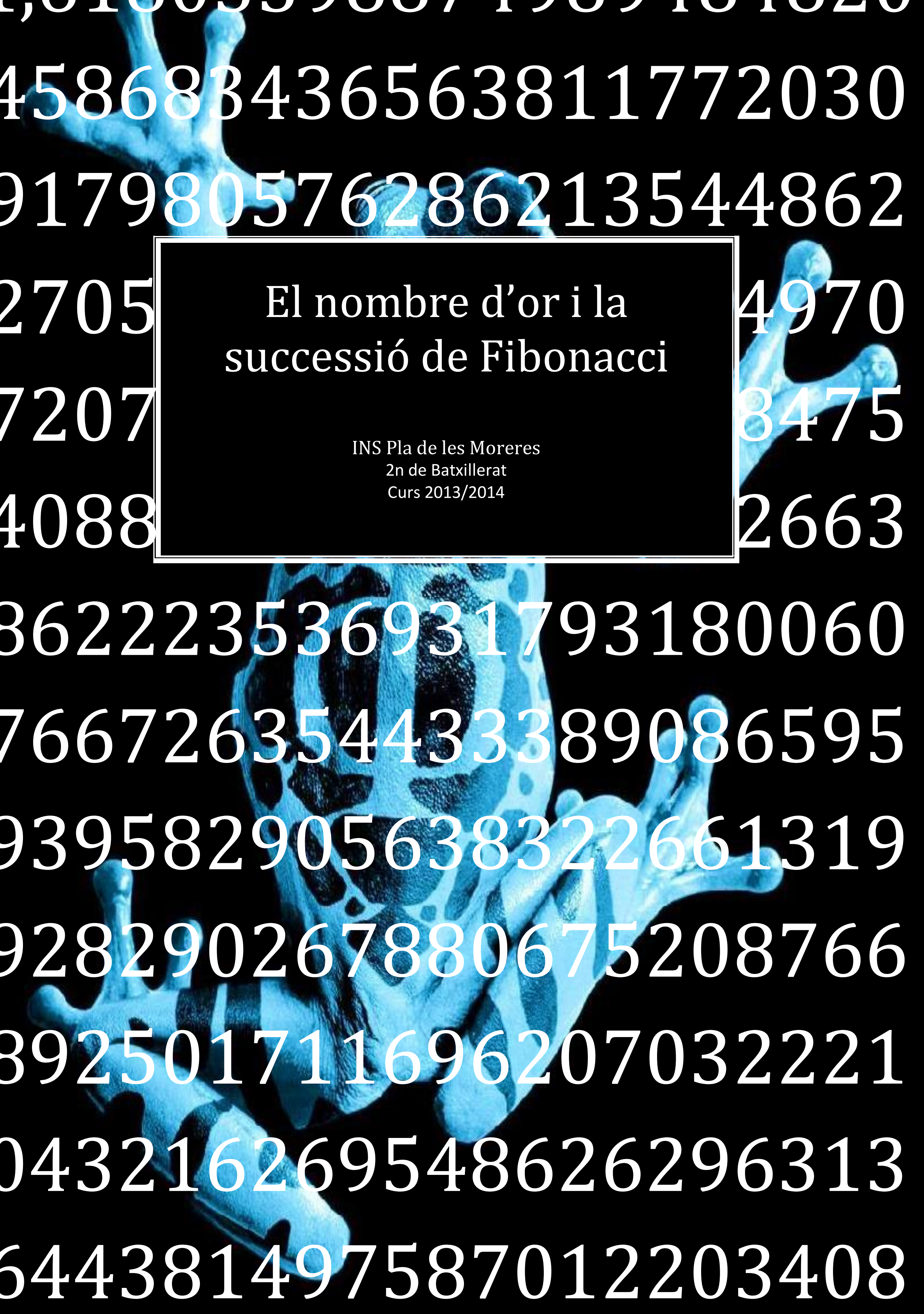
1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024497072072041893911374847540880753868917521266338622235369317931800607667263544333890865959395829056383226613199282902678806752087668925017116962070322210432162695486262963136443814975870122034080



El nombre d'or i la successió de Fibonacci

INS Pla de les Moreres
2n de Batxillerat
Curs 2013/2014

L'Univers està escrit en el llenguatge de les matemàtiques i els seus caràcters són triangles, cercles i altres figures geomètriques, sense les quals és humanament impossible entendre una sola de les seves paraules. Sense aquest llenguatge, naveguem en un fosc laberint.

Galileu Galilei.

M’agradaria agrair el suport tant de la meva tutora, com dels meus amics, companys i familiars que m’han animat a seguir omplint l’habitació de papers plens d’esquemes d’anotacions i càlculs la majoria dels quals han acabat formant part d’aquest treball. També vull donar les gràcies a totes les persones que han col·laborat en les enquestes o en altres apartats de la recerca del treball. I per últim donar les gràcies a tots els matemàtics i matemàtiques de la història per contribuir i divulgar aquesta meravellosa i màgica ciència que malgrat l’estrès pels terminis, sincerament puc dir que he gaudit amb l’ànima.

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ:

Vaig decidir fer aquest treball sobre matemàtiques en primer lloc perquè, malgrat no hi destaqui gaire, m'apassionen, i poder treballar sobre una temàtica per la qual sento una increïble admiració, passió i set de coneixement, realment facilita molt la feina. En segon lloc un altre motiu, potser ja evident, és perquè em penso dedicar a les matemàtiques i cursar estudis superiors sobre elles, per tant el treball és una bona oportunitat per preparar-me i, per endinsar-me en, la meravellosa ciència de les matemàtiques .

Respecte a la temàtica, va ser idea del meu primer tutor que em va comentar que era una gran oportunitat, ja que el nombre d'or i la successió de Fibonacci són temes que donen molt de sí però que malgrat això no entren com a contingut en cap estudi posterior sobre matemàtiques. Em va dir que com a molt s'esmentaven i poc més. Per tant era un: "ara o mai" una oportunitat única per estudiar dos elements notables en les matemàtiques com el nombre d'or i la successió de Fibonacci que normalment són considerades com a matemàtiques recreatives.

La intenció del treball en essència és poder estudiar una temàtica que no figura en el temari de matemàtiques d'aquest any ni per desgràcia en els que venen, a més també el vull fer per aprendre i/o repassar llenguatge matemàtic que tan necessari em serà, a més de contribuir amb el meu granet de sorra a la comunitat matemàtica i científica comprovant si part de l'extensa "literatura" sobre el nombre d'or és certa. Per últim el treball també té una intenció divulgativa. En el sentit que he intentat transmetre aquesta màgica melodia que sentia a l'hora de fer deduccions, formulacions i demostracions; en essència transmetre aquesta màgia que tenen les matemàtiques similar a la que pot desperta un *lego* en un infant, on tot pot ser, sols falta muntar i desmuntar les peces, tot i que aquesta vegada les peces són igualtats, xifres, taules, enunciats , diagrames...idees.

Sense intenció de estendrem massa per compassió al lector, m'agradaria comentar alguns aspectes que crec indispensables enunciar:

Respecte l'estructura del treball, malgrat no ho pugui semblar, ha estat molt pensada i relacionada de forma casual amb el model filosòfic de Plató, ja què en una primera organització, divideixo el treball en dos mons en honor al pensador, el món matemàtic i el món físic, més el bloc d'escepticisme que és el bloc on trobem la majoria del treball de camp, no obstant en la part teòrica també podem trobar part d'aquest treball, en referència als apartats de propietats.

En el primer bloc trobem el món matemàtic què és el contingut pròpiament, dividit en àlgebra i geometria, on a partir de notacions, definicions i propietats, ens endinsarem en el sorprenent i acolorit oceà matemàtic que proposo.

En el segon bloc trobem el món físic què en el fons és una aproximació al matemàtic, de forma potser una mica breu. Observarem com els continguts matemàtics tan distants a la realitat física, s'escolaran per la nostra consciència per fer-nos donar compte que aquells conceptes tan fantàstics són l'essència de la realitat que observem dia a dia.

En l'últim i tercer bloc, l'escepticisme, recuperem aquest esperit tan escèptic de la ciència per a demostrar la veracitat o falsedat d'alguns conceptes força acceptats però dels quals no hi havia forces evidències o hi havia contradiccions .

També m'agradaria destacar la idea de fàcil identificació amb colors. Algunes de les tables i la majoria d'imatges geomètriques (fetes amb el programa informàtic GeoGebra) han estat d'el·laboració pròpia, i s'han realitzat des de zero per tant han necessitant un major esforç que un "*copia i enganxa",* i desitjaria amb humiliat, que és tingui present a l'hora d'avaluar, i recalco que no es prengui com cap exigència res tan sols he trobat necessari comentar-ho.

Per finalitzar la introducció i abans de passar als objectius demano al lector la lectura pausada, en el sentit que dubti, provi, raoni i es plantegi preguntes en el transcurs del treball ja que d'aquesta manera, jo realment he disfrutat molt, i penso que a part de la tasca d'avaluar el treball en sí, també pot ser un gran viatja mental a el meravellós oceà de les matemàtiques, així doncs tan sols em queda desitjar:

Bon viatge, ments despertes !!!

OBJECTIUS:

Els objectius del meu treball, es podrien resumir i enumerar tal com segueix:

Objectius principals:

-Cercar informació dels conceptes del nombre d'or i la successió de Fibonacci.

-Presentar de forma justificada les notacions, definicions i propietats d'aquests.

-Trobar altres elements matemàtics relacionats amb el nombre d'or o camins matemàtics diferents als de la bibliografia

-Presentar els elements geomètrics on és present el nombre d'or i enunciar-los de forma clara i definida

-Comprovar si els ous de gallina i els de codorniu presenten el nombre d'or a la seva geometria.

-Dissenyar i realitzar un mitjà per comprovar si els objectes geomètrics aïllats amb proporcions àuries són més atractius visualment que els objectes geomètrics aïllats sense proporcions àuries.

-Dissenyar i realitzar un mitjà per comprovar si el nombre d'or és present en les proporcions de la majoria d'envasos.

Objectius tècnics o secundaris:

-Aprendre a verificar la certesa d'una expressió matemàtica mitjançant demostracions.

-Aprendre nocions bàsiques sobre llenguatge matemàtic.

-Aprendre a utilitzar el programa informàtic Geogebra.

-Aprendre a utilitzar el programa informàtic Excel.

Món matemàtic

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

1.ÀLGEBRA:

1.1.Successio de Fibonacci:

1.1.1.Notacions:

Notació simbòlica dels termes o fragments concrets (amb subíndex):

La successió de Fibonacci com a successió [1]infinita és un conjunt infinit de nombres ordenats que segueixen una certa llei de formació. Per representar cadascun d'aquest elements podem ficar una mateixa lletra amb un subíndex que indiqui de quin terme de la successió és tracta. En el cas de la successió de Fibonacci utilitzarem la lletra "f" (tot i que és la lletra més utilitzada també podria una altre lletra) i el subíndex serà segons la posició un nombre natural[2]. Si és el primer terme "1", si és el segon "2", si és el tercer "3" i així successivament.

$$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \dots$$

Notació dels 5 primers termes de la successió de Fibonacci.

No obstant, és comú trobar que: en el cas del primer terme s'apliqui el subíndex "0", en el del segon terme s'apliqui el subíndex "1", en el del tercer terme s'apliqui el subíndex "2" i així successivament.

Notació dels termes o fragments concrets:

Si volguéssim anotar termes o fragments concrets de la successió de forma explícita, podríem fer-ho de dues formes:

$$1, 1, 2, 3, \dots$$

Els 5 primers termes de la successió de Fibonacci.

La primera, anotar alguns dels primers termes separats amb comes i quan no en volguéssim escriure més ficaríem: "...". Els tres punts indican que el conjunt de termes continua, en el cas de la successió de Fibonacci sempre els ficarem ja que conté infinits termes.

[1] Una successió numèrica és un conjunt ordenat de nombres. Tota successió té una propietat o llei de formació dels seus elements.
[2] Entenem com a nombre natural la successió de nombres o el conjunt de nombres: 1,2,3,4,5,6.... i el denotarem amb $\mathbb{N}$ (no considerarem l'element 0 dintre del conjunt)

La segona, anotar un fragment de la successió començant amb "..." (indica que hi ha elements anteriors) i al final dels nombres separat per comes com en el primer cas, ficaríem "..." per tal de expressar que la successió continu. En el cas de la successió de Fibonacci [3] sempre ho farà ja que té infinits termes.

... 13,21,34,55,89 ...

5 termes concrets de la successió de Fibonacci.

Notació del terme general (amb subíndex):

Quan ens volem referir a un nombre qualsevol de la successió utilitzem el subíndex "n"(complint que "n" és igual o major que 1) que fa referència al terme general, és a dir un terme qualsevol de la successió de Fibonacci.

$$f_n$$

Termes general de la successió de Fibonacci.

Notació simbòlica de la successió:

Com qualsevol successió de nombres, la successió de Fibonacci pot expressar-se de forma simbòlica de la següent forma:

$$\{f_n\}_{n\geq 1} = f_1, f_2, f_3, \dots f_n \dots$$

La successió Fibonacci amb notació simbòlica.

Aquesta notació simbòlica també podria referir-se a altres successions ja que no és cap definició sinó una notació vàlida per a totes les successions de 6 o més termes.

[3] Per tal de facilitar la identificació de la successió de Fibonacci al llarg del treball els nombres d'aquesta successió han sigut acolorits amb un colors constant durant tota l'obra, amb excepcions voluntàries

Notació explicita de la successió:

Com qualsevol successió de nombres la successió de Fibonacci pot expressar-se de forma explicita, és a dir enumerant els seus elements.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ...

La successió Fibonacci amb notació explicita.

1.1.2.Definicions:

Definició com a solució del problema dels conills:

Problema:

"Certa persona va posar una parella de conills en un corral tancat completament per un mur. Quantes parelles de conills hi haurà al corral en un any, si posem una parella de conills no productius que, tardarà un mes a ser productiva i llavors engendrarà a una nova parella de conills?"[4]

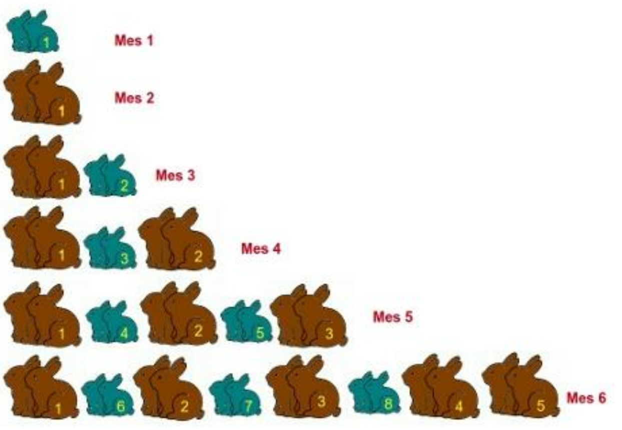
[4] L'espai en blanc i la imatge tenen una finalitat il·lustradora per qui pugui llegir el problema el visualitzi i pugui augmentar el seu interessi per la solució, recomano dedicar-li uns minuts pot ser divertit.

Plantejament:

Podem proposar la següent taula per plantejar el problema de forma ordenada i esquemàtica on a la columna groga de la dreta trobem els 12 mesos del any, de la segona a la setena trobem el nombre de parelles de conills ordenades per generació i en la última columna trobem el total de parelles de conills per cada mes (nombres acolorits), ràpidament observem que aquests valors segueix una successió familiar.

Mes/Generació	1	2	3	4	5	6	Total parelles
1	1						1
2	1						1
3	1	1					2
4	1	2					3
5	1	3	1				5
6	1	4	3				8
7	1	5	6	1			13
8	1	6	10	4			21
9	1	7	15	10	1		34
10	1	8	21	20	5		55
11	1	9	28	35	15	1	89
12	1	10	36	56	35	6	144

El següent esquema incomplet[5] també mostra ,de forma més visual, la resolució del problema:



[5] Ja que falten 6 mesos més per respondre el problema.

Solució:

La successió de nombres igual al nombre de parelles de conills per cada mes és la coneguda successió de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...(suposant la immortalitat dels conills).

Conclusió:

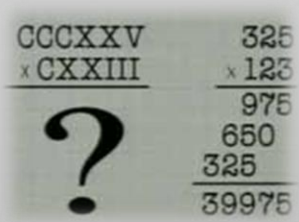
La successió de Fibonacci és la solució al problema: “Certa persona va posar una parella de conills en un corral tancats per un mur o gàbia. Quantes parelles de conills hi haurà al corral en un any, si posem una parella de conills no productius que, tardarà un mes a ser productiva i llavors engendrarà a una nova parella de conills?”(suposant que es poguessin reproduir els conills de forma il·limitada, sense morts, ni faltes de espai, etc.

Una mica d’història:

L’orígen de la Successió de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1170 dC – 1250 dC), més conegut pel seu sobrenom Fibonacci (que significa fill de Bonacci, nom del seu pare) fou un matemàtic italià, i segurament un dels matemàtics amb més talent de tota l'edat mitjana.

Fibonacci va contribuïr de forma transcendent a la comunitat matemàtica amb la seva gran obra el *Liber Abaci* (“Llibre del àbac").Amb aquesta obra va aconseguir la difusió del sistema de numeració hindú-aràbic que facilitava extraordinàriament els càlculs numèrics i deixava desfassat els vells números romans. Leonardo de Pisa també va contribuir a la comunitat matemàtica a l’haver aplicat l'àlgebra als problemes geomètrics, Desenvolupà la trigonometria i féu treballs interessants sobre les equacions quadràtiques i teoria de nombres (descomposició en factors primers, criteris de divisibilitat...) .



<En la imatge superior trobem un exemple de les facilitats que presenta el nou sistema numèric actual contra el sistema numèric romà>

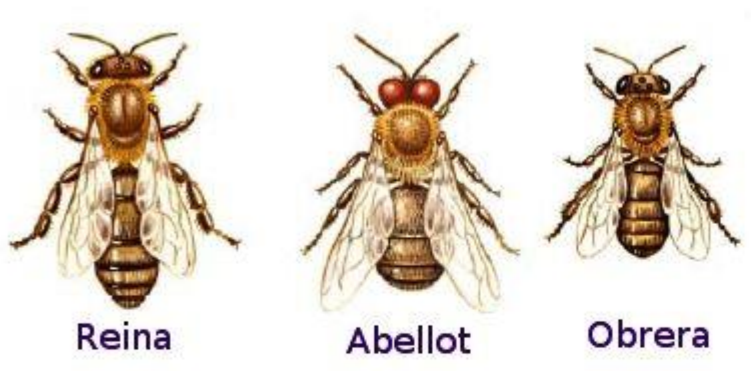
No obstant això, Fibonacci és més conegut per la successió que porta el seu nom que resulta com a solució del anterior problema sobre una parella de conills que surt a la seva gran obra *Liber Abaci*

<Retrat de Leonardo de Pisa, conegut com a Fibonacci>

<u>Definició com a solució al problema de les abelles:</u>

<u>*Problema:*</u>

“Segons se sap, una vegada inseminada l’abella reina d’un rusc per un abellot (d’un altre eixam), aquella queda al seu rusc i ja no surt més, dedicant-se a la posta d’ous que ella mateixa va fecundant o no, donant orígen així a les abelles obreres i reines en el primer cas i abellots en el segon cas. Quin és el nombre d’avantpassats d’un abellot qualsevol a cada generació[6] anterior ?”[7]



[6] Tindrem en compte que la primera generació o generació de partida fa referencia al abellot

[7] L’espai en blanc i la imatge, com en el cas anterior, tenen una finalitat il·lustradora per qui pugui llegir el problema el visualitzi i pugui augmentar el seu interessi per la solució, és recomanable dedicar-li uns minuts, pot ser divertit.

Plantejament:

Podem proposar la següent taula per plantejar el problema de forma ordenada i esquemàtica on a la columna groga de la dreta trobem el número de la generació d'avantpassats, és a dir, suposant la primera generació com l'abellot en qüestió si retrocedim en el temps trobem la: segona, tercera, quarta... generació de avantpassats en el mig la taula d'individus diferenciats per sexe (F = reina i M=abellot) que representa l'arbre genealògic d'un abellot qualsevol i en l'última columna el nombre de individus que forma cada generació d'avantpassats.

<table>
<tr><th>Nº
Gener.</th><th colspan="21">Arbre genealògic d'un abellot qualsevol</th><th>Nº
Indvi.</th></tr>
<tr><td>8</td><td>F</td><td>M</td><td>F</td><td>F</td><td>M</td><td>F</td><td>M</td><td>F</td><td>F</td><td>M</td><td>F</td><td>F</td><td>M</td><td>F</td><td>M</td><td>F</td><td>F</td><td>M</td><td>F</td><td>M</td><td>F</td><td>21</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="2">F</td><td>M</td><td colspan="2">F</td><td colspan="2">F</td><td>M</td><td colspan="2">F</td><td>M</td><td colspan="2">F</td><td colspan="2">F</td><td>M</td><td colspan="2">F</td><td colspan="2">F</td><td>M</td><td>13</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">F</td><td colspan="2">M</td><td colspan="3">F</td><td colspan="3">F</td><td colspan="2">M</td><td colspan="3">F</td><td colspan="2">M</td><td colspan="3">F</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="5">F</td><td colspan="3">M</td><td colspan="5">F</td><td colspan="5">F</td><td colspan="3">M</td><td>5</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="8">F</td><td colspan="5">M</td><td colspan="8">F</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="13">F</td><td colspan="8">M</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="21">F</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="21">M</td><td>1</td></tr>
</table>

Solució:

La successió de nombres igual al nombre de parelles de conills per cada mes, és l'anomenada successió de Fibonacci, i aquest problema és l'origen d'aquesta

Conclusió:

La successió de Fibonacci és la solució al problema: Segons se sap, una vegada inseminada l'abella reina d'un rusc per un abellot (d'un altre eixam), aquella queda al seu rusc i ja no surt més, dedicant-se a la posta d'ous que ella mateixa va fecundant o no, donant origen així a les abelles obreres i reines en el primer cas i abellots en el segon cas. Quin és el nombre d'avantpassats d'un abellot qualsevol (generació 1) a cada generació anterior?"

Definició com a enunciat:

La successió de Fibonacci, com em observat abans, és la següent successió de nombres:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181...

On:

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$f_3 = 2$$

$$f_4 = 3$$

$$f_5 = 5$$

Observem que cada terme a partir del segon, sense contar aquest, és la suma dels dos altres, a partir de aquesta observació podem definir la successió com un enunciat[8]

Conclusió:

La successió de Fibonacci és aquella successió en que els seus dos primers termes són "1" i "1" respectivament i on cada terme a partir dels definits és la suma dels dos anteriors.

Definició com a llei de recurrència :

La successió de Fibonacci pot ser definida mitjançant una llei de recurrència[9], una llei que a partir d'elements anteriors pugui descriure els posteriors:

Per a tal de descobrir-la podem calculem alguns del primers termes de la successió partint:

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

[8] Enunciat en referència a les conclusions del apartat.
[9] Recurrència: Propietat de les seqüències en què qualsevol terme es pot calcular coneixent els precedents, per tant una llei de recurrència serà aquella amb la qual es puguin calcular termes posteriors a partir dels anteriors.

$$f_3 = 1 + 1 = 2$$

$$f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3$$

$$f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5$$

$$f_6 = f_4 + f_5 = 3 + 5 = 8$$

$$f_7 = f_5 + f_6 = 5 + 8 = 13$$

$$f_8 = f_6 + f_7 = 8 + 13 = 21$$

$$f_9 = f_7 + f_8 = 13 + 21 = 34$$

$$f_{10} = f_8 + f_9 = 21 + 34 = 55$$

Conclusió:

La successió de Fibonacci és aquella tal que complexi:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1, f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$$

Una mica de meticulositat:

Les successions de Fibonacci i la successió de Fibonacci

A vegades la successió de Fibonacci es sol definir amb el terme primer igual a "0" i a vegades com a "1", malgrat això la successió no varia.

No obstant la successió de Fibonacci pot ser ampliada amb valors de subíndex inferiors a 1(en aquest cas el terme 0 seria igual a 0 segons la llei de recurrència), tot i això convencionalment entendrem per successió de Fibonacci la successió amb termes de subíndex major o igual a la unitat, ja que en el problema del conills que l'origina hi apareix com a valor de cap mes.

Tanmateix és considera successió de Fibonacci a qualsevol successió on un terme qualsevol sigui la suma dels dos altres

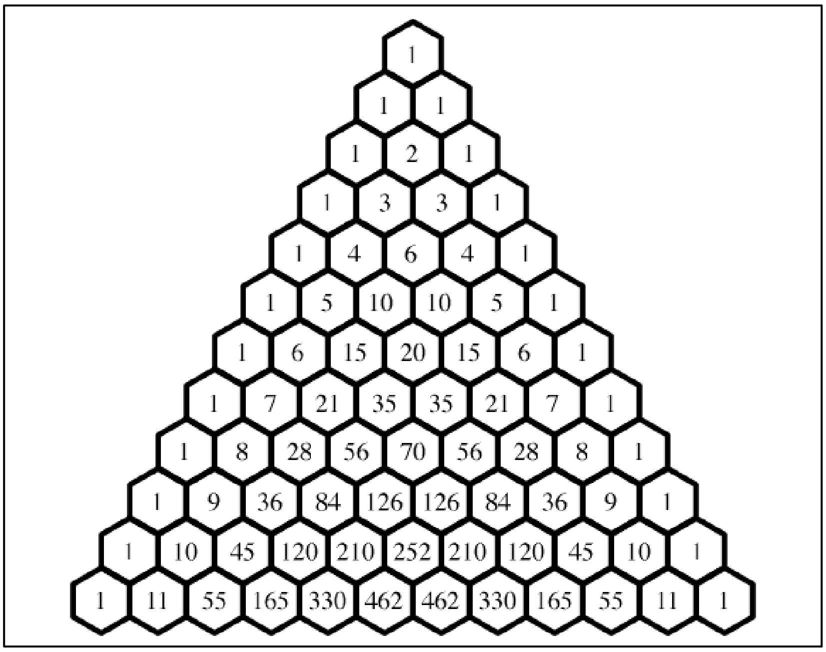
En resum quan parlem de successió de Fibonacci ens referirem a la típica successió 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... o 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... i quan parlem de successions de Fibonacci ens referirem a les successions on qualsevol terme donat és la suma dels dos anteriors.

Un exemple de les successions de Fibonacci pot ser els nombres de Lucas:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47...

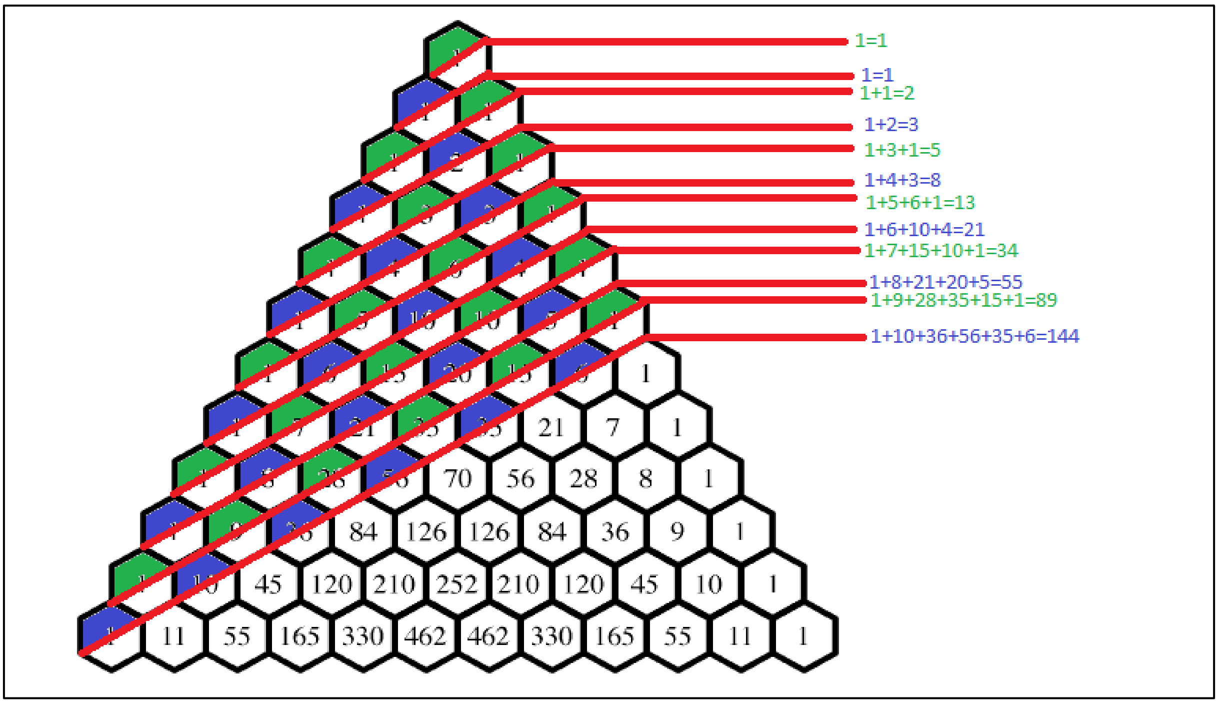
<u>Definició com a la suma de les diagonals del triangle de Tartaglia o Pascal:</u>

En la següent imatge observem el triangle de Pascal o Tartaglia:



Triangle de Pascal o Tartaglia en aparença a un panel d'abelles.

Si tracem en cada vèrtex dels hexàgons amb que s'ha construït el Triangle tracem una diagonal i sumem el valor dels hexàgons que travessa per la meitat obtindrem la successió de Fibonacci (els colors verd i blau alternats facilitaran la identificació).



Exemple de com obtenir la successió de Fibonacci a partir del triangle de Tartaglia o Pascal.

Conclusió:

La successió de Fibonacci queda definida pels valors resultants de la suma dels nombres de les cel·les hexagonals tallades per la mitat, on cada diagonal s'inicia en els vèrtexs accessibles per un dels dos costats no horitzontals i cada diagonal defineix un sol nombre, tal que la primera diagonal defineix el primer la segona el segon i així successivament

Definició com a funció generadora:

La successió de Fibonacci pot ser definida com els coeficients de les potències de la sèrie[10] obtinguda de la següent funció generadora[11]:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = 1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 \dots$$

[10] En matemàtiques, una sèrie és la suma dels termes d'una successió, una suma amb un nombre infinit de termes o sumands

[11] Una funció generadora és aquella per a una successió qualsevol a_1, a_2, a_3 ... és la funció: $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^3 + \cdots$ És a dir, una sèrie formal de potències on cada coeficient és un element de la successió.

Conclusió:

La successió de Fibonacci pot ser definida a partir de la funció generadora:

$$\frac{x}{1 - x - x^2}$$

Definició com a Fórmula explícita:

La successió de Fibonacci també pot ser definida sense necessitat de calcular cap dels seus nombres anteriors, és a dir , amb la seva formula explicita[12].

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

On, $n \geq 1$ ja que la successió té un únic[13] terme inicial.

Conclusió:

La successió de Fibonacci és aquella on cada terme compleix la igualtat següent:

$$\{f_n\}_{n\geq 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

1.1.3.Propietats:

La Successió de Fibonacci presenta moltes propietats matemàtiques i en aquest apartat deduirem i formularem[14] algunes de les més curioses:

[12] La anterior formula s'acabarà de desenvolupar i vincular en l'apartat: propietats del nombre d'or.
[13] En la propietat 3 del nombre d'or observarem que la successió Completa de Fibonacci, no hi ha terme inicial.
[14] S'ha suprimit l'apartat de demostracions, per la complexitats de fer els càlculs i la pèrdua de comprensió que suposarien, no obstant el apartat de deducció facilita la identificació de la veracitat de les propietats trobades .

Propietat 1:

Deducció:

Si multipliquem el tercer terme pel cinquè el resultat és 10, una unitat més que el quart terme al quadrat. Això passa amb el els termes Imparells consecutius.

Posem-ne dos exemples:

$$2 \cdot 5 = 3^2 + 1$$

$$5 \cdot 13 = 8^2 + 1$$

En canvi, si multipliquem dos termes parells, el resultat és una unitat menys que el nombre del mig al quadrat.

Posem-ne dos exemples:

$$3 \cdot 8 = 5^2 - 1$$

$$21 \cdot 55 = 34^2 - 1$$

Formulació:

Suposem tres termes consecutius: $f_{n-2}, f_{n-1}\ i\ f_n$

On: $f_{n-2} \cdot\ f_n = {f_{n-1}}^2 \pm 1$

Si “n” és parell implica que la unitat resta.

Si “n” és imparell implica que la unitat suma.

Podem formular[15]:

Igualtat (F#P#1)	$f_{n-2} \cdot\ f_n = {f_{n-1}}^2 + (-1)^{n-1} \quad \forall \geq 3, n \in \mathbb{N}$

[15] Els símbols matemàtics anteriors tenen les següents traduccions:
∈ ->”pertany a”
∀->”per a tot”

Propietat 2:

Deducció:

Si sumem els cinc primers termes de la successió més la unitat ens surt el setè terme . Si sumem els sis primers hi afegim 1, surt el vuitè.

Fem-ho:

Setè terme:

$$1+1+2+3+5+1=13$$

Vuitè terme:

$$1+1+2+3+5+8+1=21$$

Provem dos més per a veure si obtenim el novè i desè terme:

Novè terme:

$$1+1+2+3+5+8+13+1=34$$

Desè terme:

$$1+1+2+3+5+8+13+21+1=55$$

Formulació:

No obstant també podem escriure les anteriors igualtats com:

$$1+1+2+3+5=13-1$$

$$1+1+2+3+5+8=21-1$$

$$1+1+2+3+5+8+13=34-1$$

$$1+1+2+3+5+8+13+21=55-1$$

Així si sumem els "n" primers nombres de la successió de Fibonacci, el nombre obtingut és igual al terme "n+2" menys 1.

Formulem-ho:

Igualtat (F#P#2) $f_1 + f_2 + f_3 \ldots + f_n = f_{n+2} - 1 \quad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

Propietat 3 i 4:

Deducció:

Dues propietats també curioses però en síntesi la mateixa[16] que l'anterior són les següents:

Suposem un fragment de la successió de Fibonacci, els 10 primers termes:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

Ara diferenciarem alguns valors d'aquesta de dos formes diferents, en essència les dues possibilitats de valors alternats :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55..

Eliminant els valors no subratllats obtenim dues successions noves:

1, 2, 5, 13, 34,...

1, 3, 8, 21, 55...

Si ens donem compte podem escriure les següents igualtats:

$$1 + 2 = 3$$

14 No obstant acabant en la mateixa propietat obtenim unes altres dos. A més és interesant recordar que en matemàtiques una mateixa veritat o igualtat pot ser trobada per camins ben diferents.

$$1 + 2 + 5 = 8$$

$$1 + 2 + 5 + 13 = 21$$

$$1 + 2 + 5 + 13 + 34 = 55$$

Si ens donem compte podem escriure les següents igualtats:

$$1 + 3 = 4 = 3 - 1$$

$$1 + 3 + 8 = 12 = 13 - 1$$

$$1 + 3 + 8 + 21 = 33 = 34 - 1$$

$$1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 88 = 89 - 1$$

<u>Formulació</u>:

De la primera successió (on “n” és un nombre imparell) podem formular:

Igualtat (F#P#3) $f_1 + f_3 + f_5 \dots + f_n = f_{n+1} \qquad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

De la segona successió(on “n” és un nombre parell) podem formular:

Igualtat (F#P#4) $f_2 + f_4 + f_6 \dots + f_n = f_{n+1} - 1 \qquad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

I de la suma de les dues igualtats anteriors obtenim que:

$$f_1 + f_3 + f_5 \dots + f_n = f_{n+1}$$

$$f_2 + f_4 + f_6 \dots + f_n = f_{n+1} - 1$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 \dots + f_n = f_{n+2} - 1$$

És a dir la igualtat (F#P#2) :

Igualtat (F#P#2) $f_1 + f_2 + f_3 \dots + f_n = f_{n+2} - 1 \quad \forall\, n \geq 1$

Propietat 5:

Deducció:

Si sumem els quadrats de la sèrie de Fibonacci, ens trobem amb una curiosa propietat

Fem-ho amb alguns exemples:

$$1^2 + 1^2 = 2 = 1 \cdot 2$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \cdot 3$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \cdot 5$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \cdot 8$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 104 = 8 \cdot 13$$

Formulació:

Observem que la suma dels quadrats dels "n" primers termes de la successió de Fibonacci són iguals al producte del terme "n" i "n+1"

El que podem formular com:

Igualtat (F#P#5)	${f_1}^2 + {f_2}^2 + {f_3}^2 \dots + {f_n}^2 = f_n \cdot f_{n+1} \quad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

1.2.Nombre d'or:

1.2.1.Notacions:

Notació simbòlica:

El nombre d'or es representa de forma abreviada mitjançant:

- La vint-i-unena lletra de l'alfabet grec, anomenada Fi, es pot utilitzar tan en majúscula(Φ) con en minúscula(φ)[17] per representar el nombre d'or. (opció més comú i més acceptada).

[17] També cal destacar que Fi en majúscula s'utilitza més per denotar el nombre d'or i més en minúscula per representar la inversa del nombre d'or, $\varphi = \Phi^{-1} = \frac{1}{\Phi}$

- La dinovena lletra de l'alfabet grec, anomenada Tau, es pot utilitzar tan en majúscula(T) con en minúscula(τ) per representar el nombre d'or. (opció[18] menys comú i menys acceptada).

Tτ

Lletra Tau en majúscula (esquerra) i en minúscula (dreta).

Φφ

Lletra Fi en majúscula (esquerra) i en minúscula (dreta).

<u>Una mica d'història:</u>

Els motius dels símbols

Les anteriors notacions del nombre d'or no són casuals, sino que presenten motius curiosos.

La lletra grega Fi és la inicial del nom del l'escultor grec Fídies (490 aC - 432 aC) la qual va ser proposada pe matemàtic nord-americà Mark Barr, al voltant del 1909, en memòria d'aquest. Fídies va construir el Partenó d'Atenes, en el qual i destaquen nombroses relacions entre distàncies que donen com a raó el nombre d'or.

La lletra grega tau, inicial de τομή, "tall" o "secció" en grec ,va ser proposada per el matemàtic anglès Rouse Ball (1850 dC- 1925 dC)per referir-se a la secció àuria, ja que el seu significat en grec la feia especialment adient.

<Fotografia del Panteó fet per Fídies.>

[18] En el treball sols utilitzarem la notació amb la lletra majúscula Fi.

Notació aritmètica/numèrica:

El nombre d'or es representa com el valor numèric resultant de l'operació aritmètica següent:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$$

La seva notació no es pot simplificar ja que el nombre en sí mateix és una fracció d'un nombre irracional, $\sqrt{5}$. Per tant si volguéssim expressar el nombre d'or com a decimal exacte no podríem ja que el resultat exacte de l'operació té infinits decimals no periòdics , és a dir que els nombres decimals que obtindríem en fer la diviso no es repeteixen i per tant no es pot escriure de forma decimal completa ja que el resultat té infinits decimals que no segueixen cap pauta.

1.2.2.Definicions:

Definició segons els conjunts numèrics (teoria de conjunts):

Val a dir que els conjunts numèrics són una classificació de tots els nombres segons les seves propietats, la classificació que donarem està basada en l'actual teoria de conjunts.

Aquesta definició[19] ens servirà per fer-nos un mapa de la gran varietat de nombres que trobem en l'univers matemàtic i saber on està situat el nombre d'or per entendre'l una mica millor, tot i que no definirem cada conjunt per tal de no estendrens més del compte.

El següent diagrama de Venn mostra els diferents tipus de conjunts numèrics definits matemàticament. Aquests presenten una estructura en forma de ceba, on els conjunts més grans són la unió de conjunts més petits que a la seva vegada estan dintre d'altres més grans i aquests en altres més grans i així successivament.

[19] Realment no és una definició ja que hi ha més nombres amb les propietats del nombre d'or no obstant la intenció és situar el nombre d'or en l'oceà numèric.

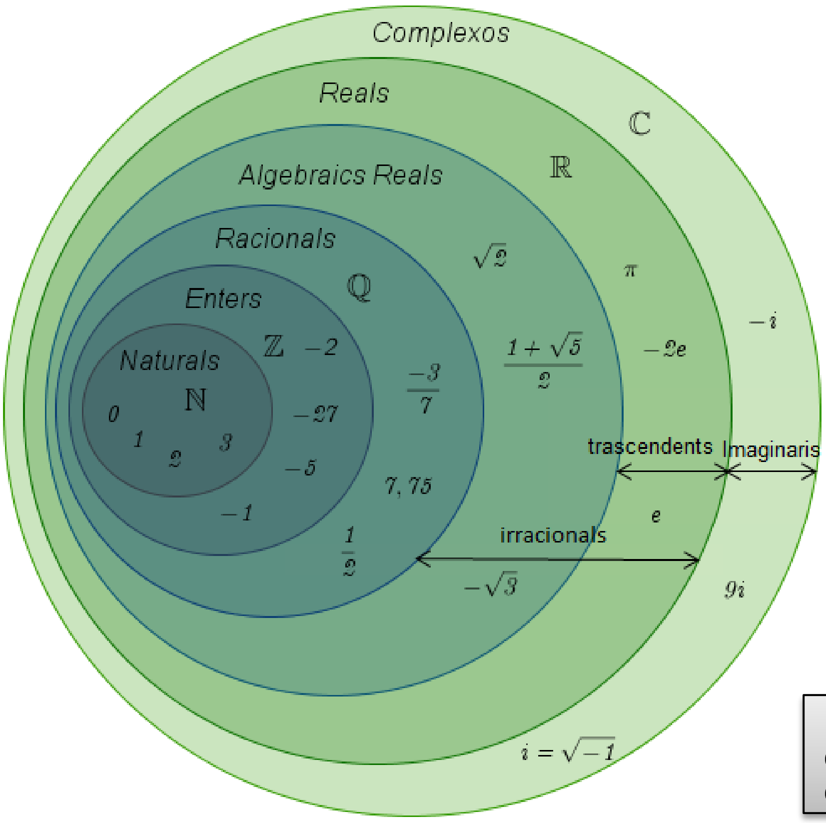


Diagrama de Venn dels diferents conjunts numèrics definits

Un nombre complex és aquell nombre $z = a + bi$, en el cas del nombre d’or, $b = 0$

Un nombre real és aquell on $b = 0$, per al valor de “z”.

Un nombre real algèbric és aquell que és solució d’una equació polinòmica.

Un nombre irracional és aquell amb infinites xifres decimals que no segueixen cap pauta

<u>Conclusió:</u>

El nombre d’or és un nombre complex, real, real algèbric i irracional.

Definició com a solució a la diviso d'un segment:

El nombre d'or també pot ser definit com a solució de dividir un segment en dos parts on la longitud total amb la primera part té la mateixa proporció que la primera part amb la segona, dit d'una altre manera, el tot és a la part com la part a la resta.

Si formulem l'anterior problema de forma algebraica obtenim :

$$\frac{x}{l} = \frac{l}{x-l}$$

On x és el valor del major segment resultant de la divisió i l la longitud del segment

Si desenvolupem:

$$\frac{x}{l} = \frac{l}{x-l} \Longrightarrow x(x-l) = l^2 \Rightarrow x^2 - xl = l^2 \Longrightarrow x^2 - lx - l^2 = 0 \Longrightarrow x$$
$$= \frac{l \pm \sqrt{(-l)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-l^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = \frac{l \pm \sqrt{5l^2}}{2} = \frac{l \pm l\sqrt{5}}{2} = \frac{l \cdot (1 \pm \sqrt{5})}{2}$$
$$= l \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Obtenim que el valor de x és el nombre d'or per una constant, la constant de la longitud total del segment a dividir.

Sí agafem el resultat positiu, i suposem la longitud total del segment com la unitat, és a dir 1 obtindrem:

$$l \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow l \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Conclusió:

El nombre d'or és la solució positiva a la divisió d'un segment unitat on aquesta és a la part com la part a la resta.

Definició com a equació de segon grau:

El nombre d'or pot ser definit com la solució positiva de l'equació de segon grau següent:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Ja que si resolem l'equació obtenim:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Si ara agafem d'entre les dues solucions la positiva obtenim:

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Conclusió:

El nombre d'or és la solució positiva a l'equació de segon grau: $x^2 - x - 1 = 0$

Definició com a nombre metàl·lic:

Els nombres metàl·lics són les solucions positives de les equacions de segon grau de tipus $x^2 - px - q = 0$ on $p \in \mathbb{N} \wedge q \in \mathbb{N}$ [20]

Recordant l'equació de segon grau de l'apartat anterior: $x^2 - x - 1 = 0$

Podem definir el nombre d'or, com el resultat positiu de l'equació com a nombre metàl·lic amb $p = 1$ i $q = 1$

Conclusió:

El nombre d'or és el nombre metàl·lic amb $p = 1$ i $q = 1$

[20] Els símbols matemàtics anteriors tenen les següents traduccions:
∈ ->"pertany a"
^ ->"i"

Definició com a fracció continua:

Els nombres metàl·lics ,"M" tenen una curiosa propietat, poden ser expressats com una fracció continua simple de període[21] "p". Podem definir el nombre d'or com la fracció continua simple de període següent:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}} = [1,1,1,1,1\ldots] = [\overline{1}]$$

Per facilitar la comprensió podem intentar demostrar la anterior igualtat partint de la proposició de que el nombre d'or és igual a la fracció continua anterior, fem-ho:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}} = 1 + \frac{1}{\Phi} \Rightarrow \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Rightarrow \Phi = \frac{1}{1} + \frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi} + \frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi+1}{\Phi} \Rightarrow \Phi^2$$

$$= \Phi + 1 \Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \Rightarrow \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{2(2)} \Rightarrow\Rightarrow \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \qquad c.v.d$$

[21] Una fracció continua simple de període p és de la següent forma: $p + \cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cdots}}} = [p,p,p,p\ldots] = [\bar{p}]$ per facilitar la representació de termes $[p,p,p,p\ldots] = [\bar{p}]$ on la marca a sobre de p indica que l'element es repeteix indefinidament.

Conclusió:

El nombre d'or és la fracció continua simple de període, p=1

Definició com a successió infinita d'arrels quadrades:

El nombre d'or pot representar-se de la següent forma[22]:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}}}}}$$

Alguns exemples poden facilitar la comprensió sobre com hem definit el nombre d'or i la veracitat de la definició en sí.

$$+\sqrt{1} = 1$$

$$+\sqrt{1+\sqrt{1}} \cong 1.4142$$

$$+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} \cong 1.5538$$

$$+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} \cong 1.5931$$

$$+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}} \cong 1.6119$$

[22] Agafant únicament el valor positiu de les arrels.

$$+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}} \cong 1.6161$$

$$+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}} \cong 1.6174$$

$$+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}} \cong 1.6178$$

$$+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}}} \cong 1.6180$$

Observem que quantes més arrels hi ha, més proper és el resultat al nombre d'or, per tant podríem deduir que el límit és el nombre d'or.

No obstant aquesta definició és pot demostrar a partir de la definició del nombre d'or com a solució de l'equació

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \ \Phi^2 = \Phi + 1$$

És a dir és compleix que:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = \sqrt{1+\Phi} \Rightarrow (\Phi)^2 = \left(\sqrt{1+\Phi}\right)^2 \Rightarrow \Phi^2 = \left(\sqrt{1+\Phi}\right)^2 = 1+\Phi \Rightarrow \Phi^2$$
$$= \Phi + 1 \quad c.v.d$$

Conclusió:

El nombre d'or és la successió indefinida d'arrels quadrades de la unitat més ella mateixa: $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}$

Definició com a límit de raó entre termes consecutius de la successió de Fibonacci:

Les extenses relacions entre el nombre d'or[23] i la successió de Fibonacci són tant estretes que podem definir el nombre d'or íntegrament a partir d'aquesta successió

Per fer-nos una idea observem , què passa quan dividim entre sí termes de la successió de Fibonacci[24] per el seu posterior:

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{2}{1} = 0{,}5$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\frac{5}{3} = 1,\hat{6}$$

[23] Recordem una aproximació molt exacta del nombre d'or: 1,618033989
[24] Recordem la successió de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233…

$$\frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\frac{13}{8} = 1{,}625$$

$$\frac{21}{13} \cong 1{,}6153846$$

$$\frac{34}{21} \cong 1{,}6190476$$

$$\frac{55}{34} \cong 1{,}617647059$$

$$\frac{89}{55} = 1.6\widehat{18}$$

Podem observar que cada vegada, com més avançats són els termes de les divisions , més pròxims estem al nombre d'or, és a dir en el límit de la successió la raó serà el nombre d'or.

Conclusió:

El nombre d'or és el límit de la raó entre un nombre de la successió de Fibonacci i el seu posterior. $\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}}$

1.2.3.Propietats:

El nombre d'or presenta curioses propietats matemàtiques, en aquest apartat les: deduirem, formularem i demostrarem[25] de forma pausada entenedora i clara.

Propietat 1:

[25] Els tres subapartats (deducció, formulació i demostració), malgrat la simplicitat han sigut el resultat d'una profunda reflexió, com a mètode notable de construcció de les matemàtiques i com a hàbit oportú pels estudis posteriors. En l'apartat de la successió de Fibonacci s'han suprimit per facilitar la comprensió.

Deducció:

Partint de la definició del nombre d'or com a solució de l'equació:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Formulació:

Podem formula la següent igualtat:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Si ordenem els termes per tal de saber el valor de Φ^2 , obtenim la següent igualtat:

Igualtat (N#P#1)	$\Phi^2 = \Phi + 1$

Demostració:

Per demostrar la veracitat de l'anterior igualtat substituirem els termes de la igualtat pels valors numèrics, partint de la Igualtat (N#P#1).

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \Rightarrow \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{4}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{2(2)} \Rightarrow\Rightarrow \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \qquad c.v.d$$

Propietat 2:

Deducció:

Podem deduir altres curioses propietats del nombre d'or jugant amb la posició de la igualtat (N#P#1), com per exemple si dividim cada costat de la igualtat per el nombre d'or[26].

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \Rightarrow \frac{\Phi^2}{\Phi} = \frac{\Phi + 1}{\Phi} \Rightarrow \Phi = \frac{\Phi}{\Phi} + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \Phi^{-1}$$

Formulació:

Igualtat (N#P#2)	$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$

Demostració:

La demostració és el procés invers a el de deducció, ja que demostrarem la igualtat basant-nos en primera igualtat ja demostrada:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Rightarrow (\Phi) \cdot \Phi = \left(1 + \frac{1}{\Phi}\right) \cdot \Phi \Rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1$$

Ara substituïm el terme Φ^2 per "$\Phi + 1$ " de (N#P#1) per i obtenim:

$$\Phi + 1 = \Phi + 1 \qquad c.v.d$$

[26] Com ja havíem dit en el apartat de notacions, φ és la inversa del nombre d'or, és a dir 1 partit per el nombre d'or o el nombre d'or elevat a menys 1, en llenguatge matemàtic, $\varphi = \frac{1}{\Phi} = \Phi^{-1}$

Propietat 3:

Deducció:

A partir de la nova igualtat encara podem formular una nova igualtat amb la inversa[27] del nombre d'or,

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Rightarrow \Phi = 1 + \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

Formulació:

Igualtat (N#P#3)	$\varphi = \Phi - 1$

Demostració:

Com en la anterior propietat, també demostrarem aquesta a partir de la igualtat (N#P#1).

$$\varphi = \Phi - 1 \Rightarrow (\ \varphi) \cdot \Phi = (\Phi - 1) \cdot \Phi \Rightarrow 1 = \Phi^2 - \Phi$$

Ara substituïm el terme Φ^2 per "$\Phi + 1$ " de (N#P#1) per i obtenim:

$$1 = \Phi^2 - \Phi \Rightarrow 1 = \Phi + 1\ - \Phi \Rightarrow 1 = 1 \qquad c.v.d$$

Propietat 4:

Deducció:

Però encara hi ha més, ja que a partir de igualtat (N#P#1) se'ns pot ocórre la següent pregunta: Què passaria sí multipliquéssim els dos costats de la igualtat tantes vegades com volguéssim per Φ , per a obtenir tots el valors de les potències del nombre d'or?

Fem-ho amb alguns exemples:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$(\Phi^2) \cdot \Phi = (\Phi + 1) \cdot \Phi \Rightarrow \Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$$

$$(\Phi^2) \cdot \Phi \cdot \Phi = (\Phi + 1) \cdot \Phi \cdot \Phi \Rightarrow (\Phi^2) \cdot \Phi^2 = (\Phi + 1) \cdot \Phi^2 \Rightarrow \Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2$$

---

[27] Com ja havíem dit en el apartat de notacions, φ és la inversa del nombre d'or, és a dir 1 partit per el nombre d'or o el nombre d'or elevat a menys 1, en llenguatge matemàtic, $\varphi = \frac{1}{\Phi} = \Phi^{-1}$

$$(\Phi^2)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi = (\Phi+1)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi \Rightarrow (\Phi^2)\cdot\Phi^3 = (\Phi+1)\cdot\Phi^3 \Rightarrow \ \Phi^5 = \ \Phi^4+\Phi^3$$

$$(\Phi^2)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi = (\Phi+1)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi \Rightarrow (\Phi^2)\cdot\Phi^4 = (\Phi+1)\cdot\Phi^4 \Rightarrow \ \Phi^6 = \ \Phi^5+\Phi^4$$

$$(\Phi^2)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi = (\Phi+1)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi \Rightarrow (\Phi^2)\cdot\Phi^5 = (\Phi+1)\cdot\Phi^5$$
$$\Rightarrow \ \Phi^7 = \ \Phi^6+\Phi^8$$

$$(\Phi^2)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi = (\Phi+1)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi \Rightarrow (\Phi^2)\cdot\Phi^6 = (\Phi+1)\cdot\Phi^6$$
$$\Rightarrow \ \Phi^8 = \ \Phi^7+\Phi^6$$

$$(\Phi^2)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi = (\Phi+1)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi \Rightarrow (\Phi^2)\cdot\Phi^7 = (\Phi+1)\cdot\Phi^7$$
$$\Rightarrow \ \Phi^9 = \ \Phi^8+\Phi^7$$

$$(\Phi^2)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi = (\Phi+1)\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi\cdot\Phi \Rightarrow (\Phi^2)\cdot\Phi^8$$
$$= (\Phi+1)\cdot\Phi^8 \Rightarrow \ \Phi^{10} = \ \Phi^9+\Phi^8$$

Però què passaria si ho provem dividint per el nombre d'or? Per trobar les potencies menors de Φ^2?

$$\Phi^2 = \Phi+1$$

$$(\Phi^2):\Phi = (\Phi+1):\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi} = \frac{(\Phi+1)}{\Phi} \Longrightarrow \Phi = \frac{\Phi}{\Phi}+\frac{1}{\Phi} = 1+\frac{1}{\Phi} = \Phi^0+\Phi^{-1}$$

$$(\Phi^2):\Phi:\Phi = (\Phi+1):\Phi:\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi^2} = \frac{(\Phi+1)}{\Phi^2} \Longrightarrow 1 = \Phi^0 = \frac{\Phi}{\Phi^2}+\frac{1}{\Phi^2} = \frac{1}{\Phi}+\frac{1}{\Phi^2} = \Phi^{-1}+\Phi^{-2}$$

$$(\Phi^2):\Phi:\Phi:\Phi = (\Phi+1):\Phi:\Phi:\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi^3} = \frac{(\Phi+1)}{\Phi^3} \Longrightarrow \frac{1}{\Phi} = \Phi^{-1} = \frac{\Phi}{\Phi^3}+\frac{1}{\Phi^3} = \frac{1}{\Phi^2}+\frac{1}{\Phi^3}$$
$$= \Phi^{-2}+\Phi^{-3}$$

$$(\Phi^2):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = (\Phi+1):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi^4} = \frac{(\Phi+1)}{\Phi^4} \Longrightarrow \frac{1}{\Phi^2} = \Phi^{-2} = \frac{\Phi}{\Phi^4}+\frac{1}{\Phi^4} = \frac{1}{\Phi^3}+\frac{1}{\Phi^4}$$
$$= \Phi^{-3}+\Phi^{-4}$$

$$(\Phi^2):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = (\Phi+1):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi^5} = \frac{(\Phi+1)}{\Phi^5} \Longrightarrow \frac{1}{\Phi^3} = \Phi^{-3} = \frac{\Phi}{\Phi^5}+\frac{1}{\Phi^5}$$
$$= \frac{1}{\Phi^4}+\frac{1}{\Phi^5} = \Phi^{-4}+\Phi^{-5}$$

$$(\Phi^2):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = (\Phi+1):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi^6} = \frac{(\Phi+1)}{\Phi^6} \Longrightarrow \frac{1}{\Phi^4} = \Phi^{-4} = \frac{\Phi}{\Phi^6} + \frac{1}{\Phi^6}$$
$$= \frac{1}{\Phi^5} + \frac{1}{\Phi^6} = \Phi^{-5} + \Phi^{-6}$$

$$(\Phi^2):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = (\Phi+1):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi^7} = \frac{(\Phi+1)}{\Phi^7} \Longrightarrow \frac{1}{\Phi^5} = \Phi^{-5}$$
$$= \frac{\Phi}{\Phi^7} + \frac{1}{\Phi^7} = \frac{1}{\Phi^6} + \frac{1}{\Phi^7} = \Phi^{-6} + \Phi^{-7}$$

$$(\Phi^2):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = (\Phi+1):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi^8} = \frac{(\Phi+1)}{\Phi^8} \Longrightarrow \frac{1}{\Phi^6} = \Phi^{-6}$$
$$= \frac{\Phi}{\Phi^8} + \frac{1}{\Phi^8} = \frac{1}{\Phi^7} + \frac{1}{\Phi^8} = \Phi^{-7} + \Phi^{-8}$$

$$(\Phi^2):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = (\Phi+1):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi^9} = \frac{(\Phi+1)}{\Phi^9} \Longrightarrow \frac{1}{\Phi^7}$$
$$= \Phi^{-7} = \frac{\Phi}{\Phi^9} + \frac{1}{\Phi^9} = \frac{1}{\Phi^8} + \frac{1}{\Phi^9} = \Phi^{-8} + \Phi^{-9}$$

$$(\Phi^2):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = (\Phi+1):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi^{10}} = \frac{(\Phi+1)}{\Phi^{10}}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\Phi^8} = \Phi^{-8} = \frac{\Phi}{\Phi^{10}} + \frac{1}{\Phi^{10}} = \frac{1}{\Phi^9} + \frac{1}{\Phi^{10}} = \Phi^{-9} + \Phi^{-10}$$

$$(\Phi^2):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = (\Phi+1):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi^{11}}$$
$$= \frac{(\Phi+1)}{\Phi^{11}} \Longrightarrow \frac{1}{\Phi^9} = \Phi^{-9} = \frac{\Phi}{\Phi^{11}} + \frac{1}{\Phi^{11}} = \frac{1}{\Phi^{10}} + \frac{1}{\Phi^{11}} = \Phi^{-10} + \Phi^{-11}$$

$$(\Phi^2):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = (\Phi+1):\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi:\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi^{12}}$$
$$= \frac{(\Phi+1)}{\Phi^{12}} \Longrightarrow \frac{1}{\Phi^{10}} = \Phi^{-10} = \frac{\Phi}{\Phi^{12}} + \frac{1}{\Phi^{12}} = \frac{1}{\Phi^{11}} + \frac{1}{\Phi^{12}} = \Phi^{-11} + \Phi^{-12}$$

Formulació:

Després de fer un ampli càlcul en l'exemple ens adonem d'un patró, per acabar de simplificar-ho, podem ordenar el resultats en una taula:

Potencia	Resultat
Φ^{10}	$\Phi^{9}+\Phi^{8}$
Φ^{9}	$\Phi^{8}+\Phi^{7}$
Φ^{8}	$\Phi^{7}+\Phi^{6}$
Φ^{7}	$\Phi^{6}+\Phi^{5}$
Φ^{6}	$\Phi^{5}+\Phi^{4}$
Φ^{5}	$\Phi^{4}+\Phi^{3}$
Φ^{4}	$\Phi^{3}+\Phi^{2}$
Φ^{3}	$\Phi^{2}+\Phi$
Φ^{2}	$\Phi+\Phi^{0}$
Φ^{1}	$\Phi^{0}+\Phi^{-1}$

Φ^{0}	$\Phi^{-1}+\Phi^{-2}$
Φ^{-1}	$\Phi^{-2}+\Phi^{-3}$
Φ^{-2}	$\Phi^{-3}+\Phi^{-4}$
Φ^{-3}	$\Phi^{-4}+\Phi^{-5}$
Φ^{-4}	$\Phi^{-5}+\Phi^{-6}$
Φ^{-5}	$\Phi^{-6}+\Phi^{-7}$
Φ^{-6}	$\Phi^{-7}+\Phi^{-8}$
Φ^{-7}	$\Phi^{-8}+\Phi^{-9}$
Φ^{-8}	$\Phi^{-9}+\Phi^{-10}$
Φ^{-9}	$\Phi^{-10}+\Phi^{-11}$
Φ^{-10}	$\Phi^{-11}+\Phi^{-12}$

En la taula es pot observar que cada potència del nombre d'or (columna esquerra) es pot expressar sempre com la suma de dos potències(color cian i color magenta) del nombre d'or i aquestes potències són les dues potències anteriors de la qual volem saber el valor. És a dir la potencia enèsima del nombre anterior és la suma de les dues anteriors, formulant-ho:

Igualtat (N#P#4) $\Phi^{n} = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$

Demostració:

Donada l'anterior expressió algèbrica podem denotar la seva veracitat demostrant-la

$$\Phi^{n} = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi^{n}\Phi^{-1}+\Phi^{n}\Phi^{-2} = \Phi^{n}(\Phi^{-1} + \Phi^{-2}) \Rightarrow \Phi^{n} = \Phi^{n}(\Phi^{-1} + \Phi^{-2}) \Longrightarrow \frac{\Phi^{n}}{\Phi^{n}}$$

$$= (\Phi^{-1} + \Phi^{-2}) \Longrightarrow 1 = (\Phi^{-1} + \Phi^{-2}) = \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^{2}} = \frac{\Phi^{2} + \Phi}{\Phi^{3}} \Longrightarrow 1 = \frac{\Phi^{2} + \Phi}{\Phi^{3}}$$

$$\Longrightarrow \Phi^{3} = \Phi^{2} + \Phi \Rightarrow \{*\}$$

Ara substituïm Φ^{3} a partir de la igualtat (N#P#1) , com:

$$\Phi^{3} = \Phi \cdot (\Phi^{2}) = \Phi \cdot (\Phi + 1)$$

Continuem en l'últim pas de la demostració substituint Φ^{3} pel valor igual $\Phi \cdot (\Phi + 1)$ trobat en el pas anterior a partir de la igualtat (N#P#1)

$$\{*\} \Rightarrow \Phi \cdot (\Phi + 1) = \Phi^{2} + \Phi \Rightarrow \Phi^{2} + \Phi = \Phi^{2} + \Phi \qquad c.v.d$$

Propietat 5:

Deducció:

Què passaria si volguéssim desenvolupar la suma de potències expressades en les propietats anteriors, fins el punt de obtenir una expressió de grau 1?

Fem-ho començant a partir de la igualtat (N#P#1):

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = (\Phi + 1) + (\Phi) = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3$$

$$\Phi^6 = \Phi^5 + \Phi^4 = (5\Phi + 3) + (3\Phi + 2) = 8\Phi + 5$$

$$\Phi^7 = \Phi^6 + \Phi^5 = (8\Phi + 5) + (5\Phi + 3) = 13\Phi + 8$$

$$\Phi^8 = \Phi^7 + \Phi^6 = (13\Phi + 8) + (8\Phi + 5) = 21\Phi + 13$$

$$\Phi^9 = \Phi^8 + \Phi^7 = (21\Phi + 13) + (13\Phi + 8) = 34\Phi + 21$$

$$\Phi^{10} = \Phi^9 + \Phi^8 = (34\Phi + 21) + (21\Phi + 13) = 55\Phi + 34$$

Bé, però què passaria si ho provem amb les potències inferiors a 2?

Provem-ho:

Per fer-ho partirem de la igualtat (N#P#4)

$$\Phi^{\mathrm{n}} = \Phi^{\mathrm{n}-1} + \Phi^{\mathrm{n}-2} \Rightarrow \Phi^{\mathrm{n}-2} = -\Phi^{\mathrm{n}-1} + \Phi^{\mathrm{n}}$$

A partir de la reordenació de termes de la igualtat (N#P#4)

$$\Phi^1 = -\Phi^2 + \Phi^3 = -(\Phi + 1) + (2\Phi + 1) = \Phi + 0$$

$$\Phi^0 = -\Phi^1 + \Phi^2 = -(\Phi + 0) + (\Phi + 1) = 0\Phi + 1$$

$$\Phi^{-1} = -\Phi^0 + \Phi^1 = -(0\Phi + 1) + (\Phi + 0) = 1\Phi - 1$$

$$\Phi^{-2} = -\Phi^{-1} + \Phi^0 = -(1\Phi - 1) + (0\Phi + 1) = -1\Phi + 2$$

$$\Phi^{-3} = -\Phi^{-2} + \Phi^{-1} = -(-1\Phi + 2) + (\Phi - 1) = 2\Phi - 3$$

$$\Phi^{-4} = -\Phi^{-3} + \Phi^{-2} = -(2\Phi - 3) + (-1\Phi + 2) = -3\Phi + 5$$

$$\Phi^{-5} = -\Phi^{-4} + \Phi^{-3} = -(-3\Phi + 5) + (2\Phi - 3) = 5\Phi - 8$$

$$\Phi^{-6} = -\Phi^{-5} + \Phi^{-4} = -(5\Phi - 8) + (-3\Phi + 5) = -8\Phi + 13$$

$$\Phi^{-7} = -\Phi^{-6} + \Phi^{-5} = -(-8\Phi + 13) + (5\Phi - 8) = 13\Phi - 21$$

$$\Phi^{-8} = -\Phi^{-7} + \Phi^{-6} = -(13\Phi - 21) + (-8\Phi + 13) = -21\Phi + 34$$

$$\Phi^{-9} = -\Phi^{-8} + \Phi^{-7} = -(-21\Phi + 34) + (13\Phi - 21) = 34\Phi - 55$$

$$\Phi^{-10} = -\Phi^{-9} + \Phi^{-8} = -(34\Phi - 55) + (-21\Phi + 34) = -55\Phi + 89$$

Formulació:

Després de fer un ampli càlcul d'exemple ens adonem d'un patró, per acabar de simplificar-ho, podem ordenar el resultats en una taula:

Potencia	Resultat
Φ^1	1Φ+0
Φ^2	1Φ+1
Φ^3	2Φ+1
Φ^4	3Φ+2
Φ^5	5Φ+3
Φ^6	8Φ+5
Φ^7	13Φ+8
Φ^8	21Φ+13
Φ^9	34Φ+21
Φ^{10}	55Φ+34

Φ^0	0Φ+1
Φ^{-1}	1Φ-1
Φ^{-2}	-1Φ+2
Φ^{-3}	2Φ-3
Φ^{-4}	-3Φ+5
Φ^{-5}	5Φ-8
Φ^{-6}	-8Φ+13
Φ^{-7}	13Φ-21
Φ^{-8}	-21Φ+34
Φ^{-9}	34Φ-55
Φ^{-10}	-55Φ+89

A la primera columna observem que a partir de la segona potència del nombre d'or podem obtenir les potències del nombre com la suma d'un nombre de la successió de Fibonacci i ,un altre d'aquesta mateixa com a coeficient del nombre d'or. No obstant, trobem element que no trobem en la definició de la successió de Fibonacci. Malgrat l'anterior podem ampliar aquesta de tal forma que existeixin el termes:

$$\dots f_n \dots, f_{-2}, f_{-1}, f_0$$

Aquesta successió l'anomenarem successió Completa de Fibonacci, i la definirem com:

$$f'_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

On n és qualsevol nombre enter, és a dir, $n \in \mathbb{Z}$

La nova successió definida és la següent:

...89, -55, 34, -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

O amb notació simbòlica, per saber la posició del anteriors:

$$\{f'_n\}_n = \cdots f'_{-11}, f'_{-10}, f'_{-9}, f'_{-8}, f'_{-7}, f'_{-6}, f'_{-5}, f'_{-4}, f'_{-3}, f'_{-2}, f'_{-1}, f'_0 \cdots$$

$$\cdots f'_1, f'_2, f'_3, f'_4, f'_5, f'_6, f'_7, f'_8, f'_9, f'_{10}, f'_{11} \cdots$$

Amb l'anterior i la taula podem formula:

Igualtat (N#P#3)	$\Phi^{\mathrm{n}} = f'_n \cdot \Phi + f'_{n-1}$

<u>Demostració:</u>

Podem demostra l'anterior igualtat transformant els termes de la definició de la nova successió en valors del nombre d'or, de la següent forma:

Primer valor a expressar en termes del nombre d'or:

$$(2\Phi - 1)^{-1} = \frac{1}{2\Phi - 1} = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1} = \frac{1}{\left(\frac{2+2\sqrt{5}}{2}\right) - 1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{2}\right) - 1}$$

$$= \frac{1}{(1+\sqrt{5}) - 1} = \frac{1}{1 - 1 + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Segon valor a expressar en termes del nombre d'or:

$$\Phi^{n} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

Tercer valor a expressar en termes del nombre d'or, utilitzant la Igualtat (N#P#3) elevada a "n":

$$(-\varphi)^{n} = (-\Phi+1)^{n} = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}+1\right)^{n} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{2}\right)^{n} = \left(\frac{-1+2+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

Per tant obtenim que:

$$f'_{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] = (2\Phi-1)^{-1}\cdot\left[\Phi^{n}-(-\varphi)^{n}\right] = \frac{\Phi^{n}-(-\Phi+1)^{n}}{2\Phi-1}$$

Ara substituïm en la igualtat a demostrar el terme f'_{n} per i $\frac{\Phi^{n}-(-\Phi+1)^{n}}{2\Phi-1}$operem:

$$\Phi^n = f'_n \cdot \Phi + f'_{n-1} \Rightarrow \Phi^n = \left(\frac{\Phi^n - (-\Phi+1)^n}{2\Phi - 1}\right) \cdot \Phi + \frac{\Phi^{n-1} - (-\Phi+1)^n}{2\Phi - 1}$$
$$= \frac{\Phi^{n+1} - \Phi(-\Phi+1)^n}{2\Phi - 1} + \frac{\Phi^{n-1} - (-\Phi+1)^{n-1}}{2\Phi - 1}$$
$$= \frac{\Phi^{n+1} - \Phi(-\Phi+1)^n + \Phi^{n-1} - (-\Phi+1)^{n-1}}{2\Phi - 1} \Rightarrow \Phi^n \cdot (2\Phi - 1)$$
$$= \Phi^{n+1} - \Phi(-\Phi+1)^n + \Phi^{n-1} - (-\Phi+1)^{n-1} \Rightarrow 2\Phi^{n+1} - \Phi^n$$
$$= \Phi^{n+1} - \Phi(-\Phi+1)^n + \Phi^{n-1} - (-\Phi+1)^{n-1}$$
$$\Rightarrow 2\Phi^{n+1} - \Phi^n - \Phi^{n+1} - \Phi^{n-1} = -\Phi(-\Phi+1)^n - (-\Phi+1)^{n-1}$$
$$\Rightarrow \Phi^{n+1} - \Phi^n - \Phi^{n-1} = -\Phi(-\Phi+1)^n - (-\Phi+1)^{n-1} \Rightarrow \Phi^n(\Phi - 1 - \Phi^{-1})$$
$$= -\Phi(-\Phi+1)^n - (-\Phi+1)^{n-1} \Rightarrow \Phi^n \cdot (\Phi - 1 - \Phi^{-1})$$
$$= (-\Phi+1)^n \cdot [-\Phi - (-\Phi+1)^{-1}] \Rightarrow \Phi^n \cdot ((\Phi - 1) - \Phi^{-1})$$
$$= (-\Phi+1)^n \cdot [-\Phi - (-\Phi+1)^{-1}] \Rightarrow \{*\}$$

Apliquem la igualtat (N#P#3) substituint els valors "$\Phi + 1$" per "Φ^{-1}" i en negatiu substituint els valors "$-\Phi + 1$" per "$-\Phi^{-1}$" tal com diu la igualtat demostrada (N#P#3)

$$\{*\} \Rightarrow \Phi^n \cdot \left((\Phi^{-1}) - \Phi^{-1}\right) = (-\Phi+1)^n \cdot \left[-\Phi - \left(-\Phi^{-1}\right)^{-1}\right] \Rightarrow \Phi^n \cdot \left(\Phi^{-1} - \Phi^{-1}\right)$$
$$= (-\Phi+1)^n \cdot [-\Phi - (-\Phi)^{-1 \cdot -1}] \Rightarrow \Phi^n \cdot (0) = (-\Phi+1)^n \cdot [-\Phi - (-\Phi)^1]$$
$$\Rightarrow 0\Phi^n = (-\Phi+1)^n \cdot (-\Phi + \Phi) \Rightarrow 0\Phi^n = (-\Phi+1)^n \cdot (0) \Rightarrow 0\Phi^n$$
$$= 0(-\Phi+1)^n \Rightarrow 0 = 0 \qquad c.v.d$$

2.Geometria:

En aquest apartat definirem els elements geomètric que es deriven del nombre d'or de forma pautada i sistemàtica per tal de facilitar la compressió i donar un aire d'igualtat als diferents apartats.

2.1Segment auri:

És la divisió de un segment en dos segments[28] tals que compleixin la següent igualtat:

$$\frac{AX + XB}{AX} = \frac{AX}{XB}$$

On podem deduir que és compleix:

$$\boxed{\Phi = \frac{AX}{XB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

[28] La notació utilitzada per definir un segment solen ser dues lletres majúscules que fan referència a dos punts i defineixen així el segment que formen com el fragment de la recta que va d'un a l'altre. És a dir la distància del punt A al punt B és representa com el segment AB

Una mica d'història:

Euclides i els seus elements

Euclides d'Alexandria (325 aC – 265 aC) un dels matemàtics més il·lustres de l'antiguitat, en la seva extensa obra els *"Elements"* tractat matemàtic que consta de 13 llibres, realitza una construcció equivalent a la secció àuria en la proposició II.11 i en fa una definició en VI.3 i l'anomena com segment dividit en mitja i extrema raó.

Proposició 11 del llibre II:

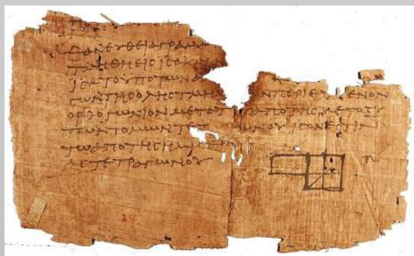
"*Dividir una recta donada de tal manera que el rectangle comprès per la recta sencera i un dels segments sigui igual al quadrat del segment que queda."*

Definició 3 del llibre VI:

"Es diu que una recta ha estat tallada en extrema i mitjana raó quan la recta sencera és al segment major tal i com el segment major és al segment menor."

També cal destacar que l'origen documentat conscientment del nombre d'or, és l'anterior obra de Euclides, ja que no hi ha cap document anterior que se'l citi de forma tan conscient, o almenys de forma demostrable.

No obstant per els antics grec el anomenat actualment segment auri o segment d'or no era anomenat així ja que no hi havia donat cap nom concret simplement el nombraven: diviso d'un segmento en mitja extrema raó o de forma succinta i lecontita, la secció



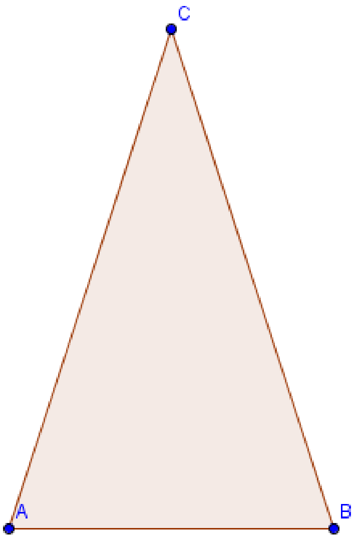
<<Un dels fragments originals més antics que es conserven dels Elements, trobat a Oxirrinc i que data de c. 100. El diagrama és del llibre II, proposició 5.>>

2.2.Rectangle auri:

És qualsevol rectangle que complexi la següent igualtat:

$$\Phi = \frac{DC}{AD} = \frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

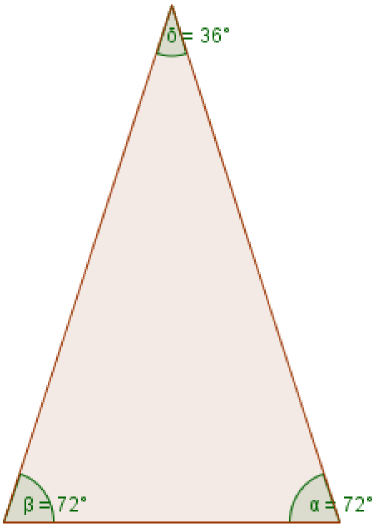
2.3. Triangle d'or I:



És qualsevol triangle que complexi la següents igualtats:

$$\Phi = \frac{CB}{AB} = \frac{CA}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

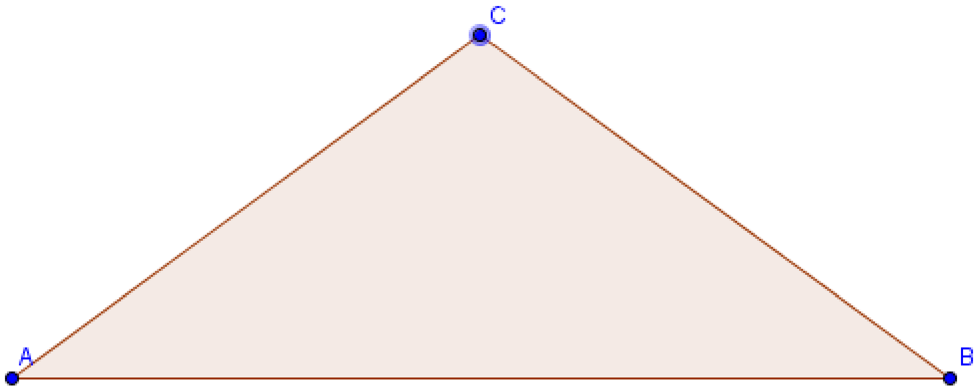
On els angles α, β, γ són tals que l'orde (sense tenir en compte el ordre):



$$\alpha = 36°$$
$$\beta = \gamma = 72°$$

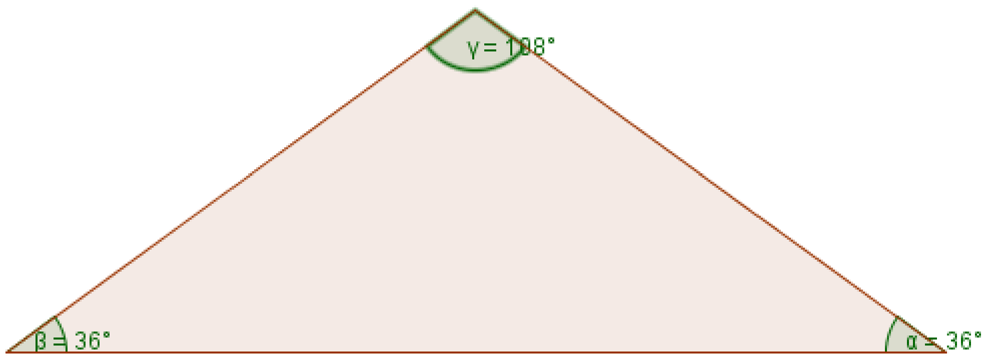
Hi ha dos tipus de triangles d'or, tots dos compleixen i comparteixen la primera igualtat no obstant tenen angles diferents.

2.4.Triangle d'or II:



És qualsevol triangle que complexi la següents igualtats:

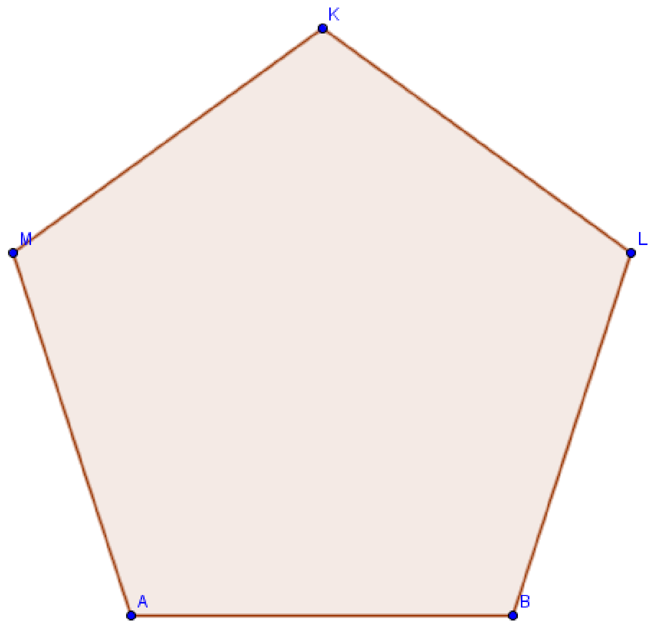
$$\Phi = \frac{CB}{AB} = \frac{CA}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



On els angles α, β, γ tal que (sense tenir en compte el ordre, és a dir, alfa pot ser beta però sols un angle alfa, sols un angle beta...com en el cas anterior):

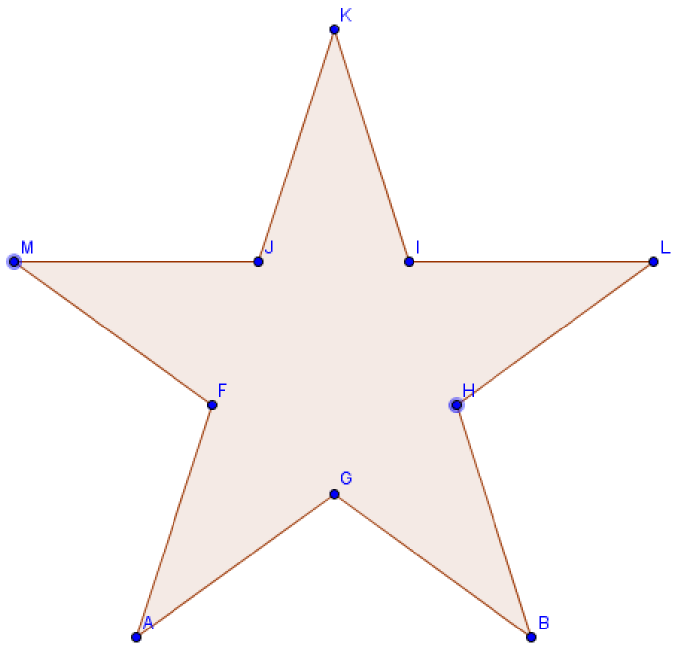
$$\alpha = 108°$$
$$\beta = \gamma = 36°$$

2.5.Pentalfa regular (pentàgon regular i polígon regular estrellat de 5 puntes):



Qualsevol pentàgon regular estrellat compleix[29]:

$$\Phi = \frac{KA}{AB} = \frac{KB}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Qualsevol polígon regular estrellat de 5 puntes compleix[30]:

$$\mathrm{AF} = \mathrm{AG} = \mathrm{BG} = \mathrm{BH} = \mathrm{LH} = \mathrm{LI} = \mathrm{KI} = \mathrm{KJ} = \mathrm{MF} = a$$

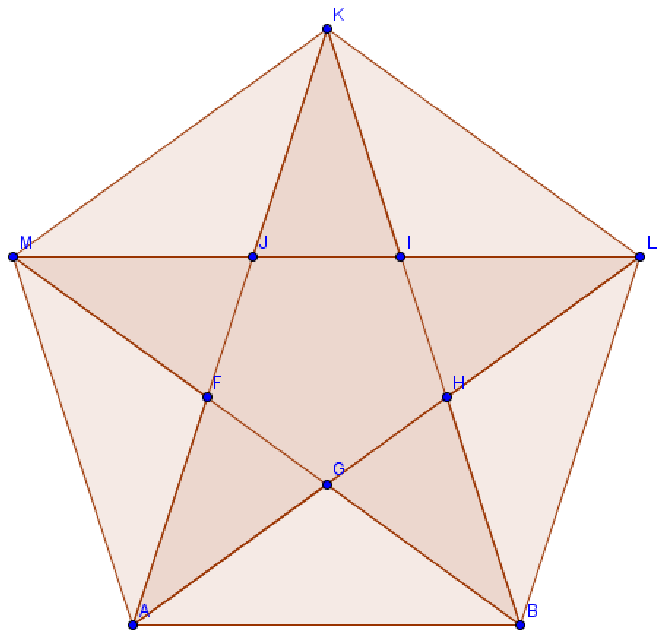
$$\mathrm{FG} = \mathrm{GH} = \mathrm{HI} = \mathrm{IJ} = \mathrm{JF} = \ b$$

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

[29] Tal com podríem deduir trobem els dos triangles auris en el pentàgon regular el primer com ABK i el segon com MKL.

[30] En el cas del pentàgon estrellat regular també trobem els rectangles auris: AFG per el primer i MLG per el segon.

El pentalfa o pentacle regular és un pentàgon regular i les seves diagonals, on observem un polígon regular estrellat de 5 puntes, on a la seva vegada queda escrit un altre pentàgon invertit[31].

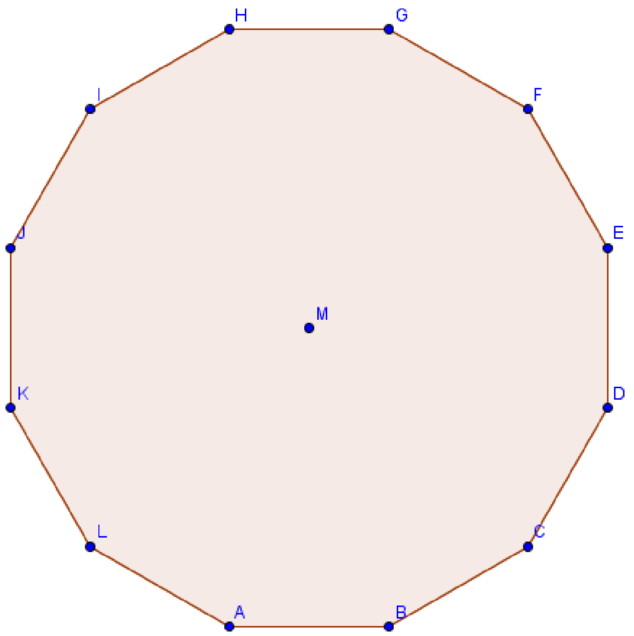


En aquest podem trobar les proporcions de les altres dos figures, per tant és evident que hi haurà una relació amb el nombre d'or en tot pentalfa regular. Tot i que podem destacar-ne les següents:

$$\Phi = \frac{ML}{MG} = \frac{MG}{JK} = \frac{JK}{FJ} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

[31] Aquest processés és podria repetir de forma infinita, on cada pentàgon regular contindria un polígon regular estrellat de 5 puntes i aquest un altre pentàgon invers, aquest un altre contindria un polígon regular estrellat de 5 puntes i aquest un pentàgon regular invers i aquest....

2.6.Decàgon regular:



Qualsevol decàgon regular compleix, on M és el centre del polígon regular :

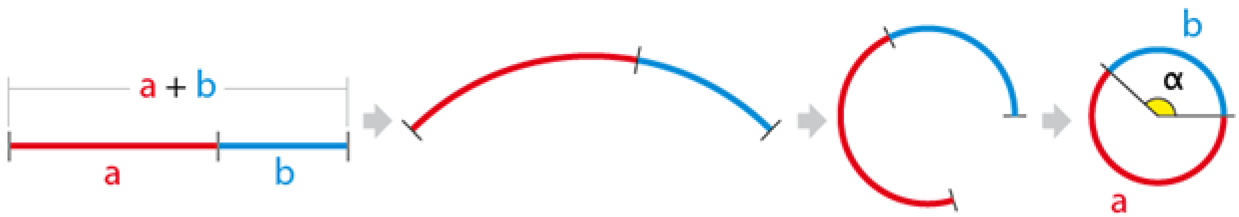
$$MA = MB = MC = MD = ME = MF = MG = MH = MI = MJ = MK = ML = r$$

$$AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = IJ = JK = KL = LA = c$$

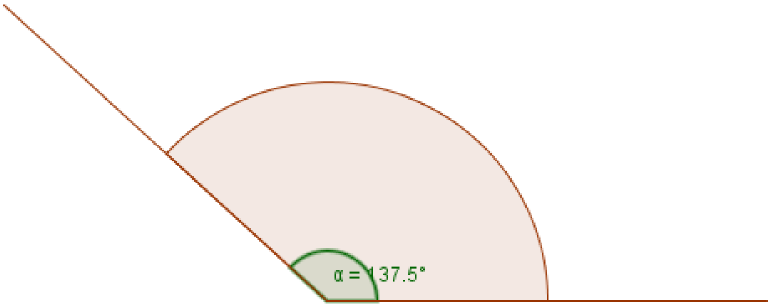
$$\boxed{\Phi = \frac{r}{c} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

2.7.Angle auri:

Tal com il·lustra el següent esquema l'angle d'or o auri és el resultat de dividir la un segment amb raó àuria i a partir de aquest fer una circumferència l'angle menor delimitat per la primera divisió és l'angle auri.



L' angle α resultant és aproximadament és el següent:

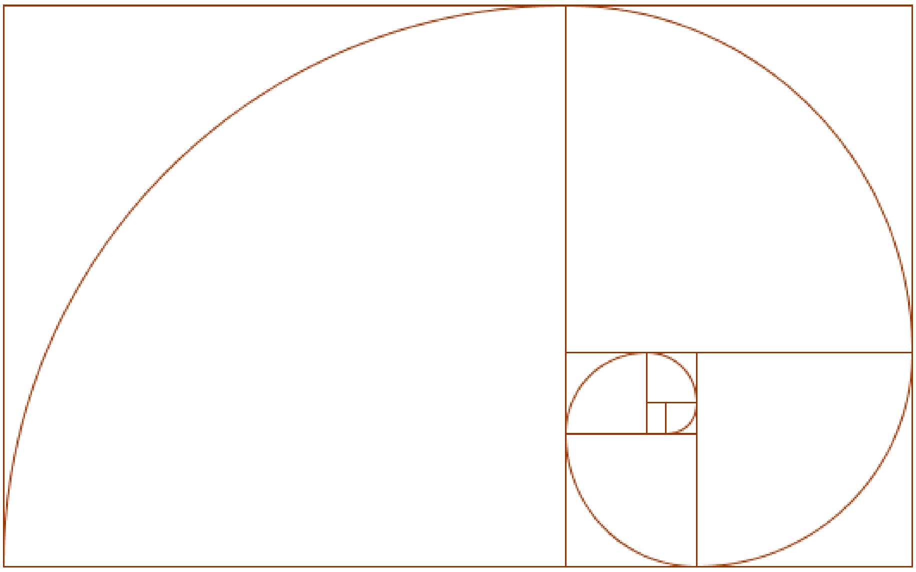


Qualsevol angle α és auri[32] angle sempre que compleixi:

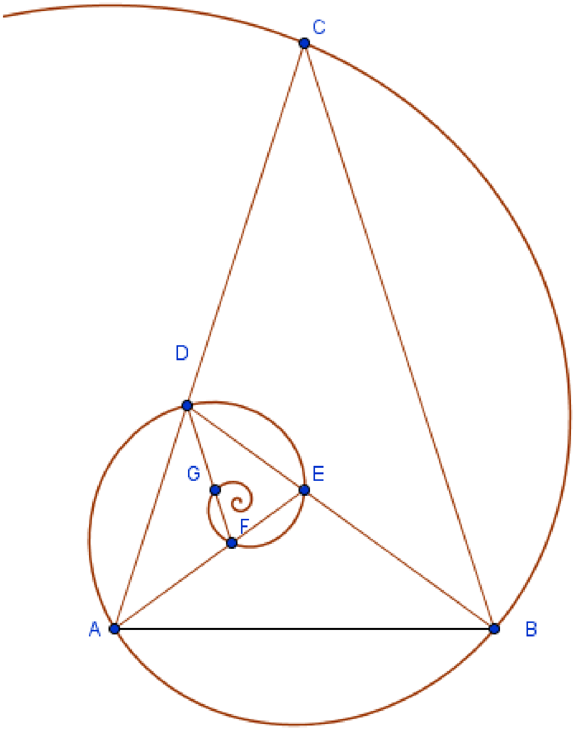
$$\alpha = 360° - \frac{360°}{\Phi} \cong 137{,}5°$$

2.8.Espiral àuria:

L'espiral àuria és una espiral logarítmica que és pot obtenir de forma aproximada a partir d'una successió de rectangles d'or i quadrats, tot traçant quarts de circumferència dins cada quadrat i tangents a ell, com podem veure en la imatge.



[32] També és pot considerar un segon angle, el que restaria el anterior a $360°$, el qual seria més correcte però és més valorat el anterior, definim el altre angle auri com: $\beta = \frac{360°}{\Phi}$



També podem obtenir una aproximació a partir de triangles auris, tal com mostra la imatge del esquerra.

Però per definició la veritable espiral àuria és, la que segueix la següent equació:

$$r(\theta) = r \cdot \Phi^{-\frac{\theta}{\pi/2}}$$

Món físic

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

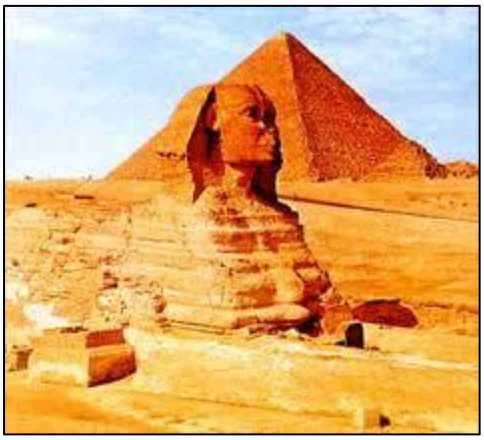
1.Dissenys Humans:

1.1.Arquitectura:

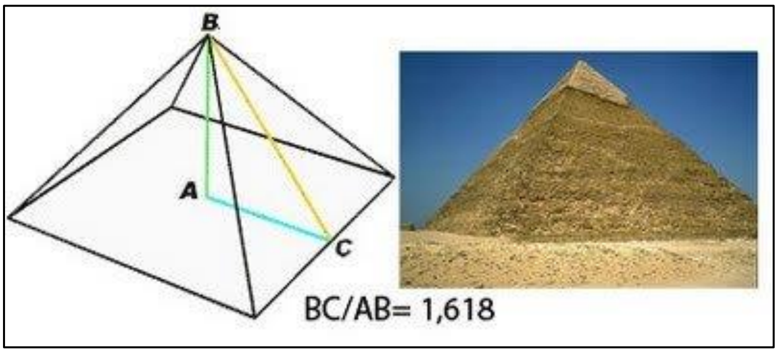
La proporció àuria és present en infinitud d'edificis, potser en els més emblemàtics i tot de la humanitat, sense entendre el pas del temps, les civilitzacions, les religions i els canons de bellesa. En aquest apartat observarem alguns dels exemples notables més coneguts i potser més controvertits.

Piràmide de Keops:

Raons molt properes a l'àuria s'han trobat en les posicions i proporcions de les piràmides de Giza ,com a la piràmide de Keops (2600 aC), així que sembla ser que cultures tan antigues com la egípcia ja tenien un model de bellesa relacionat amb el nombre d'or. Malgrat això no podem evidenciar que el/la/els arquitectes responsables apliquessin aquesta proporció de forma conscient o inconscient.

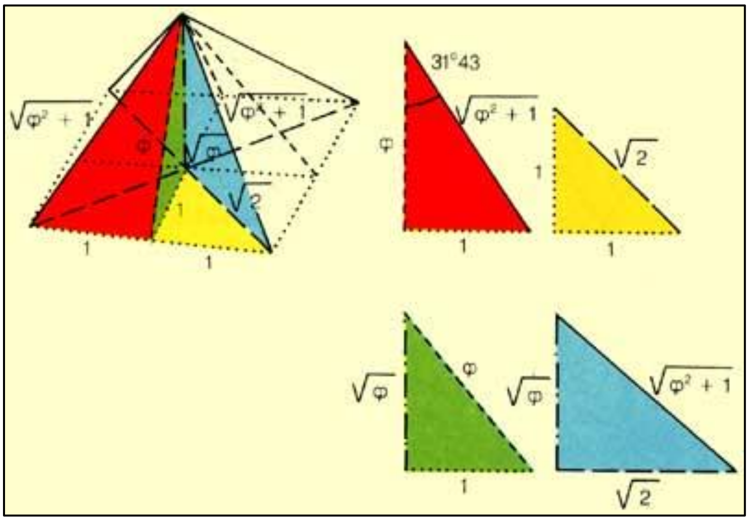


Piràmide de Keops al fons de la imatge.



Piràmide de Keops (dreta) , Diagrama amb les proporcions de la piràmide de Keops (esquerra)

Altres relacions deduïbles poden ser les següents:



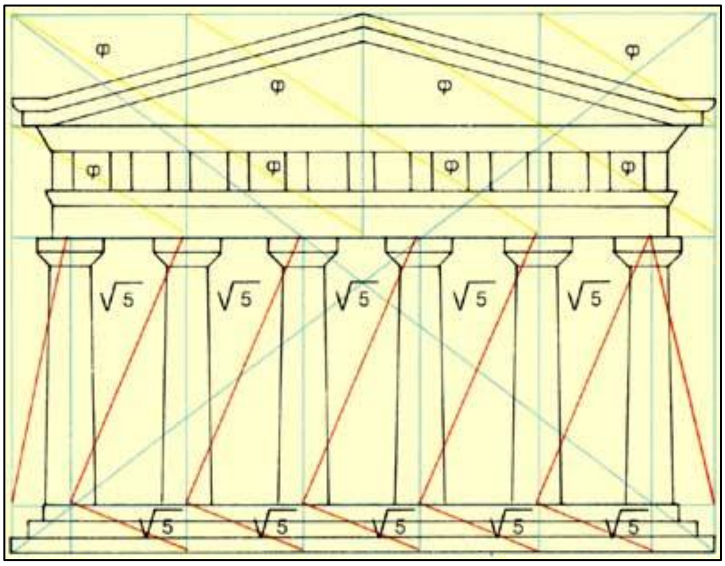
Un altre diagrama amb les proporcions de la piràmide de Keops relacionades amb el nombre d’or.

El Partenó

A l’antiga Grècia es coneixien bé algunes propietats matemàtiques geomètriques de la raó àuria , per la seva freqüent aparició geomètrica i, també se la sostenia com un notable element en l’arquitectura (una prova es el Partenó).

El Partenó a Grècia (dreta), i la façana del mateix edifici amb un diagrama de rectangles auris relacionats.

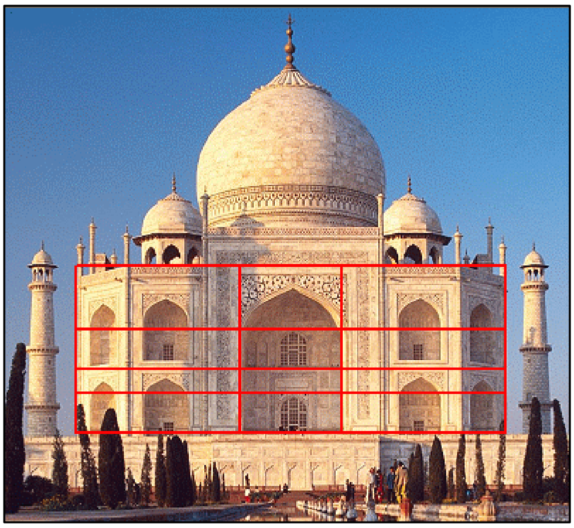
Altres relacions deduïbles poden ser les següents:



Un altre diagrama amb el diagrama de la façana del Partenó relacionades amb el nombre d'or. Cal recordar que $\sqrt{5} = 2\Phi - 1$

El Taj Majal:

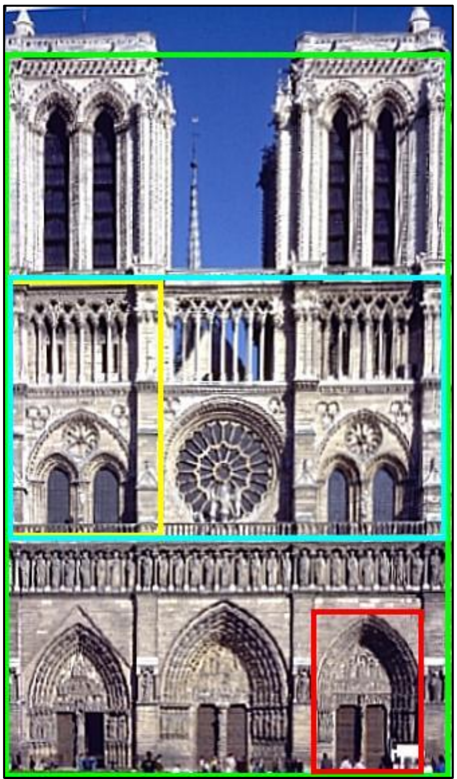
Un altre edifici dins la gran llista és el Taj Majal i és fa evident que la proporció àuria sobrepassa cultures.



Taj Majal amb rectangles auris i altres relacions amb el nombre d'or (vermell).

Catedral de Nôtre Damme:

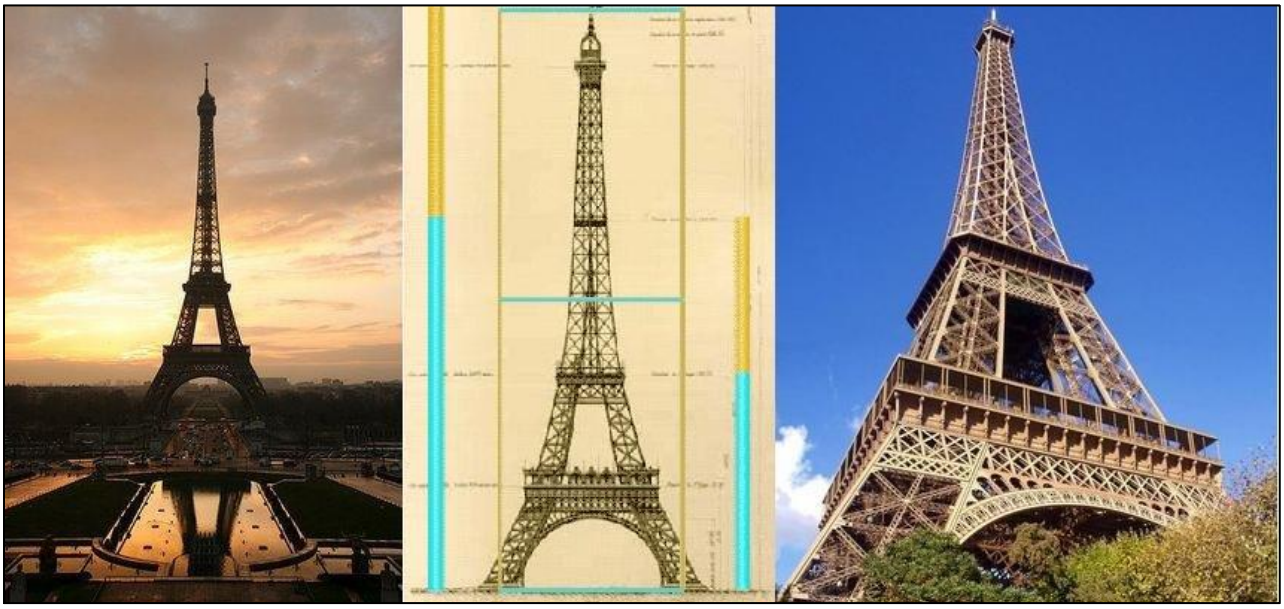
Però no només es troba la proporció àurea l'arquitectura d'èpoques passades, sinó que Nôtre Damme també visualitza les característiques del nombre d'or.



Catedral de Nôtre Damme amb el seu pertinent diagrama amb proporcions àuries.

Torre Eiffel

Tornem a trobar-nos amb les propietats divines del nombre d'or a la Torre Eiffel a París.



La torre Eiffel en una posta o sortida de sol, les seves proporcions àuries i una fotografia parcial d'aquesta.

l'Edifici de l'ONU

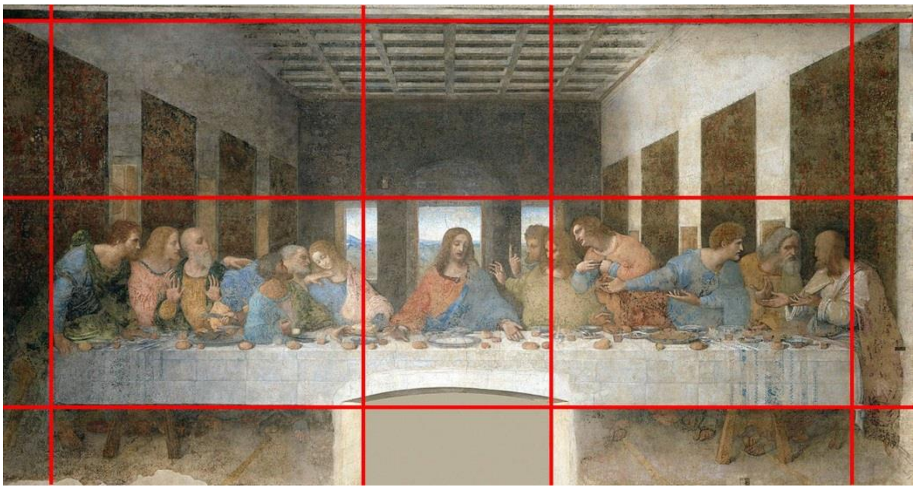
I finalment, també trobem les proporcions del rectangle auri i les seves seccions a l'Edifici de l'ONU a Nova York.

l'Edifici de l'ONU a Nova York és un prisma on dues de les seves cares són rectangles auris.

1.2.Pintura:

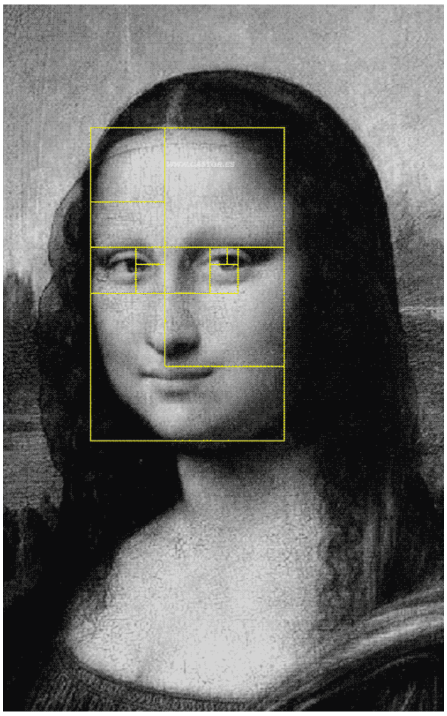
En el món de la pintura o de l'art en general el nombre d'or és un element pràcticament omnipresent ja que infinitud d'artistes el fan servir. No obstant, anomenem algunes de les obres més importants[33]

L'últim sopa de Leonardo da Vinci:

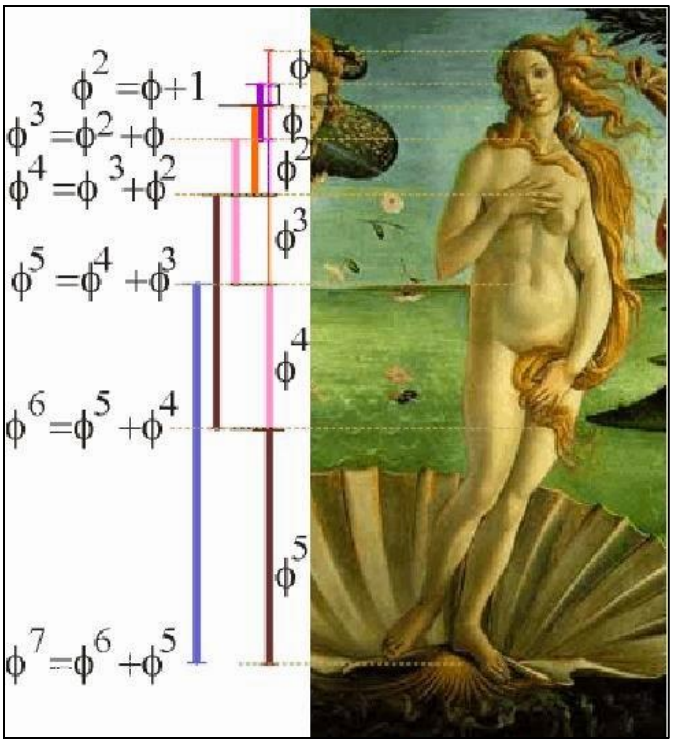


[33] En relació a la seva popularitat

El rostre de La Gioconda o Mona Lisa de Leonardo da Vinci:

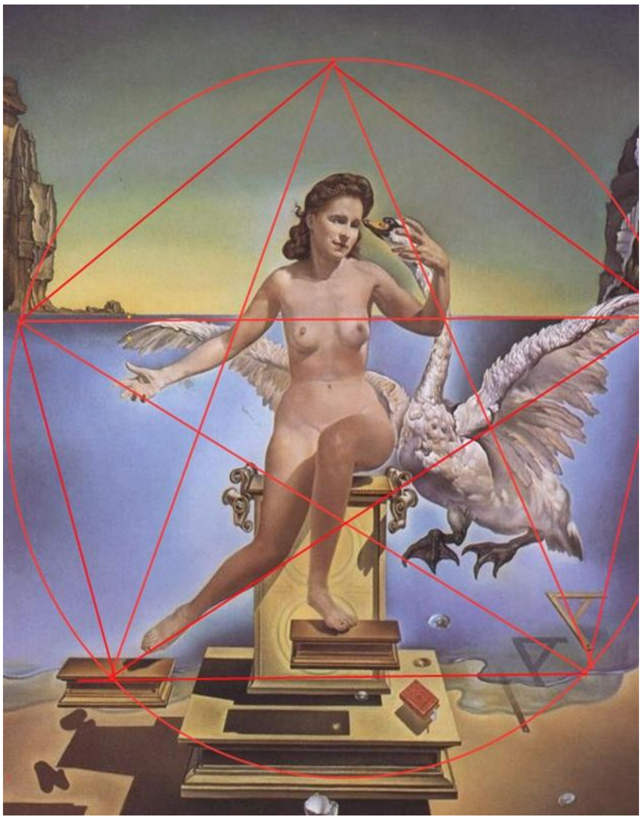


El naixement de Venus de Sandro Botticelli:



La Sagrada família de Miquel Angel:

L'edat atòmica de Dalí:



1.3.Música:

La raó àuria ha estat usada també a la música, tant per la durada de les notes (per exemple pel compositor hongarès Béla Bartók i el francès Olivier Messiaen), com per l'organització de les parts d’una peça (per exemple en alguna obra del compositor mexicà Silvestre Revueltas) o fins i tot, en la relació entre les freqüències de noves notes fora de les escales cromàtiques (per exemple en For Ann (rising), de James Tenney).

A més la majoria d’instruments presenten el nombre d’or o/i la successió de Fibonacci, dos exemples en són el violi i el piano.

<u>Piano:</u>

L’escala del piano consisteix en 13 tecles, 8 d’elles són blanques, les altres 5 negres i aquestes ultimes és divideixen en grups de 3 i 2. [34]

<u>Violi:</u>

En la construcció dels violins s’utilitza la proporció àuria de forma més que evident tal com mostra la imatge de l’esquerra.

[34] Cal destacar que l’escala sols conte 12 notes no obstant sempre s’utilitza un do d’escala superior per a tal de que els sons siguin més agradables a l’oïda, fet que enforteix la referencia de la successió de Fibonacci com a patro de bellesa musical.

2.Dissenys Naturals:

En la naturalesa, apareix la proporció àuria en alguns animals com en les dimensions d'insectes i ocells i la formació de cargols, entre altres.

2.1.Insectes:

Abella i les seves proporcions destacades amb compàs auri.

Proporció divina en la morfologia de les abelles.

La mesura de l'abdomen de l'abella dividida per Φ és igual a la mida del seu tòrax i al seu torn la mesura del tòrax dividida per Φ és igual a la mida del seu cap.

L'abella és l'exemple més significatiu però aquesta proporció la compleixen molts insectes, per exemple: llagosta, formigues o papallones.

2.2.Ocells:

Ocell i les seves proporcions destacades amb compàs auri.

Com podem veure en el dibuix la majoria dels ocells guarden una relació de proporció Áurea entre el cap i el cos.

A més algunes aus com les àguiles descendeixen cap a la seva presa dibuixant una espiral Áurea al cel.

2.3.Mol·luscos:

Actualment es conserven gran quantitat d'uns fòssils molt especials, els ammonites, que van viure al juràssic i el cretaci fa milions d'anys.

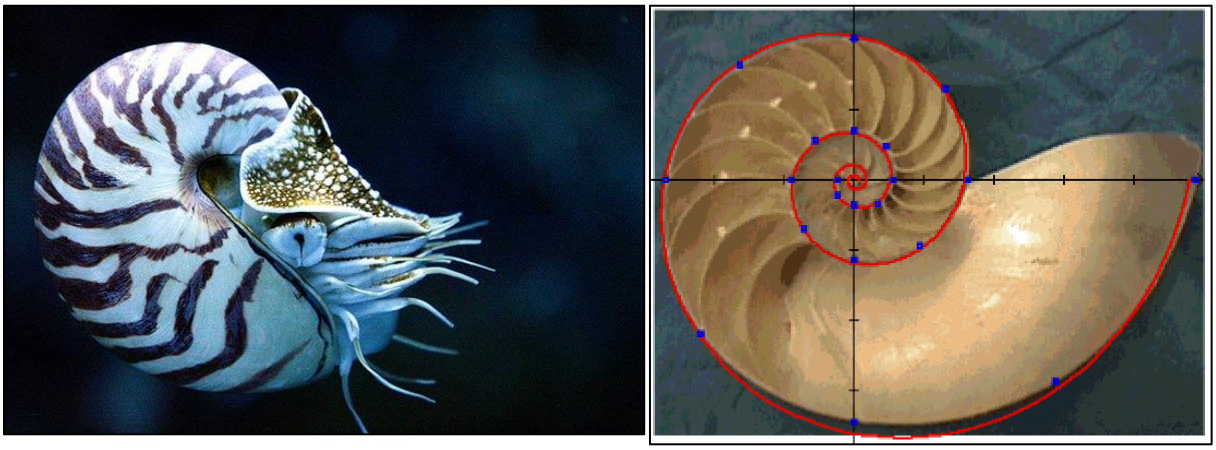
Fòssils de ammonites (esquerra) i representació visual teòrica de la seva morfologia.

En els mars de Filipines hi ha un mol·lusc, descendent directe d'aquests mol·luscs prehistòrics: el Nautilus.

La seva petxina, semblant a la d'un cargol, dibuixa una espiral perfecta. I no és un fenomen tan estrany. Com els cargols creixen enrotllant sobre si mateixos i mantenint sempre la mateixa

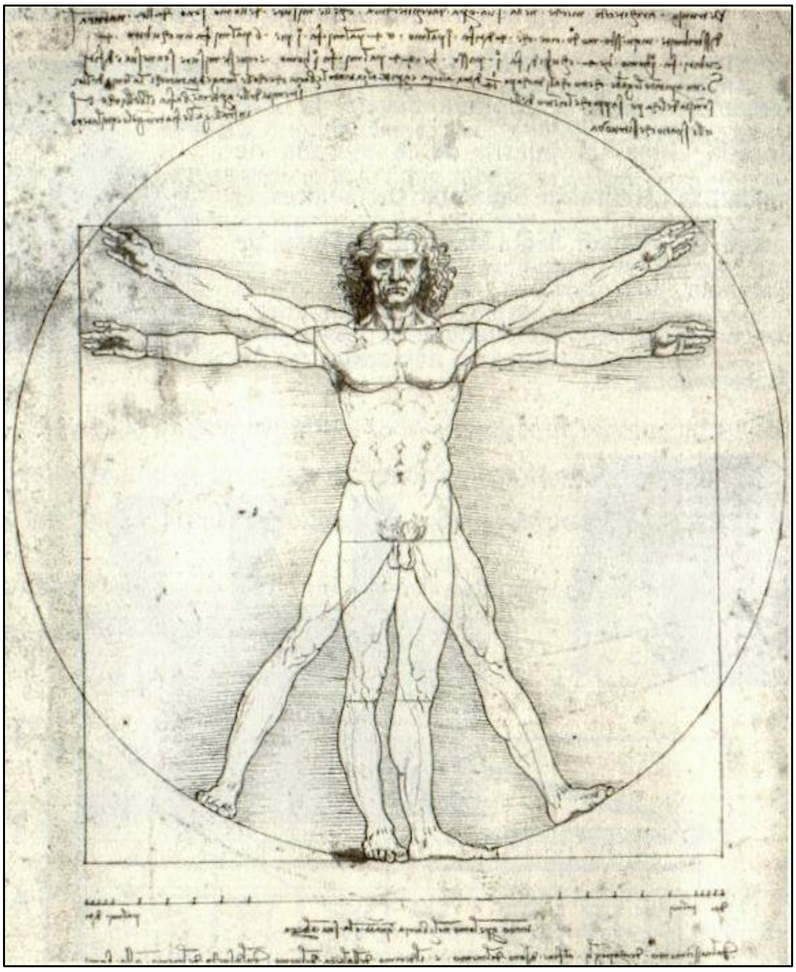
Les successives voltes van augmentant en amplada, en proporció constant i invariable. I això és precisament el que defineix les espirals, almenys a un dels seus tipus, les espirals logarítmiques.

Com el cargol creix, també la seva closca. Un cargol tancarà una secció de la closca i afegirà una nova càmera en créixer, cada càmera serà més gran que l'anterior per un factor constant. Com a resultat, la petxina formarà una espiral Áurea. En algun moment, el caragol construeix un vorell al voltant de l'obertura de la closca, deixa de créixer.



Exemplar de Nautilus (esquerra) i tall de la seva closca amb el diagrama de una espiral àuria,

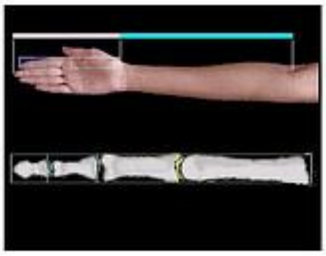
2.4.Ser humà:



L'home de Vitruvi de Leonardo Da Vinci

Leonardo da Vinci va realitzar aquest dibuix per il·lustrar el llibre De Divina Proportione del matemàtic Luca Pacioli editat en 1509. En aquest llibre es descriuen quines han de ser les proporcions de les construccions artístiques. En particular, Pacioli proposa un home perfecte en el qual les relacions entre les diferents parts del seu cos siguin les del dibuix. Resulta que la relació entre l'altura de l'home i la distància des del melic a la mà és el nombre auri.

En el cos humà el nombre auri apareix en moltes mesures[35]: la relació entre les falanges dels dits és el nombre auri, la relació entre la longitud del cap i la seva amplària és també aquest número.



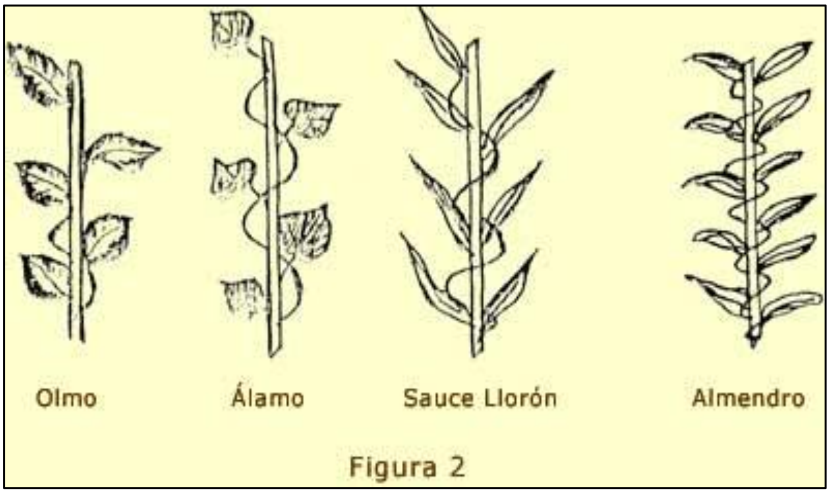
Imatge que mostra la presencia del nombre d'or en braços i dits

Si vols comprovar-pots mesurar des del teu muscle fins a la punta dels dits de la mà estesa. El resultat divideix-per la mesura des del colze fins a la punta estesa dels dits. (Quant et surt?). Prova a fer el mateix amb les mesures des del maluc a terra entre la mesura des del genoll a terra. També pots mirar de repartir teva alçada total per la mesura resultant des del teu melic a terra. Tots aquests estudis de Leonardo són fruit de consciencioses mesures i estudis sobre cadàvers que desenterraven.

[35] Veure annex

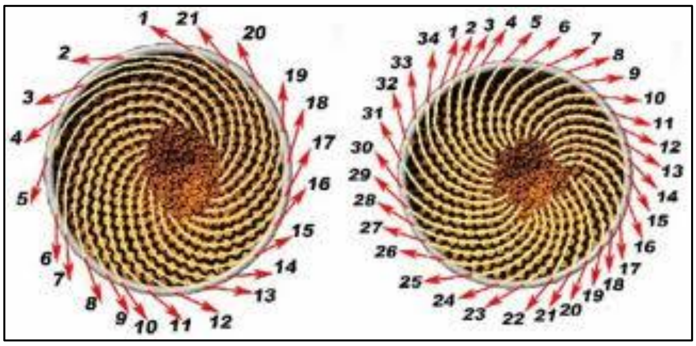
2.5.Plantes:

Com molt bé ens ensenya la filotàxia[36], les branques i les fulles de les plantes es distribueixen buscant sempre rebre el màxim de llum per a cadascuna d'elles. Per això cap fulla neix just en la vertical de l'anterior. La distribució de les fulles al voltant de la tija de les plantes es produeix seguint seqüències basades exclusivament en els nombres de la successió de Fibonacci.

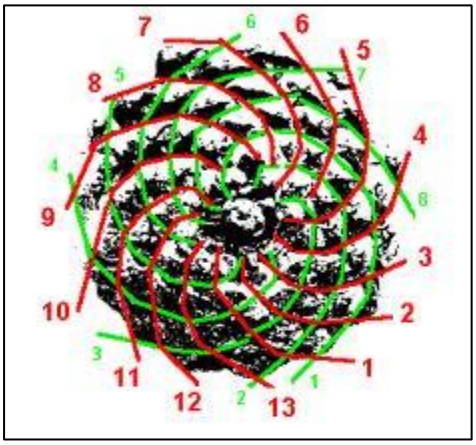


Imatge que mostra alguns dels exemplar de plantes amb girs relatius al nombres de Fibonacci.

El nombre d'espirals en nombroses flors i fruits també s'ajusta a parelles consecutives de termes d'aquesta successió: els gira-sols tenen 55 espirals en un sentit i 89 en l'altre, o bé 89 i 144.



Imatge que mostra el nombre de espirals d'un girasol en un sentit i en un altre.



Imatge que mostra el nombre de espirals d'una pinya en un sentit i en un altre.

[36] La part de la botànica que estudia la disposició dels fulls al llarg de les tiges de les plantes s'anomena filotàxia. En la majoria dels casos és tal que permet a les fulles una captació uniforme de la llum i aire, seguint, normalment, una trajectòria ascendent i en forma d'hèlix.

Les margarides presenten les llavors en forma de 21 i 34 espirals. I qualsevol varietat de pinya presenta sempre un nombre d'espirals que coincideix amb dos termes de la successió dels conills de Fibonacci, 8 i 13, o 5 i 8.

Flors amb pètals complint la sèrie de Fibonacci:...1,2,3,5,8,13... S'han trobat flors amb 89 pètals però mai una espècie definida amb 88

Sembla que el món vegetal tingui programat en els seus codis genètics del creixement els termes de la successió de Fibonacci.

Escepticisme

$$\frac{? + ?}{?}$$

1.Els ous d'or:

Problema:

Un objecte tan natural i quotidià com un ou de gallina, segons la bibliografia conté en les seves proporcions geomètriques el nombre d'or. Fins aquí cap problema, tot sembla coherent, però el problema recau en que es defineix aquesta geometria amb el nombre d'or de tres formes diferents, i com a diferents, es contradiuen.

Preguntes:

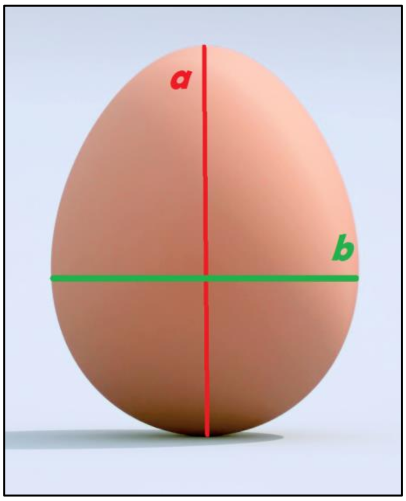
-Quina de les tres geometries és certa?

-Sols els ous de gallina estan relacionats amb el nombre d'or?

Experiment:

En primer lloc analitzem les definicions i les comparem a la següent taula:

Definicions	Desenvolupament	$\frac{a}{b}$
1. $\sqrt{\Phi} < \frac{a}{b} < \Phi$	$\sqrt{\Phi} \cong 1{,}2720197$ $\Phi \cong 1{,}61803399$	$1{,}2720 < \frac{a}{b} < 1{,}6180$
2. $a = \Phi$ $b = \frac{2}{\Phi}$	$\frac{a}{b} = \frac{\Phi}{\frac{2}{\Phi}} = \Phi : \frac{2}{\Phi} = \frac{\Phi^2}{2}$ $\cong 1.309016994$	$\frac{a}{b} = 1.3090$
3. $a = \Phi^3$ $b = 2\Phi$	$\frac{a}{b} = \frac{\Phi^3}{2\Phi}$ $\cong 1.309016994$	$\frac{a}{b} = 1.3090$



Imatge il·lustren el valors de "a" i "b"

De la taula deduïm que solament hi ha dos definicions ja que la definició 2 és equivalent a la definició 3. No obstant trobem dos definicions[37] diferents enfrontades.

Per tal de saber quina és present als ous de gallina mesurarem amb un peu de rei els valors "a" i "b" en :

[37] Malgrat que la primera contingui a la segona volem saber quina és la més present en els ous de gallina.

- 12 ous de gallina mitjans
- 12 ous de gallina grans
- 12 ous de gallina molt grans

I per saber quina definició és present a altres ous com els de codorniu mesurarem:

- 24 ous de codorniu

Imatges dels objectes d'estudi:

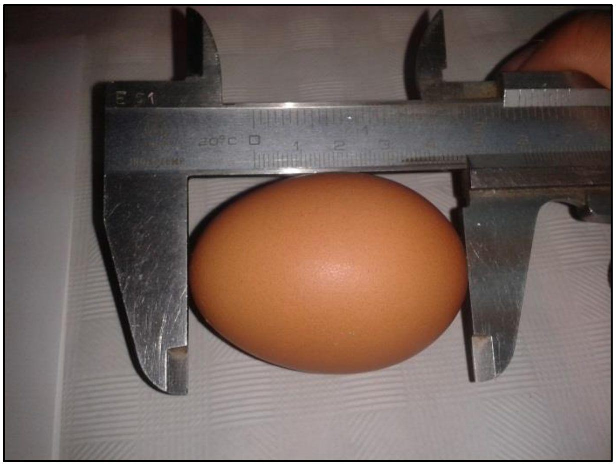
Imatge dels ous de gallina mitjans mesurats.

Imatge dels ous de gallina grans mesurats.

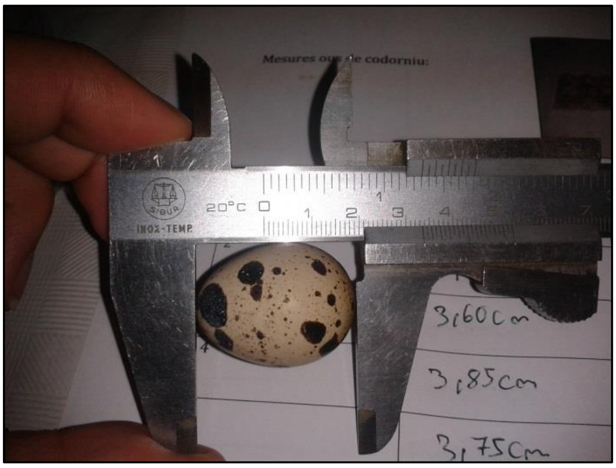
Imatge dels ous de gallina molt grans mesurats.

Imatge dels ous de codorniu mesurats.

Imatges de la mesura:



Imatge que mostra com és va mesurar el valor “a” dels ous de gallina amb un peu de rei



Imatge que mostra com és va mesurar el valor “a” dels ous de codorniu amb un peu de rei

Imatge que mostra com és va mesurar el valor “b” dels ous de gallina amb un peu de rei

Imatge que mostra com és va mesurar el valor “b” dels ous de codorniu amb un peu de rei

Les mesures van ser efectuades amb un peu de rei i recollides en taules prèviament impreses.

Resultats:

Els resultats[38] simplificats són els següent:

Número ous de gallina mitjans (M):	
Mitjana	1,3184
Mínim	1,2000
Màxim	1,3929
Definició 1	9
Definició 2 i 3	4
Cap Definició	3

Número ous de gallina mitjans (M):	
Mitjana	1,3586
Mínim	1,2891
Màxim	1,5000
Definició 1	12
Definició 2 i 3	3
Cap Definició	0

Ous de gallina molt grans (XL):	
Mitjana	1,3608
Mínim	1,2604
Màxim	1,4944
Definició 1	11
Definició 2 i 3	0
Cap Definició	1

Ous de Codorniu:	
Mitjana	1,2891
Mínim	1,1636
Màxim	1,3846
Definició 1	14
Definició 2 i 3	3
Cap Definició	10

Els valors blaus fan referència a la primera definició i els valors verds fan referència a la segona i tercera definicions[39].

[38] Resultats complets veure annex

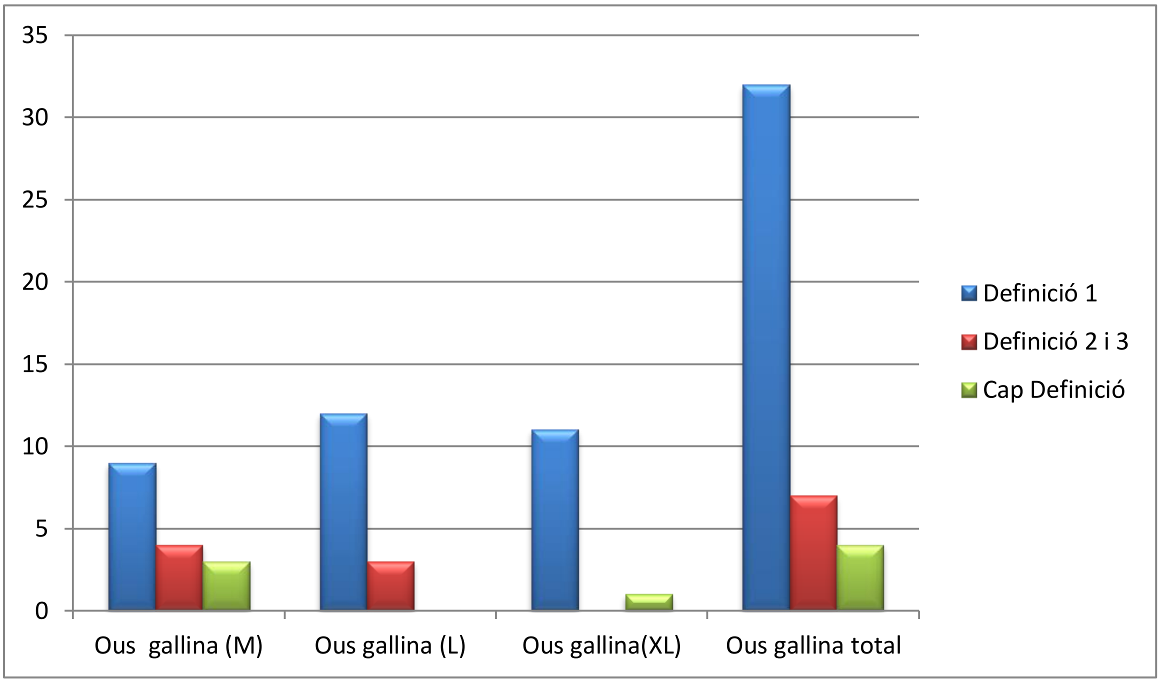
Els valors amb 4 decimals de color groc fan referència a valors que no compleixen cap de les definicions

Tots els valors amb quatres decimals fan referència al valor obtingut en dividir la mesura "a" entre la mesura "b", és a dir a el valor a/b

Els valors enters fan referència al nombre d'ous que compleixen cada definició.

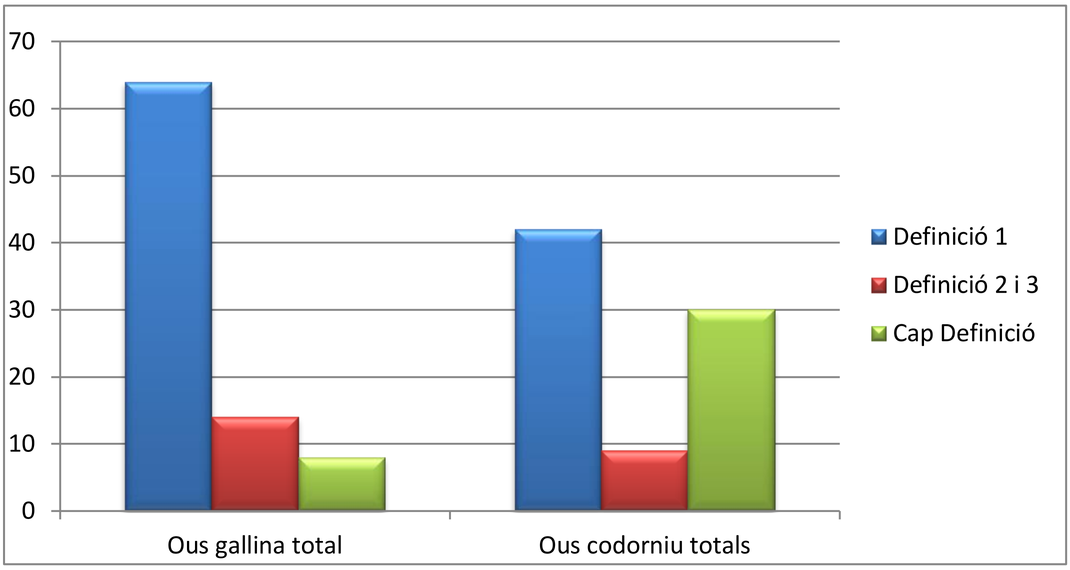
Anàlisis:

Podem observar que cap de les definicions es compleix de forma estricta no obstant com que són presents les dues, podem considerar que en parts són certes. Considerant únicament els valors del ous de gallina podem efectuar el següent gràfic:



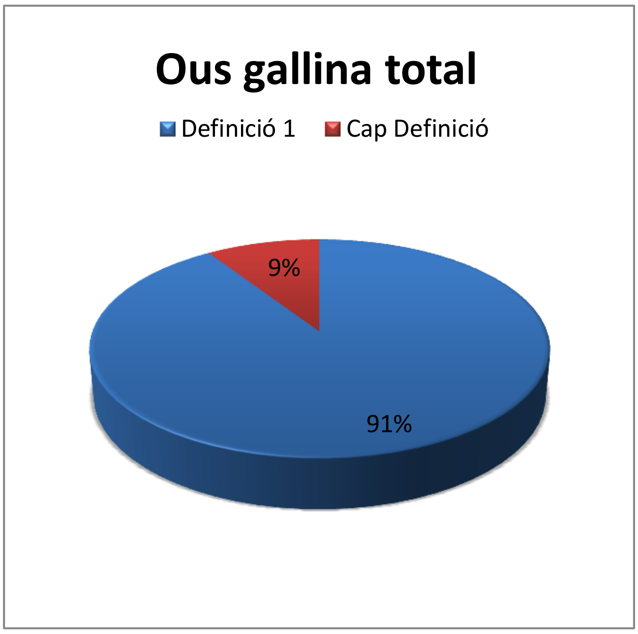
Triplicarem els valors dels ous de codorniu totals i doblarem els valors dels ous de gallina totals i obtindrem la proporció de cada definició en els diferents tipus de ous de forma que si dos definicions estan en proporcions iguals tindran la mateixa alçada, observem el gràfic:

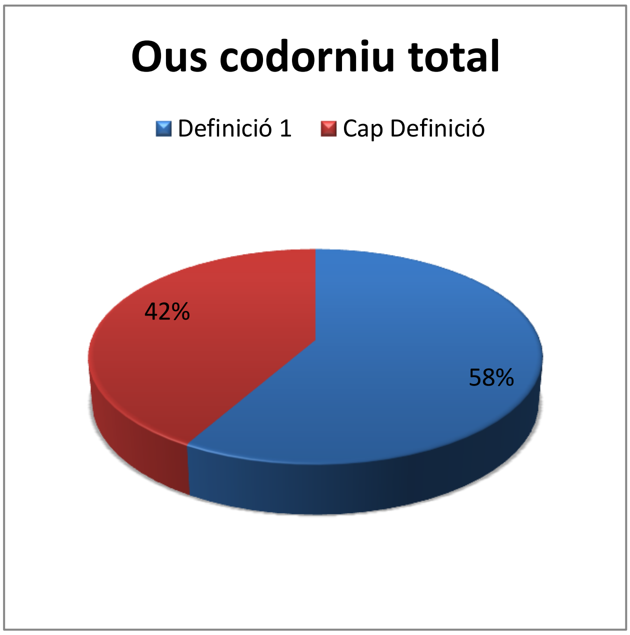
[39] Tot i que la primera definició conte la segona i tercera marcarem com a prioritària la segona i tercera, per tal de diferenciar-les. Els valors verds contemplen l'error $\pm 0{,}01$



Observem que hi ha una gran diferència entre els dos tipus d'ous, no obstant en els dos predomina la primera definició per sobre de cap altre. També podem observar comparant aquesta gràfica amb la primera que els ous més petits són els que més tendeixen cap a cap definició.

Per acabar podem passar l'anterior taula a percentatge, en les següents 4 gràfiques:





En les dues primeres gràfiques de percentatge observem que la definició 1 és compleix en més de la meitat dels casos però en els ous de gallina és el 90% aproximadament i el 60 % en els ous de codorniu aproximament una diferència d'un 30%.

No obstant observem de forma sorprenent que la proporció de les definicions 2 i 3 en relació a la primera és d'un 20 % aproximadament pels dos tipus d'ous.

Conclusions:

Ous de gallina i ous de codorniu:

- Cap definició és compleix al 100% tant en els ous de gallina com en els de codorniu.
- Totes les definicions es compleixen per almenys un ou de codorniu o gallina dels analitzats.
- La definició 1 és la més present en els dos tipus d'ous analitzats.
- La proporció d'ous que compleixen les definicions 2 i 3 respecte la definició 1 en els dos casos són pràcticament iguals.
- $1{,}1636 \leq \frac{a}{b} \leq 1{,}5000$

Ous de gallina:

- El 91% dels ous de gallina analitzats compleixen la definició 1.
- El 21% dels ous de gallina analitzats compleixen la definició 2 i 3.
- El 9% dels ous de gallina analitzats no compleixen cap definició.
- La definició 1 és predominant en els ous de gallina analitzats.

- $1,2000 \leq \frac{a}{b} \leq 1,5000$
- La mitjana compleix la definició 1

Ous de codorniu:

- El 58% dels ous de codorniu analitzats compleixen la definició 1
- El 12,18% dels ous de codorniu analitzats compleixen la definició 2 i 3
- El 42% dels ous de codorniu analitzats no compleixen cap definició
- La definició 1 és predominant en els ous de codorniu analitzats.
- $1,1636 \leq \frac{a}{b} \leq 1,3846$
- La mitjana compleix la definició 1

Com que el 91% dels ous de gallina analitzats compleixen la definició 1 i el valor mitjà compleix la definició 1 podem dir que els ous de gallina tendeixen a la definició 1 i la gran majoria la compleix.

Com que la mitjana dels ous de codorniu dona un valor de la definició 1 podem dir que els ous de codorniu tendeixen a la definició 1, per tant sembla ser que els ous de gallina no són els únics que tendeixen a la definició 1.

2.Miss geometria i el nombre d'or:

Problema:

En l'extensa literatura[40] sobre el nombre d'or trobem la premisa que la bellesa en termes de proporció és el nombre d'or, algunes proves en són obres d'art molt famoses que la presenten com el *Sagrament de l'Últim Sopar* de Salvador Dalí o edificis tan emblemàtics i bells, fins i tot de cultures tan diferents, com el Taj Mahal. També podem sostenir que la majoria de rostres bells la presenten, però amb l'esperit d'aquest apartat ens permetem dubtar si en termes generals la gent té el nombre d'or com a pauta de bellesa.

Pregunta:

La majoria de la gent sosté el nombre d'or com a pauta de bellesa proporcional?

Quina figura amb proporcions àuries és més bella per a la majoria de gent?

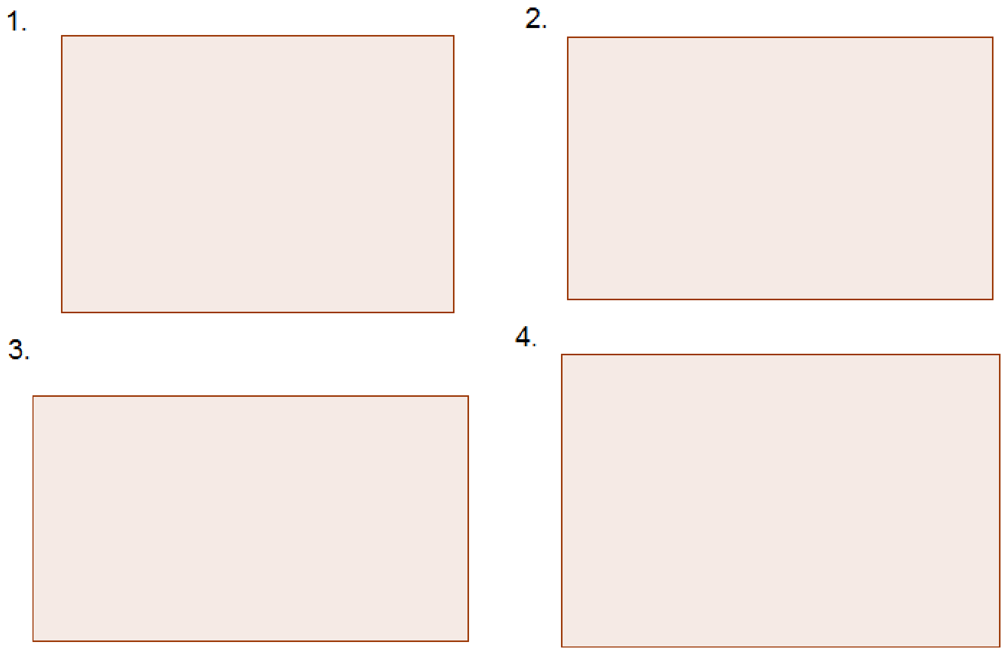
Experiment:

Les respostes anteriors poden ser contestades amb una enquesta, aquesta enquesta avaluarà en una primera part si la persona considera més o menys bells elements visuals donats amb proporcions àuries o sense. En una segona part podrà definir com considera la proporció que li resulti més bella en la divisió d'un segment en dos. A més l'enquesta contempla els caràcters[41] d'edat, sexe i la noció de secció àuria, sobre l'enquestat.

En el primer apartat de l'enquesta es pregunta quin dels 4 rectangles representats és més bell, harmoniós, o transmet més serenitat. Els 4 rectangles de l'enquesta són [42] els següents:

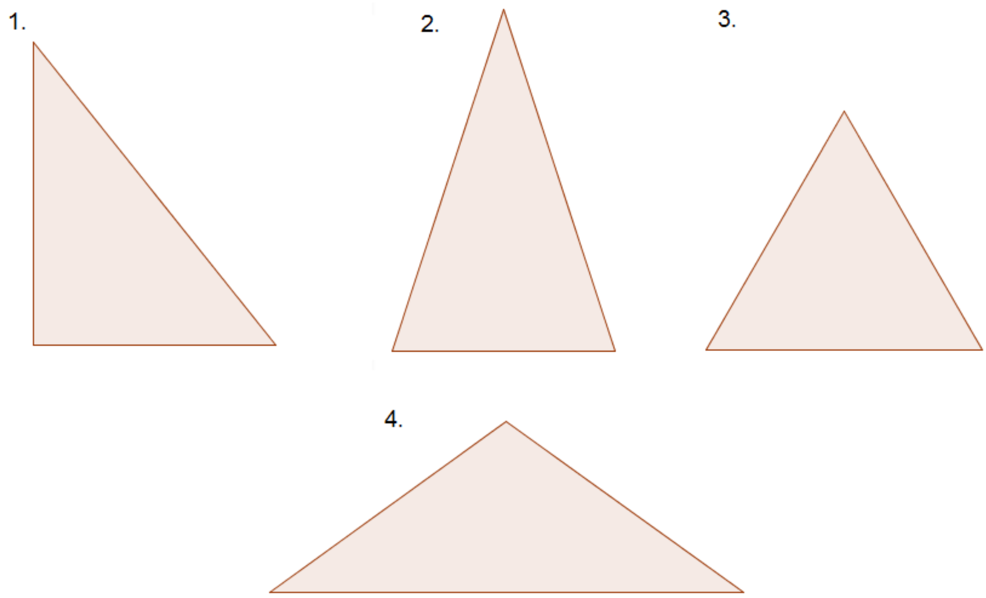
1. Rectangle de format DINA .
2. Rectangle auri.
3. Rectangle amb format televiso panoràmica (16x9).
4. Rectangle format fotografia (36X24).

[40] En referència a el món físic
[41] Aquests caràcters s'han inclòs per possibles ampliacions o com a base per nous anàlisis de les dades.
[42]Els enquestats no tenien accés a les llistes sols a les imatges.



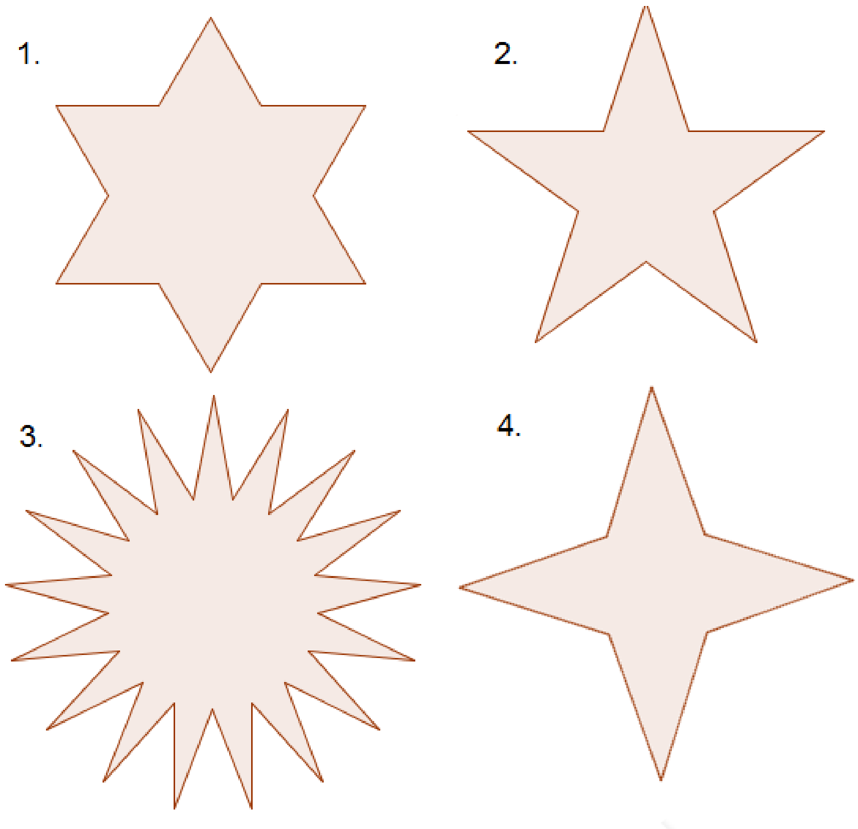
En el segon apartat de l’enquesta es pregunta quin dels 4 triangles és més bell, harmoniós, o transmet més serenitat. Els 4 triangles de l’enquesta són els següents:

1. Triangle rectangle.
2. Triangle auri I.
3. Triangle equilàter
4. Triangle auri II.



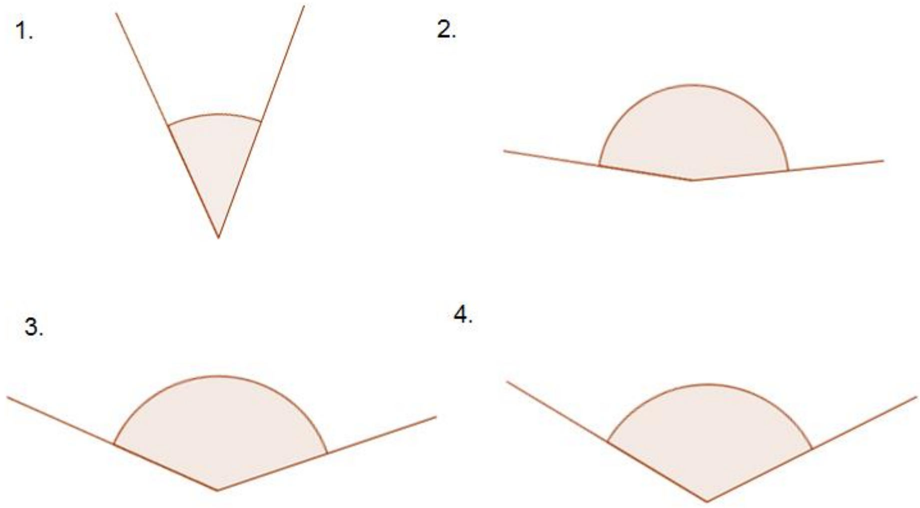
En el tercer apartat de l'enquesta es pregunta quin dels 4 polígons regulars estrellats és més bell, harmoniós, o transmet més serenitat. Els 4 polígons regulars estrellats de l'enquesta són els següents:

1. Polígon regular estrellat de 6 puntes.
2. Polígon regular estrellat de 5 puntes.
3. Polígon regular estrellat de 17 puntes.
4. Polígon regular estrellat de 4 puntes.



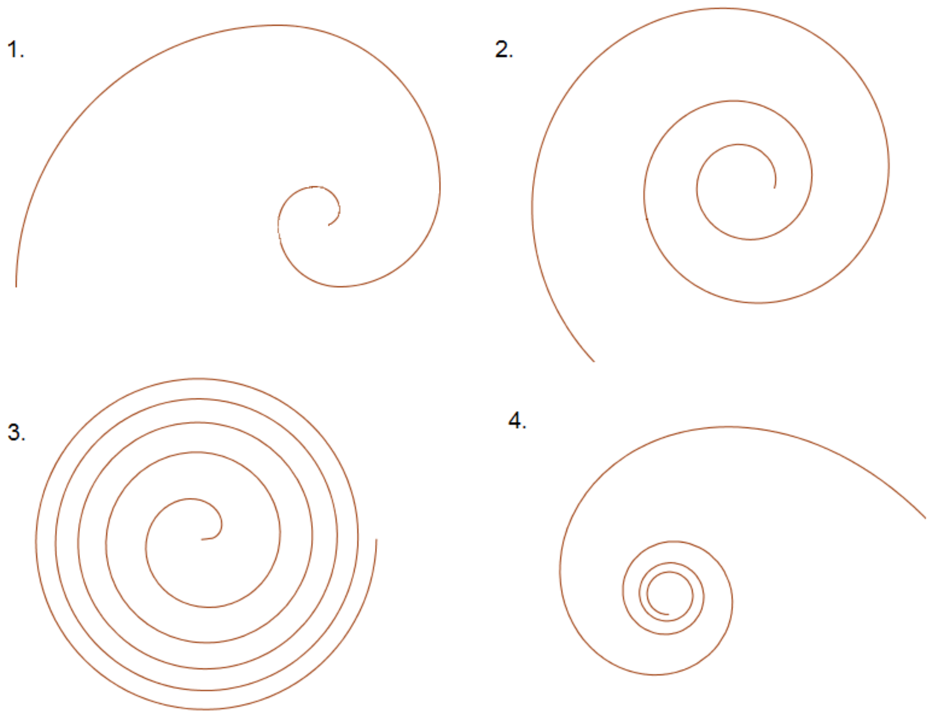
En el quart apartat de l'enquesta, es pregunta quin dels 4 angles és més bell, harmoniós, o transmet més serenitat. Els 4 angles de l'enquesta són els següents:

1. Angle 45°.
2. Angle165°.
3. Angle 137,5° (angle auri).
4. Angle 122,59°.



En el cinquè apartat de l'enquesta, es pregunta quina de les 4 espirals és més bella, harmoniosa, o transmet més serenitat. Les 4 espirals de l'enquesta són les següents:

1. Espiral àuria aproximada (a partir de rectangles auris).
2. Espiral de Fermat.
3. Espiral logarítmica (no àuria) .
4. Espiral hiperbòlica .



En la segona part de l'enquesta[43] es proposarà dividir un segment en una proporció, la que resulti més agradable a ulls de l' enquestat. Després se li demana una segona diviso de un segment igual amb la condició que no pot repetir la mateixa divisió

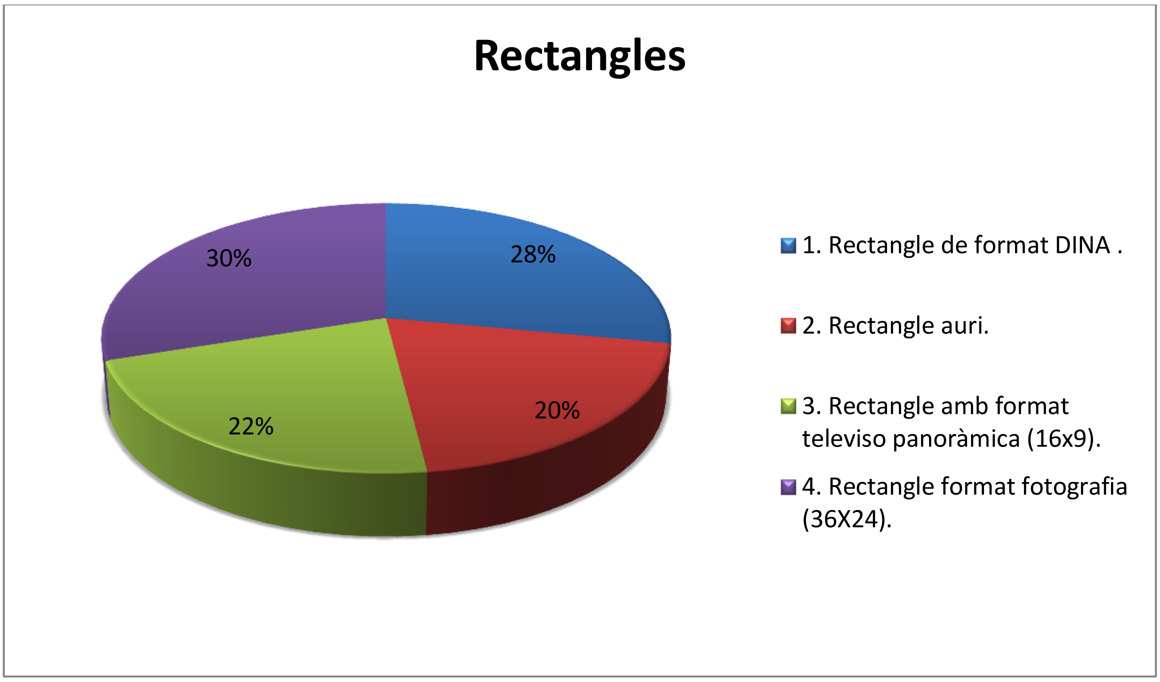
El segment seria el següent:

A **B**

Resultats i Anàlisis:

Els resultats dels 50 enquestats[44] en total sense distinció de sexe o edat és mostren en la següent gràfica, per a tal de facilitar la comprensió de les dades.

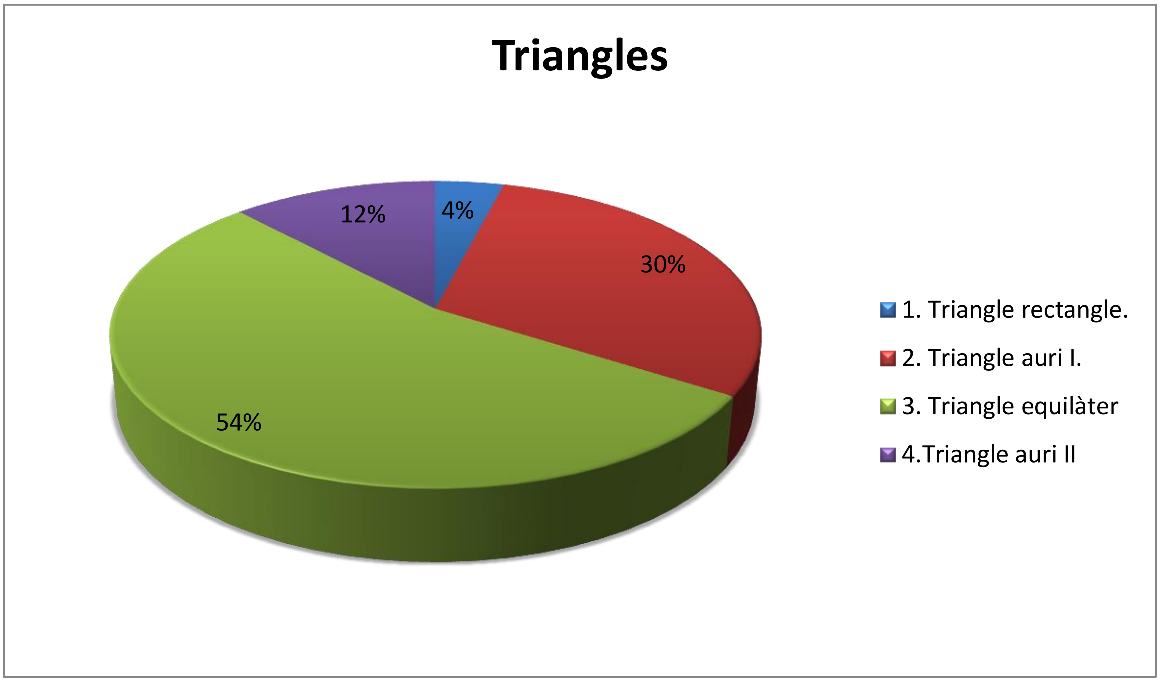
Apartat 1:



En el primer apartat observem que no hi ha gran diferència en la tria de rectangles, tot i que la petita diferència situa a el rectangle amb les proporcions àuries a últim lloc.

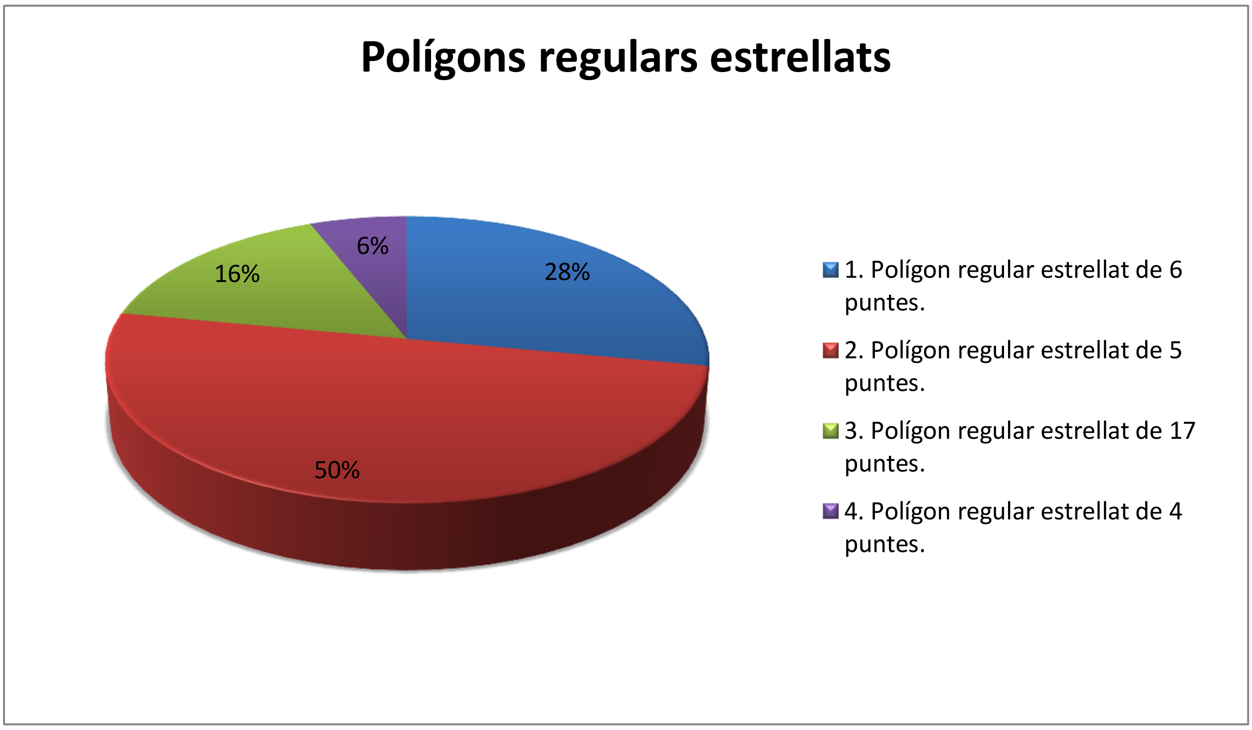
[43] Mirar a l'annex per veure el model d'enquesta complet.
[44] Mirar a l'annex per veure els resultats complets, tan els originals com els analitzats (taules).

Apartat 2:



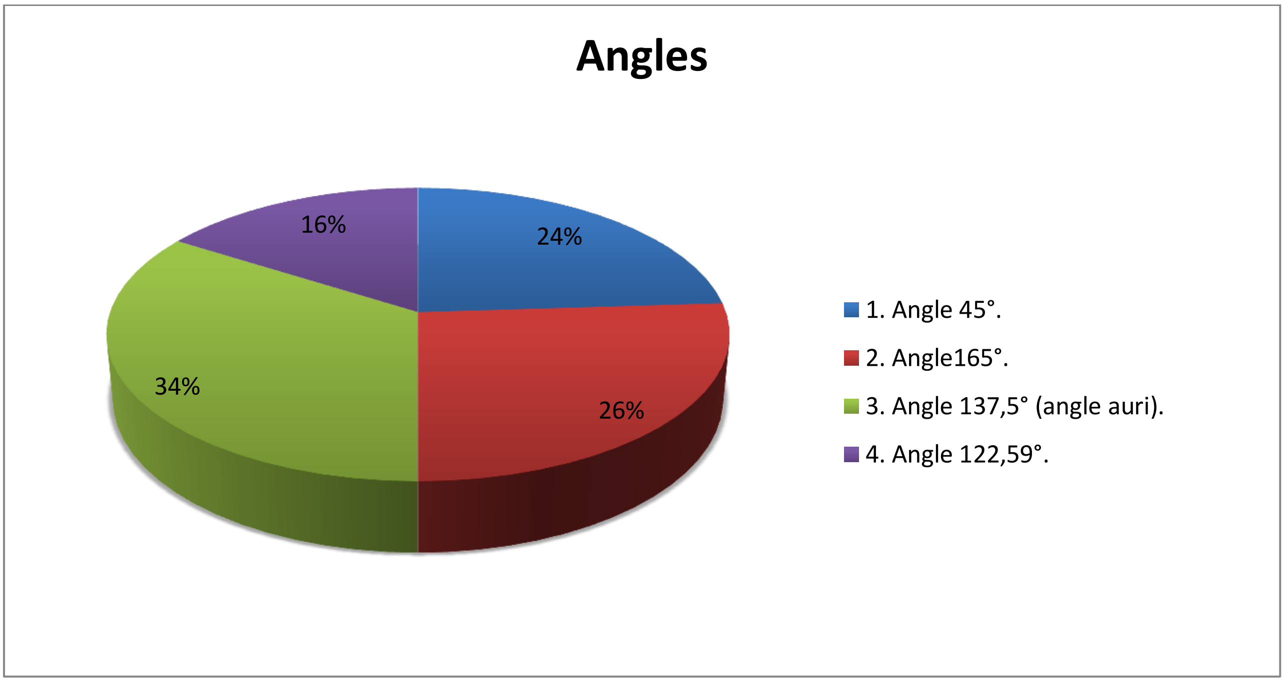
En el segon apartat observem que els elements geomètrics amb nombre d'or no destaquen tot i que sí que destaca el triangle equilàter que supera més de la meitat de persones enquestades com a triangle més bell.

Apartat 3:



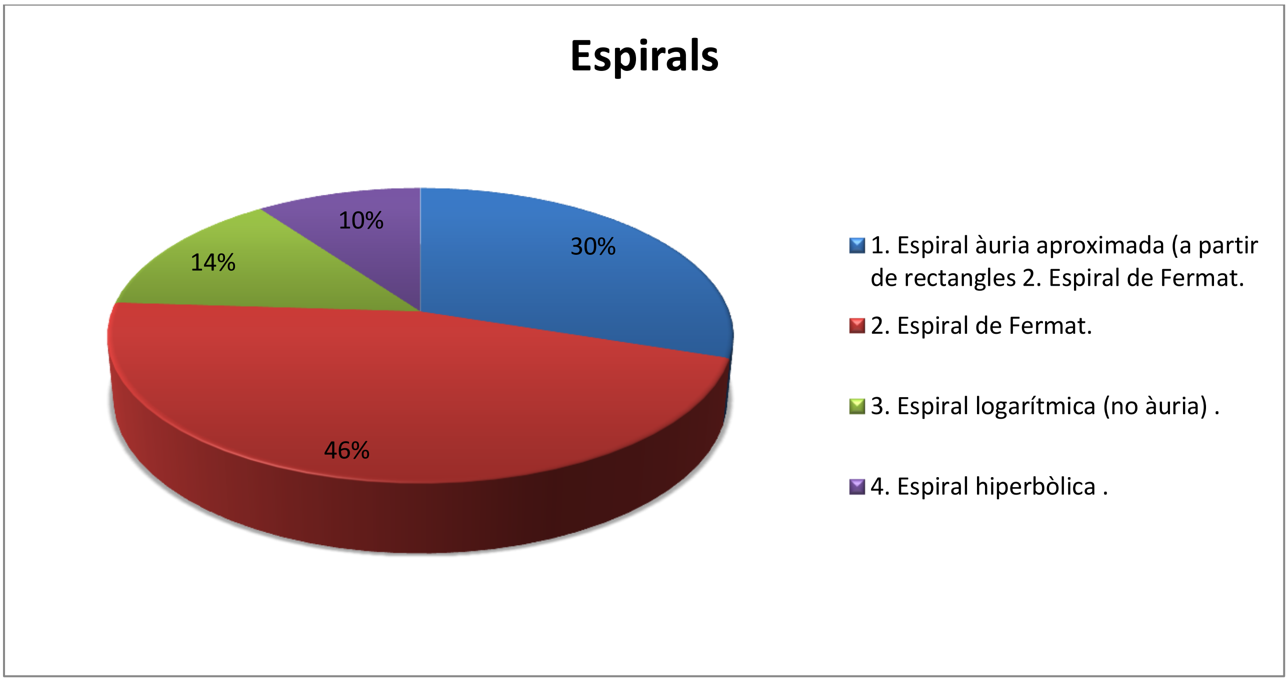
Observem que per primera vegada un element geomètric amb el nombre d'or destaca sobre els altres amb un 50 %.

Apartat 4:



Observem que en el quart apartat la geometria amb el nombre d'or torna a destacar tot i que no per massa diferència amb les altres.

Apartat 5:



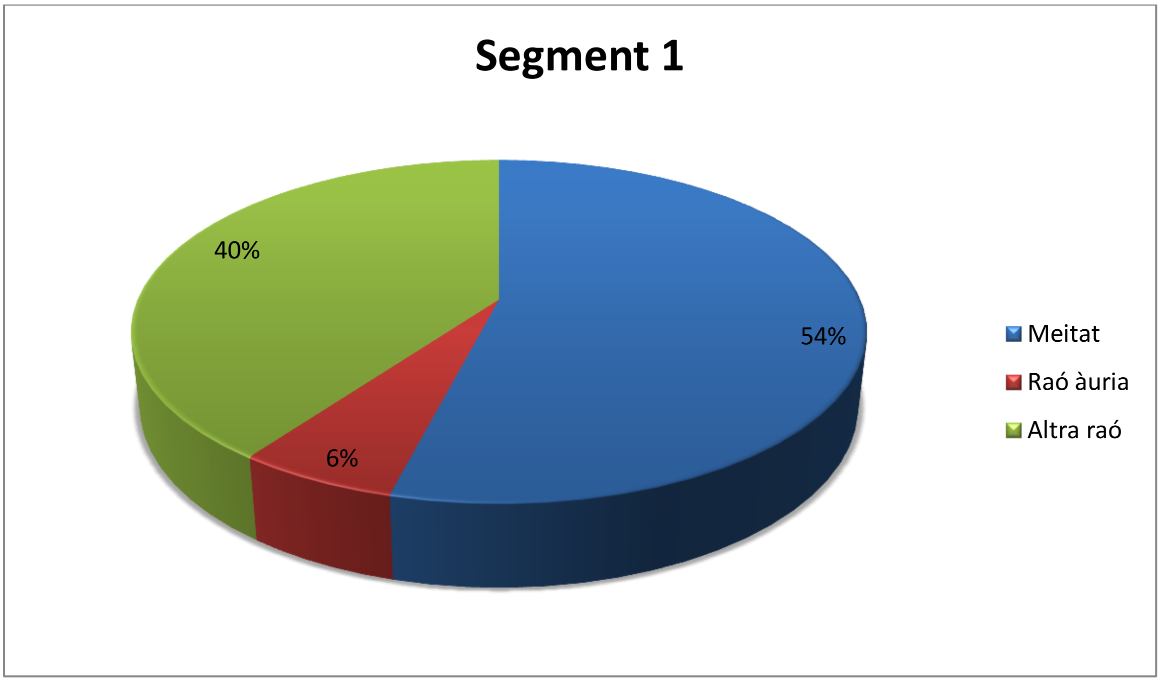
Observem que l'espiral que més destaca és l'espiral de Fermat, mentre que l'espiral àuria es queda en un segon lloc.

Segments a dividir

Els segments analitzats s'han interpretat considerant 3 respostes[45]:

- Segment dividit per la meitat.
- Segment dividit amb raó àuria.
- Segment dividit amb una altra raó.

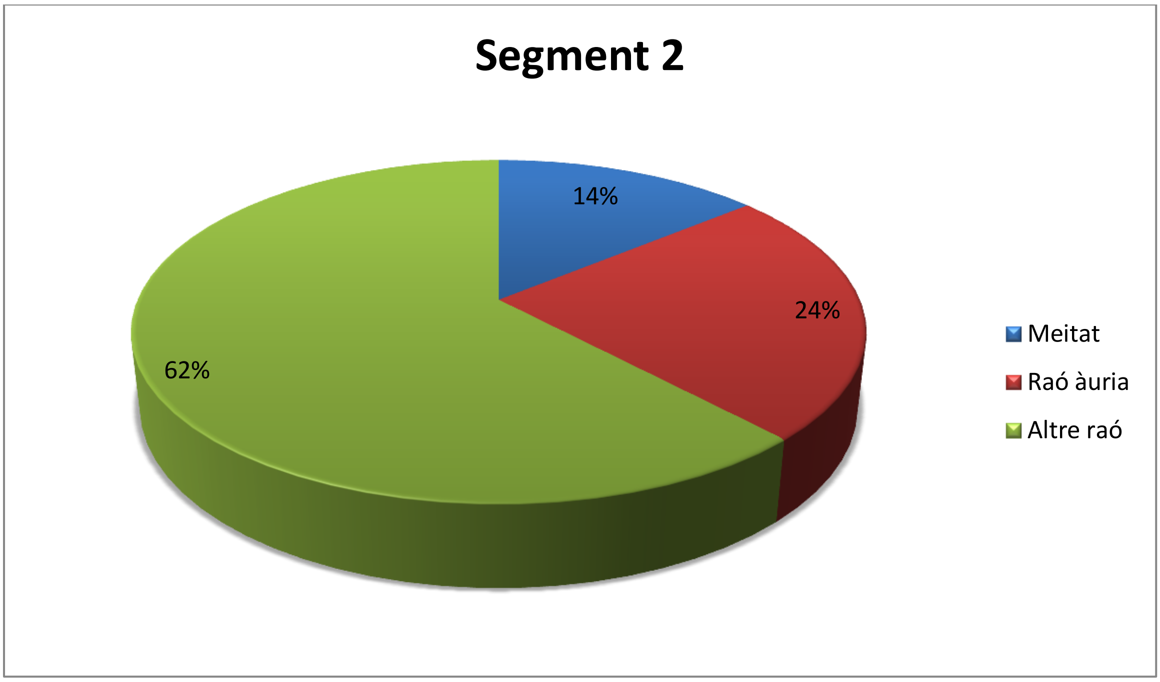
El següent gràfic fa referència a la primera divisió :



Observem que el valor màxim pertany a les divisions del segment per la meitat i que la divisió en raó àuria sols representa un 6%

El següent gràfic fa referència a la segona divisió :

[45] Els valors de meitat i auri consideren una errada de $\pm 0{,}2\ cm$



Observem que altre cop el valor màxim no pertany a la raó àuria i que aquesta és torna a situar en tercer lloc, no obstant ha augmentat quatre vegades, és a dir s'ha quadruplicat.

Conclusions:

- Les figures aïllades amb proporcions àuries no són més belles que les que no en tenen, com a mínim amb la majoria de figures[46].
- La diviso d'un segment en raó àuria no és la més usual ni innata, no obstant de la mateixa manera que la cal·ligrafia les divisions podrien haver sigut una aproximació del que volien expressar.

Per tant podem concloure que ,malgrat el reduït nombre de participants en l'enquesta, a la majoria de gent[47] no li resulten més agradables , de forma aïllada, figures amb proporcions àuries. En part també podem concloure que part de l'extensa literatura és falsa ja que atribueix a els objectes o formes que la presenten qualitats estètiques molt per sobre dels resultats obtinguts. No obstant cal destacar que s'ha comprovat de forma aïllada , potser de forma no aïllada obtindríem altres resultats, tot i que igualment la conclusió anterior es

[46] L'estrella regular de 5 puntes pot ser en percentatge és l'única excepció, no obstant potser es degut a altres factors de la pròpia geometria.
[47] Suposant una certa homogeneïtat dels valors estètics

mantindria, ja que un fet no desmenteix l'altre tal com ho esmenta la literatura del nombre d'or.

Respecte a la segona pregunta podem concloure que l'objecte geomètric amb proporcions àuries més valorat estèticament és el polígon regular estrellat de 5 puntes. No obstant i com a segona amb aquesta enquesta em pogut descobrir que figures tan poc relacionades amb el camp estètic com l'espiral de Fermat i de forma encara més notable el triangle equilàter són elements geomètrics que de forma aïllada són més vells que els seus referents auris.

3.El compàs comprova envàs:

Problema:

Un altre aspecte força dubtós de la extensa literatura del nombre d'or es que moltes vegades s'esmenta que és present en infinituds de dissenys, no obstant trobem envasos molt diferents uns als altres, que semblen no tenir cap relació entre ells

Pregunta:

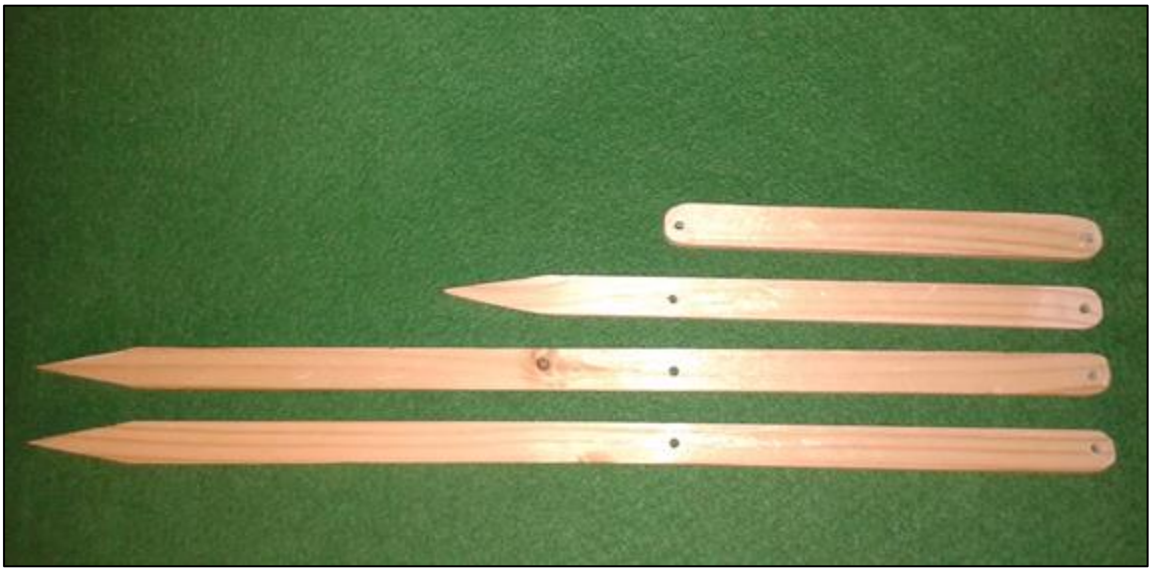
És veritat que la majoria d'envasos presenten les proporcions auris en el seu disseny?

Experiment:

Per tal de poder respondre la pregunta podem construir un compàs auri, un compàs auri és en certa manera un compàs però aquest no serveix per fer circumferències sinó per a observar si un segment donat està dividit amb raó àuria o sense.

En primer lloc haurem de construir el compàs auri:

Primer tallarem unes fustes[48] amb les següents mesures i forats:



Segon forat començant per l'esquera a 13 cm de l'anterior, d'aquest a la primera punta 21 cm en total i 34 cm en total des de el primer punt fins a les segones puntes.

[48] En aquest cas amb un guix de 2 cm

Després les envernissem per a tal de donar-li un acabat millor.

Finalment hi el muntem i hi fiquem els cargols:

Resultats:


BRUT
Mas d'Anoia
CAVA
MÈTODE TRADICIONAL
75cl 11,5% vol


ERISTOFF
IMPORTED
WILD BERRY


Fruco
desde 1959
néctar de
ANANÁS
Alto conteúdo em vitamina C


SPSIL
PINTURA
SPRAY
SPSIL

Anàlisis:

Podem observar que els envasos analitzats[49] presenten sense excepció la proporció àuria de forma sorprenent.

Conclusions:

A partir de l’experiència anterior podem concloure que el nombre d’or és un element molt present en el disseny de la majoria de envasos.

[49] Tot i que no s’han inclòs totes les fotografies és notable la presencia del nombre d’or en la majoria d’envasos de forma contundent.

Conclusions:

Després d'acabar aquest gran viatja per l'oceà matemàtic que ha sigut aquest treball, puc afirmar satisfactòriament que després de molt esforç i no menys passió i diversió he aconseguit complir els meus objectius:

En primer lloc he pogut endinsar-me en la deducció de sorprenents i curioses propietats tan del nombre d'or com de la successió de Fibonacci. També he pogut observar com objectes matemàtics tan distants poden estar profundament relacionats, fet que m'ha sorprès molt i m'ha deixat força reflexiu. A més he pogut aprendre una mica sobre la història de les matemàtiques que sincerament em resulta molt interesant, fet que he volgut evidenciar amb els breus apartats d'Una mica d'història.

En segon lloc he pogut aprendre aspectes tècnics com el ús de dos programes informàtics genials. Sobre el primer puc dir que mai havia tingut la necessitat d'utilitzar-ho, no obstant després d'aquest treball dubto que pugui deixar-lo de fer servir ,sí, em refereixo a Execel. El segon programa a sigut Geogebra un programa que m'ha servit per poder dibuixar les figures de l'enquesta i del apartat de geometria, a més he pogut experimentar amb aquest i entendre que les matemàtiques són gràfiques són formes que vibren s'ordenen i es mesclen, són melodies.

En tercer lloc he pogut comprovar part de la extensa literatura del nombre d'or i emportar-me més d'alguna sorpresa amb els resultats, a més de la decepció de no poder acabar amb altres apartats de recerca que estava efectuant.

Així que m'he quedat amb ganes de poder recerca més evidencies sobre la presencia del nombre d'or , ja que hi ha moments que el treball m'ha resultat paranoic, ja que el nombre d'or sembla tant present que a vegades i he pensat com una pauta universal i omnipresent. També en una de les moltes reflexions que he tingut metre omplia l'habitació de papers amb apartats, idees , taules diagrames en una espiral d'inspiració em preguntava i amb aquesta pregunta vull acabar aquest fabulós viatge reflexiu per les matemàtiques.

El nombre d'or és la pauta de la bellesa, i aquesta a la seva vegada la de la eficiència, No serà doncs el nombre d'or la pauta de l'eficiència?..... Podem estructurar la eficiència a partir de l'esquelet d'aquest sorprenent nombre? .....

Bibliografia:

Webs:

http://en.wikipedia.org

http://es.wikipedia.org

http://ca.wikipedia.org

http://www.aulaclic.es/excel2010/index.htm?utm_source=feedburner&utm_medium=feed&utm_campaign=Feed%3A+aulaclic%2FoIgK+(Cursos+de+aulaClic)

http://gaussianos.com/archivo/

http://elclubdelamatematica.blogspot.com.es/2010/11/guia-para-empezar-explorar-geogebra.html

http://www.euclides59.wordpress.com

http://www.epsilones.com/paginas/t-signos.html#signos-phi

http://www.xtec.cat/~jcanadil/activitats/mao/Fibonacci.htm

http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/geoweb/inicio1.htm

http://numerodeoro.wordpress.com/el-numero-de-oro-de-cada-dia/

http://www.aprendematematicas.org.mx/obras/DICM.pdf

Llibres:

Husted, Michael. The Fibonacci Number series

Magnus Enzensberger, Hans. El diabló de los números 1997, Ed Siruela. Madrid

Guedj, Denis. El teorema del lloro; Ed Empúries, Barcelona, 1988

Fernando Corbalán, La proporcion auria, Ed RBA

Vídeos:

Más por menos, Capítulo 1 (en número áureo)

Más por menos, Capítulo 6 (Fibonacci, La magia de los números)

Annex: