nombre resultat de les seves iteracions estigui acotat, és a dir, que tots els nombres resultants tendeixin a un mateix nombre. Si el resultat de les iteracions està acotat, aquest formarà part del conjunt de Mandelbrot, mentre que si per contrari tendeix a l'infinit, restarà fora del conjunt i es pintarà de color blanc. Així que el conjunt de Mandelbrot està format per tots els punts c del pla complex que tenen un resultat iterat acotat. Per exemple:

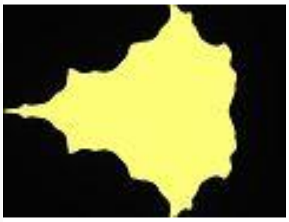
•Si de $c = 1$ obtenim la successió: *0, 1, 2, 5, 26…* aquesta és ascendent. Com que la sèrie d'iteracions no està acotada, *1* no serà un punt de M_c.

•En canvi, si $c = -1$ obtenim la successió: *0, -1, 0, -1…* aquesta és acotada i per tant, *-1* pertany a M_c.

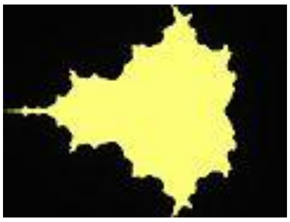


Representació del conjunt de Mandelbrot al pla complex amb blanc i negre. S'aprecia com -1 pertany al conjunt, mentre que 1, no.

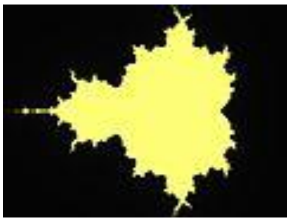
Com ja hem comentat abans, per obtenir el conjunt de Mandelbrot cal determinar prèviament un nombre finit d'iteracions. Aquesta condició suplementària es va establir, ja que el conjunt de Mandelbrot s'obté d'infinites iteracions per concloure si aquell punt tendeix o no a un nombre acotat. Com que el problema era l'infinitat de càlculs, es va establir un nombre determinat d'iteracions per poder saber si és o no punt del conjunt. Aquest nombre determinat d'iteracions l'anomenarem *p*. Per altra banda, quan més gran sigui *p* més detallat serà el gràfic i les propietats fractals del conjunt seran més visibles.



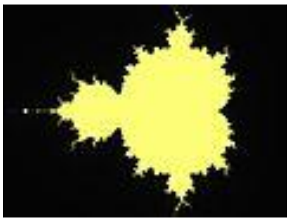
10 iteracions per píxel



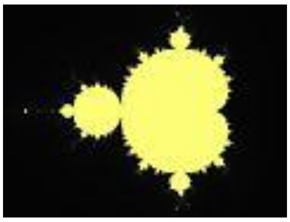
12 iteracions per píxel



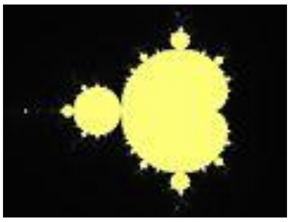
15 iteracions per píxel



20 iteracions per píxel



50 iteracions per píxel



500 iteracions per píxel

Imatges digitals calculades per ordinador, amb diferent nombre determinat d'iteracions.

Per que un punt formi part del conjunt de Mandelbrot, hi ha una darrera condició, ha de tenir un mòdul inferior a *2*. És a dir, si al finalitzar totes les iteracions, el nombre complex resultant de qualsevol iteració és més petit que *2* (té un mòdul inferior a *2*) llavors acceptem que aquell punt pertany al conjunt de Mandelbrot. En canvi, en el moment en que el resultat d'una de les diferents iteracions sigui més gran que *2* (tingui un mòdul superior a *2*), entendrem que aquell punt no pertany al conjunt de Mandelbrot.

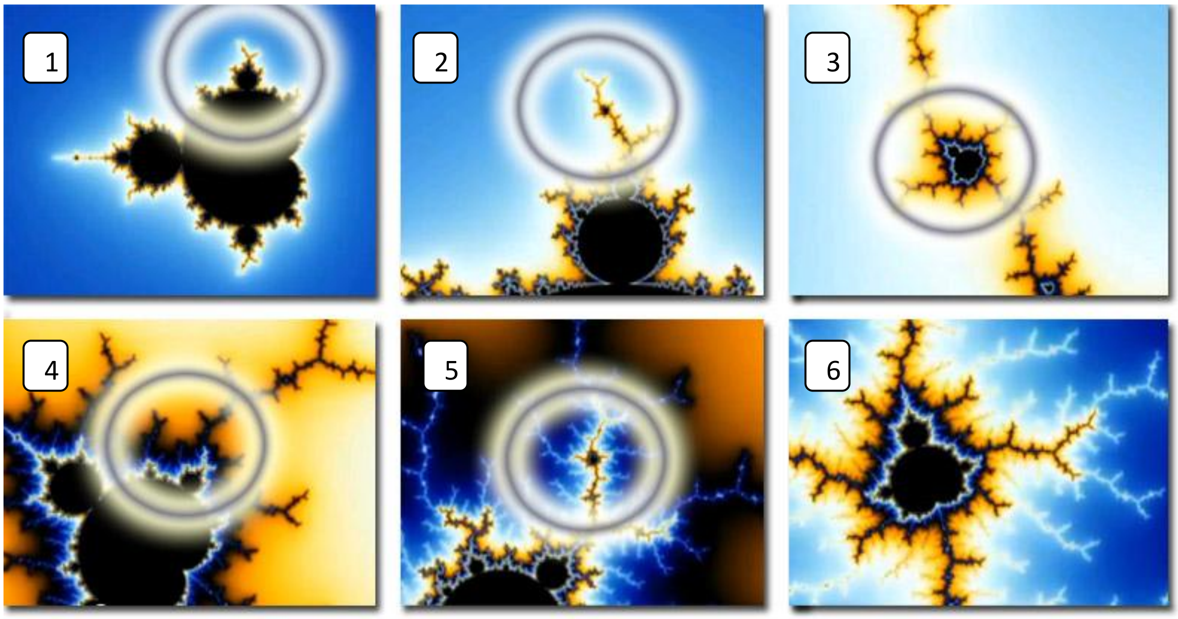
En cas de que utilitzem més de dos colors per a representar el conjunt de Mandelbrot, si *c* pertany al conjunt el pintarem de color negre però en cas contrari, li assignem un color diferent segons la velocitat amb la que tendeix a l'infinit, és a dir, la diferència de colors segons el mòdul de cada iteració, superior a *2*.

El resultat de tot aquest complex mètode és una estructura molt complexa, especialment a les fronteres de la figura, on es pot veure fàcilment la propietat d'auto-semblança.

3.2.7.2. Auto-semblança del conjunt de Mandelbrot

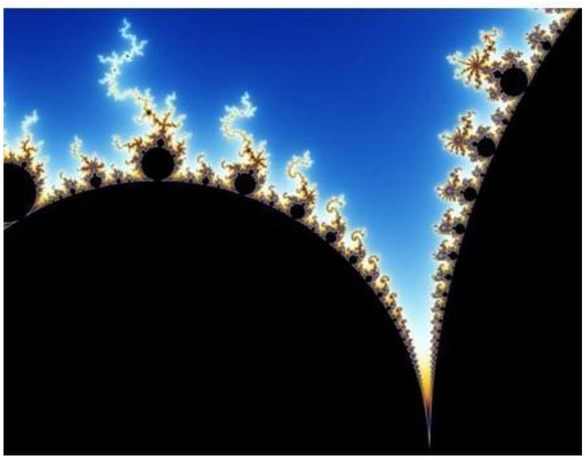
Una propietat fonamental de tot fractal és l'auto-semblança, al qual fa referència que una mateixa forma d'aquest sigui present en diferents relació d'escales. És a dir, que una mateixa forma gràfica o imatge es repeteixi a infinites escales. Per altra banda, una altra característica del fractal és que qualsevol part del conjunt pot designar la totalitat del fractal al pla complex, ja que conté informació de la funció i iteració.

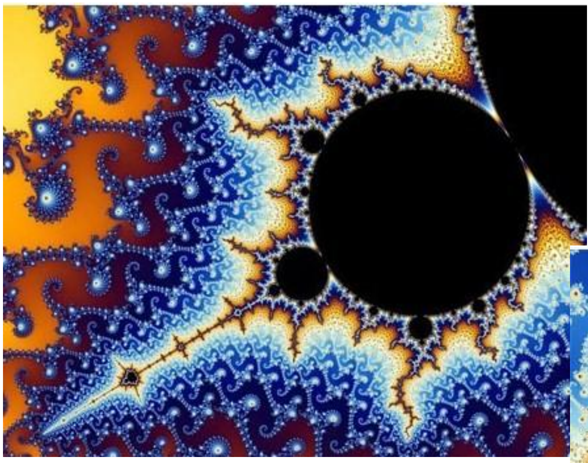
El conjunt de Mandelbrot també compleix aquesta propietat i ho fa amb una gran bellesa visual. Seguidament tenim un exemple on cada dibuix representa l'ampliació de l'anterior. La sèrie és de dreta a esquerra i de dalt a baix. Aquesta mostra l'auto-semblança del fractal, per mitjà de la forma total del conjunt de Mandelbrot:

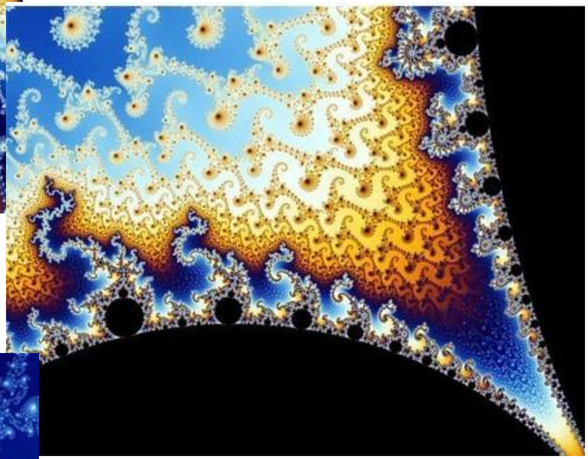


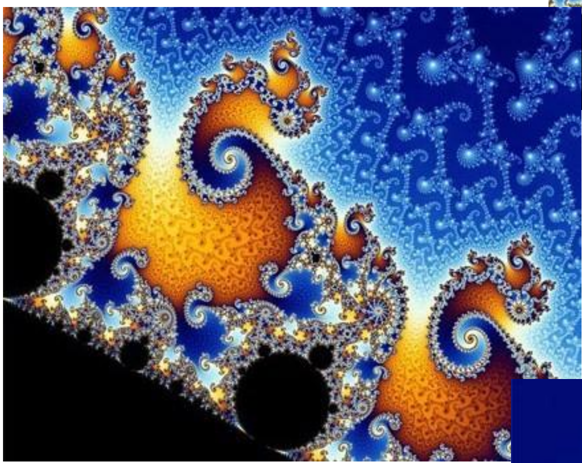
A la sèrie anterior s'aprecia una lleugera deformació en les formes auto-semblants més ampliades respecte la inicial. Cada forma auto-similar serà lleugerament diferent, ja que el nombre d'iteracions és finit i perd part de precisió. Tot i així aquests clons quasi idèntics es van repetint infinitament.

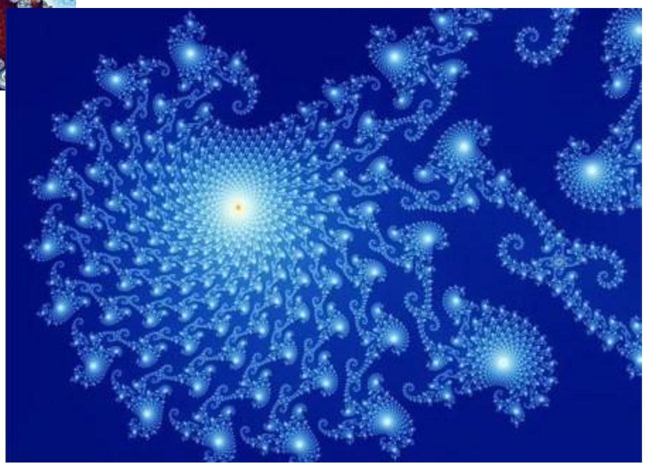
Tot i la auto-semblança mostrada, el conjunt de Mandelbrot és conegut com el fractal més complex obtingut fins els nostres dies i això comporta la seva irregularitat ordenada. Per tant, la seva auto-semblança no s'atura aquí, ja que la frontera del conjunt conté increïbles formes, totes infinites, auto-semblants, i espectaculars. Seguidament en tenim un recull:





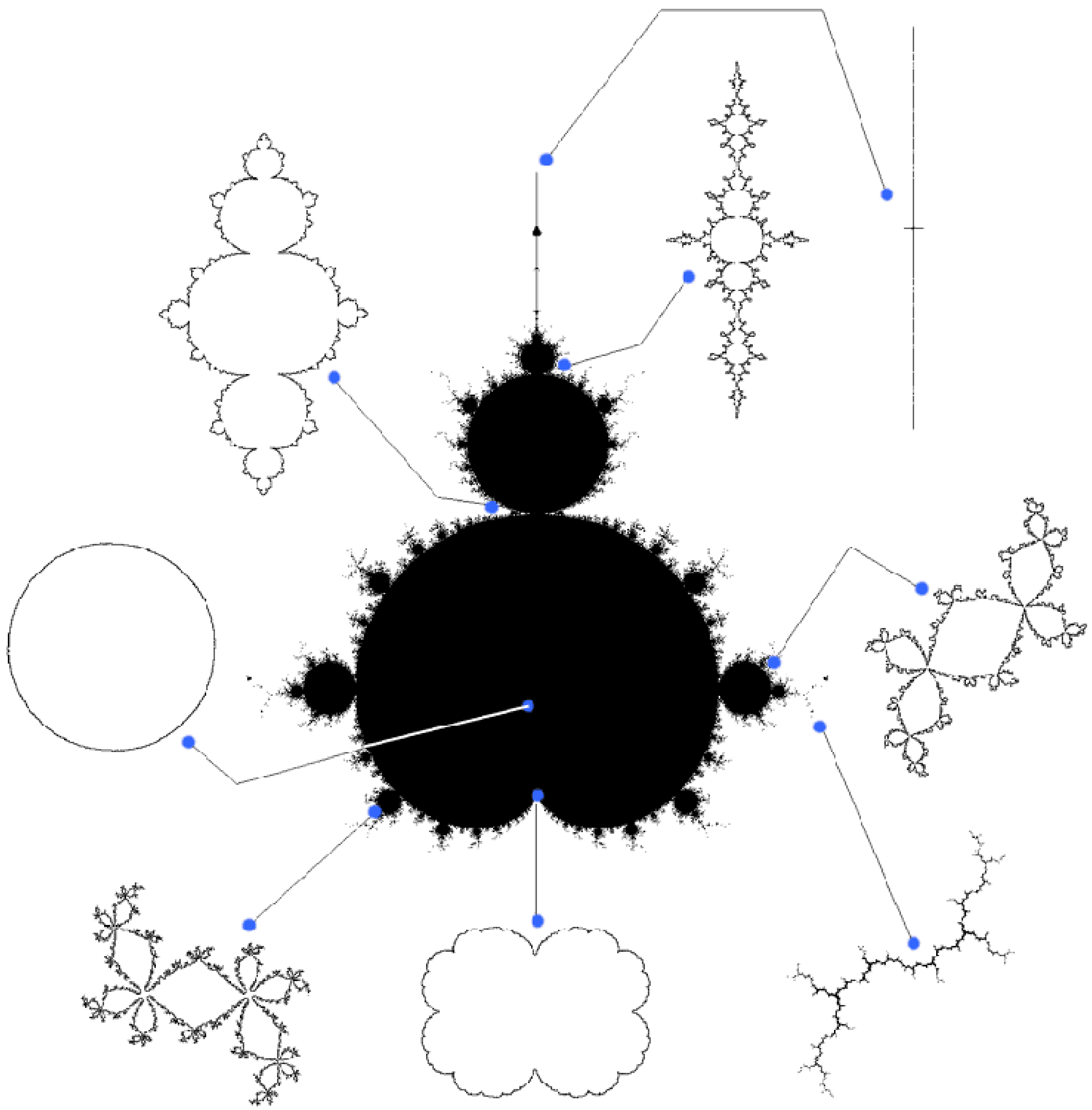






Però aquestes formes estan disposades a diferents punts del pla complex i com abans hem dit, aquest punt ve determinat pel valor *c*. També hem vist que aquest valor era diferent al conjunt de Julia que al de Mandelbrot, però per contra la fórmula era la mateixa. Així que si els dos conjunts tenen un punt de connexió (la fórmula), alguna relació han de tenir. Doncs sí, el conjunt de Julia és connex al conjunt de Mandelbrot, és a dir tenen un relació estreta.

Al conjunts de Julia es diferencien per *c,* i al conjunt de Mandelbrot *c* és el valor que determina el punt. Així que relacionant aquest valor comú, ens sorgirà la connexió. Aquesta relació donada per *c* ens justifica que per cada punt *c* del conjunt de Mandelbrot hi ha un conjunt de Julia. A la imatge següent es pot apreciar els diferents punts de Mandelbrot i el conjunt de Julia corresponent.



Actualment navegant per Internet, podem observar una gran quantitat de programes informàtics o aplicacions virtuals, que ens permeten observar totes les propietats i curiositats del conjunt de Mandelbrot, des de diferents iteracions fins a la relació entre conjunts de Mandelbrot i Julia.

3.2.7.3.Propietats del conjunt de Mandelbrot

Les propietats que té el conjunt de Mandelbrot són les següents:

•El conjunt de Mandelbrot és connex, és a dir, és impossible dividir-lo en dos peces que no tinguin cap relació en comú.

•Al conjunt de Mandelbrot podem anar d'un punt a un altre del conjunt mitjançant un camí continu que passi per tots els punts del conjunt de Mandelbrot, és a dir passant per la frontera del fractal.

•Aquest conjunt és compacte, és a dir, tancat i acotat.

•El fractal sencer ocupa el pla i, per tant, la seva dimensió és 2, mentre que la seva frontera té dimensió 1

•El conjunt de Mandelbrot és connex al conjunt de Julia, estan estretament relacionats. És a dir, que els diferents conjunts de Julia es poden trobar al conjunt de Mandelbrot segons els diferents valors de *c*.

3.2.7.4.Presència a la natura

➢El conjunt de Mandelbrot desprès de seguir els passos del de Julia és l'impulsor d'un gran grup de fractals anomenats fractals al pla complex.

L'estudi d'aquest conjunt té força importància en el terreny de les matemàtiques superiors en el que es coneix com a estudi de Sistemes dinàmics en variable complexa.

Darrerament aquest tipus de fractals s'han "popularitzat" degut a la gran complexitat i la atractiva estètica de les imatges creades amb mètodes relativament simples ja que avui en dia hi ha molts programes que els dibuixen.

3.3.Aplicacions dels fractals a diferents àmbits

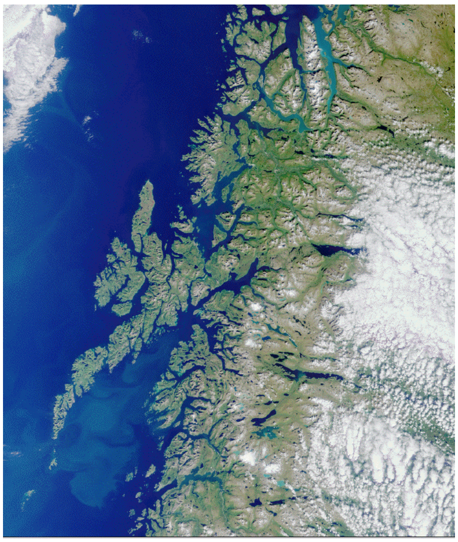
Pot semblar que els fractals són purs monstres matemàtics sense cap utilitat. Tot i això, són eines amb gran potència per afrontar l'estudi de fenòmens complexes i, més propers a nosaltres, del que ens pensem. Seguidament veurem unes quantes aplicacions.

3.3.1.Naturalesa

Fins ara hem vist fractals generats artificialment. Però, existeixen a la natura? Segons paraules del pintor Paul Cezanne: *"Tot a la natura pot veure's en termes de cons, cilindres i esferes"*. Es tracta d'una referència de la seva visió pictòrica, que el nostre cap ho visualitza com a descripció de la geometria tradicional, l'Euclidiana. Mandelbrot, en desacord d'aquelles paraules i partidari de la visió irregular, contestà: *"Els núvols no són esferes, les muntanyes no són cons, les costes no són cercles, l'escorça dels arbres no és suau i res, excepte la llum, viatja en línia recta"*. Si el missatge de Mandelbrot és que la naturalesa respon millor a una descripció fractal, seria convenient comprovar-ho.

Dins de la natura hi ha dues maneres de veure el comportament fractal, frontera o ramificació.

•La frontera és aquella que està en contacte amb dos medis o superfícies. Resseguint el contorn de la frontera, veiem que és irregular i se'ns mostra una corba, normalment amb auto-semblança estadística. En són un exemple: les muntanyes, costes, núvols, vent, fòssils, galàxies i fins i tot el cos humà o les ones.



Costa fraccionada amb comportament fractal

Per què les considerem que són fractals? Les fronteres són considerades fractals perquè la seva dimensió és fraccionària. Qualsevol corba té dimensió fractal, ja que està compresa entre una línia recta i un pla. Com que no és cap dels dos i la dimensió de la recta i pla és respectivament 1 i 2, la seva dimensió serà fraccionària, entre 1 i 2.

També és fractal perquè la seva auto-semblança és estadística, la qual vol dir, que la seva figura no es repeteix a diferents nivells de l'infinit però sí els nombres que el componen. Així que concloem que les fronteres naturals, són fractals. A la part pràctica es podrà apreciar matemàticament.

Però no sempre ens hi podem adreçar com a fractals, perquè no tothom els considera fractals, ja que la natura és finita, i els fractals són infinits. Per tant, direm que es comporten com a tal.

•La ramificació és la segona manera en que es comporten els fractals naturals. La ramificació és en aquells casos en que es produeix una auto-semblança. En són un exemple: les plantes, arbres, aliments, llamps, rius, neu, animals i altre cop parts del cos com: vasos sanguinis o la xarxa neuronal.

Aquesta auto-semblança no és com l'anterior, purament numèrica a diferents escales, sinó que és la repetició d'una forma a diferents nivells de l'infinit. Aquesta s'anomena auto-semblança quasi-idèntica.

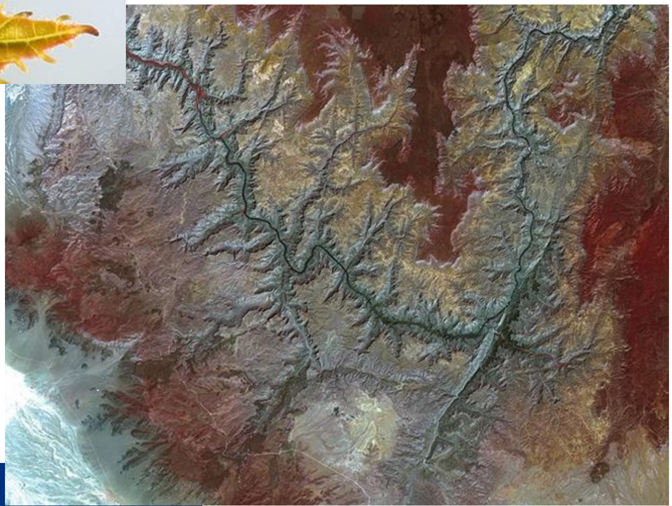

Ramificació d'un arbre

Les ramificacions tampoc poden considerar-se fractals purs, ja que també formen part de la natura i aquesta és finita. Per tant, a la natura els comportaments són fractals però no fractals purs.

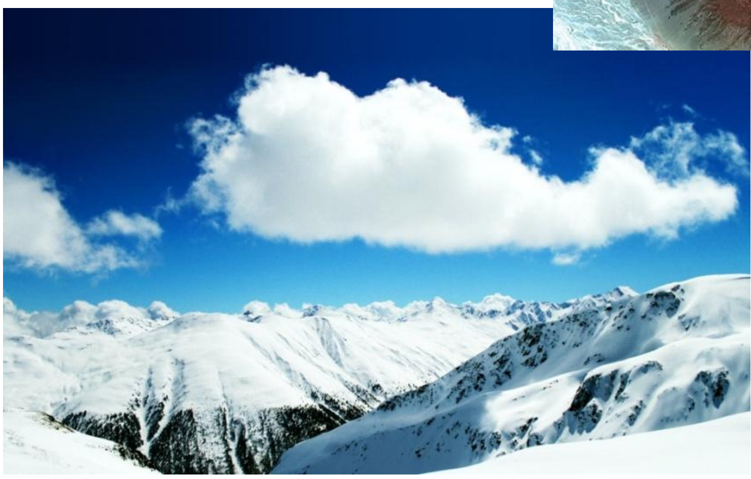
Hi ha una immensa varietat d'objectes amb comportament fractal a la natura i en volem mostrar unes quantes gràficament.

"Com si de les arteries d'un violent i lumínic déu es tractés, els llamps accedeixen espontàniament a un algoritme fractal en qüestió d'instants per després dissoldre's"

"Moltes plantes segueixen fórmules recursives com a patró, com ara venes de fulles i generació de branques"



"Els traçats generats per el pas del riu Colorado al llarg de milions d'anys, han dotat al Gran Canyon amb un sublim disseny fractal"



"La barreja d'objectes irregulars o objectes amb comportament fractal, són plasmats als paisatges. Neu, muntanyes, núvols ..."

La natura comprèn una immensitat d'objectes fractals. Els perfils i esquerdes d'un massís muntanyós presenten auto-semblança fractal, igual que un bosc de falgueres o el delta d'un riu. S'ha comprovat que la propagació d'un incendi forestal, en una plantació ordenada d'arbres, segueix una conducta fractal.

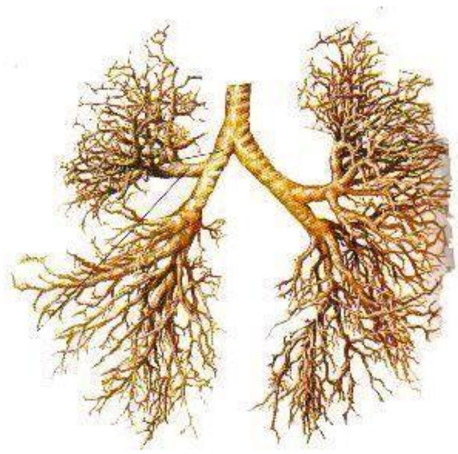
3.3.2.Ciències científiques

Com hem dit abans, els fractals són una eina molt potent per a la recerca i investigació d'enigmes científics. Aquests s'usen per les següents ciències científiques:

La **biologia i medicina** és un dels camps en els que els fractals es fan servir més. Malgrat que fa poc temps que s'utilitza, cada cop és més present a la manera d'analitzar les formes dels òrgans i les maneres d'observar el cos humà.

Fins fa poc la biologia utilitzava els patrons de la geometria euclidiana, però des de que es coneixen els fractals, això ha canviat. Els sistemes i processos biològics són típicament caracteritzats per molts nivells d'estructura, amb la qual cosa el mateix patró general va sent repetit en diferents nivells. Els vasos sanguinis, la xarxa neuronal són exemple de ramificacions dins el nostre cos, però també tenen propietats fractals en la manera d'arreplegar-se. Gran quantitat d'elements com ADN, neurones o venes es repleguen per ocupar el menor espai dins del cos i mantenir la seva funció. Aquestes propietats segueixen un patró fractal.

Una explicació d'aquests és el sistema circulatori. Aquest està constituït per una infinitat de ramificacions tubulars, que van des de la mida de les artèries i venes principals als capil·lars més ínfims de les cèl·lules. Per aconseguir que cap cèl·lula quedi sense subministrament, el nostre sistema circulatori és capaç d'empaquetar en el volum d'una persona un sistema de tubs en el que si poguéssim col·locar en línia recta tots els vasos sanguinis, donaria la volta al globus terraqüi set vegades. Tot i així aquest entramat tan sols ocupa un 3% del volum total del nostre cos! Una cosa semblant podem dir de sistemes com el nerviós, els conductes de la bilis o el sistema limfàtic. En el cas dels nostres intestins, els replecs a diferents escales, permeten que la superfície d'absorció s'incrementi espectacularment.



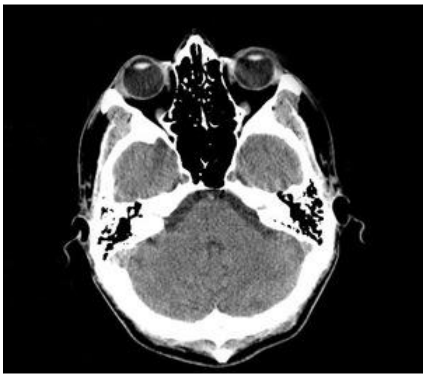
Dibuix de bronquis i bronquíols d'un pulmó humà

El sistema de ramificació dels nostres pulmons és lleugerament diferent. La nostra tràquea pateix una primera divisió en dos tubs, els bronquis, que seguidament se subdivideixen cadascun en dos bronquíols i així successivament, fins arribar al nivell dels alvèols. Per aquest mètode aconseguim oxigenar-nos, i dipositar de la millor manera uns vasos necessaris.

Per altra banda, la manera de mantenir la informació del nostre cos és molt enginyosa i a la vegada pràctica. El nostre cos emmagatzema la informació necessària per viure, com pot ser amb l'ADN, immunització de malalties, informació neuronal, però totes aquestes informacions no estan sempre desenvolupades. El nostre cos ha elaborat un sistema d'emmagatzematge fractal, on arreplega la informació de manera ordenada dins els genomes, i quan té la necessitat de desplegar-lo ho fa. En cas contrari i, sinó necessita la informació, aquesta roman plegada i, així ocupa menys espai.

Com hem vist la natura és molt sàvia, però si tan útil és, per què no aplicar-ho a nous mètodes mèdics? Efectivament, algú hi devia pensar i, actualment les noves tecnologies, amb l'ajuda dels fractals, han canviat la medicina.

Amb l'ajuda d'un monitor es poden predir algunes malalties, ja que a partir d'escàners que realitzen una ressonància magnètica nuclear, es poden veure ossos, muscles, vasos o òrgans de manera fractal al monitor. Aquests ajuden a la investigació i a detectar malalties. En són exemple un TAC (Tomografia Axial Computaritzada) o una mamografia. Un darrer exemple de màquina mèdica, molt vinculada amb fractals, és una màquina de ritme cardíac, ja que aquest és aleatori.


TAC humà

Aquestes màquines ens són molt útils a la medicina, perquè ens ofereixen nombroses avantatges funcionals. Els sistemes caòtics són capaços d'operar sota una amplia gamma de condicions i, són adaptables i flexibles. Aquesta plasticitat permet als sistemes mostrar les dades d'un ambient impredictible i canviant.

Una altra ciència ajudada pels fractals és **l'astronomia.** Comencem fent referència a l'anell de Saturn, descoberts per Galileu.

Aquest anell sempre ha estat motiu d'especulació entre astrònoms de tots els temps. Més tard, amb la millora de telescopis, es va descobrir que l'anell de Saturn no era consistent sinó que estava format per un seguit d'anells concèntrics, separats en una successió curiosa de distància. Anys després, amb l'ajuda de les fotografies de Voyager, es va saber que els anells de Saturn estaven fets d'aglomeracions de milions de petites llunes. També es descobrí que els anells seguien un patró canotrià, propi de Cantor.

Els fractals també són presents a la lluna. El nostre satèl·lit té una característica coneguda. En no estar poblada i no tenir atmosfera, l'escorça ha anat evolucionant naturalment. En comparació amb la lliure evolució, la lluna és un satèl·lit caracteritzat pels cràters, de múltiples mides i formes. Així que si pràcticament no hi hem posat més que els peus, aquests cràters han hagut d'estar fets per asteroides. Fins aquí no hi ha cap relació amb els fractals, però aquest fenomen és estudiat per una disciplina, teoria de fractures. Aquesta teoria estudia la distribució dels trossos de roca destrossats per la col·lisió, amb l'ajuda de fractals.

Però sens dubte, el punt fort dels fractals dins la cosmologia, és la repartició de matèria a l'espai. Segons les lleis relativistes, l'espai hi ha acumulacions de planetes en una mateixa òrbita que formen una galàxia, i un conjunt d'elles que formen l'univers. Aquests són cúmuls dins de supercúmuls que, com un fractal, es van disposant en diferents nivells de la infinitat amb una certa auto-semblança.

Galàxia amb cúmuls i supercúmuls de planetes

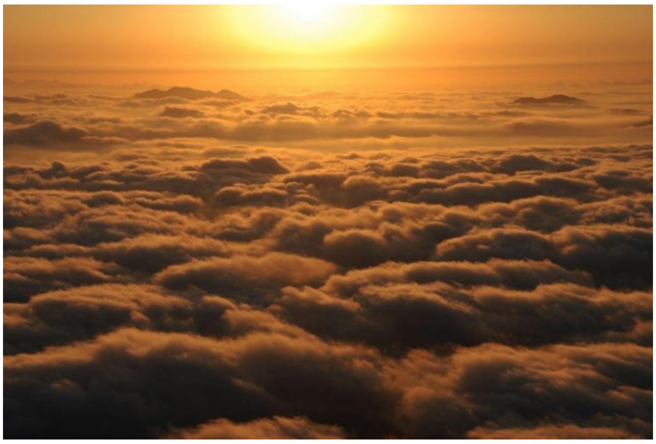
No podia fallar la **física**, ja que si sabem que a la natura hi ha comportaments fractals i la física és l'estudi dels comportaments de la natura, a un lloc o altre ha de sortir.

Els fractals són presents a la transició de fase del magnetisme. Aquesta és la transformació d'una fase a una altra d'un sistema termodinàmic, provocat pel magnetisme. És a dir, és l'intercanvi de calor produït per un sistema magnètic.

Una altra aplicació és el bombardeig de partícules d'aire a una sola partícula del moviment brownià. És a dir, el bombardeig de milions de petitíssimes partícules d'aire a una sola partícula de moviment brownià una partícula que es mou pel fluid aleatòriament. Cal recordar que el moviment brownià, és un moviment fractal i, per tant, el bombardeig anterior també és el recorregut d'un camí fractal. El camí recorregut té una dimensió propera al 2, així que el seu moviment es comporta com una corba unidimensional que cobreix un espai bidimensional. Aquest comportament és molt semblant al de les partícules subatòmiques.

El darrer comportament físic provè del vent. El càlcul fractal ve del comportament d'aeronaus quan aquestes tenen turbulències provocades per fortes ràfegues variables de vent.

La **meteorologia** és un altre camp on s'apliquen els fractals. Els fenòmens meteorològics tenen un comportament fractal. A l'hora d'estudiar la previsió del temps és important tenir en compte la teoria dels fractals. És impossible preveure el temps que farà a llarg termini. Els núvols es comporten de tal manera que un canvi molt petit pot provocar grans canvis dins un termini relativament curt. És important conèixer el que passa amb els fractals perquè, quan els meteoròlegs miren quin temps farà, han de tenir en compte el màxim de condicions inicials possibles.


Núvols, es comporten com a fractals

La **geologia** i **topografia** són dues ciències que estudien el relleu i la seva forma. L'estudi de falles, conques dels rius, creació de mapes, correcció de costes, sismes o moviment de plaques, són un exemple de l'estudi amb fractals.

La geologia estudiarà el relleu i el comportament d'aquest. Amb l'ajuda dels fractals és pot preveure o calcular un terratrèmol, el moviment de les plaques tectòniques, l'erosió dels rius o models de formació geològica.

Per altra banda, la topografia és un camp en que també s'aplica la geometria fractal. A l'hora de fer mapes s'ha de conèixer la propietat fractal de la costa i la seva possible dimensió fractal. Els mapes no poden ser mai exactes del tot i, si la costa té dimensió fractal considerable, sempre hi ha problemes que cal minimitzar.

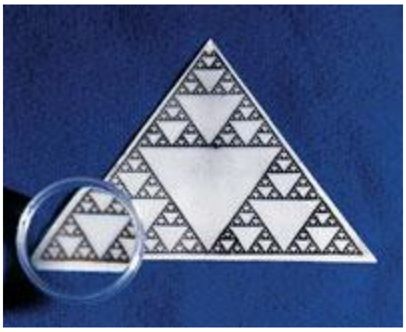
3.3.3.Tecnologia

Les aplicacions fractals vora la tecnologia rodegen majoritàriament els camps del disseny, la compressió d'imatges i les telecomunicacions.

Dins l'**enginyeria**, les antenes són objectes senzills en aparença, però el seu disseny i fabricació estan basats en les equacions de Maxwell per l'electromagnetisme, la qual cosa comporta certa complexitat. Fins i tot els receptors més avançats depenen sovint d'un simple fil penjant, que no es diferencia de les primeres proves de transmissió de ràdio, fetes per Marconi.

Els fractals milloren el disseny d'antenes bàsicament per dos motius:

El primer és perquè poden millorar el funcionament dels conjunts d'antenes. Moltes antenes semblen estar compostes d'una única i independent antena, però en realitat estan compostes de formacions de centenars de petites antenes. Tradicionalment aquestes antenes més petites són col·locades de forma aleatòria o de forma ordenada.


Antena fractal

Però Dwight Jaggard i el seu equip de la Universitat de Pensilvana, han descobert que una col·locació en forma de fractal pot combinar la robustesa d'una col·locació aleatòria amb l'eficiència d'una ordenació coherent. *"Els fractals són el pont que omple els buits"*, comenta Jaggard, *"Tenen un desordre a curt abast i un ordre a llarg abast "*. Fins i tot les antenes independents es beneficien de tenir una forma fractal.

El segon motiu és perquè la forma fractal pot ser beneficiosa fins i tot per antenes aïllades. Nathan Cohen, un radio-astrònom de la Universitat de Boston, va desenvolupar una patent amb fils doblegats seguint la forma de les corbes de Koch o dels triangles de Sierpiński. En replegar així l'antena s'aconsegueix no només allotjar la mateixa longitud en un espai sis vegades menor, sinó que la seva forma dentada genera capacitància i inductància addicionals, fent innecessaris la complementació d'altres elements externs.


Antena fractal

Per altra banda, a casa nostra també s'està desenvolupant sobre el tema. Un equip d'enginyers de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), està investigant sobre les antenes fractals duals per a telefonia mòbil.

Les antenes fractals perquè funcionin perfectament, segons Cohen i Robert Hohlfeld, han de complir dues condicions: han de ser simètriques respecte a un punt i, han de ser similars a si mateixa, condicions indispensables per ser fractal.

La **informàtica** també usa fractals, aplicables en la compressió de dades i arts gràfiques.

La compressió de dades és la reducció del volum de dades tractables per representar una determinada informació utilitzant la menor quantitat d'espai.

L'espai que ocupa una informació codificada es mesura en bits, per tant, com més bits tingui major serà la mida del fitxer. No obstant això, la resolució ve imposada pel sistema digital amb què es treballa i no es pot alterar el nombre de bits a voluntat, per això, s'utilitza la compressió per transmetre la mateixa quantitat d'informació en un nombre inferior de bits.

Si sabem que després d'una compressió el codi resultant tindrà menor mida que l'original, es que en algun lloc o altre s'ha hagut de retallar informació. Així que, la compressió de dades es basa fonamentalment a buscar repeticions en sèries de dades per després emmagatzemar només la dada al costat del nombre de vegades que es repeteix. Així, per exemple, si en un fitxer apareix una seqüència com "AAAAAA", ocupant 6 bytes es podria emmagatzemar simplement "6A" que ocupa només 2 bytes.

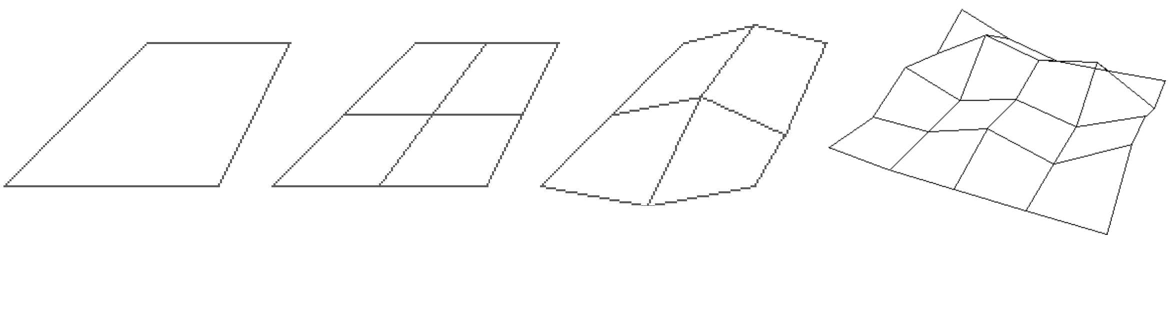
En realitat, el procés és molt més complex, ja que rarament s'aconsegueix trobar patrons de repetició tan exactes. S'utilitzen algoritmes de compressió, que procedeixen a buscar algoritmes matemàtics segons punts iguals i diferents.

Per altra banda, la compressió ens elimina dades que poden ser irrellevants o rellevants, segons els diferents tipus de compressió.

Quan parlem d'imatges comprimides, en general s'aconsegueixen molt bons resultats, però no és apropiat aplicar-ho a imatges mèdiques, ja que aquest procés no aconsegueix assolir els nivells acceptables de fiabilitat que es requereixen per als diagnòstics mèdics.

Finalment, les arts gràfiques també utilitzen els fractals. Actualment, els paisatges virtuals són molt presents a pel·lícules, fotografies o videojocs. Originàriament es coneix com a paisatge fractal. Aquesta és una forma en la qual es vol representar virtualment i que la seva dimensió és entre 2 i 3.

Per a construir aquests tipus de paisatges bàsicament se subdivideix un quadrat en quatre quadrats iguals i, aquests quadradets, s'articulen per costats i vèrtex per adoptar la màxima forma del paisatge escollit. Seguidament cada quadre anterior es torna a subdividir, adoptant altre cop el contorn del paisatge, però ara més detallat. El procés es repeteix recursivament en cada quadrat fins que s'aconsegueix el nivell de detall desitjat.



Encara que els paisatges fractals semblin naturals a primera vista, no reprodueixen les funcions geològiques i climàtiques reals.

Els paisatges fractals tenen aplicacions en el cinema. Actualment, la majoria de decorats de les pel·lícules, com ara Avatar, es fan mitjançant fractals. Els és més fàcil a partir de funcions matemàtiques obtenir decorats mitjançant l'ordinador que no pas fent-los d'una altra manera.

Paisatge fractal de la pel·lícula Avatar

3.3.4.Art

Des del punt de vista de les arts podríem dir que un fractal és bàsicament l'expressió visual o auditiva i, fins i tot, espacial (amb qualsevol tipus de dimensió) d'una expressió matemàtica.

La particularitat de la creació artística amb fractals és que l'algoritme de la fórmula ens condueix a una progressió ascendent o descendent de la mateixa. És a dir, que les característiques de les expressions artístiques es representaran amb una progressió ascendent o descendent. En el cas d'imatges o expressions visuals serà el camí que segueixen cap a l'infinitament gran o cap a l'infinitament petit. Tot i això, els fractals no només són a les imatges, sinó que comprèn música, escriptura, dibuix i fins i tot escriptura o poesia.

Els fractals possibiliten crear nous mons en noves dimensions, jugar amb el caos i l'aleatorietat. La visualització d'aquest concepte de l'infinit, del tot, del no-res, de l'Univers, aquesta abstracció espiritual és polida pels artistes. Pot ser amb o sense llapis, plasmat en un medi físic o interpretat per la imaginació infinita dels lectors, bé escoltat o bé amb l'ajuda d'un ordinador. Mitjançant l'ús de tècniques fractals, podem aconseguir tot això.

Els fractals poden ser presents a la **música**, quan es barregen qualitats deterministes i aleatòries per produir un nou so o melodia. És possible crear aquesta música ja que s'assignen sons determinats a valors concrets del fractal. Així que les notes poden ser establertes pel valor d'un fractal o ser igualment establertes a un valor, però aquest és aleatori. D'aquesta manera i, amb l'ajuda de propietats com la recursivitat, la iteració i l'aritmètica complexa, es poden crear composicions.

Tenim un exemple de la possible iteració musical:

Tots els instruments d'una orquestra comencen tocant una melodia simple. De sobte, mitja orquestra comença a interpretar a partir de la meitat de la melodia. Llavors, la meitat de la mitja orquestra, és a dir, $\frac{1}{4}$ d'aquesta canvia als punts $\frac{1}{4}$, i $\frac{3}{4}$ de la melodia. Més tard, cada músic es divideix, i al final cada instrument està tocant la cançó completa, però cap alhora. De manera que tot el so seria completament caòtic, però amb un mateix patró.

A la xarxa es poden trobar alguns exemples força interessants de música fractal, obtinguts d'assignar uns determinats valors de nota i durada del so en funció dels diferents punts d'un fractal (per exemple, el de Mandelbrot). Fins i tot hi ha obres de Beethoven, Bach o Mozart que mostren una successió ascendent o descendent de la posició de les notes.

També hi ha fractals a la creació de **dibuixos** i **imatges**, per ordinador o a mà. Pintures decoratives, dibuixos infinits o bé fascinants imatges fractals per ordinador, són pròpies de tècniques fractals.

Pintors abstractes com Dalí, Pollock o Escher van dibuixar, probablement sense saber-ho, autèntics dissenys fractals.

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) va ser un dibuixant holandès. Els seus gravats i dibuixos van omplir molts marges de llibres. Però a les litúrgies d'Escher presenta nombrosos trets fractals tot i que es desconeix si va investigar i es va documentar sobre el tema.


Dibuix Escher anomenat "snakes", 1969

Sense ser matemàtic, les seves obres mostren un interès i una profunda comprensió dels conceptes geomètrics, des de la perspectiva i amb figures corbes, passant per la divisió del pla en figures iguals. Sense ordinadors i sense conèixer els fractals va realitzar nombrosos gravats que ens suggereixen artísticament les progressions cap a l'infinit. Es va interessar també per les construccions impossibles.

En el seu honor van néixer els fractals "escherianos", va ser com un petit reconeixement que se li va fer ja que ell els va descobrir sense necessitat de fórmules matemàtiques, només amb la seva imaginació.

Sense ordinadors i durant segles, l'ésser humà ha utilitzat patrons geomètrics repetitius seguint models fractals com a elements decoratius en retaules, en marges de llibres i arquitectura. Un exemple molt gràfic pot ser l'art decoratiu àrab, basat en la repetició de motius geomètrics o els exemples que trobem en l'art africà. Un altre, el mosaic del sòl a la cripta de la Catedral d'Anagni (Itàlia), que va ser construïda l'any 1104 i està format per triangles de Sierpiński.

Finalment els ordinadors també han aportat el seu granet de sorra, amb programes informàtics com Apophysis o Ultra Fractal es poden fer imatges amb tècniques diverses, canviant paràmetres, geometria de triangles o amb transformacions aleatòries. Artistes com Linda Allison o Robert William utilitzen programes informàtics per obtenir imatges fractals i componen veritables obres d'art amb elles.


Fractal obtinguda per ordinador

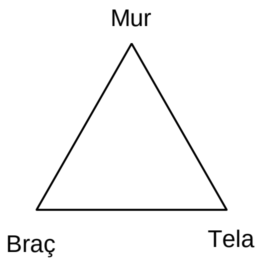
El treball "The fractal Alhambra Project" va consistir en reproduir parts de l'Alhambra amb fractals i els resultats van ser impressionants.

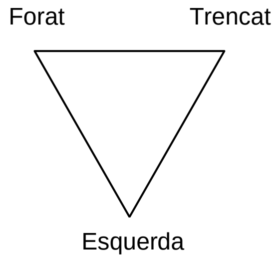
També hi ha presència fractal a l'**arquitectura**. Alguns dissenys caòtics són considerats tècniques fractals, ja que consten de contorns amb corbes molt irregulars vinculades als fractals. En addició, s'aprecien patrons recursius i formes auto-similars.

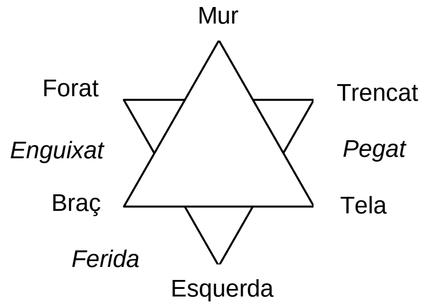
En arquitectura es pot observar la Sagrada Família de Gaudí, o els detalls extremats del barroc com veritables fractals. Les catedrals gòtiques són bons exemples de visió intuïtiva fractal, ja que tenen tres nivells jeràrquics de voltes arquitectòniques.

Fins i tot, Benoît Mandelbrot escriu sobre la Torre Eiffel en el seu llibre The Fractal Geometry of Nature: *"La meva impressió és que la torre que Gustave Eiffel va construir a París, abans de conèixer les idees de Koch, de Peano, i de Sierpinski , incorpora deliberadament la idea d'una corba fractal completament en l'estructura dels ramals ascendents de la torre ".*

Ramón Dachs proposa una **escriptura fractal**. Per sorprenent que sembli, Ramón Dachs va crear una nova manera d'escriure considerada fractal, ja com el seu nom indica és fraccionat. És a dir, proposa una manera d'escriure fraccionada, on participen paraules independents en els vèrtex de triangles. Per formar noves paraules i així iterar, cal que dos triangles oposats es trobin i buscar una paraula que encaixi entre cada parell de vèrtex. Aquest mètode dóna una solució al conflicte entre les dues matèries dels vèrtex i, no sempre hi ha una possible solució. El següent n'és un exemple:







Finalment, la **poesia** ha estat últimament intervinguda per poemes en relació als fractals. L'anomenada poesia fractal sempre va acompanyada d'una o més imatges i tracta sobre la descripció poètica d'un ambient on els fractals ocupen certa part del poema o els sentiments que suggereixen a l'autor, la figura fractal en qüestió.

Un exemple és el poema següent:

Hexagonal copo de nieve
celando arcanos de fríos inviernos
como los llantos de los mendigos
que de tan álgidos ya ni se asoman
de sus pupilas languidecíentes

Felipe Antonio Santorelli

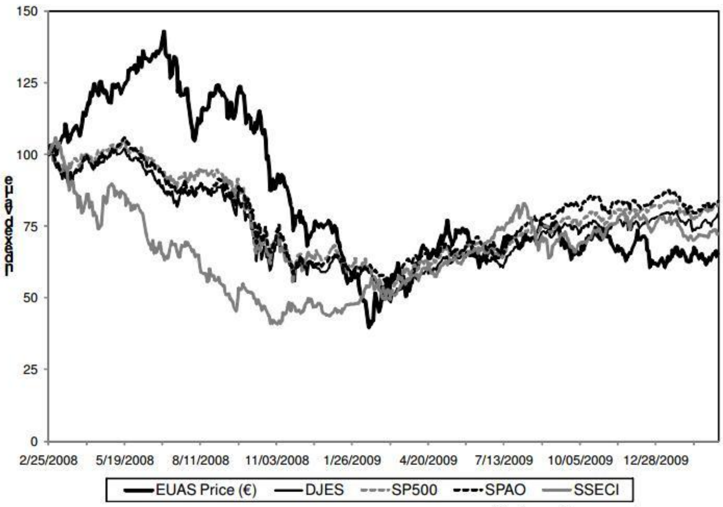
Segons l'autor fa referència a l'hivern, on mostra una visió de la neu des d'un punt de vista fractal. Els flocs de neu i pupil·la de l'ull tenen comportaments fractals, com es mostra a les imatges.

3.3.5.Economia

Les representacions econòmiques són generalment de sèries temporals, i dins d'aquestes les més populars són els gràfics relacionats amb els mercats financers de valors, de divises, de futurs i altres. I els gràfics d’aquests tenen un clar comportament fractal.

Els analistes financers utilitzen per prendre les seves decisions d'inversió dos mètodes: l'anàlisi fonamental basat en l'anàlisi econòmica, estudi de la marxa de les empreses, dividends, rendibilitat ... i l'anàlisi tècnica mitjançant l'estudi dels gràfics. Dins d’aquest hi ha un altre anàlisi basat en les ones d'Elliott o al fractal inestable d'Elliott.

Ralph Nelson Elliot al 1930 va donar a conèixer la seva investigació coneguda com la teoria de les ones de Elliot, en la qual descriu el moviment dels mercats financers amb ones d'avanç i correcció. Elliot va dir que cada ona d'avanç es compon d'ones d'avanç i correcció més petites. Elliot va descobrir un fractal sense conèixer el concepte.



Font: epubs.scu.edu.au

Exemple de gràfic borsari

Va ser en la dècada dels 80 del passat segle XX quan John Ehlers va presentar el sistema MESA (Maximum Entropy Spectral Analysis), Anàlisi Espectral d’Entropia Màxima, i des d'aquest moment es va començar a usar els sistemes no lineals per a l'anàlisi del mercat.

Si existeixen les esmentades ones o no és una cosa discutible, si permeten predir l'evolució futura dels mercats també, però que el llistat borsari és un fractal això és innegable, sinó agafeu un gràfic setmanal, i hi trobarareu impulsos i correccions molt similars a les que podria trobar en un gràfic diari.

3.3.6.Ciències socials

Els models fractals s'estan aplicant als diferents camps de les ciències socials. Els fenòmens socials i polítics són interpretats sovint com dispersió caòtica de coses i objectes. Actualment es pot descriure la civilització contemporània com a civilització “fractal”, ja que ens caracteritzem per un mateix grau de fragmentació social, econòmic, institucional, polític i cultural.

Segons l’estudi de l’Universitat de Yale, feta pels professors Michael Frame, Benoît Mandelbrot i Nial Neger, recullen uns quants exemples d’anàlisi fractal dins les ciències socials: l'estudi de les guerres, la història dels sumeris i el modern Iraq, la psicologia i un model per a les relacions internacionals.

S'assenyala que models similars s'han utilitzat per plasmar l'evolució de les ciutats i per explicar l'organització auto-similar de la distribució de serveis a les grans ciutats.

En sociologia, les estructures auto-similars en un punt determinat van ser suggerides per Haken. L’exemplifica així: quan hi ha una concentració de persones que es dispersen, com per exemple, immediatament després d'un míting electoral, un cop que l'atenció dels participants ha acabat d'estar concentrada en els oradors. Tot aquest conjunt de persones es dispersa independentment i hi ha un punt en el qual es poden apreciar grups grans de persones, barrejats amb grups petits i individus aïllats. Aquesta geometria obeeix una llei de potències. Pocs grups grans i molts grups petits.

El professor Miguel Ángel Mateo García, del Departament de Metodologia de les Ciències del Comportament de la Facultat de Psicologia de la Universitat Complutense de Madrid, ha analitzat el concepte de complexitat en termes de no linealitat, observant el paper central que té una concepció geomètrica - topològica de la realitat i la repercussió d'algunes d'aquestes idees a la Psicologia.

Segons Mateu en el seu treball “Notes sobre la complexitat en la Psicologia”, el funcionament del psiquisme humà i el seu comportament, segueix un camí fractal, ja que segons Mateu, l’ésser humà pot ser estudiat per mitjà de sistemes complexos, dinàmics, oberts i autoorganitzats i considera que, la teoria de sistemes dinàmics es mostra com el marc idoni per a la construcció d'una metodologia adequada per a la Psicologia.

El professor Nikos A. Salingaros, del Department de Matemàtiques Aplicades de la Universitat de Texas a San Antonio, assenyala en una entrevista que la vida a les ciutats té unes característiques purament fractals i que la pressió dels automòbils i el creixement de la població del segle XX han esborrat la ciutat tradicional amb característiques geomètriques euclidianes. Proposa utilitzar el criteri fractal per la geometria de ciutats com una condició per al seu èxit, una societat ramificada.

En el mateix sentit Edward W. Soja, professor de Planificació Urbana a la Universitat de Califòrnia (UCLA), analitza els efectes concrets dels nous processos d'urbanització en l'espai metropolità que han sorgit de la globalització. Afirma que a la actualitat hi ha uns patrons d'estratificació social i desigualtat econòmica i social. Propugna una ciutat fractal constituïda per fragments i amb una estabilitat a partir d’una tradició constructiva.

4.Marc pràctic

4.1. Introducció

A la part pràctica del treball volem esbrinar la dimensió d'un territori, definida i tractada, en apartats anteriors. Aquest territori serà el nostre poble, l'Ametlla del Vallès. Ens hem inspirat en l'article del matemàtic Benoît Mandelbrot, "*Quan mesura la costa de Gran Bretanya? Auto similitud estadística i dimensió fraccionària*" (traduït de l'anglès), publicat per primera vegada al Science al 1967.

Per seguir, haurem de recordar com és la dimensió fractal i com es comporta en un territori.

El municipi de l'Ametlla del Vallès igual que la immensitat de territoris existents arreu del món, té fronteres irregulars i no lineals.

Tant si ens basem en les fronteres naturals, com poden ser costes, rius, serralades... o en fronteres polítiques, molt relacionades amb la geografia del territori, observem que quasi sempre, per no dir sempre, el territori no és una forma geomètrica tradicional. Així doncs, si la mesura d'aquests territoris no són regulars i, per tant, no segueixen els postulats d'Euclides, arribem a la conclusió que han de ser mesurats dins la precisió de la irregularitat.

Repassem la dimensió i justifiquem doncs perquè la necessitem en aquest treball i perquè una línia irregular, com ara una frontera, és mesurada fractalment.

La dimensió fractal és aquella que es caracteritza per ser un nombre fraccionari. Així que si sabem que una frontera política, com ara la de l'Ametlla, és una línia irregular, concloem que ha de tenir propietats fractals. En aquesta corba es pot intuir fàcilment que la seva dimensió fractal estarà entre una línia recta i un pla. Per tant, podem dir que la seva dimensió haurà d'estar entre 1 i 2, com hem demostrat anteriorment, una línia recta té dimensió 1 i un pla 2. Si observem el mapa de l'Ametlla podrem veure que la figura del perímetre no sembla una figura extremadament rebuscada i entortolligada, així que ens podríem arriscar a dir que la seva dimensió estarà més propera a la dimensió d'1.

Les fronteres territorials tenen propietats fractals i una és l'auto-semblança. Al ser natural aquesta similitud no és exacte, és a dir, no és igual a diferents nivells, sinó que té una autosimilitud estadística. Aquesta darrera autosimilitud, ja explicada anteriorment, exigeix que el fractal tingui mesures numèriques que es preservin amb el canvi d'escala. Els fractals aleatoris són exemples de fractals d'aquest tipus, els quals, són els més apropiats per descriure diversos objectes irregulars del món real, com ara costes i fronteres.

Aquesta dificultat a l'hora de mesurar la longitud d'una corba degut a les irregularitats que presenta la mateixa és una característica de les corbes i superfícies fractals.

4.2. Metodologia de treball

Per altre banda, hem esmentat a Benoît Mandelbrot i el seu article sobre la dimensió fractal de Gran Bretanya, en el qual ens hem basat per la metodologia de treball.

Càlcul de Gran Bretanya amb segments d'un compàs, treball de Mandelbrot

Mandelbrot va rebre un encàrrec de calcular la longitud de la costa de Gran Bretanya. A simple vista, sembla fàcil, però ell va demostrar que tenia més dificultat de l'aparent, amb un mapa de l'illa. Per aconseguir-ho, Mandelbrot es va valdre d'un compàs i un mapa i va realitzar diferents mesures segons l'angle d'obertura del compàs. Quan variava l'angle, la mesura de la longitud, variava. Quan més petit era l'angle més gran era la longitud de la costa, així que, la línia de la costa va resultar impossible de mesurar, perquè té longitud considerada infinita. És a dir, si ens basem en qualsevol illa, veurem irregularitats en la línia de la costa (golfs, badies, deltes, puntes, caps, platges etc). Si agaféssim un mapa d'escala més petita (ampliat), veuríem les mateixes irregularitats costaneres i noves dins d'elles, observaríem noves entrades, platges, golfs, etc N'apreciaríem de noves que amb l'altre no havíem pogut fer. Així que com més petita sigui la mesura més precís serà el resultat, però mai igual, ja que les corbes tenen aquesta propietat irregular.

Benoît Mandelbrot va publicar el seu llibre "Els Objectes fractals. Forma, atzar i dimensió" l'any 1975, on va descriure possibles mètodes de càlcul de la longitud costanera. Ara en farem referència.

MANDELBROT, B.M. (2000). Capítulo 2 ¿Cuánto mide la costa de Bretaña? A: Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión (Traducció de Josep Llosa). Barcelona, Espanya. p. 27-28. ISBN 84-7223-458-4

" <u>La diversidad de los métodos de la medida</u>

He aquí un primer método: se pasea sobre la costa un compás de abertura dada η, comenzando cada paso donde termina el anterior. El valor de η[11] multiplicado por el número de pasos nos dará la longitud aproximada L(η). Si se repite la operación reduciendo cada vez más la abertura del compás, se encuentra que L(η) tiende a aumentar sin límite. Antes de discutir esta comprobación, podemos observar que el principio en que se basa el procedimiento comentado consiste de entrada en reemplazar el objeto a medir, que es demasiado irregular, por una curva más manejable, arbitrariamente suavizada o «regularizada». […].

[11] **η**: Simbolitza la distància de mesura. En els casos aplicats pot ser angle de compàs, passa de persona.

Aunque tal regularización resulta inevitable, puede hacerse igualmente de otras maneras: así, por ejemplo, se puede imaginar un hombre que anda a lo largo de una costa siguiendo el camino más corto posible sin separarse de ella más de una cierta distancia establecida η; luego, se repite haciendo cada vez más pequeña dicha distancia máxima del hombre a la costa. Después de esto se sustituye al hombre por un ratón, después por una mosca, y así sucesivamente. Cuanto más cerca de la costa se quiere uno mantener, tanto mayor será, inevitablemente, la distancia a recorrer.

Un método más: para evitar la asimetría entre tierra firme y agua establecida por el segundo método, se pueden considerar todos los puntos de una y otra que disten a lo más η de la costa. Así pues, se imagina que la costa está recubierta a la perfección por una banda de anchura 2η; se mide la superficie de dicha banda y se divide por 2η, como si fuera un rectángulo. Y finalmente, un cuarto procedimiento: se imagina un mapa dibujado por un pintor puntillista, que utiliza «puntos gruesos» de radio η; en otras palabras, se recubre la costa con círculos de radio menor o igual a η.

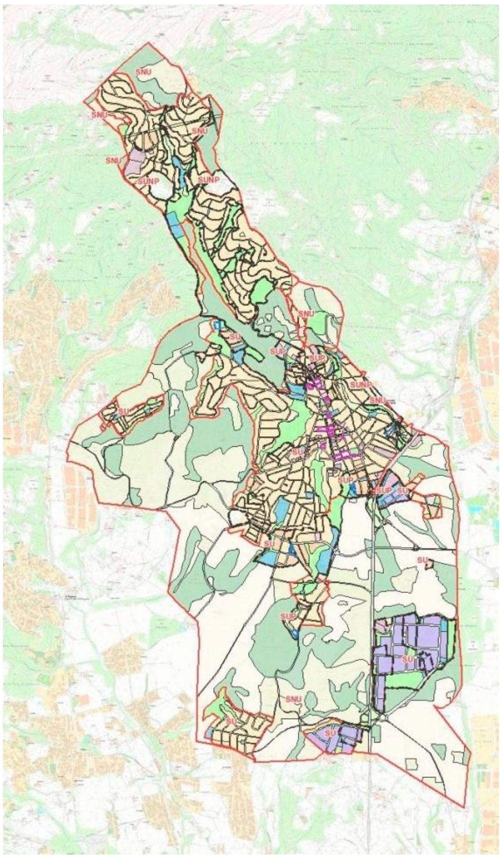
Ya debe de haber quedado claro que cuando se hace que η sea cada vez menor, todas las longitudes aproximadas aumentan. Siguen aumentando incluso cuando η es del orden del metro, sin significado geográfico alguno.”

En aquest mateix llibre, Mandelbrot va mesurar la dimensió fraccionària de la seva illa, Gran Bretanya, amb el resultat obtingut d'una dimensió d'1,25.

Mandelbrot va concloure, de la seva experiència, que les costes i altres corbes geogràfiques tenen la propietat d'autosimilitud estadística i que la seva dimensió està compresa entre 1 i 2. Tot i així, l'article no assegura que la línia de la costa o alguna altra corba geogràfica sigui realment un fractal (ja que seria físicament impossible) només diu que les línies naturals poden comportar-se estadísticament com a fractals. Aquest va ser el principi de la recerca de Mandelbrot i el que el va introduir dins el món dels fractals, va impulsar-lo a estudiar-los per trobar una geometria per a les formes naturals.

Després de veure què va fer Benoît Mandelbrot amb Gran Bretanya, hem volgut analitzar la longitud del nostre municipi i acabant obtenint la seva dimensió.

Per què l'Ametlla i no una illa com va fer Mandelbrot? Tot i que a una illa podem observar més irregularitats a més ampliació que no pas un territori polític, a les mesures a les quals nosaltres les aplicarem, la diferència i imprecisió és petita així que podrem aconseguir uns resultats versemblants. Un altre punt en contra és la resolució de dimensions de costes i illes. És a dir, a la xarxa la gent que tracta la dimensió fractal pràcticament, ho complementa amb la mesura d'illes i costes, així que nosaltres volíem sortir de la monotonia. A banda de la precisió i el càlcul d'illes i costes, la familiaritat que ens aporta l'Ametlla del Vallès i el reconeixement del territori, igual que barris, no ho tindrà cap altre lloc. Així que, amb una proximitat acollidora i amb la intenció d'aprendre més del nostre municipi, ens vam decantar per l'Ametlla del Vallès.



Mapa de l'Ametlla del Vallès

4.3. Procediment

Coneguts els objectius a completar, el mètodes a aplicar i les raons de la tria del territori, ens disposem a explicar el procés que hem seguit per completar les metes.

Per obtenir aquestes mesures, utilitzarem mapes a diferents escales i diferents angles d'obertura d'un compàs. Amb un mapa determinat i obertura adequada, resseguirem amb el compàs la frontera del municipi per tornar a arribar a l'origen. Aquests punts units formaran segments de mateixa distància, resseguiran el perímetre màxim possible del poble. Com Mandelbrot va especificar, un compàs un mapa i moltes mesures, ens ajudaran a obtenir els valors necessaris.

Calculant el perímetre mitjançant el mètode del compàs

Del municipi de l'Ametlla tenim 6 escales diferents. Aquestes mapes estan distribuïts en fulls de DIN A molt variats. Així que tenim 6 escales a DIN A4-A3-A2 (veure annex II). Els mapes són els següents, a escala en centímetres:

- Escala 1:39000 (DIN A4)
- Escala 1:33000 (DIN A4)
- Escala 1:27000 (DIN A3)
- Escala 1:23000 (DIN A3)
- Escala 1:19000 (DIN A2)
- Escala 1:14000 (DIN A2)

Aquests mapes no han sigut tan fàcils de trobar. Tot i que aparentment penses que un mapa a escala determinada el pots extreure del Google maps, de l'Institut Cartogràfic de Catalunya (ICC), d'un atles de Catalunya o demanant-lo a l'Ajuntament del poble, cap d'ells ens va resultar útil per trobar el que buscàvem, excepte un, l'Ajuntament. Els mapes online van molt bé per observar el relleu però en temes de fronteres municipals, cap d'ells les marquen. Així doncs, l'Ajuntament ens van donar un mapa però sense escala i amb un perímetre molt arrodonit, no ens servia. Per sort ens van recomanar

anar a Serveis Territorials de l'Ametlla, on ens van orientar cap a uns mapes municipals molt complerts, a un racó del web de l'Ametlla. En aquests mapes municipals hi sortia la possibilitat d'augmentar la vista del poble, un perímetre molt ben definit i el mostrador d'escala, just el que necessitàvem. Així que vam imprimir les diferents parts de tots els mapes i vam intentar la unió d'aquestes amb programes informàtics de fotografia, però no ens en vam sortir, així que vam tirar cap a la unió de retalls. Amb mapes originals maldestres, vam fer-hi còpies suficients per poder-ne completar les següents mesures.

Aquests mapes esmentats de diferent escala tenen tres mesures a cada mapa de 1, 2 i 3 centímetres. El perquè d'aquestes mesures amb diferent obertura d'angle, és per a millor precisió dels mapes i obtenir-ne un resultat versemblant utilitzant la mitjana aritmètica.

Per obtenir el perímetre d'una escala concreta a tants segments obtinguts, hem de multiplicar el nombre de segments per la mesura establerta.

Calculant el perímetre, d'un altre mapa, mitjançant el mètode del compàs

En aquest procés hem detectat que no tots els mapes coincideixen amb el punt final i inicial, és a dir, que l'origen i el final estan separats per menys distància del que teníem al compàs. Després de raonar en aquest error, no hi vam trobar solució així que vam acabar per sumar-li aquest marge d'error al producte anterior, per tal de poder tancar el perímetre.

Molts es preguntaran perquè calcular el perímetre de l'escala i és que per calcular la dimensió, necessitarem tant les mesures reals (escales) com els perímetres obtinguts en les escales.

Aquí els mostrem els resultats obtinguts dels mapes:

Escala (1cm mapa: x cm realitat)	η (cm del compàs)	Nombre de Segments (NS) en cm	Marge d'Error (E) en cm	Mesura (M) en cm	Mitjana aritmètica
1:39000	1	51	0,2	51,2	49,350
	2	25	0,6	50,6	
	3	15	1,25	46,25	
1:33000	1	66	0,1	66,1	62,533
	2	31	1,5	63,5	
	3	19	1	58	
1:27000	1	76	0	76,0	73,767
	2	38	0,3	76,3	
	3	23	0	69	
1:23000	1	88	0,9	88,9	86,600
	2	43	0,8	86,8	
	3	28	0,1	84,1	
1:19000	1	119	0	119	115,717
	2	58	1,15	117,15	
	3	37	0	111	
1:14000	1	167	0,4	167,4	160,200
	2	79	1,9	159,9	
	3	51	0,3	153,3	

Finalment volem trobar la dimensió de l'Ametlla i com abans ja hem esmentat, necessitarem els perímetres de les diferents escales i les escales, tots amb la mateixa unitat de mesura, centímetres.

Un cop realitzades les mesures dels mapes a diferents escales, volem calcular la dimensió. Per calcular la dimensió necessitem, una manera de fer-ho i cercant per Internet en vam trobar la solució. Vam trobar una fórmula que ens relacionava les mesures de cada mapa entre les escales, a la mateixa magnitud. La fórmula era la següent:

$$\text{DIM}=\frac{\log(\frac{n}{N})}{\log(\frac{P}{p})}$$

En aquesta, es compara totes les escales amb les restants i igual amb les mesures pertanyents. Les incògnites de la fórmula, fan referència als següents termes:

- Les enes (n i N) representen les mesures en centímetres dels mapes, és a dir, els centímetres de perímetre. Són diferents ja que en cada cas n i N varien al canviar d'escales.

  - **N**= mesura del mapa en cm, d'escala més gran (M). És el resultat més petit.

  - **n**= mesura del mapa en cm, d'escala més petita (M'). És el resultat més gran.

- Les pes (p i P) representen les mesures en centímetres d'escales, centímetres reals de les escales. Són diferents a cada cas, segons quina comparació entre escales.

  - **P**= nombre d'unitats reals en l'escala més gran.

  - **p**= nombre d'unitats reals en l'escala més petita.

Després de veure aquesta fórmula, vam voler analitzar si aquesta era adequada, la vam comparar amb la nostra teoria per veure-hi si es tractava del mateix.

$$\text{DIM}=\frac{\text{Log (nombre de peces autosimilars)}}{\text{Log (factor d' augment)}}$$

L'altre fórmula és:

$$\text{DIM}=\frac{\log(\frac{n}{N})}{\log(\frac{P}{p})} \xrightarrow[\text{Comparació escales}]{\text{Comparació mesures}} \frac{\log(mesures)}{\log(escales)}$$

Hem transformat la fórmula per poder comprendre-la millor. Com es pot veure en els exemples anteriors, l'única apreciació que ens queda aclarir és si les dues fórmules coincideixen en conceptes. Abans hem esmentat que la frontera de l'Ametlla té una auto-semblança estadística, diferent a les que hem vista anteriorment amb una auto-semblança exacte, però ambdues són auto-semblants. Així que tant les mesures com les peces tenen auto-semblança.

Per altra banda, nosaltres tenim 6 escales diferents i amb aquestes hem aconseguit els càlculs, així que podríem considerar-ne els factors d'augment, ja que gràcies a les escales podem apreciar el mapa més o menys ampliat. Així doncs:

$$\text{DIM} = \frac{\text{Log (nombre de peces autosimilars)}}{\text{Log (factor d' augment)}} = \frac{\log(mesures)}{\log(escales)} = \frac{\log(\frac{n}{N})}{\log(\frac{P}{p})}$$

Comprovat que tot lliga i que aquesta fórmula és adequada ens disposem a calcular la dimensió de l'Ametlla.

La dimensió l'obtindrem per la mitjana aritmètica de totes les dimensions. Aquestes dimensions vindran a partir de la relació entre elles, és a dir, la relació de totes les escales amb les restants, però sempre amb els paràmetres més grans com a numeradors. La taula següent consta dels paràmetres necessaris i del càlcul de la dimensió mitjançant la fórmula.

Escales	N (M)	n (M’)	P	p	Dimensió
1:39000-1:33000	49,350	62,533	39000	33000	1,417
1:39000-1:27000	49,350	73,767	39000	27000	1,093
1:39000-1:23000	49,350	86,600	39000	23000	1,065
1:39000-1:19000	49,350	115,717	39000	19000	1,185
1:39000-1:14000	49,350	160,200	39000	14000	1,149
1:33000-1:27000	62,533	73,767	33000	27000	0,823
1:33000-1:23000	62,533	86,600	33000	23000	0,902
1:33000-1:19000	62,533	115,717	33000	19000	1,115
1:33000-1:14000	62,533	160,200	33000	14000	1,097
1:27000-1:23000	73,767	86,600	27000	23000	1,000
1:27000-1:19000	73,767	115,717	27000	19000	1,281
1:27000-1:14000	73,767	160,200	27000	14000	1,181
1:23000-1:19000	86,600	115,717	23000	19000	1,517
1:23000-1:14000	86,600	160,200	23000	14000	1,239
1:19000-1:14000	115,717	160,200	19000	14000	1,065
Dimensió total (mitjana aritmètica)					**1,146**

Hem trobat la dimensió de l’Ametlla de Vallès, però a la relació entre les escales, 1:33000-1:27000 i 1:33000-1:23000, la dimensió ha sigut inferior a 1. Tot i comprovar les mesures, els càlculs, les escales i buscar-hi una possible solució, no n’hem trobat cap. Per sort aquesta contraresta dimensions un pèl excessives com és el cas de 1:39000-1:33000 i 1:23000-1:19000, amb 1,417 i 1,517. Així que manté un resultat molt raonable.

4.4. Conclusions del marc pràctic

Hem complert els objectius ja que la dimensió està entre 1 i 2 i és més propera a l'1 perquè no es molt irregular.

Concloem que la dimensió de l'Ametlla del Vallès amb 1,146 és més irregular que la dimensió de Mallorca amb 1,12 i menys irregular que la de Gran Bretanya amb 1,25 i, per tant, versemblant i perfectament possible.


Dimensió Gran Bretanya = 1,25	Dimensió Ametlla del V. = 1,15	Dimensió Mallorca = 1,12
B. Mandelbrot	A.J.F. (jo)	Marina Brasó

5.Conclusions

Gran part del objectius han estat complerts, tot i que la dificultat era present hem aconseguit saber explicar el treball de manera clara i obtenir, després de càlculs i mesures, la dimensió de l'Ametlla del Vallès. Però dins els objectius hi ha un molt important que encara no hem pogut comprovar del tot, que és saber explicar adequadament i pautadament el terme fractal. Tot i això, considerem haver-los assolit tots.

Dins el treball, hem hagut d'ajudar-nos amb fotos, explicacions o exemples, més del que ens esperàvem. Uns dels apartats més conflictius conceptualment i, que per tant, són els més dirigits són els següents: la dimensió (també necessària per la part pràctica), comprensió d'iteració i atractor i, el els més complicats, els conjunts de Mandelbrot i Julia.

Un darrer problema a la comprensió dels fractals, o la recerca teòrica, és que la informació estava extremadament escampada i, el format mostrat era amb uns termes molt específics i complexes. Amb l'ajuda de la tutora, Francina Ciurans i, la posta en comú de molta informació, hem assolit els objectius marcats.

Dins al marc pràctic, hem aconseguit la dimensió de l'Ametlla, 1,15, al ser fraccionari ens verifica del cert que té un comportament fractal. Així que hem complert part de d'hipòtesi inicial. És a dir, considerem que els objectes de la natura són fractals, perquè es comporten com a tals, ja que qualsevol fractal natural és finit, però a escales inapreciables per l'ull humà. Doncs concloem que el nostre municipi es comporta com un fractal perquè té dimensió fractal i auto-semblança estadística.

La dimensió de l'Ametlla del Vallès està compresa entre 1 i 2, i això la fa versemblant i perfectament vàlida. Com també anunciem dins de la part pràctica, esperàvem que aquest resultat fos més proper a l'1 que el 2 ja que no és extremadament irregular i no cobreix el pla (per aconseguir dimensió 2). Efectivament la dimensió és més propera a l'1 que al 2.

Arribat a aquests resultats aconseguim concloure que la dimensió de l'Ametlla (1,15), està compresa entre la de Gran Bretanya (1,25) i la de Mallorca (1,12). Després d'obtenir les altres dimensions i haver comparat resultats, concloem que Gran Bretanya és la frontera més irregular, seguida per l'Ametlla de Vallès i finalitzada per Mallorca.

Finalment, podem dir que hem assolit tots els objectius ja que tot i no haver exposat el treball, he hagut de explicar el meu treball de recerca a aquells que em preguntaven sobre que el feia. En general aquells que volien entendre i tenien preguntes, les han enteses.

Mapes i mesures de l'Ametlla del Vallès

6.Opinió personal

Aquest treball m'ha agradat, ja que personalment volia que el meu treball de recerca fos d'algun tema que desconeixés perquè així em posava a prova i tenia el repte d'explicar a gent que no coneixia els fractals, aquesta nova geometria tan present al món.

Tot i que les persones que em rodejaven no veien clar el tema escollit pel meu treball de recerca i no m'entenien quan jo els deia que això ho trobava interessant, jo sempre veia clar que volia saber que carai era aquesta mística geometria irregular i que els seus dubtes no em pararien.

Per altra banda, la complicitat conceptual dels fractals ha dificultat en molts casos el treball, ja que he hagut de recórrer a moltes fonts d'informació, per entre tots extreure la informació. Aquesta informació repartida contenia expressions matemàtiques complexes i explicacions abstractes. Tot i les dificultats he aconseguit entendre-ho, amb una mica d'ajuda.

Una de les coses que més m'ha agrada't del treball, ha sigut l'anàlisi dels darrers tres fractals, corba del drac i els conjunts de Mandelbrot i Julia. La corba del drac la trobo extremadament curiosa, ja que la possibilitats per crear-la són moltes i la forma d'iteració és diferent i única de la resta. Per altra banda, els conjunts de Julia i Mandelbrot, són increïblement rebuscats i a la vegada bells. Sobre tot el de Mandelbrot, al qual té una frontera molt rica en auto-semblança i presència d'infinitud. Actualment amb els programes iteratius de funcions complexes, es poden arribar a crear increïbles imatges fractals.

Finalment he quedat parat de la quantitat de presència fractal al nostre món, entre ells les costes i fronteres, al qual he quedat molt satisfet de la part pràctica.

Una de les curiositats i coincidències mentre feia el treball ha estat que el Centre va col·laborar amb la Marató de TV3 del 2012 amb la casualitat que l'ajuda, estava relacionada amb els fractals. Per col·laborar a la causa compraves uns avets retallables i plegables en forma de tetraedre. Amb aquests tetraedres, es va formar un tetraedre més gran, la qual tenia relació amb els fractals, perquè aquesta construcció és el tetraedre de Sierpiński (veure annex III). Això també em va sobtar i fer il·lusió i me'n vaig voler informar. L'iniciativa va ser un èxit, el centre va recaptar molts diners per la Marató i, els tetraedres es van unir per crear avets més grans.

Espero que hàgiu gaudit llegint i, pels que no coneixíeu aquesta geometria, espero que ara visualitzeu el món amb uns "ulls fractals".

7.Bibliografia

Llibres:

BINIMELIS, M.I (2010). *Una nueva manera de ver el mundo: La geometría fractal.* Espanya: Editec. Col·lecció RBA.

BRANSLEY, M. (1988). *Fractals everywhere.* London, Academic Press Inc.

MANDELBROT, M (1977). *La geometría fractal de la naturaleza.* 1ª edició: octubre 1997. Barcelona: Tusquets Editores. Col·lecció: Clotet-Tusquets.

MANDELBROT, M. (1975). *Los objetos fractales: Forma azar y dimensión.* 5ª edició: maig 2000. Barcelona: Tusquets Editores. Col·lecció: Clotet-Tusquets.

Pàgines webs:

ABREGÚ, Ana (no consta data d'actualització). Poesía fractal y poesía psicodélica [en línia] [Format PDF]. Disponible a Internet: http://boek861.com/prorepv/pry/0%20Poesia%20Fractal.pdf

ALBAREZ, Elena (no consta data d'actualització). Fractales [en línia]. GieMATic (Grupo de Inovación Educativa, MATerial Interactivo de Cálculo). Disponible a Internet: http://www.giematic.unican.es/estalmat/Fractales/

ARGOTE, José Ignacio (29 de setembre, 2004). Mundo fractal [en línia] (Telefonica). Disponible a Internet: http://personal.telefonica.terra.es/web/mundofractal/

BRASÓ, Marina (octubre 2007). Fractals, un pont entre la natura i les matemàtiques [en línia]. Ricard Ortomí (tutor). Disponible a Internet: http://www.xtec.cat/centres/a8031873/trebalum/tr2008/fractals/2simples/costa_mallorca.htm

BRITANNICA, Encyclopedia (no consta la data d'actualització). Benoît Mandelbrot (biografia) [en línia]. Contribuents anònims. Disponible a Internet: http://www.britannica.com/EBchecked/topic/361663/Benoit-Mandelbrot

COBOS, Julián; VILLENA, Antonio (no consta la data d'actualització) Fractales clásicos [en línia]. Disponible a Internet: http://www.dma.fi.upm.es/java/geometriafractal/clasicos-I/

DEVANEY, Robert L (Universitat de Boston) (9 gener, 2012). The Dynamical System and Tecnology Project at Boston University [en línia]. Robert L. [Aplets] Disponible a Internet: http://math.bu.edu/DYSYS/

FRALBE, el carriel binario (14 setembre 2010). Antenas feactales, Aula (blog amb contingut de fractals) [en línia]. Francisco Sandoval. Disponible a Internet: http://fralbe.com/2010/09/14/1225/

GONZÁLEZ, Alfonso (Professor de matemàtiques de l'institut Fernando Mena). (9 desembre, 2012) Fractales [en línia]. Disponible a Internet: http://www.alfonsogonzalez.es/curiosidades_matematicas/fractales/fractales.html

PLANETA MATEMÁTICO, repositorio web de contenidos matemáticos (11 desembre, 2005, 18:29). Geometría fractal: una breve introducción [en línia]. Hugo Alfonso. Disponible a Internet: http://www.planetamatematico.com/index.php?option=com_content&task=view&id=16&Itemid=1

PUNSET, Eduard (blog personal) (5 octubre, 2008). No todo es liso en la vida, entrevista a Benoît Mandelbrot [en línia]. Eduard Punset [blog] Disponible a Internet: http://www.eduardpunset.es/425/charlas-con/no-todo-es-liso-en-la-vida

ROBERTSON, E.F; O'CONNOR, J.J (Universitat de Sant Andrews, Escòcia) (JULIOL 1999). Benoît Mandelbrot [en línia]. E. F. Robertoson; J.J O'Connor. Disponible a Internet: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Mandelbrot.html

SADA, Manuel (desembre 2012) Algunos fractales clásicos [en línia]. Navarra Disponible a Internet: http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/fractales.htm

SANTORELLI, Felipe Antonio. (16 març, 2012). Poesia Fractal [en línia]. Disponible a Internet: http://tonisan-poesiafractal.blogspot.com.es/

SERGIO, B. (18 març, 2005). Fractales: una nueva geometría [en línia]. Yango. Disponible a Internet: http://usuarios.multimania.es/sisar/fractales/

TRABAJO DE GRÀFICOS EN COMPUTACIÓN (2005). Fractales [en línia]. Darío Cazás, Pablo Souto, Carlos Teijeiro i Carlos Vilar. Disponible a Internet: http://sabia.tic.udc.es/gc/Contenidos%20adicionales/trabajos/Imagenyvideo/fractales/

TROCHET, Holly (Universitat de Sant Andrews, Escòcia) (febrer 2009). A history of a fractal geometry [en línia]. Holly T. Disponible a Internet: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/fractals.html#s3

UNIDAD DE DOCENTE DE MATEMÁTICA APLICADA I ESTADÍSTICA, (14 setembre 2010). Fractales en la red [en línia]. Bartolo Luque, Aida Agea. [Madrid: upm]. Disponible a Internet: http://www.dmae.upm.es/cursofractales/

VIQUIPÈDIA, l'enciclopèdia lliure. (12 desembre 2012, 10:57). Fractal [en línia]. [Wikipedia]. Disponible a Internet: http://ca.wikipedia.org/wiki/Fractal

VIQUIPÈDIA, l'enciclopèdia lliure. (23 març 2012, 19:02). Paisatge fractal [en línia]. [Wikipedia]. Disponible a Internet: http://es.wikipedia.org/wiki/Paisaje_fractal

WIKIPEDIA, la enciclopedia libre. (18 novembre 2012, 20:40). ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña? [en línia]. [Wikipedia]. Disponible a Internet: http://es.wikipedia.org/wiki/%C2%BFCu%C3%A1nto_mide_la_costa_de_Gran_Breta%C3%B1a%3F

WIKIPEDIA, la enciclopedia libre. (29 desembre 2012, 9:57). Fractal [en línia]. [Wikipedia]. Disponible a Internet: http://es.wikipedia.org/wiki/Fractales#Los_ejemplos_cl.C3.A1sicos

XTEC (31 gener, 2002). Té dimesnió fractal la Costa Brava? [en línia]. Mireia Pacreu, Xevi Codolà. IES la Bisbal. Disponible a Internet: http://www.xtec.cat/ieslabisbal/fractals/

XTEC (no consta la data d'actualització) Els fractals, un pont entre la natura i les matemàtiques [en línia]. Marina Brasó. [Format PDF]. Disponible a Internet:
http://www.xtec.cat/centres/a8031873/trebalum/tr2008/fractals/Fracpont.pdf

Annex

Annex I

Pla complex i els fractals (Conjunts de Julia i Mandelbrot)

I.Nombres complexos

Com havia passat vegades anteriors, els matemàtics es van topar amb un problema. Equacions com $x^2 = -1$ o la $x^2 + x + 1 = 0$ no podien resoldre's amb els nombres reals existents. Així que, van decidir ampliar els nombres reals amb un altre nombre, l'*i* que es defineix com $\sqrt{-1}$, un nombre inexistent dins els reals. Aquest nou nombre s'anomena unitat imaginària. A causa d'aquesta unitat imaginària nova, va sorgir els nombres complexos. Els nombres complexos són nombres compostos per una part real (A) i una part imaginària (Bi) on A i B són nombres reals i es diferencien pel senyal *i* que porta el component imaginari.

$$\mathbb{C}\ \text{Complexos}\begin{cases}\mathbb{R}\quad \text{Reals}\begin{cases}\mathbb{Q}\quad \text{Racionals}\begin{cases}\mathbb{Z}\quad \text{Enters}\begin{cases}\mathbb{N}\quad \text{Naturals}\\ \qquad \text{Enters negatius}\end{cases}\\ \qquad \text{Fraccionaris}\end{cases}\\ \qquad \text{Irracionals}\end{cases}\\ \qquad \text{Imaginaris}\end{cases}$$

Hi ha tres diferents maneres de representar la part real i la part imaginaria dels nombres complexos. La que nosaltres farem servir és la representació binomial. Aquesta forma representa els nombres complexos com a la suma de les dues components, la real i la imaginària.

Les altres representacions s'anomenen vectorial i cartesiana.

NOM	SÍMBOL	EXEMPLES
NATURALS	$\mathbb{N}$	1, 2, 3, 4,...
ENTERS	$\mathbb{Z}$	1, -1, 2,-2…
RACIONALS	$\mathbb{Q}$	1, 1/2,-4/3...
IRRACIONALS	$\mathbb{I}$	$\sqrt{2}$, π
REALS	$\mathbb{R}$	1, -1, 1/2
COMPLEXOS	$\mathbb{C}$	$3+2i$

Nosaltres ens centrarem en la seva representació binomial ja que es considera més convenient que les altres dues. Aquesta representació segueix aquest model: $z = a + bi$, on z és una nombre complex, a és la component real i, b és la component imaginària marcada per la i.

Com a exemples de nombres complexos podem posar:
6, π, 3+6i, 8-2i o 96i

De moment, la lletra ***i*** només expressa quina de les dues parts és la part imaginària.

Els nombres complexos es poden representar gràficament en uns eixos cartesians on l'eix horitzontal representa la component real i l'eix vertical la component imaginaria. Tot número complex, doncs, es pot representar mitjançant un punt del pla i a l’inrevés. Quan parlem d’aquesta representació gràfica del nombres complexos, l’anomenem pla complex, el qual estudiarem en el següent apartat.

Les operacions amb nombres complexos no són massa diferents de les dels nombres reals ni més complicades però mereixen una consideració:

Per a la suma i la resta, simplement es suma (o resta) la part real amb la part real i la part imaginària amb part imaginària (ignorant el símbol *i*) i en resulta un altre nombre complex:

Ex: $(3 – 5i) + (6 + 8i) = 9 + 3i$

La multiplicació és un pel més complicada. S'ha de manejar el símbol *i* com si fos la x de l'àlgebra ordinària. Seguidament entra en joc l'especial propietat de l'element *i* ($i^2 = -1$) i l'expressió s'arregla:

Ex: $(3 – 2i) \cdot (7 + 4i) =$

$= (7 \cdot 3) + (3 \cdot 4i) + (– 2i \cdot 7) + (– 2i \cdot 4i) =$

$= 21 + 12i – 14i – 8i^2=$

$= 21 – 2i – 8\cdot(–1) =$

$= \boxed{29 – 2i}$

Així doncs, podem dir que l'aritmètica dels nombres complexos és idèntica a la dels nombres reals, amb la regla addicional $i^2= -1$

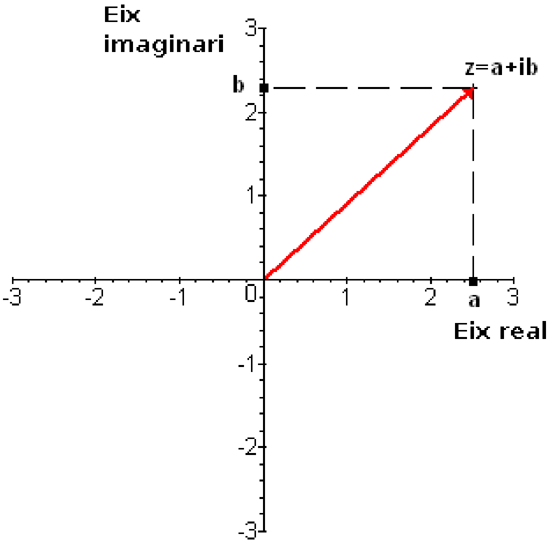
Hem dit que tots els nombres reals formen part del grup dels complexos, és a dir que tots els reals són complexos. Així que podem obtenir d'operacions matemàtiques o enunciats matemàtics, nombres complexos amb part real o imaginària igual a zero i, per tant, no es mostrarien dins la representació binomial.

El conjunt dels nombres complexos no és ordenat com estem acostumats en el conjunt dels reals. Per simbolitzar els nombres complexos, sovint s'utilitza la *z*.

Els números complexos són objecte d'estudis i una eina molt utilitzada avui en dia per a recursos físics o químics que utilitzen les matemàtiques complexes en el seu desenvolupament.

II. El pla complex

Els nombres complexos estan formats, com s'ha vist, per dos parts una real i l'altre imaginària. Aquests es poden representar com a vector dins un pla complex. Com ja hem esmentat abans el pla complex és aquell que pot representar gràficament un nombre complex mitjançant uns eixos cartesians. El pla cartesià està format per un eix horitzontal que hi conté els nombres reals i un eix vertical on i reposen els nombres imaginaris. Així que qualsevol punt del pla se li pot atribuir un número complex.



Pla complex i representació del mòdul de nombres compostos

El nombre complex z = x + yi es correspon en el pla complex amb el punt de coordenades (x, y), i es pot representar per un vector amb origen en el punt (0, 0) i extrem en el punt (x, y). En aquesta representació geomètrica podem anomenar els eixos: eix real i eix imaginari, horitzontal i vertical respectivament. El mòdul d'un nombre complex és el mateix que el mòdul del vector corresponent.

Mòdul de z : $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Hem dit que els nombres complexos no es poden ordenar. Però cada nombre complex té un mòdul que es pot entendre com la mida del nombre, per tant, podem dir que un nombre complex és més gran que un altre segons si el seu mòdul és major o menor.

III.Funcions de variables complexa

Si pensem en una funció de variable real, recordarem que *f* (funció de variable real), actua sobre un conjunt de nombres reals (domini: D) i és una funció que assigna a un nombre real *x* (pertanyent al domini) un altre nombre real *y.* El nombre *y*, s'obté del resultat de la funció, amb variable *x* (y = f(x)), anomenada imatge.

Aquest concepte es pot generalitzar fàcilment per a les funcions de variable complexa (f_1), on f_1 actua sobre un conjunt definit de nombres complexos (domini: D) i és una funció que assigna a cada nombre complex *z* del domini un altre nombre complex *w*, la seva imatge (w = f(z)).

Tant un com l'altre tenen les mateixes peculiaritats tot i que amb termes diferents. El domini *(D)* de la funció es diu igual que en ambdós casos i igual passa amb el conjunt d'imatges de la funció anomenat recorregut *(R)*.

Hem explicat que es pot representar tot nombre complex amb un punt del pla complex però, es pot representar una funció complexa? Quan treballem amb nombres reals i no complexos, cada un d'ells es pot representar per un punt d'una recta (1 dimensió) i les funcions es representen en dos dimensions ja que és necessari representar a la vegada la *x* i la *y* en un pla.

Però en el cas dels números complexos, cada un d'ells es representa amb un punt del pla (dos dimensions) i també necessitem expressar sobre la gràfica la relació de cada nombre amb la seva imatge, un altre nombre complex. Així que necessitaríem dos plans complexos lligats o relacionats entre si per reproduir les funcions de variable complexa; necessitaríem un espai de quatre dimensions. El que fa que se'ns plantegi un problema.

Hi ha diverses solucions possibles per aquest problema. Una d'elles és fer servir dos plans complexos per a representar una sola funció: un per al domini (les successives z que vas introduint dins la funció) i un altre per al recorregut (les imatges (w) obtingudes com a resultat d'haver introduït una z en la funció). Una segona opció es presentar aquests dos plans superposats. Cal pensar en alguna manera per poder relacionar cada número amb la seva imatge i a l'inrevés. I en el cas de ser plans sobreposats, alguna manera de diferenciar els valors del domini i els del recorregut, com pot ser la diferència de colors.

IV.Iteració amb variable complexa

Ja sabem que tot fractal neix a partir d'un conjunt d'iteracions i hem vist com funcionen les iteracions en una funció amb variable real (apartat d’iteració, marc teòric).

Hi ha una classe de fractals que s'aconsegueixen iterant una funció de variable complexa en el pla complex. Recordem que en la iteració de les funcions reals, introduíem un número en la funció i tornàvem a introduir dins la mateixa funció el resultat de l'operació anterior i, així sucessivament.

Iterar una funció de variable complexa no és pas més difícil si s'està acostumat a operar amb nombres complexos.

Posem un exemple:

Tenim una funció complexa f(z) = 2z + 5 −3*i* i comencem amb el nombre z = 2+7*i*. A partir d’aquí comencem a iterar.

$f(z) = 2z + 5 - 3i \longleftrightarrow z = 2+7i$

1. f(2+7i) = 2(2+7i) + 5-3i = 4+14i + 5-3i = 9+11i

2. f(9+11i) = 2(9+11i) + 5-3i = 18+22i + 5-3i = 23+19i

3. f(23+19i) = 2(23+19i) + 5-3i = 46+38i + 5-3i = 51+35i

4. f(51+35i) = 2(51+35i) + 5-3i = 102+70i + 5-3i = 107+67i

5. f(107+67i) = 2(107+67i) + 5-3i = 214+134i + 5-3i = 219+131i

6. f(219+131i) = 2(219+131i) + 5-3i = 438+262i + 5-3i = 443+259i

La manera més comuna de representar fractals del pla complex fruits d'iteració d'una funció complexa és mitjançant un pla on cada nombre té els seu color que varia segons el comportament.

Amb la iteració al pla complex es creen molts gràfics fractals que són els anomenats fractals del pla complex. Entre ells es troben els conjunts de Julia i Mandelbrot, peces fonamentals en el món dels fractals.

Annex III

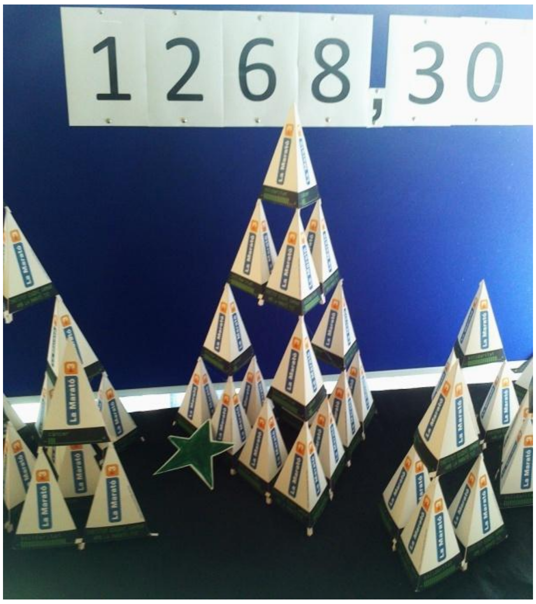
Mapes de L'Ametlla del Vallès

(Adjunts com a material complementari)

Annex III

Avets solidaris

Al llarg dels dies previs a "La Marató de TV3" del 2012, l'Institut Eugeni Xammar va col·laborar en aquesta cursa solidària amb els avets solidaris.



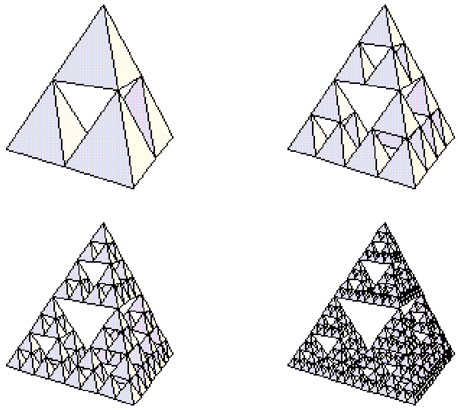
Avets solidaris per ajudar a la marató

Com tots ja deveu saber, "La Marató de TV3" és una iniciativa de la cadena televisiva TV3, la televisió pública de Catalunya, que dedica un cop a l'any i, últimament dos, a ajudar a persones amb manca de recursos o destina els diners obtinguts a la recerca de tractaments a malalties.

L'última Marató tractava sobre el càncer, un malaltia molt present a les nostres vides. Així doncs, els catalans amb una explosió de solidaritat, vam aconseguir reunir més de 10 milions d'euros per l'ajuda a la causa. Els integrants de la Marató van intentar plasmar la conscienciació dels pacients i familiars i no pas com xifres extretes d'estudis. El seu missatge era clar "La mort hauria de ser el final de la vida. El càncer, no. Amb la teva ajuda, hauria de ser una coma, no un punt i final".

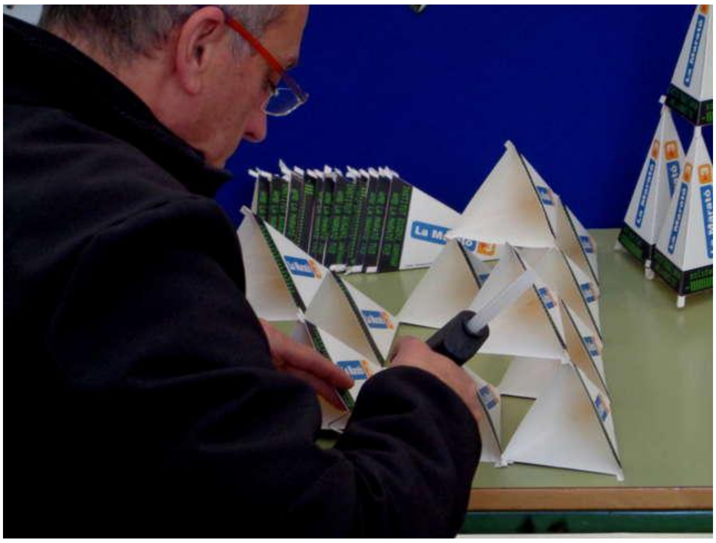
Des de l'Ametlla del Vallès, les entitats també s'activaren per col·laborar. L'Institut de l'Ametlla, amb la col·laboració de l'Ajuntament del municipi i la impremta Harris, va voler aportar el seu granet de sorra i ajudar a la Marató amb els avets solidaris. Eren cartolines amb un avet retallable imprès que es podien comprar per un euro a la gran majoria de comerços i centres educatius de l'Ametlla. Aquest, retallat i enganxat forma una piràmide de cartolina, en forma d'avet. Els ingressos obtinguts dels avets anaren única i exclusivament a La Marató, amb una xifra final de 1268,30 euros!

Casualment, el conjunt d'avets disposats un damunt l'altre en forma de piràmide tridimensional que es pretenia aconseguir, és un fractal. Aquesta forma és una piràmide amb 4 costats i base triangular, que pretén simbolitzar la possibilitat de fractals tridimensionals. Això ens va fer pensar en aquesta possible referència dins el treball. La disposició dels avets representa el triangle Sierpiński, molt tractat dins del treball, entre d'altres per ajudar a comprendre la dimensió fractal.


Piràmides de Sierpiński en diferents iteracions

Waclaw Sierpiński (1883-1969) va ser un matemàtic polonès especialista en la teoria dels nombres. Estava interessat, entre moltes altres coses, per la determinació de punts a l'espai. Va estudiar figures que podien repetir-se i combinar-se entre si infinitament mantenint les seves proporcions a diferents nivells de la infinitat, infinitament grans o petits. Un fractal descobert per ell fou el triangle de Sierpiński, i aquest tridimensionalment va ser la figura obtinguda del conjunt d'avets.

El muntatge d'aquest es tractava d'unir la punta d'un avet al vèrtex del peu d'un altre per anar aconseguint petits tetraedres que en formarien un de gran. L'Institut va repartir uns fulletons on a més a més d'animar als ciutadans a participar, explicava que es volia aconseguir un avet el màxim de gran possible


Muntatge dels avets solidaris pel professor Francesc Climent

començant per 4,16, 64, 256 o fins i tot 1024 piràmides per arribar a aconseguir- lo de 2,60 metres o 5,20 metres, en els dos darrers respectivament.

Finalment es va aconseguir fer un avet de 256 piràmides i 2,60 metres d'alçada i gran quantitat d'avets amb menys peces, bàsicament de 4 i 16 peces.

Des del centre, molt satisfets de l'èxit d'aquesta iniciativa per l'ajuda contra el càncer, agraïm la col·laboració dels comerços, centres, entitats i personal que va ajudar a la venta i muntatge d'aquest tetraedre de Sierpiński.

Avet solidari de la fira de Nadal amb les dues companyes Anna i Natàlia de l'Institut