2010 - 2011

LA CINTA DE MÖBIUS: Matemàtiques, “màgia” o tecnologia?

"Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella."

Carl Friedrich Gauss

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ...5

1. GEOMETRIA...8

1.1 Història de la geometria...8
1.1.1 Els egipcis..8
1.1.2 Els babilonis..10
1.1.3 Els grecs..11
1.2 Geometria euclidiana..15
1.2.1 Història d'euclides...15
1.2.2 Llibre dels dotze elements: Les cinc nocions comunes i els cinc postulats..........16
1.3 Geometria no euclidiana...20
1.3.1Geometria Lobachevskiana i geometria el·líptica..........27

2. PRELIMINARS. NOCIONS I NOTACIONS...31

2.1 Nocions de topología 31
2.2 Nocions d'una funció...34
2.3 Nocions d'àlgebra...36

3. GEOMETRIA DIFERENCIAL...37

3.1 Varietats..38
3.1.1 Varietat topológica..39
3.1.2 Varietat diferenciable...40
3.1.3 Varietat bidimensional..42
3.2 Tipus i propietats de les superficies...42

4. LA CINTA DE MÖBIUS..49

4.1 Història..49
4.2 Definició..50
4.3 Propietats de la cinta de Möbius..51
4.4 Curiositats d'una cinta de Möbius..53
4.5 Aplicacions d'una cinta de Möbius..56

5. CONSTRUCCIÓ D'UNA CINTA DE MÖBIUS..68

5.1 Motivació i objectius..68
5.2 Mecanisme de transmissió de moviments..69
5.2.1 Mecanisme de transmissió directa..69
5.2.2 Mecanismes articulats..71
5.2.3 Transmissió mitjançant elements flexibles..72
5.2.4 Transmissió mitjançant engranatges..73
5.3 Procés de construcció..75
5.4 Conclusions..82

CONCLUSIONS..85

BIBLIOGRAFIA..86

AGRAÏMENTS..92

INTRODUCCIÓ

És possible barrejar: matemàtiques, tecnologia i "màgia"? En aquest treball trobarem la resposta.

El per què d'un treball de matemàtiques? Bàsicament m'agraden. Les matemàtiques amaguen milers i milers de coses que no sabem. A mi sempre m'ha agradat investigar i saber com una persona s'ho va fer per descobrir algunes coses que ara veiem tan naturals.

L'elecció del tema ja va ser una mica més complicat. Vaig tantejar diferents temàtiques, però aviat vaig descobrir que depenent de la branca de les matemàtiques amb la que estava associada, hi havia molt poca divulgació i la recerca es feia complicada..

Quan la tutora em va veure tan desesperat per no saber que fer, em va proposar un tema força apassionant: La cinta de Möbius. Al principi em vaig quedar en blanc, no sabia el que era, però només veure una fotografia vaig recordar, que feia temps havia estat mirant vídeos sobre aquesta cinta i havia fet algun experiment. Ràpidament vaig descobrir que és un objecte geomètric, molt conegut entre tots aquells vessats amb matemàtiques, i que simbolitza la naturalesa recurrent de molt processos, la eternitat, l'infinit, etc.

La principal motivació d'aquest treball ha estat investigar sobre la relació que pot tenir un simple tros de paper amb les matemàtiques. Tot i que aquest tema em va atreure des d'un primer moment, aviat vaig percebre que també tenia associat una gran dificultat, la base matemàtica que envolta la cinta. Això va implicar des de un bon començament familiaritzar-me amb una gran quantitat de termes i conceptes matemàtics, desconeguts per mi fins aquell moment, però que per un altre banda de ben segur que utilitzaré posteriorment en una carrera universitària.

La presentació final del treball no coincideix amb el procediment de recerca que inicialment va ser una mica desordenat. Realment vaig començar per familiaritzar-me amb la construcció de la pròpia cinta i les seves propietats i posteriorment vaig intentar classificar-la dintre del món de la geometria. Partint del concepte de superfície, cas concret de varietat diferenciable, objecte d'estudi de la geometria diferencial i que a la vegada pertany a la geometria no-eucliana . Diguem que vaig començar la casa per la teulada!

En aquest punt del procés d'investigació vaig tenir clar dues coses: que fins ara el poc o molt que sabia de geometria s'anomenava entre els entesos geometria euclidiana, i per un altra banda vaig començar a tenir clar com havia d'estructura aquest treball.

El treball es presenta estructurat en quatre grans blocs :

El primer bloc està destinat a la divulgació de l'evolució que ha experimentat la geometria, des de els egipcis o grecs , passant per Euclides i fins arribar a la geometria no-euclidiana. En aquest últim cas he intentat presentar els principals matemàtics que van participar en el desenvolupament de les geometries no euclidianes i de les relacions que entre ells es van establir. Per un altra banda he intentat aprofundir en el concepte de geometria no euclidana explicant les idees principals de la geometria hiperbòlica i el·líptica.

El segon bloc té com objectiu donar a conèixer la base matemàtica que envolta la cinta de Möbius. Aquest ha estat el bloc més feixut per la meva desconeixença dels conceptes i que m'ha emprat una major quantitat de temps. Aquest apartat finalitza amb l'exposició de les diferents propietats d'una superfície i que posteriorment explicaré en la cinta de Möbius.

El tercer bloc està centrat en la presentació de la pròpia cinta, construcció i caracterització de les seves propietats com a superfície que és. Per últim, i potser una de les parts més curioses del treball, he investigat com aquestes extraordinàries propietats de la cinta són utilitzades en diversos camps com l'art, la enginyeria, la màgia, ciència, arquitectura, disseny... Ja sigui de forma explícita o com una metàfora.

En el quart bloc s'explica la construcció d'una corretja de transmissió en forma de cinta de Möbius, mitjançant imatges i un vídeo, així com les conclusions que s'extreuen d'aquesta construcció.

Així doncs sense més divagacions , comencem!

1.Geometria

En aquest apartat intentaré explicar de forma entenedora quina és l’evolució que ha experimentat la geometria, des de els seus inicis amb la geometria euclidià, que per un altra banda es la més coneguda per tothom i la que s’explica en col·legis i instints con si aquesta fos l’única, fins a la geometria no-euclidiana. En particular dintre d’aquesta, em centraré amb la geometria diferencial , que es on pertany l’objecte geomètric motiu d’estudi d’aquest treball, la cinta de Möbius.

1.1 Història de la geometria

D’on prové la paraula geometria?

La paraula geometria està formada per les arrels gregues: "geo", terra, i "metron", mesura, per tant, el seu significat és "mesura de la terra".

1.1.1 Els egipcis

Segons el que registra la història, els conceptes geomètrics que l'home va idear per explicar la naturalesa van néixer en forma pràctica la vora del riu Nil, a l'antic Egipte.
La vida de l’Antic Egipte depenia en gran part dels cultius (cereals, llegums, fruites, hortalisses…..) de les terres inundades pel Nil. De fet en el calendari civil Egipte els mesos s’agrupaven en estacions segons les èpoques de sèquia o inundació del riu: la estació de la inundació (Ajet), l’hivern o germinació (Peret) i l’estiu o calor (Shemu) també coneguda com estació de la deficiència per falta d’aigua al Nil . El riu creixia a començament de Juny i no deixava de créixer fins al

Setembre, quan el Nil té el cabal màxim inundant tota la vall. A partir d'aquest moment el riu es retirava deixant sobre les terres un substrat fèrtil causant de la prosperitat d'Egipte.

Aquest cicle anual de sèquies i inundacions va obligar als egipcis a construir dics paral·lels per canalitzar les seves aigües i desenvolupar tècniques de predicció d'inundacions i reconstrucció del límits dels terrenys riberencs.

Nilòmetre d'escales

Amb l'objectiu de controlar aquestes inundacions en els seus beneficis i mesurar-les, els egipcis es van inventar el Nilòmetre.

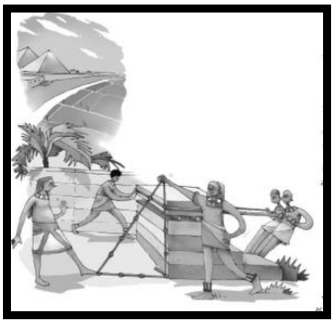
Els Nilòmetres són construccions escalonades o en forma de pou. Tenen formes diferent pel seu disseny i la forma de construcció però tots serveixen pel mateix, es a dir, per a mesurar les aigües del riu Nil. Amb aquests Nilòmetres es comprovava si les pujades del Nil es realitzaven de tal forma que asseguressin bones collites i s'establien els impostos per aquesta temporada.

Nilòmetre d'escales i columna

Per mesurar les terres dels egipcis van aprendre a calcular l'àrea dels rectangles i dels triangles.

Per mesurar els triangles feien servir cordes.

Una corda tenia dotze nusos així podien calcular les terres a parts iguals. Unien el primer punt amb el últim i formaven un triangle de manera que un dels costats tenia 3 nusos, l'altre 4, i la hipotenusa el mes llarg 5, i ells estaven segurs que si eren aquests nusos hi hauria un angle recte.

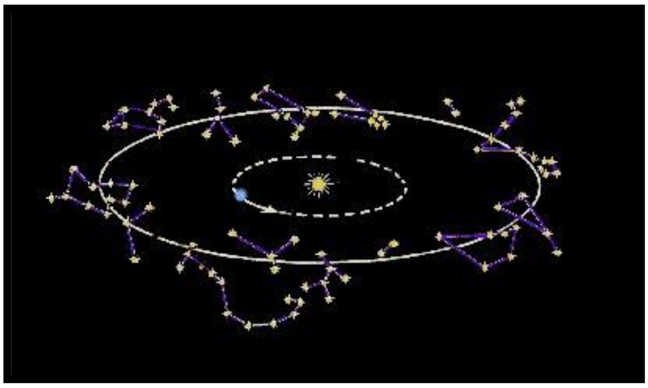


Corda de dotze nusos

1.1.2 Els Babilonis

Els babilonis també coneixien les àrees del els triangles i els rectangles, sobretot per a resoldre problemes d'herència com repartir les terres entre els hereus. També van conèixer les àrees dels pentàgons, hexàgons i heptàgon. Però en especial van estudiar molt els cercles.

Eren uns excel·lents geòmetres ells van batejar les dotze constel·lacions del zodíac, dividint cada una d'elles en 30 parts iguals. És a dir, dividir el cercle zodiacal en 12 x 30 = 360 parts. Recordem que ells van crear el sistema de numeració sexagesimal (de base 60).



Dotze constel·lacions del zodíac

A Babilònia també es va iniciar la sistematització del temps, ja que el cultiu de cereals requeria un tractament adequat de cada estació, el que implicava l'elaboració de calendaris i almanac. Fruit de les necessitats de l'agricultura, els babilonis van començar a treballar amb la geometria i l'astronomia planetària: primer la unitat diària, després el mes (cada lluna nova), i més tard es va determinar el nombre de mesos corresponents al cicle de les estacions. Designaven el començament del mes quan passava l'últim dia de lluna plena, es a dir quan apareixia el quart creixent. Finalment, cap a l'any 2000 aC, havia quedat establert l'any babilònic en 360 dies repartits en dotze mesos.

1.1.3 Els grecs

Els que van donar caràcter científic a la geometria van ser els grecs, en incorporar demostracions sobre la base de raonaments.

Van aparèixer tres persones importants: Pitàgores, Tales de Milet i Plató.

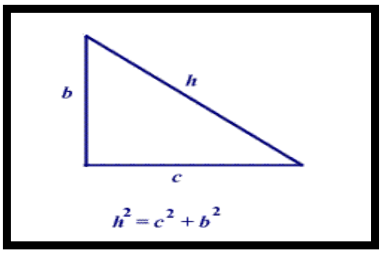
Pitàgores

Pitàgores va viure en la ciutat grega de Crotona, i allí va fundar una societat secreta d'estudiosos , que coneixem amb el nom de l'escola Pitagòrica i que es reconeixien entre ells pel pentàgon estrellat, que ells anomenaven pentalfa(cinc Alfas)
Els pitagòrics van viure amb comunes i es regien per unes normes extraordinàriament estrictes. En aquesta Escola s'entrava després de prestar jurament al nombre deu, tots els documents es mantenien de manera oral i ningú podia divulgar els descobriments.
Els pitagòrics van destacar en música, astronomia i , sobre tot, en matemàtiques. En aquest àmbit tenim que ressenyar dos grans aportacions:

- El teorema de Pitàgores que estableix que en un triangle rectangle la suma dels quadrats dels catets (els costats que formen l'angle recte) és igual al quadrat de la hipotenusa (l'altre costat).

Expressat matemàticament;

$a^2 + b^2 = c^2$



- El descobriment dels nombres irracionals. un nombre irracional és qualsevol real que no és un nombre racional, és a dir, que no es pot expressar com una fracció a / b , essent a i b enters i b diferent de 0. Els nombres irracionals són precisament aquells l'expansió decimal dels quals no s'atura mai, i tampoc no entra mai en un cicle periòdic. . Això va suposar un gran canvi per ells que utilitzaven la idea de la commesurabilitat de segments en les seves demostracions geomètriques, i a més derrocava tota la seva teoria de la filosofia sobre el paper central del « nombre enter ».

Tales de Milet

(600 aC) va iniciar aquesta tendència, en concebre la possibilitat d'explicar diferents principis geomètrics a partir de veritats simples i evidents. Es creu que va néixer a Milet, actual Grècia. En la seva joventut va viatjar a Egipte, on va aprendre geometria dels sacerdots de Memphis, i astronomia, que posteriorment ensenyaria amb el nom d'astrosofia

Va ser el primer filòsof grec que va intentar donar una explicació física de l'Univers, que per a ell era un espai racional malgrat la seva aparent desordre. Tanmateix, no va buscar un Creador en aquesta racionalitat, ja que per a ell tot naixia de l'aigua, la qual era l'element bàsic del que estaven fetes totes les coses.
Suposava que la terra flotava en un oceà infinit.

En geometria, i en base als coneixements adquirits a Egipte, va elaborar un conjunt de teoremes generals i de raonaments deductius a partir d'aquests. Tot això va ser recopilat posteriorment per Euclides en la seva obra Elements, però es deu a Tales el mèrit d'haver introduït a Grècia l'interès pels estudis geomètrics.

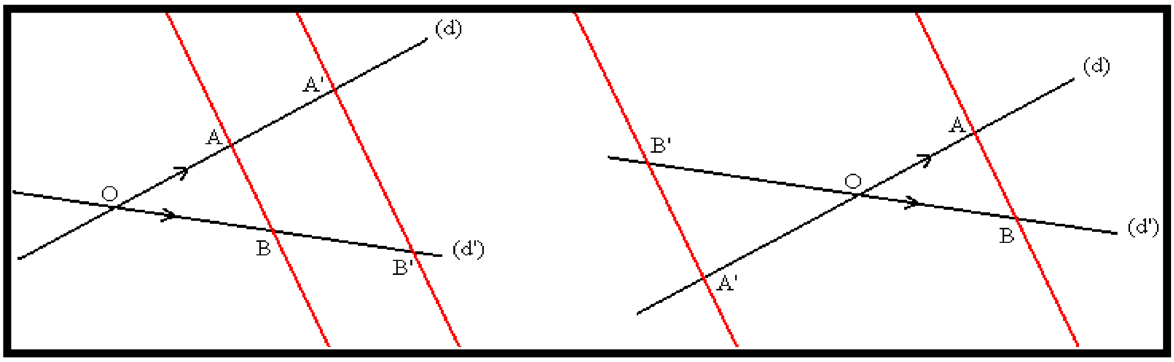
Teoremes de Tales:

1) Una circumferència queda dividia en parts iguals pel diàmetre.
2) Els angles de la base d’un triangles isòsceles són iguals.
3) Els angles oposats pel vèrtex que es forma al tallar-se dos rectes, son iguals
4) Un angle inscrit en una semicircumferència es recte.
5) Dos triangles són congruents si tenen dos angles un costat igual

Però el teorema més important que va dur a terme Tales va ser l’anomenat Teorema de Tales:

Siguin dues rectes (d) i (d') orientades i concurrents en un punt O. I siguin A i A' dos punts de (d), i B i B' dos punts de (d').

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$$ Aleshores:



Plató

Segons Plató, l'estudi de la Geometria havia començar en l'ordre següent:

1. Definicions
2. Axiomes
3. Postulats
4. Teoremes.

A aquesta directiva de Plató es van adaptar els matemàtics posteriors a ell, principalment Euclides.

Els sòlids platònics, cossos platònics, cossos còsmics, sòlids pitagòrics o políedres de Plató (que tots aquests noms reben) són cossos geomètrics caracteritzats per ser políedres convexos les cares són polígons regulars iguals i en els vèrtexs s'uneixen el mateix nombre de cares.

Existeixen cinc sòlids platònics diferents:

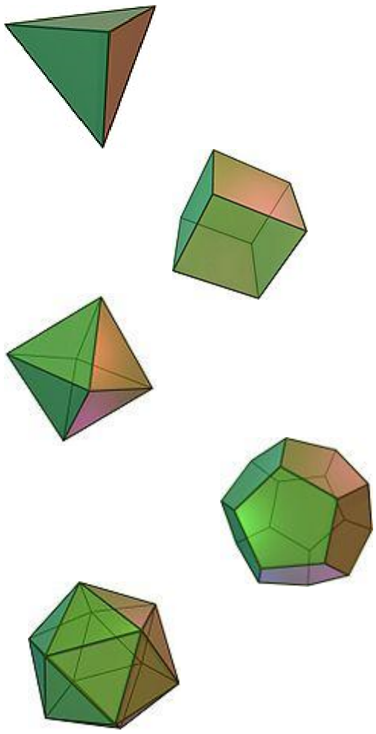
El tetraedre, de quatre cares triangulars;

El hexàedre, o cub, de sis cares quadrades;

El octaedre, de vuit cares triangulars;

El dodecàedre, de dotze cares pentagonals;

El icosaedre, de vint cares triangulars.



Els cinc sòlids platònics.

Els cinc sòlids platònics representen la composició i harmonia de les coses. Al Timeu es diu que la Terra està formada per àtoms agrupats en forma de hexàedre, el foc, de tetràedres, l'aire, de octaedres, i l'aigua, de icosàedre. L'univers en la seva totalitat està figurat en el dodecàedre.

1.2 Geometria euclidiana

La geometria euclidiana és la part de la geometria que estudia els objectes o figures i les seves relacions en un espai on es compleixen els cinc postulats d'Euclides i les cinc nocions comunes.
Aquests postulats i nocions comunes varen ser recollides en un tractat de geometria escrit per Euclides d'Alexandria que constava de tretze llibres i que es deia els Elements.
La característica fonamental de la geometria euclidiana és, pel cas del pla, l'existència i unicitat d'una recta paral·lela a un recta donada que passi per un punt determinat exterior a la recta. Per a dimensions superiors es poden enunciar proposicions anàlogues.

1.2.1 Història d'Euclides

Euclides, també conegut com Euclides d'Alexandria (c. 365 – 275 aC) fou un matemàtic grec, conegut en el dia d'avui com "el pare de la geometria". Va néixer a Alexandria (Egipte), visqué en temps de Ptolemeu I Sòter i va estudiar a l'escola d'Alexandria. Fou el fundador de l'escola de matemàtiques de la ciutat.

No es coneixen massa coses d'Euclides, a part de que va viure a Alexandria i que era fill de Nàucrates.

Hi ha tres hipòtesis sobre la seva vida.

- Euclides fou efectivament el personatge històric que va escriure *Els Elements* i la resta d'obres atribuïdes a ell.
- Euclides fou el líder d'un equip de matemàtics que treballaven a Alexandria. Tots ells van contribuir a escriure les obres completes d'Euclides, fins i tot firmant llibres amb el nom d'Euclides en data anterior a la mort d'aquest.
- Les obres completes d'Euclides foren en realitat escrites per un equip de matemàtics d'Alexandria que van prendre el nom d'Euclides del filòsof Euclides de Megara, que havia viscut uns cent anys abans.

1.2.2 Llibre dels elements : Les cinc nocions comunes i els cinc postulats

L'objectiu dels Elements d'Euclides fou el de reunir els molts resultats matemàtics que s'havien anat originant, i presentar-los sota una estructura coherent i estructurada. D'aquesta manera, se'n facilitava l'ús i es podia fer servir com a referència.

A més, Euclides hi detalla un seguit de proves matemàtiques que serveixen com a model de rigor i construcció de les demostracions matemàtiques durant segles. Per aquest motiu, se'l considera un dels llibres més importants en tota la història de la ciència, i probablement el més important en tota la història de les matemàtiques.

Els Elements d'Euclides és un tractat que es divideix en tretze llibres, la major part dels quals es dediquen a l'estudi de la geometria: els llibres I, III, IV i part del XII són de geometria plana, el XI, XIII i l'altra part del XII de geometria a l'espai. Els llibres II, V, VI i X són d'àlgebra, i els llibres VII, VIII i IX es dediquen a l'estudi de l'aritmètica. Els quatre primers llibres més els VII, VIII, IX son considerats provinents del pitagòrics. Els V, VI i XII a Eudox, el X i el XIII a Teetet i l'XI a l'escola.

Les cinc nocions comunes

Serveixen per a calcular la longitud de rectes, angles, àrees, arcs de circumferència, etc.

- Coses iguals a una mateixa cosa, són iguals entre elles.
- Si a coses iguals s'afegeixen coses iguals, els totals seran iguals.
- Si de coses iguals se'n resten coses iguals, les diferències seran iguals.
- Coses iguals que coincideixin a una tercera són iguals entre elles.
- El tot és major que les parts.

Els cinc postulats

Els cinc postulats d'Euclides són enunciats senzills i evidents de la geometria plana. El fet que siguin evidents en fa impossible una demostració absolutament rigorosa i s'admeten com a certs sense necessitat de demostrar-los.

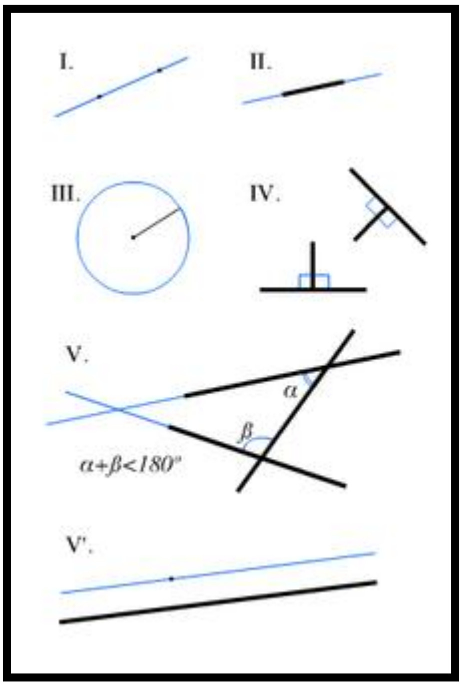
- Dos punts diferents es poden unir per una recta.

- Un segment rectilini pot ser allargat indefinidament mitjançant una recta.

- Donats un segment rectilini i un punt qualsevol, existeix una circumferència de centre aquest punt i radi el segment donat.

- Tots els angles rectes són iguals.

- Si dues rectes intercepten amb un tercera de manera que la suma dels angles interiors a un costat és menor de dos angles rectes, llavors les dues rectes inevitablement es tallen en el mateix costat si s'allarguen suficientment.



Els cinc postulats

El postulat de les paral·leles

Dels cinc postulats d'Euclides n'hi ha un que sobresurt respecte els altres per la seva complexitat, el cinquè postulat. Aquest postulat té diferents formulacions equivalents igualment acceptades i utilitzades :

1. La suma dels angles de qualsevol triangle és igual a la suma de dos angles rectes.
2. Per un punt exterior a una recta només existeix una recta paral·lela

Mentre que els quatre primers són nocions molt simples i evidents, la veracitat del cinquè postulat és, a priori, més discutible. D'aquest fet se'n van adonar molts matemàtics que creien que era possible deduir-lo dels quatre anteriors i, per tant, podia ser eliminat. Es creu que el mateix Euclides també n'era conscient, perquè estructura les proposicions dels Elements de manera que les primeres no necessiten el cinquè postulat per ser demostrades i les darreres sí.

Uns 22 segles després que s'escrivissin els Element*s* per fi s'arriba a una conclusió: el V postulat és independent dels altres quatre. I s'arriba a aquesta resposta mitjançant un camí sorprenent. La prova de la independència del V postulat porta implícita la possibilitat que hi hagi geometries en què no es compleix aquest postulat. Dit d'una altra manera: des del punt de vista lògic no hi ha cap contradicció en suposar que per un punt exterior a una recta puguin passar més d'una paral·lela a la recta, o fins i tot cap.

Ara bé, excepte perquè tenim una noció de recta i de pla que ens permeten comprovar que aquestes nocions encaixen en les definicions donades, aquestes són massa difuses des del punt de vista lògic com per considerar que no puguin ser vàlides altres interpretacions. Per exemple, si considerem una superfície esfèrica i li donem la denominació de *pla* , encaixa perfectament en ella les definicions de pla. En aquest cas, una *recta* hauria de ser (en virtut del que s'ha dit, en especial de la propietat de ser la línia més curta) el tros de circumferència màxima (és a dir, una circumferència on el seu diàmetre coincideix amb el de la superfície esfèrica) que passa per dos punts donats. Al igual que passa al pla es fàcil comprovar que donats dos punts d'una esfera existeix una i només una circumferència màxima que els conté. En aquesta situació, per un punt exterior a una *recta* no passaria cap *recta* paral·lela a la donada. Es bastant intuïtiu comprovar que qualsevol circumferència màxima que passa per aquest punt exterior tallarà la circumferència (recta) donada. Així doncs l'esfera es un exemple de geometria on no es compleix el V postulat d'Euclides.

1.3 Geometria no-euclidiana

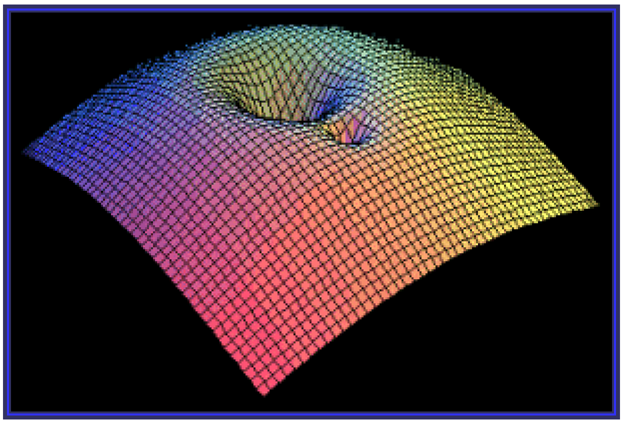
Qualsevol sistema de geometria que no està basat en el postulat paral·lel d'Euclides, que diu que una línia i només una línia es pot traçar a través d'un punt fora d'una línia donada, paral·lela a aquesta línia. La geometria euclidiana tracta de la geometria del nostre món diari. El postulat paral·lel d'Euclides sembla intuïtivament clar, però ningú ha estat capaç de demostrar-ho.

Si substituïm el postulat de paral·leles d'Euclides amb el supòsit que hi ha més d'una línia paral·lela a una línia donada a través d'un punt donat, tenim una geometria no euclidiana anomenada geometria hiperbòlica. Si assumim que no hi ha línies paral·leles, tenim una geometria no euclidiana anomenada geometria el·líptica.

Alliberar als matemàtics de la creença errònia de que els axiomes d'Euclides eren l'única manera de construir una geometria consistent i no-contradictòria va ser un canvi molt important en les matemàtiques .Les investigacions en aquestes altres geometries van dur, entre d'altres coses, a la teoria general de la relativitat d'Einstein, que descriu l'univers com a no-Euclidià.

Einstein va demostra que vivim en un univers de quatre dimensions, les tres espacials més el temps. Va comprovar que la "reixeta espacial" que representa l'univers era una varietat diferenciable que es corbava com a conseqüència de les masses dels cossos celests, i que aquesta curvatura era negativa. Mentre que a petita escala la curvatura de l'espai és petita i la geometria euclidiana tridimensional es apropiada per al seu estudi, a grans escales la curvatura de l'espai es major i aquesta geometria es mostra insuficient, amb la qual cosa es convenient utilitzar la geometria hiperbòlica per a descriure-la.

Si observem aquesta il·lustració podrem veure que la deformació



(aquí només de l'espai perquè és una representació tridimensional) fa que la "reixeta espacial" es deformi i els quadrilàters que la componen ja no tenen els quatre angles rectes sinó dos d'aguts.

Deformació de l'espai, amb quadrats sense angles rectes

Això de la curvatura espai temps es pot imaginar més fàcilment si suposem només un univers de sol dos dimensions, es a dir un pla, com podria ser un matalàs. Si en aquest matalàs posem una canina, aquesta es quedarà quieta. Però si després de la canina posem un objecte més pesat, com una bola gran de ferro, aquesta afogarà (corbarà) el matalàs de forma que la canina tendeix apropar-se a la bola de ferro.

Es pot dir que la curvatura del matalàs es un exemple en dos dimensions de com la Terra corba l'espai al seu voltant atraient als objectes.

Einstein va dedicar vuit anys de la seva vida a trobar el funcionament d'aquest espai corbat: "La curvatura del espai-temps en una zona de l'univers és igual al contingut de massa i energia d'aquesta regió"

Un altra conseqüència de suposar que l'espai és una varietat (objecte de la geometria diferencial que explicarem més endavant) és que l'efecte de les forces no es immediat, sinó que es transporta en forma d'ona , com quan llancem una pedra en un estanc. Així doncs, si suposem el cas hipotètic que tingues lloc un cataclisme i el Sol desaparegués, amb la qual cosa desapareix la força gravitatoria que es la causant del moviment circular dels planetes, aquest planetes s'escaparien perquè no hi hauria cap força que els retingues, paro l'efecte no seria immediat.

El desenvolupament de la geometria no-euclidiana es fruit de quatre persones molt importants.

Nikolai Ivànovitx Lobachevski

Nikolai Ivànovitx Lobachevski, (1 de desembre de 1792 - 24 de febrer de 1856) fou un matemàtic rus del segle XIX.
Va néixer a Nižni Novgorod-Aroche i va estudiar a la Universitat de Kazan. Va ensenyar a Kazan des de 1812 fins 1846, arribant a ser professor de matemàtiques en 1823.

Va ser un dels primers a aplicar un tractament crític als postulats fonamentals de la Geometria euclidiana. És considerat per aquest motiu el pare de les geometries no euclidianes.
Amb independència de l'hongarès János Bolyai i de l'alemany Carl Friedrich Gauss, Lobachevski descobrir un sistema de geometria no euclidiana. Abans de Lobachesvski els matemàtics intentaven deduir el cinquè postulat d'Euclides a partir de les altres axioma , però Lobachevsky es va dedicar a desenvolupar una geometria en la qual el cinquè postulat pot no ser cert, o millor dit, no ser vàlid, per això entre altres qüestions va proposar un sistema geomètric basat en la hipòtesi de l'angle agut segons la qual en un pla, per un punt fix passen com a mínim 2 paral·leles a una recta en realitat aquesta solució dóna noció de l'existència de triangles corbs. Es a dir que els angles d'un triangle formen menys de 180º.

János Boliay: János Bolyai fou un matemàtic hongarès, nascut el 15 de desembre de 1802 a Kolozsvár (actual Romania), que llavors era part de l'Imperi austrohongarès. El seu pare, Farkas Bolyai, també era matemàtic i amic de Carl Friedrich Gauss i va intentar provar durant anys el postulat de les paral·leles usant els altres axiomes geomètrics d'Euclides, sense resultat.

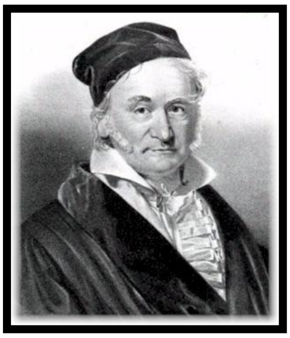
János Boliay

El seu pare li havia enviat una carta a Carl Gauss per a que aquest ho prengués com a deixeble, però aquest es va negar, adduint que els seus èxits els havia concebut deu anys enrere, però que no els havia publicat. Encara que en cartes a altres matemàtics reconeix el seu prominent geni.

János Bolyai, va redescobrir la geometria no euclidiana el 1829, treball que es va publicar el 1832 Desprès de veure'l, Gauss va escriure a Farkos Bolyai: *"Elogiar-ho seria equivalent a elogiar-me a mi mateix. El contingut sencer del treball... coincideix quasi exactament amb les meves meditacions, que van ocupar la meva ment en el passat, durant trenta o trenta-cinc anys."*

Així doncs Lobachevski i Boliay van realitza una mateixa aportació a la geometria. Parteixen d'un objecte geomètric i estableixen sobre ell uns postulats que són idèntics als d'Euclides menys el cinquè que es substituït per un altre que diu totalment lo contrari. En el desenvolupament d'aquesta geometria esperaven trobar-se amb alguna contradicció (mètode de reducció al absurd) però no va ser així, amb la qual cosa van deduir:

1. El V postulat es independent dels altres quatre i no pot deduir-se dels altres quatre i per tant Euclides va fer be en considerar-lo com un postulat
2. Existeixen models de l'espai on, en contra de tota intuïció, per un punt exterior a una recta no passa una única recta paral·lela, es a dir existeixen geometries diferents a l'Euclidiana.

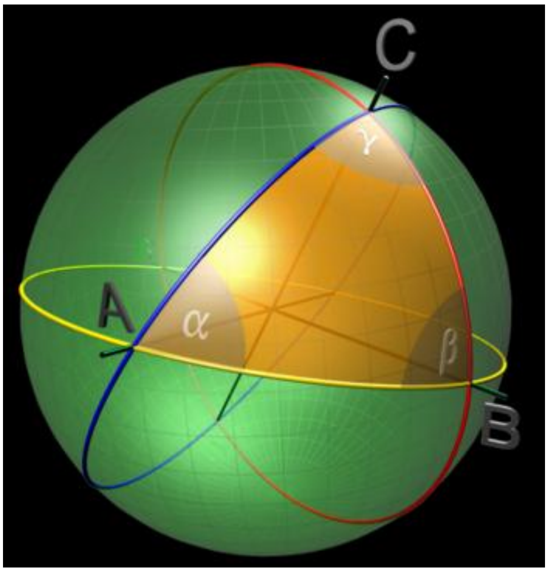


Carl Fiedrich Gauss

Carl Fiedrich Gauss: (30 d'abril del 1777 – 23 de febrer del 1855) fou un matemàtic i científic alemany que contribuí de manera significativa a molts camps, incloent-hi la teoria de nombres, l'estadística, l'anàlisi, la geometria diferencial, la geodèsia, l'electrostàtica, l'astronomia i l'òptica. Conegut a vegades com a Princeps mathematicorum (en llatí, "el Príncep dels matemàtics" o "el Primer dels matemàtics") i el "més gran matemàtic des de l'antiguitat", Gauss ha tingut una influència destacable en molts dels camps de la matemàtica i la ciència, i se'l considera un dels matemàtics més influents de la història. Es referia a les matemàtiques com "la reina de les ciències".

La contribució de Gauss a la geometria no-euclidiana va ser la creació de la geometria diferencial utilitzant les idees de les relacions entre l'anàlisi matemàtic i la geometria que fins aquell moment s'havien desenvolupat. Va definir geodèsia com la corba de menor distància entre dos punts d'una superfície, així doncs geodèsia en una superfície és com la recta al pla. Gauss sabia que la distancia mes curta entre dos punts era una recta. Ara bé, si la distancia es molt gran com per exemple la distancia entre dos ciutats molt allunyades, ja deixa de ser una recta i es transforma en una corba.

Existeixen superfícies on els triangles formats per geodèsies mesuren mes de dos angles rectes, i d'altres on mesuren menys. En qualsevol cas es contradiu el V postulat d'Euclides



Geodèsies de Gauss

Aquestes consideracions van portar a Gauss a considerar la possibilitat de crear geometries no euclidianes, però tot i que ja era el matemàtic mes prestigiós d'Europa, va considerà que la mentalitat de l'època no estava preparada per un resultat d'aquesta magnitud i els seus resultats no van ser publicats. Només van veure la llum quan Bolyai va publica la seva geometria no euclidiana.

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann: Georg Friedrich Bernhard Riemann, matemàtic alemany (Breselenz, Hannover, 1826 – Selesca, Llac Major, 1866). Va ésser alumne de Gauss, Jacobi i Steiner.

El 10 de Juny de 1854, Riemann dona una conferència en la universitat de Gotinga, per completar el grau que li permetia optar a una plaça de professor universitari. En aquesta conferència Riemann introdueix, primer de forma intuïtiva i desprès més

formalment, el concepte de varietat diferenciable generalitzant el concepte de superfície a qualsevol nombre (enter positiu) de dimensions. Es a dir una superfície és una varietat de dimensió 2, una recta es una varietat de dimensió 1 i un punt és una varietat de dimensió 0. De manera que una varietat n-dimensional és localment homeomorfa a un obert de l'espai euclidià $R^{n.}$ A més generalitzarà en una varietat el concepte de geodèsia i curvatura ja estudiats per Gauss en superfícies.
Es a dir segons Riemann, qualsevol model d'espai (pla, espai tridimensional o qualsevol altre) pot ser estudiat com una varietat diferenciable, i al introduir una mètrica o distància se està determinant la geometria que governa aquest objecte. Per exemple, el pla no es per si sol euclidià o no euclidià , sinó que al definir la mètrica euclidiana es quan verifica el V postulat. Si en lloc d'introduir aquesta mètrica s'introdueix una altra mètrica, com la de Lovatchevski, deixa de verificar-se aquest postulat.

En la segona part de la conferencia , Riemann es pregunta pel model que ha de tenir l'espai físic, l'espai on ens movem, quina es la seva dimensió o quina es la seva geometria. Les seves idees, molt avançades per la seva època, no van ser desenvolupades fins a Einstein i Poincaré, que al mateix temps i de forma independent, les van aplicar a l'espai físic per crear la teoria de la Relativitat (ja explicada anteriorment)

.

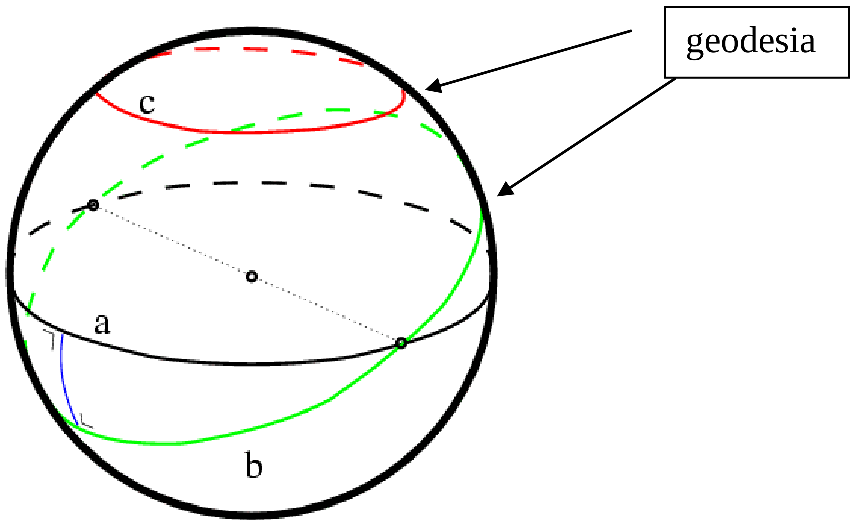
1.3.1 Geometria hiperbòlica o Lobachevskiana i geometria el·líptica

Des de el segle XIX es consideren geometries tant vàlides com la clàssica, i podem dir que existeixen infinites geometries possibles, depenen de la curvatura de la superfície amb la que estem tractant.

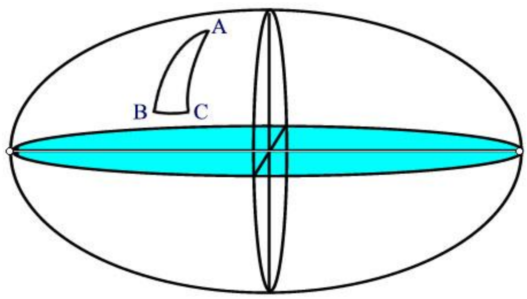
- La geometria euclidiana satisfà els cinc postulats d'Euclides i te curvatura zero.
- La geometria hiperbòlica satisfà solament els quatre primers postulats d'Euclides i te curvatura negativa.
- La geometria el·líptica satisfà solament els quatres primers postulats d'Euclides i te curvatura positiva.

La geometria el·líptica també coneguda com a geometria riemanniana es un model de geometria no euclidiana que no satisfà el cinquè postulat d'Euclides, el de les paral·leles. Aquesta geometria diu que donada una "recta" R –d'aquesta geometria- i un punt P exterior no existeix cap "recta paral·lela" a R que passi per P. En el model convencional de geometria el·líptica aquestes "rectes" corresponent localment a arcs de cercles màxims de l'esfera que serveix com a model de la geometria, geodèsia. La geodèsia és una bona generalització de la recta al pla, ja que és el camí més curt entre dos punts P i Q de la superfície, doncs és la línia menys corbada que es pot dibuixar en una esfera.
La superfície d'una esfera es un exemple de geometria el·líptica bidimensional on es fàcil comprovar dos característiques d'aquesta geometria , que la suma dels angles d'un triangle es mes gran de 180º(com més gran és l'àrea més gran és la suma angular) i que per un punt exterior a una recta no passa cap paral·lela.

En aquest imatge és fàcil comprova que a i b són cercles màxims, es a dir geodèsies o rectes , mentre que la línia c clarament no és una recta ja que no es un cercle màxim. Mirant aquest dibuix podem observar que no hi ha rectes paral·leles. Si utilitzem que quan dos rectes són paral·leles aquestes són equidistants , es evident observar que quan dibuixem dos "rectes" equidistants sobre una esfera, al menys una de elles no serà un cercle màxim i per tant no serà recta en la forma que s'ha definit en aquesta geometria.



Però la geometria esfèrica només es un cas especial de la geometria el·líptica, que esta basada en la superfície d'un el·lipsoide, un cos de revolució que s'obté al fer girar una el·lipse al voltant d'un dels seus eixos de simetria.



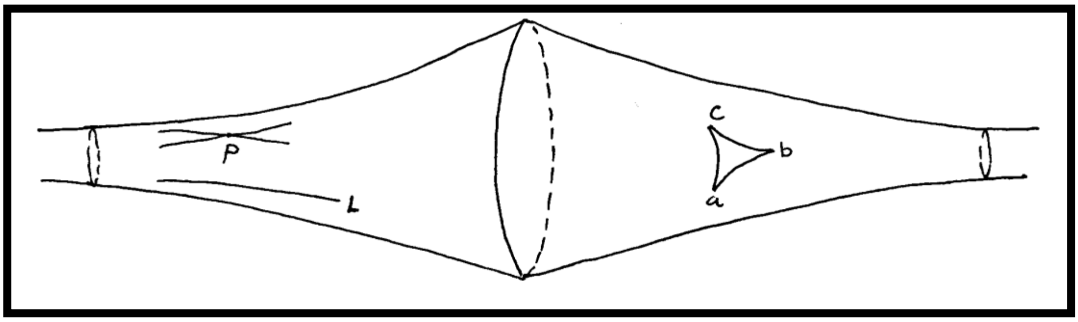
Triangle sobre la superfície d'un el·lipsoide (sumen mes de 180º)

A principis del segle XIX, i de manera independent, Gauss Lobachevsky, János Bolyai i Ferdinand Schweickard van aconseguir construir la geometria hiperbòlica, a partir de l'intent de negar el cinquè postulat d'Euclides. Van substituir-lo per la idea que donat un punt P exterior a una recta R, sempre es possible obtenir més d'una recta paral·lela a R que passi per P. En lloc d'obtenir una contradicció el que van obtenir va ser una curiosa geometria en la qual els tres angles d'un triangle sumaven menys de 180 º (en la geometria euclidiana els angles de qualsevol triangle sumen sempre exactament 180 º).

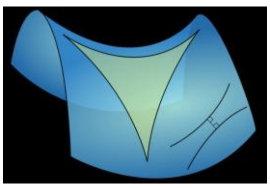
A més no tots els triangles tenen la mateixa suma angular. Com més gran és l'àrea del triangle menor és la suma del seus angles.

En aquesta geometria no hi ha rectangles, ja que si tres angles d'un quadrilàter mesuren 90º, el quart ha de tenir una mesura inferior, ja que al dividir-lo en dos triangles els angles de cadascun han de sumar menys 180º

La superfície de la pseudosfera és un model per a la geometria hiperbòlica



Les rectes sobre aquesta geometria continuen sent les geodèsies i donat una recta L i un punt P que no pertany a L, un nombre infinit de rectes poden ser traçades per P, paral·leles a L. Sobre aquesta superfície les rectes paral·leles no són equidistants en totes les seves parts, com si s'exigeix al teorema de la geometria euclidiana.



Geometria hiperbòlica sobre un paraboloide hiperbòlic (cadira de muntar)

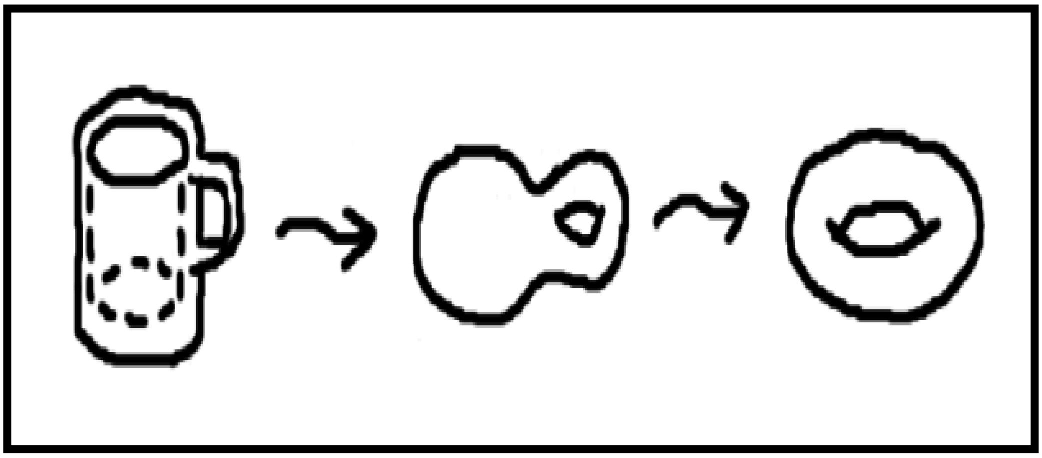
La geometria hiperbòlica té un paper molt important en la teoria de la Relativitat d'Einstein. La majoria del físics ja accepten que el nostre Univers és un espai hiperbòlic de tres dimensions que esta corbat en la quarta dimensió. Anteriorment ja he vist que la reixeta espacial que representa en nostre Univers, en una representació tridimensional, es deforma en presència d'un cos i els quadrilàters que la formen tenen angles aguts , característic d'aquesta geometria.

2. Preliminar. Nocions i notacions

En aquest apartat vull deixar clares algunes definicions sobre alguns conceptes que podran anar apareixent posteriorment.

1.1 Nocions de topologia

Topologia: És la rama de les matemàtiques que estudia les propietats de les figures geomètriques o dels espais que no es veuen alterats per transformacions continues, bijectives i d'inversa continua (homeomorfisme). Es a dir en topologia està permès doblegar, estirar, encongir ... els objectes però sempre que es faci sense trencar ni separar el que ja està junt (la transformació ha de ser continua) ni pegar lo que està separat (la inversa també ha de ser continua). Per exemple en topologia un triangle es lo mateix que un quadrat, ja que podem transformar un en l'altre de forma continua, sense trencar ni pegar. Però una circumferència no es lo mateix que un segment (ja que hauríem de trencar-la per algun punt)
Un acudit habitual entre els topòlegs es que són incapaços de diferència una tassa d'un Donut.



Transformació continua d'una tassa en un Donut

Espai topològic: Donat un conjunt X qualsevol, considerem un cert subconjunt $\tau \subseteq P(X)$ del conjunt de les parts de X. Diem que τ és una topologia en X si compleix:

1) $\phi, X \in \tau$

2)Donada una família arbitrària d'elements de la topologia, $A_i \in \tau, i \in I$ aleshores la seva reunió també hi pertany. $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

3)Donada una família finita d'elements de la topologia $A_1,..., A_n \in \tau$, aleshores la seva intersecció també hi pertany. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

Diem, aleshores, que el parell ordenat (X,τ) és un espai topològic. Els elements de la topologia τ s'anomenen conjunts oberts.

Un espai topològic en un conjunt de X es una família de subconjunts seus que contenen als subconjunts trivials i que es tancada per la unió i per la intersecció finita.

Base d'una topologia: Sigui τ la topologia d'un espai topològic X, Es diu que una subfamília $\beta \in \tau$ es una base de la topologia τ si per a cada obert U existeix una subfamília $B_U \subset B$ tal que $U = \cup_{B \in B_U} B$

Es a dir, tot obert de la topologia es pot posar com unió de elements de la base o per a tot obert U i $x \in U$ existeix $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U$

<u>Exemple base topològica:</u> En el conjunt de nombre naturals $\aleph$ = { 0, 1, ..., }es defineix les conjunts A_n={ 0, 1, ...,n }per a cada *n* $\in \aleph$. Aleshores τ = $\{\phi, \aleph\} \cup \{A_n ; n \in \aleph\}$ constitueix una topologia als $\aleph$.
Constitueix una topologia perquè verifica les tres condicions.

1) $\phi, \aleph \in \tau$
2) $A_3 \cup A_4 = A_4 \in \tau$
3) $A_3 \cap A_4 = A_3 \in \tau$

Aleshores la única base possible β es τ. Sigui A_n, amb *n* un nombre arbitrari. Aleshores existeix $B \in \beta$ tal que $n \in B \subset A_n$. Com que *B* es un conjunt obert aleshores *B*=A_m per a algun *m*$\in \aleph$. Per això *m*=*n* per tant $A_n \in \beta$

<u>Conjunt tancat</u>: Sigui (*X*,τ) un espai topològic tancat i F$\subset$X. Es diu que F es un conjunt tancat si X \ F es un conjunt obert. S'entendrà per F el conjunt de tots els tancats d'un espai topològic.

<u>Exemple conjunt tancat:</u>
De la topologia anterior un obert és A_3 i un tancat seria $N \setminus A_3 = \{4,5,6...\}$

<u>Entorn:</u> Si X es un espai topològic i *p* un punt pertanyent a X, un entorn de *p* es un conjunt V que conte un conjunt obert O que conté a *p*. $p \in O \subseteq V$
El conjunt V no necessita ser un conjunt obert, si V es obert es un entorn obert.

2.2 Nocions d'una funció

Composició: La funció composició, obtinguda per la composició de una funció amb un altre, representa la aplicació de la primera funció al resultat de aplicar la última a l'argument de la composició. Si tenim dos funcions f(x) i g(x), de manera que el domini de la segona està inclosa en la imatge de la primera, es pot definir una nova funció que associa a cada element del domini de f(x) el valor g[f(x)]

Exemple de composició:

$f:\Re \to [0,\infty)$ $\quad$ $f:\Re \to \Re$

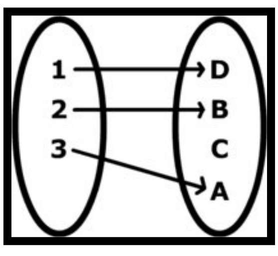
f(x)= x^2 $\quad$ g(x)=x+1

$f \circ g$ $\quad$ $x \xrightarrow{g} x+1 \xrightarrow{f} (x+1)^2$

$g \circ f$ $\quad$ $x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} x^2+1$

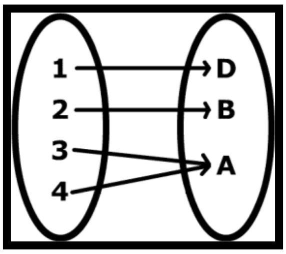
Funció injectiva : En matemàtiques una funció és injectiva quan no existeix cap imatge que tingui associada més d'una antiimatge del domini.

Es a dir, si $f:\Re \to \Re$ $\forall p,q \in \Re$ es compleix $f(p)=f(q) \Leftrightarrow p=q$



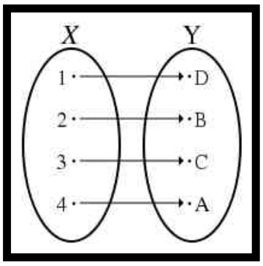
Funció injectiva

Funció suprajectiva: Una funció es suprajectiva quan tot element del conjunt d'arribada és imatge d'almenys un element del domini, es a dir, per a cada element *y* del codomini, hi ha almenys un *x* del domini tal que $f(x) = y$.



Funció suprajectiva

Funció bijectiva: Podem dir que *f* és bijectiva si és una correspondència tal que tots els elements del domini tenen imatge (és a dir, és una funció), tots els elements del recorregut tenen una única antiimatge, (és a dir, és una funció injectiva) i al mateix temps tots els elements del codomini són al recorregut perquè són imatge d'algun element del domini (és a dir, és una funció suprajectiva). En definitiva, una funció injectiva i exhaustiva.



Funció bijectiva

Homeoformisme: Siguin *X* i *Y* espais topològics. Una aplicació $f: X \to Y$ és un homeomorfisme quan compleix les propietats següents:

- *f* és bijectiva
- *f* és contínua
- La seva inversa f^{-1} és contínua (o, el que és el mateix, *f* és una aplicació oberta).

En tal cas, es diu que *X* i *Y* són homeomorfs, i sovint s'escriu $X=Y$.

Es una funció continua amb inversa continua, es una funció que passa d'oberts a oberts, per tant a cada costat de l'espai es el mateix que a l'altre costat.
Si existeix un homeomorfisme entre espais topològics, es diu que són homeomorfes. Les propietats que es conserven sota un homeomorfisme es denominen propietats topològiques

Isomorfisme: És un homeomorfisme derivable.

Difeomorfisme: Un difeomorfisme es un homeomorfisme diferenciable.

Funció derivable: Una funció real es derivable en un punt x_0 quan les seves derivades laterals són iguals.

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) \quad = \quad f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

Funció diferenciable: És una funció derivable però amb més d'una variable.

2.3 Nocions d'àlgebra

Grup abelià: Sigui V un conjunt i una aplicació +:VxV → V que anotem per +(a,b)=a+b. Direm que la parella anterior es un grup abelià si verifiquen les següents propietats.
1) Associabilitat de la suma: (a+b)+c= a+(bec)
2) Commutivitat de la suma: a+b=b+a
3) Existència del neutre: 0 $\in$V tal que a+0=a
4)Existència del oposat: Per a cada *a* $\in$V existeix a'$\in$V tal que a+a'=0

Exemple grup abelià: ($\mathbb{R}$,+)

3. Geometria diferencial

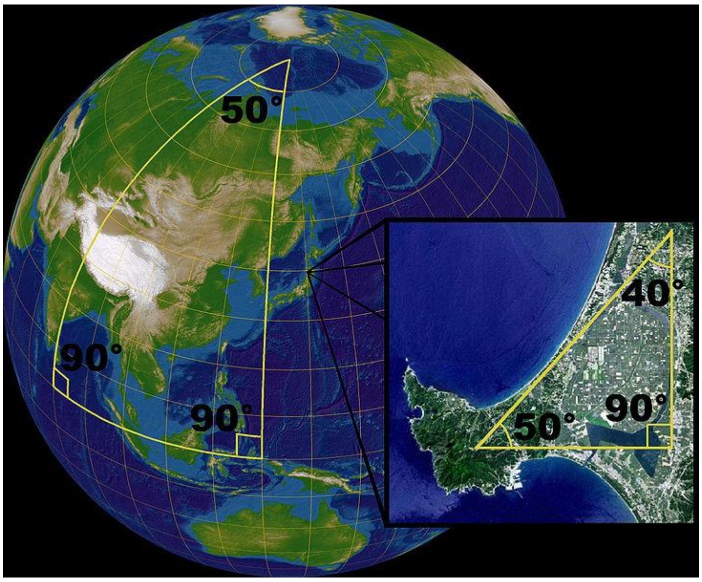
Les àrees d'estudi de la geometria la divideixen en geometria elemental, que estudia els principis bàsics de la geometria euclidiana, i la geometria analítica que relaciona les equacions amb les figures geomètriques. La novetat d'aquest tipus de geometria es que permet representar figures geomètriques mitjançant fórmules del tipus $f(x,y)=0$.Per exemple una recta es pot expressar mitjançant equacions de grau 1 , $2x+6y=0$, i una circumferència utilitzant equacions polinòmiques de grau 2, $x^2+y^2=1$ o una hipèrbola $xy=1$. Les portes d'aquesta rama van ser obertes , ja en el segle XVII per Descartes i Fermat que només van resoldre problemes sobre el pla i posteriorment Newton.

La geometria diferencial estudia figures geomètriques utilitzant mètodes de l'ànalisis matemàtic. En aquesta geometria els objectes d'estudi són les varietats diferenciables i es centra en les propietats "locals" d'una corba o una superfície entorn a un punt de la mateixa corba o superfície.

La geometria diferencial apareix i es va desenvolupar molt estretament lligada a l'anàlisi, que a la vegada es va originar a partir de problemes geomètrics. Per exemple , el concepte de tangent (geometria) va precedir al de derivada que a la vegada va donar l'eina per trobar la tangent en geometria diferencial.

Un dels primers objectius aconseguits en aquest camp va ser l'obtenció de l'equació diferencial de les línies geodèsiques sobre una superfície, desenvolupant a continuació una completa teoria de superfícies, introduint entre uns altres el concepte de superfície desarrollable.

3.1 Varietats



Angles del triangle en el pla i en l'espai

Una varietat es un espai topològic homeomorf a l'espai euclidià.

La dimensió d'una varietat és la dimensió de l'espai euclidià amb què es relaciona: si és amb una recta és unidimensional, amb un pla bidimensional, etc. Encara que una varietat s'assembla a l'espai euclidià localment, l'estructura global de la varietat pot ser molt més complicada. Per exemple, qualsevol punt en una superfície esfèrica té una regió petita que l'envolta que es pot assimilar a una regió del pla (com en un atles del món), tot i que l'esfera en la seva totalitat no es pot fer correspondre al pla: no és homeomorfa al pla.

3.1.1 Varietat topològica

Una varietat topologica és un parell (M,A) on M és un espai topològic i A un altes on els canvis de atles no tenen que ser diferenciables

Una varietat topològica és un espai topològic que localment tindrà l'estructura topològica de $\mathbb{R}^n$, en un sentit precisat més avall. D'aquesta manera una varietat heretarà moltes de les propietats locals de l'espai euclidià, però no les globals.

Ha de complir:

1) Ha de ser localment euclidià (per a cada punt $x \in M$ hi ha un obert U, entorn de x, homeomorf mitjançant $\phi : U \to V$ a un obert V de $\Re^n$

2) Ha de ser un espai topològic.

Una varietat topològica és bàsicament igual que una varietat diferenciable l'únic que ha de contenir un espai topològic.

3.1.2 Varietat diferenciable

Carta n-dimensional

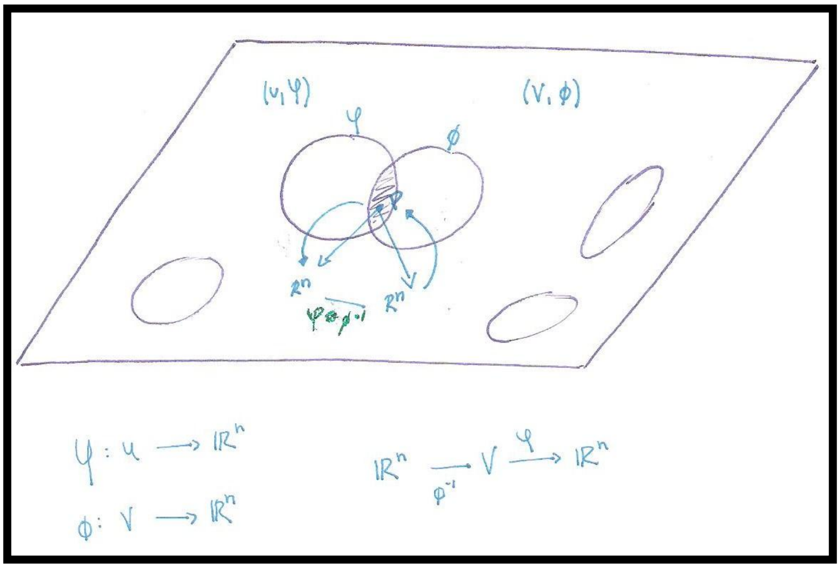
Una carta dimensional M es una aplicació bijectiva $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \Re^n$ que la seva imatge $V = \varphi(U)$ es un conjunt obert del espai euclidià. Així doncs tots els punts de U, mitjançant φ, tenen associades unes coordenades de $\Re^n$

Moltes vegades es demana que aquesta aplicació sigui un homeomorfisme, i així el conjunt M es localment homeomorf (es a dir igual) al espai euclidià.

Cartes compatibles

Potser que dos cartes estiguin definides sobre una mateixa regió del conjunt M, i cadascuna d'aquestes funcions associa a un mateix punt p coordenades diferents de $\Re^n$. En aquest cas si existeixen funcions amb unes determinades propietats que permeten un canvi de coordenades (passa d'unes coordenades amb unes altres) es diu que les cartes són compatibles.

Dos cartes n-dimensionals $(U,\varphi) y (V,\Psi)$ sobre un conjunt M son compatibles si $U \cap V = \phi$ o bé si $U \cap V \neq \phi$, els conjunts $\phi(U \cap V) y \Psi(U \cap V)$ son oberts a $\Re^n$ i les aplicacions $\Psi \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \Psi^{-1}$ son difeomorfismes.



Carta compatible

Atles diferenciables. Estructura diferenciable

Un atles es una col·lecció específica de cartes que cobreix un conjunt M.

Un atles diferenciable n-dimensional d'un conjunt M es una família de cartes $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ satisfà les següents condicions:

1) $U_{\alpha\in A} U_\alpha = M$

2) Per tot parell de índex α y β, les cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ i (U_β, φ_β) son compatibles.

3) El canvis de cartes $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$....... són diferenciables C^∞

Direm que el atles A determina una estructura diferenciables sobre M si es maximal per les condicions anteriors.

Atles equivalents. Atles maximals

Dos atles A_1 y A_2 sobre un conjunt M son equivalents si determinen la mateixa estructura diferenciable sobre M.

A_1 y A_2 son equivalents si $A_1 \cup A_2$ son un atles.

Una atles es maximal quan no es pot incluir a cap mes atles.

Varietat diferenciable de dimensió *n*

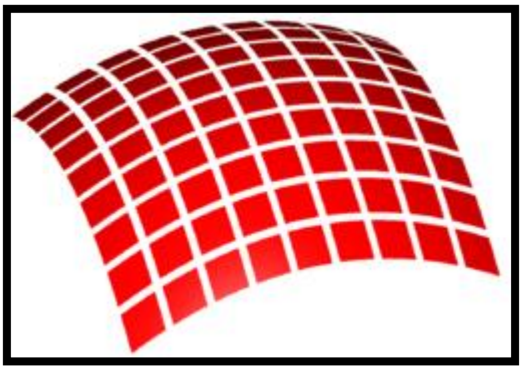
Una varietat diferenciable de dimensió *n* es un parell (A,M) format per un conjunt de M y una estructura diferenciable de *n*-dimensional de A sobre M.

Exemple:

En un espai euclidià $\mathbb{R}^n$ podem definir una estructura diferenciable considerant com a carta global l'aplicació de la identitat. Ens referim a ella com la estructura diferenciable estàndard de $\mathbb{R}^n$.

3.1.3 Varietat bidimensional

Una superfície és una varietat bidimensional, és a dir, un objecte topològic que localment "s'assembla" al plànol euclidià $\mathbb{R}^2$(tècnicament localment homeomorf al plànol).Un exemple clar es si ens posem al mig del carrer i veiem que es totalment pla, però perquè es una porció mol petita i sabem que no es pla, perquè la Terra no es plana.



Varietat bidimensional

Euclides va fer una definició clara i contundent de superfície: Una superfície es allò que només té longitud i amplada.

3.1.4 Tipus i propietats de les superfícies.

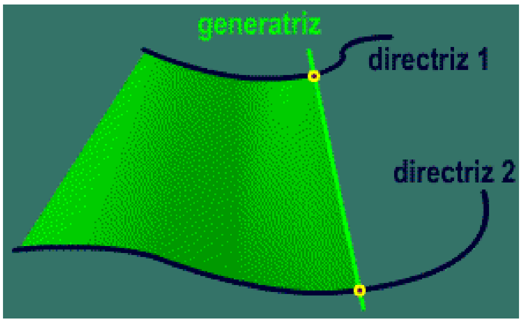
- Superfícies tancades.

Una superfície tancada en l'espai tridimensional es una superfície que tanca un volum, dividint aquest espai en una regió acotada i una altra regió no acotada. Però quan parlem de més de tres dimensions no podem aplicar el concepte anterior ja que les superfícies tancades en altres dimensions no divideixen l'espai d'aquesta forma. Per això hem de parlar que una superfície tancada no te frontera.

Donut: exemple de superfície tancada

-*Superfície reglada.*

És la superfície generada pel moviment una recta anomenada generatriu, que esta en contacte amb una o més rectes anomenades directrius.

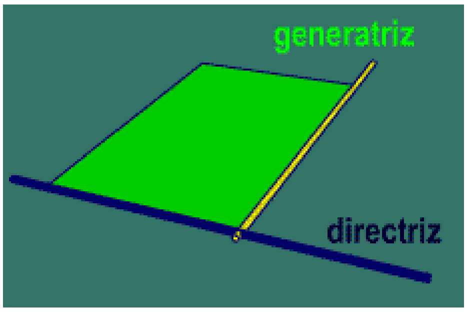


Superfície reglada

Les superfícies reglades es poden distingir en tres tipus: Planes, de curvatura simple, de curvatura doble i guerxes.

- Superfície reglada plana

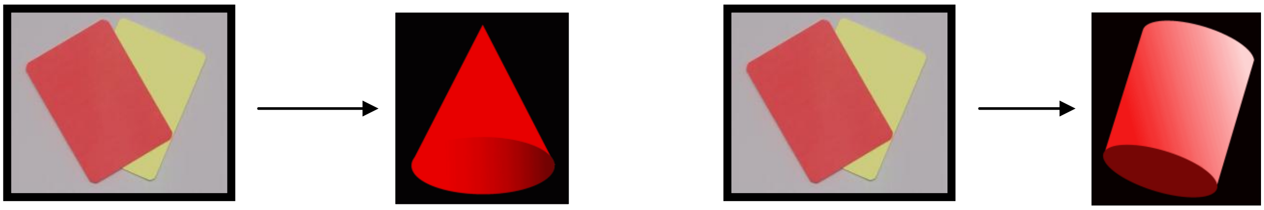
Creada pel moviment d'una generatriu, que es manté en contacte amb una directriu recta, sent paral·leles totes les posicions de la generatriu.



- Superfície de curvatura simple

És quan cada dos posicions adjacents de la generatriu son coplanaries. Les superfícies de curvatura simple són desarrollabes, es a dir que es poden extendre al pla.

Les superfícies dessarrollables són aquelles que es poden formar a partir d'un pla euclidià mitjançant el doblatge, es a dir, que es pot formar a partir d'un objecte pla que es pugui doblegar com un paper o una cartolina.



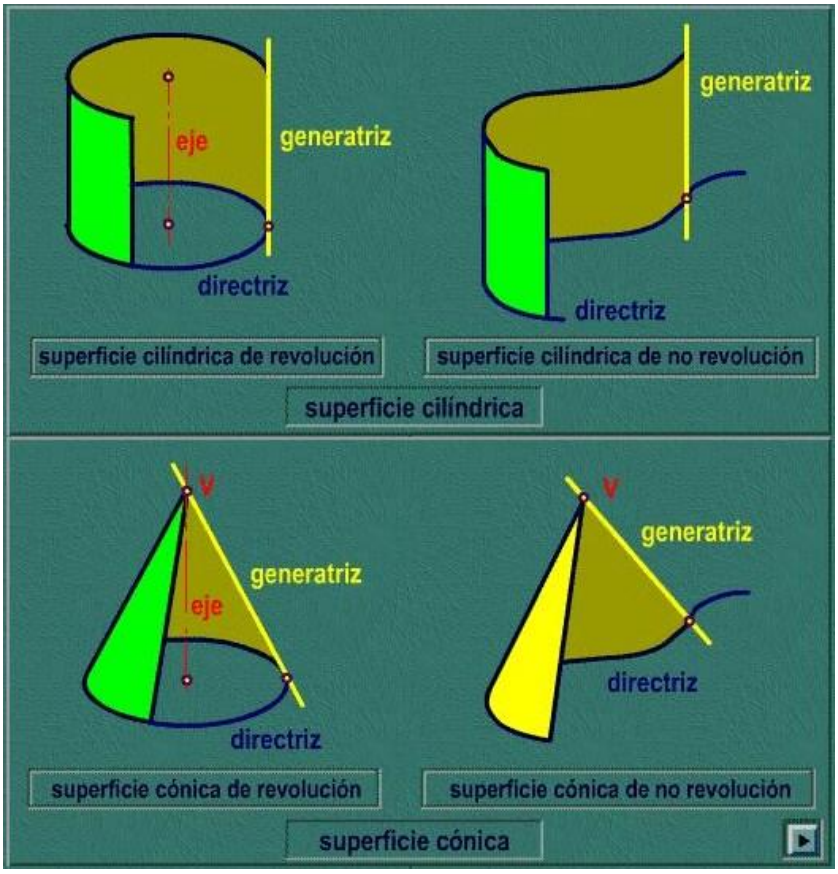
Transformacions a partir del doblatge

Superfície cilíndrica: Generada pel moviment d'una generatriu, que es manté en contacte amb una directriu corba.

Dins de les cilíndriques trobem les de revolució, que són les que en totes les posicions de la generatriu, son equidistans d'un eix paral·lel a ella, i també les de no revolució, en que no es pot definir un eix que sigui equidistant en totes les posicions de la generatriu.

Superfície cònica: Generada pel moviment d'una generatriu, que es manté en contacte amb una directriu corba, tenint totes les posicions de la generatriu un punt amb comú, un vèrtex.

Dins de les còniques trobem les de revolució, que són les que en totes les posicions de la generatriu sempre formen el mateix angle amb un eix que passa pel vèrtex, i també les de no revolució, en que no es possible determinar un eix en que totes les posicions de la generatriu formin el mateix angle.



Superfícies de curvatura simple

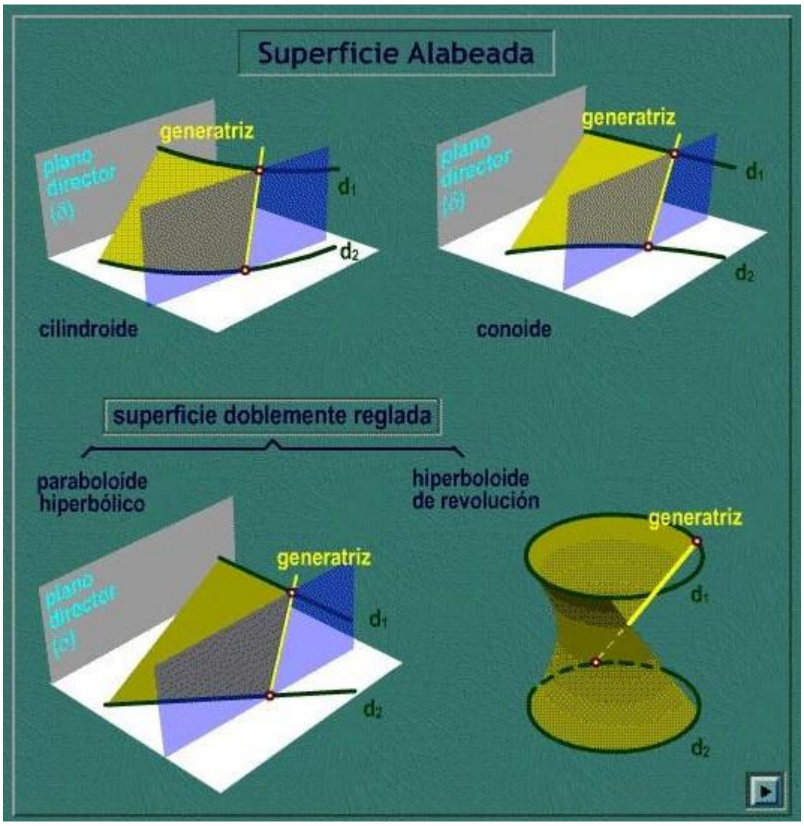
-Superfície guerxa

És una superfície reglada no dessarrollable, en la qual dos posicions successives de la generatriu no són coplanaries. Aquestes superfícies no contenen línies rectes i per tant no son superfícies desarrollables

Cilindroide: La generatriu es desplaça mantenint-se paral·lela a un pla director, i recolzada sobre dos directrius corbes.
Conoide: La generatriu es desplaça mantenint-se paral·lela a un pla director, i recolzada sobre dos directrius, una corba i l'altra recta.

Superfície doblement reglada: Superfície guerxa en la qual per un mateix punt passen dos generatrius.

Dins de la superfície doblement reglada podem trobar el *paraboloide hiperbòlic* on la generatriu es desplaça mantenint-se paral·lela a un pla director i recolzada sobre dos directrius rectes que es creuen, i també trobem el *hiperboloide de revolució* on la generatriu es recolza sobre dos directrius circulars paral·leles i movent-se mantenint constant l'angle que formen elles.



Superfície guerxa

-Superfície de curvatura doble

Són superfícies generades pel moviment d'una generatriu corba. Aquestes superfícies no contenen línies rectes, per tant no són dessarrollables. Les més conegudes són les quàdriques, són les formades per la rotació de una corba cònica al voltant d'un dels seus eixos.

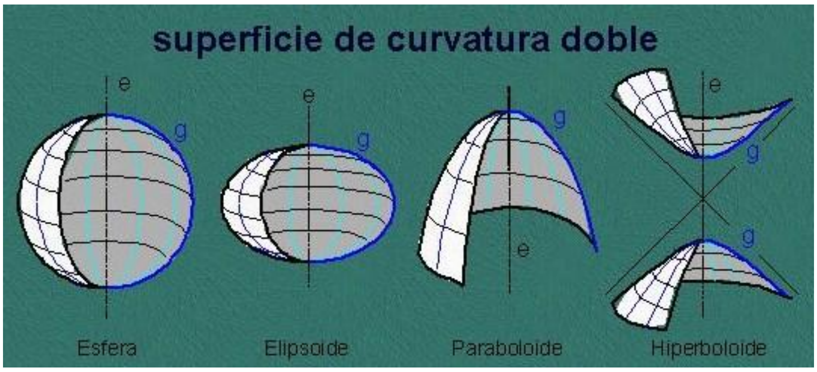
Les quadràtiques són:

L'esfera: La generatriu es una circumferència.

L'el·lipsoide: La generatriu es una el·lipse.

El paraboloide: La generatriu es una paraboloide

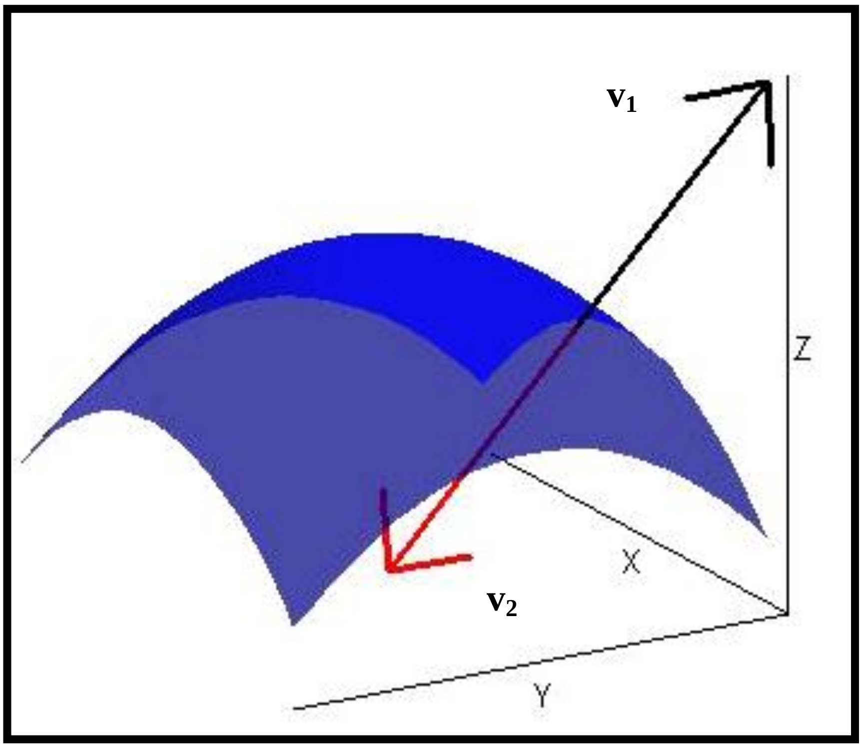
El hiperboloide: La generatriu es una hipèrbole.



Superfície de curvatura doble

-*Superfície orientable*

Una superfícies S és una superfícies orientable si té dos costats , un interior i l'altre exterior. En aquest cas existeixen per a un mateix punt (x,y,z) perteneixent a la superfície S dos vectors normals v_1 i v_2, un per a cadascun dels costats de la superfície que son lineals i oposats entre si $v_1=-v_2$.



Superfície orientable

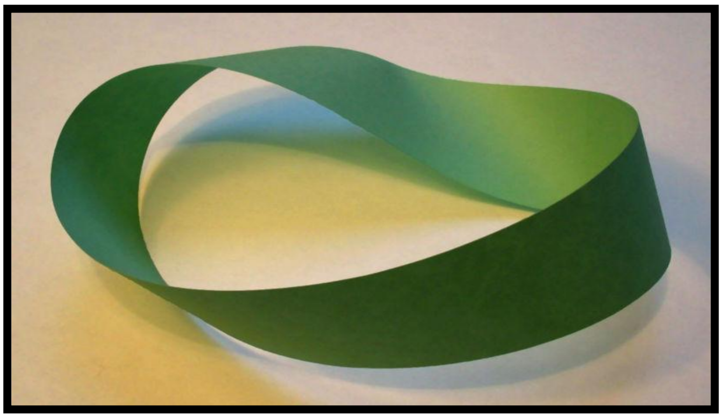
4. La cinta de Möbius

4.1 Història

August Ferdinand Möbius (17 de novembre de 1790, Schulpforta, Sajonia, Alemanya - 26 de setembre de 1868, Leipzig) va ser un matemàtic alemany.
La seva mare era descendent de Martin Lutero, un teòleg alemany que les seves ensenyances van inspirar la reforma protestant. El seu pare Johan Heirich Möbius va morir quan August solament tenia tres anys.
El 1809 Möbius va acabar la ensenyança superior i va ingressar a la Universitat de Leipzig, una de les mes antigues d'alemanya. Möbius el primer any va seguir els passos que li deia la seva mare, però quan va acabar aquest any, es va adonar que ell tenia passió per les matemàtiques, la astronomia i la física.
El 1813 Möbius va viatjar a Gotinga, on va estudiar astronomia amb Carl Friedrich Gauss, matemàtic de fama mundial. Gauss considerava a Möbius el seu alumne mes capacitat. Més tard va ser elegit per formar part de la càtedra de astronomia i mecànica superior a la universitat de Leipzig. Però ell no era tan bo orador com matemàtic, això va frenar el seu ascens com a catedràtic.
El 1820 es va casar i mes tard va tenir tres fills. Una nena, Emilie i dos nens, August Theodor i Paul Heinrich.
Mobius va treballar del 1827 fins al 1831 en geometria analítica, transformació projectiva i estructures matemàtiques conegudes recentment com "reds de Möbius" , "funció de Möbius" ...
Möbius era una persona que només es preocupava per la seva família i els seus estudis. A vegades Möbius s'adonava que altres persones havien arribat a les seves conclusions anys mes tard.
Möbius va ser mes conegut per la seva feina en astronomia que no en matemàtiques, que són les que ara porten el seu nom.

La cinta de Möbius no va cobrar importància fins a la seva mort.
Segons les anotacions de Möbius la cinta va ser dessarrollada el setembre del 1858. Möbius va descobrir la cinta al mateix temps que el matemàtic alemany Johann Benedict Listing. Möbius va portar el concepte una mica mes lluny que Listing mitjançant un estudi a mes consciència del concepte de orientabilitat en relació a les superfícies de Möbius. Ell va estudiar altres superfícies amb una sola cara i que tenien la propietat de tenir un volum nul.
Möbius va morir desprès de complir cinquanta anys, la seva esposa havia mort anys abans.

4.2 Definició



Cinta de Möbius

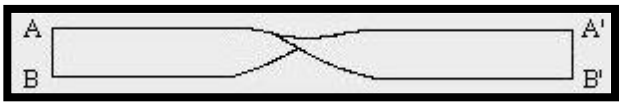
Fou descoberta de manera independent pels matemàtics alemanys August Ferdinand Möbius i Johann Benedict Listing l'any 1858.
La trobem dins de la geometria no euclidiana (que no compleix el cinquè postulat), i dins de les geometries no euclidianes pertany a la geometria diferencial.

La cinta de Möbius es una varietat de dos dimensions d'una sola cara que es pot construir fàcilment amb un llistó o bé una cinta de paper: solament es necessari agafar la cinta anomenada i unir els seus extrems, tenint en compte que hem de girar un d'ells un angle de 180º.

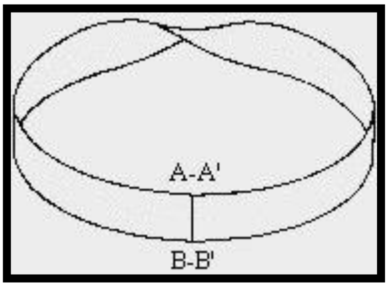
Procés de construcció:

1. Es retalla una tira de paper rectangular

2. Un dels extrems es gira 180º.



3. Unir els extrems



4.3 Propietats de la cinta de Möbius

En aquest apartat intentarem explicar les propietats d'una cinta de Möbius amb l'ajuda de les explicacions citades anteriorment.

Te només una cara

En un cilindre per passar d'una cara a una altra hem de passar per la vora, en canvi en la cinta de Möbius sense passar per la vora, podem recórrer les "aparentment dos cares".
Si s'acoloreix la superfície de la cinta, començant per la "aparentment" cara exterior, al final queda acolorida tota la cinta, per tant, només té una cara i no té sentit parlar de cara interior i cara exterior.

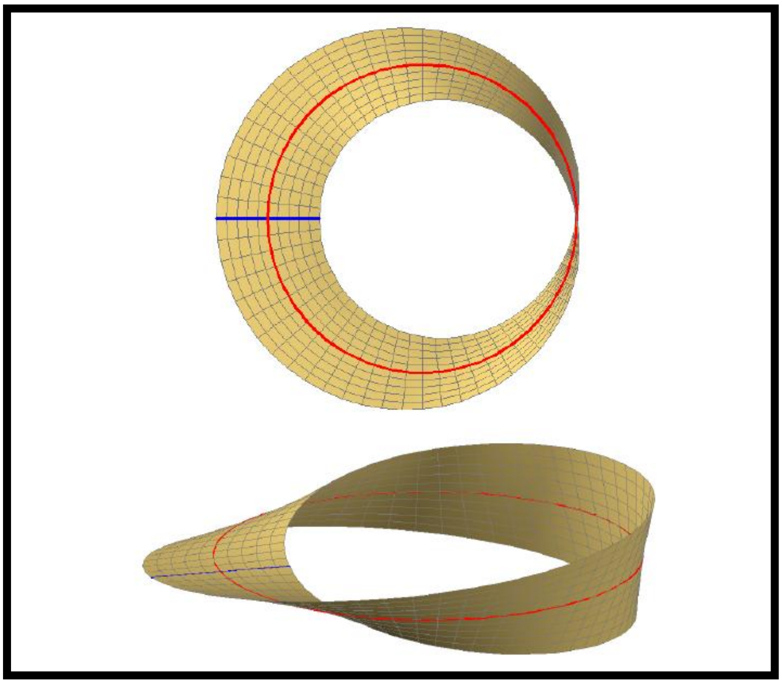
Te només una vora

Es pot comprovar seguint la vora amb un dit, apreciant que s'aconsegueix el punt de partida havent recorregut "ambdós vores", per tant, només té una vora.

És una superfície no tancada

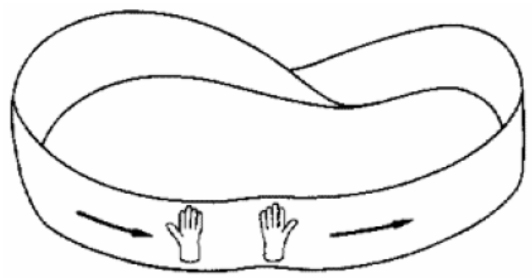
Podem afirmar que la cinta de Möbius és no tancada perquè té frontera. La seva frontera es topologicament una circumferència S^1 (tenint en compte que dos objectes són topologicament idèntics si un s'obté de l'altre estirant, comprimint.... però no tallant o pegant)

És una superfície reglada



Un cilindre és una superfície reglada del tipus S^1xI on I es l'interval [0,1] i S^1 es una circumferència de radi 1. La cinta de Möbius és una superfície reglada del mateix tipus on es mou un segment al llarg d'un cercle, però amb una rotació del segment de 180º. Com en totes les superfícies regalades hi ha una generatriu i una directriu, la generatriu es un segment i la directriu una circumferència.

Superfície no orientable



L'orientació d'una cinta de Möbius

Una persona que es llisca «tombada» sobre una banda de Möbius, mirant cap a la dreta, en fer un volt completa apareixerà mirant cap a l'esquerra. Si es parteix amb una parella d'eixos perpendiculars orientats, en desplaçar-se paral·lelament al llarg de la cinta, s'arribarà al punt de partida amb l'orientació invertida
Matemàticament es pot demostrar si considerem un vector perpendicular al pla de la cinta en qualsevol punt, aquest canviarà la seva orientació a mida que recorrem la cinta per la seva línia central, arribant a convertir-se en un vector dirigit en sentit contrari al arribar al mateix punt

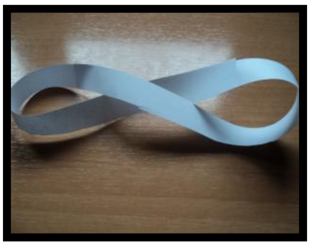
4.5 Curiositats d'una cinta de Möbius

És fàcil comprovar que solament hi ha dos possibilitats de pegar una cinta pels seus extrems oposats: o bé s'obté un cilindre(si abans de pegar els extrems es gira un d'ells un múltiple parell de 180º) o bé una cinta de Möbius (si abans de pegar els extrems, es gira un d'ells un múltiple imparell de 180º).
Visualment no sembla el mateix un cilindre que una cinta amb una torsió de 360º, però topologicament és el mateix.

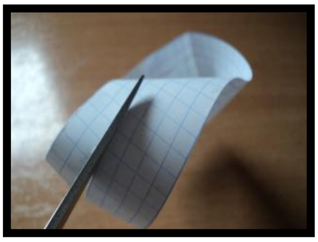
Una de les característiques més rellevant de la cinta de Möbius es el seu comportament enfront als talls per fraccions de la seva amplitud

Si agafem unes tisores i tallem la cinta de Möbius longitudinalment, obtindrem una cinta d'una longitud doble a la inicial i l'amplitud la meitat, però serà homeomorfa a la primera si no que serà homeomorfa a un cilindre (torsió de 360º)

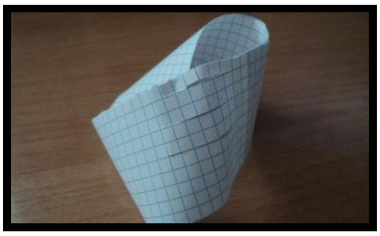




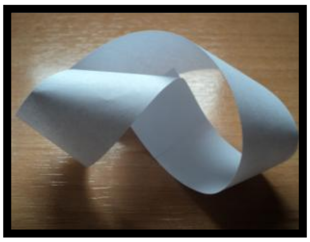
Si en comptes de tallar-la pel mig la tallem a un terç de la seva amplada, obtenim dons cintes entrellaçades, una de longitud 2L i amplada 1/3 topologicament idèntica a un cilindre, i una altra cinta de longitud L i amplada 1/3, que es una cinta de Möbius.
Aquesta forma de tallar la cinta utilitzant un sol tall, no només es pot realitzar a 1/3, ho podem tallar a l'amplitud que vulguem, 1/4,1/5,...
Per exemple, si tallem a una amplada 1/4, obtindrem un cilindre 2L i amplitud 1/4, i una altra cinta que serà de Möbius, de mateixa longitud que la inicial, i d'amplitud 1/2.

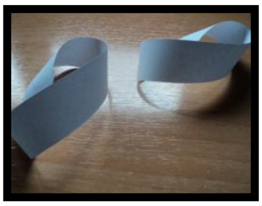

Resulta interessant comprovar que si en comptes de realitzar un tall en una cinta de Möbius, en realitzem tres, no obtenim cinc cintes com seria el més normal, si no que n’obtenim tres entrellaçades.




Un altre cas és: a l’hora de la construcció de la cinta en comptes de donar mig tomb (180º) donar-li un tomb sencer (360º), i la tallem longitudinalment pel mig, obtenim dos cintes entrellaçades, de mateixa longitud, d’amplada la meitat i que són de Möbius.
Si talléssim un cilindre igual com hem fet amb la cinta anterior, no obtindríem el mateix resultat tot i ser topologicament iguals. En aquest cas obtenim dos cilindre de longitud igual, amplitud la meitat i no estan entrellaçats.



També podem construir dos cintes de Moebius per separat, i les ajuntem per la part plana, perpendicularment, i comencem a tallar les cintes per la meitat obtindrem dos cors entrellaçats.




4.6 Aplicacions de la cinta de Möbius

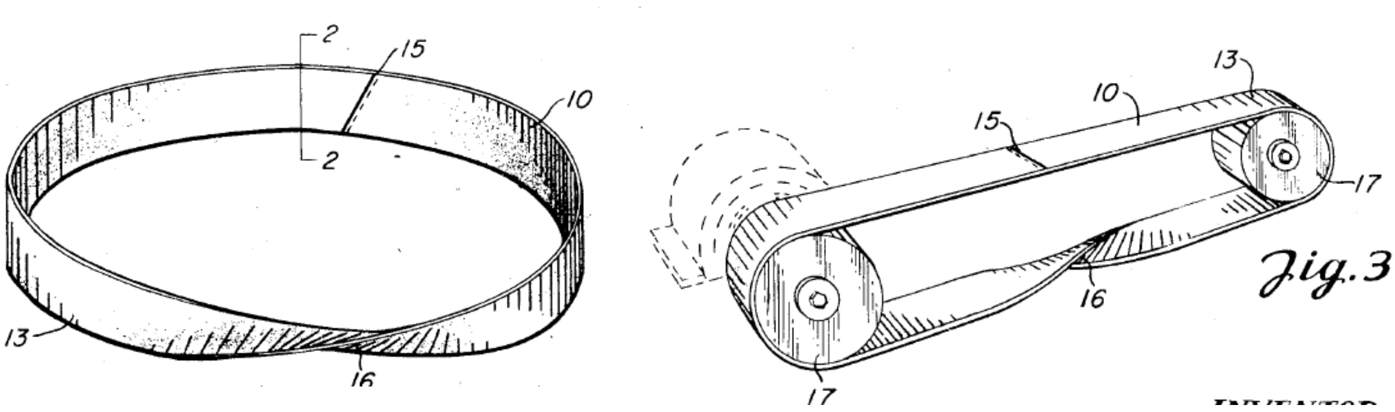
La cinta en ciència i enginyeria

- Al 1923, Lee De forest va obtenir una patent nord-americana per a una pel·lícula de Moebius que grabava el so per les dos cares. Més tard això es va aplicar a les cintes magnetofòniques que poden grabar el doble de temps que les normals.

Cinta de grabar de dos cares

- Corretja abrasiva

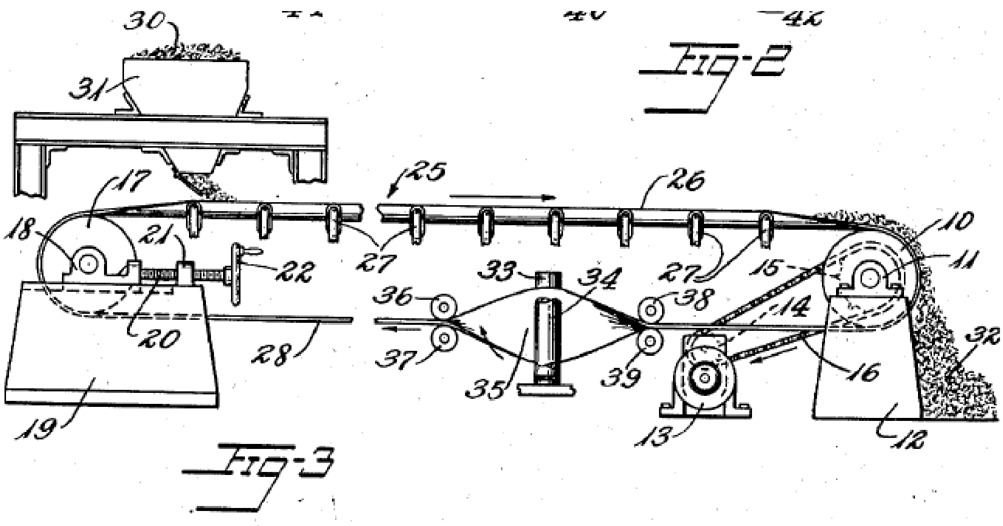
Corretja patentada en 1949 per Owen H.Harris que oferia una doble superfície per polir que una superfície cilíndrica, en la que només s'aprofita un del dos costats.



Corretja abrasiva

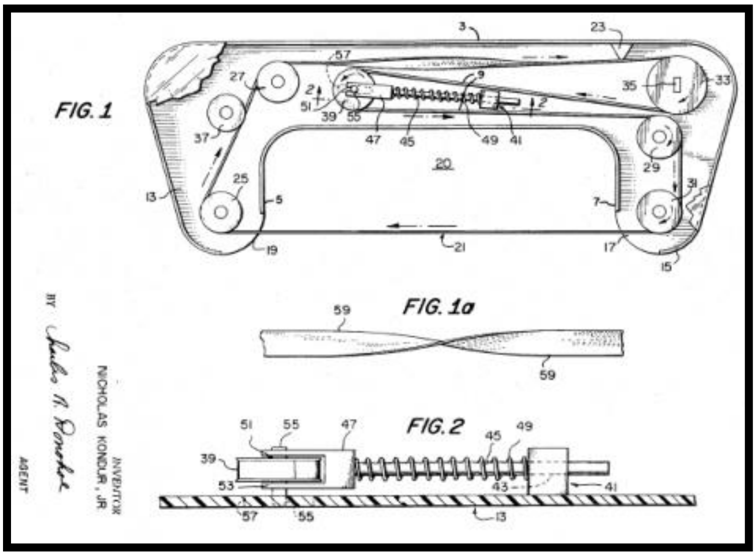
- Corretja transportadora per a material calent

James O.Trinkle , va patenta al 1952 una cinta de Möbius per transporta material calent. En aquell moment Trinkle treballava en la B.F. Goodrich Co. i aquesta cinta transportadora flexible de Möbius estava pensada per portar materials calents com cendra o arena de fundició i per suposat durava el doble de temps que una corretja tradicional. La torsió de Möbius es realitza en el punt 35 amb ajuda dels corrons 33 i 34.



Cinta transportadora de material calent

- Nicholas Kondur Jr. va inventar al 1971 un cartutx amb una cinta de tinta de Moebius, això significava que hi havia el doble de tinta i així es tardava mes en canviar els cartutxos.



Esquema d’un cartutx de tinta

Cartutx de tinta d’una maquina d’escriure (Annex)

- John C. Pulford i Marco Pelosi al 2004 van patentar aquest retractor quirúrgic ajustable: posseeix un anell interior, un altre exterior separat de l'interior i una mànega allargada oberta en els extrems oposats. L'anell exterior que és de Möbius està proveït d'una clau rotacional per ajudar-lo a girar al voltant del seu eix central, per rodar la màniga al voltant de l'anell exterior amb la finalitat d'ajustar la seva longitud.

Anell de Möbius

La cinta en arquitectura

- Pont

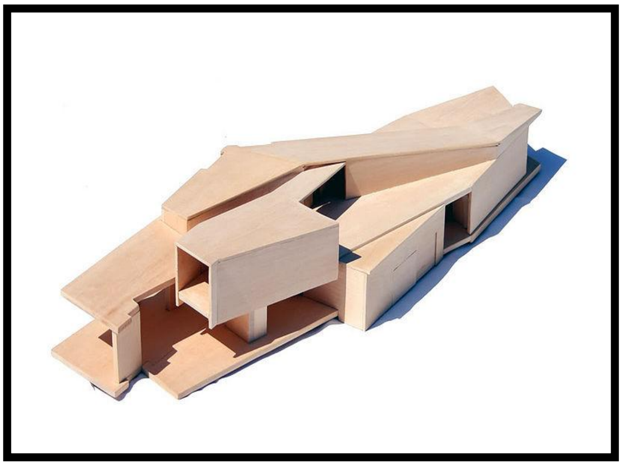
Pont de Möbius a Finzels Reach(Bristol) Dissenyat per Julian Hakes. 2004.

Pont de Möbius

Estructura pont de Möbius

- Casa de Möbius

El 1993, una jove parella va encarregar a l'arquitecte holandès Ben van Berkel dissenyar "una casa que fos reconeguda com un projecte de referència en termes de renovació del llenguatge arquitectònic". Després de sis anys de treball, l'arquitecte va donar resposta als desitjós dels clients amb una casa que es basava en els estudis d'un matemàtic alemany del segle XIX.
El lloc escollit va ser un fageda entre prats a Het Gooi, una zona residencial pròxima a Amsterdam.
Ben van Berkel va entendre que el nou llenguatge arquitectònic que li havien requerit havia de ser una conseqüència directa del nou tipus de vida dels seus clients. La idea de dues persones circulant pels seus propis recorreguts però compartint certs moments, i possiblement intercanviant els seus papers en determinats punts, va ser desenvolupada fins a arribar a materialitzar com a objecte construït. La casa havia de entrellaçar els diversos estadis de les diferents activitats de cada membre de la família en una mateixa estructura: treballar, dormir, socialitzar, la vida familiar, i fins i tot el temps de solitud que es necessita per un mateix. Conseqüentment, la noció del temps i la seva durada van ser conceptes importants des d'un principi i que, més tard, influirien en la forma relativa de percebre la casa i els seus objectes des de diferents punts de vista. L'esquema que recull aquests trets va ser trobat a la banda de Moebius, el diagrama estudiat per l'astròleg i matemàtic August Ferdinand Möbius (1790-1868). La banda Moebius és la figura d'un 8 sense dret ni revés i sense principi ni fi.
Berkel projectar a partir de la banda Moebius una casa que integra el programa, la circulació i l'estructura, tot això sense costures. El moviment a través d'aquest bucle construït en formigó traça totes les pautes de l'activitat diària.



Casa de Möbius 3D

Casa de Möbius

Casa Möbius 3D

Casa de Möbius

- Lansdowne Road Stadium dissenyat per HOK SVE, Scott Tallon Walker i Buro Happold, està encara en construcció.

Estadi de futbol Lansdowne Road Stadium

La cinta i el disseny

- Amb ajuda del programa Mathematica, el matemàtic de la Florida Atlantic Univ, Gerald Harnett, va dissenyar un Möbius Climber calculant com havien de col·locar els 64 triangles que la formen: estan enllaçats i muntats de tal manera que, en cada punt, l'estructura torta sembla tenir 4 cares (en realitat té 2). La construcció es troba a Boca Ratolí (Florida) i es diu Sugar Sand Science Playground. En aquesta variant en dimensió 3 de la banda de Möbius, els nens poden enfilar i jugar.

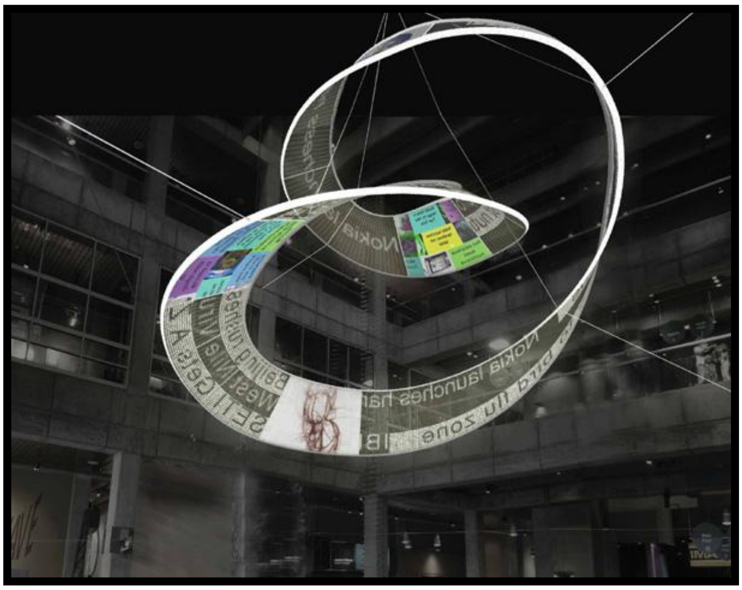
Antiga atracció de Möbius

Actual atracció de Möbius

- Moebius Ship de Tim Hawkinson, Museum of Contemporary Art, Sydney (Australia)

Vaixell de Möbius

- Vital Signs és una instal·lació interactiva dissenyada per donar notícies de ciència als visitants del museu Liberty Science Center. És una banda de Moebius de plàstic, sobre la qual es projecten informacions que els visitants poden apreciar des de qualsevol costat de l'atri.



Projecció interactiva de Möbius

- Altres

Cadira de Möbius, on la seva forma recorda la infinitud. El dissenyador és Assa Ashuach

Taula de Möbius

Sabata de Möbius, disseny de la firma United Nude. Es tracta d'una sabata de culte, que en una mateixa tira compleix la funció de sola, tacó i subjectador del peu. La part de dintre és la de fora.... i la de fora és la de dintre...

Banc de Möbius, fabricant amb fibra de vidre per l'artista Vito Acconci

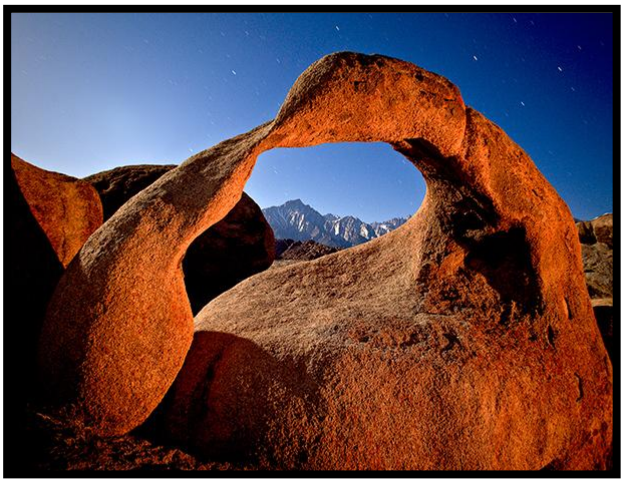
L'artista Max Bill estava treballant en 1935 en diferents possibilitats

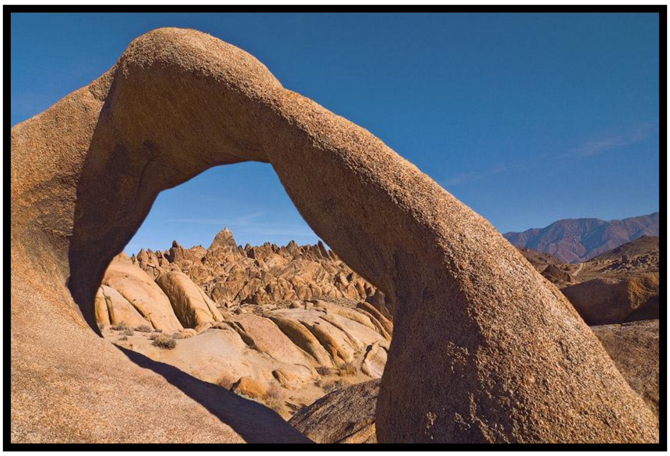
estètiques per una escultura , quan va crear un objecte d'una sola cara que va Anomenar Unendliche Scheife (cinta sense fi) . Sense ser conscient de que aquesta superfície ja tenia un segle d'antiguitat i no era ell l'inventor.

L'anell d'una sol costat, un símbol de la unitat.

Moebius a la vida quotidiana

Alabama Hills és una zona de formacions rocoses situades al peu de la muntanya de "Sierra Nevada" a Owens Valley (California) i que s'ha fet famós , entre altres raons, gràcies al seus impressionats arcs famosos per l'erosió. Un d'aquest arcs en concret té una forma molt especial, és el Möbius Arch, un magnífic arc en forma de banda de Möbius. Com es pot comprova la natura no es aliena a les matemàtiques.





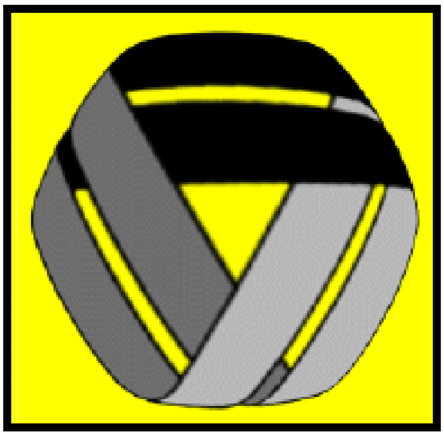
Arcs natural a California

- El símbol del reciclatge, que consisteix en tres fletxes que es persegueixen sobre les arestes d'un triangle, no és més que una banda de Möbius. Va ser creat per Gary Anderson el 1970, i representa el procés de transformació del material de rebuig en recursos útils.

Símbol del reciclatge

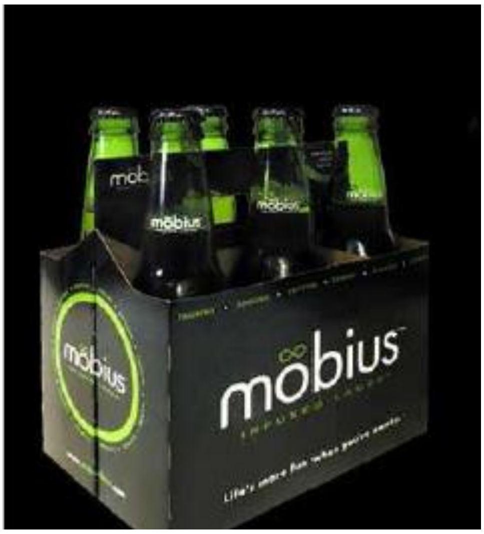
- Logotips

Logotip caixanova



Logotip universitat alemanya

La publicitat de productes molt dispars utilitzen la banda de Möbius o la seva simbologia d'infinitud. Aquesta cervesa energètica (amb TAURINA, GINSENG i CAFEINA), segons la publicitat, es la cervesa perfecta per les nits llargues i "happy hours."



5. CONSTRUCCIÓ D'UNA CINTA DE MÖBIUS

5.1 Motivació i objectius

Doncs aquí hem arribat a la part més pràctica del treball.
En un principi era un treball totalment de matemàtiques, però a mida que han anat passant els mesos la meva idea del treball ha anat canviant, no m'imaginaria pas que acabaria fent una maqueta.
El motiu és ben senzill, tota la part teòrica era una mica d'història i matemàtica, i vaig decidir que ja en tenia prou, que volia fer una pràctica més "pràctica" , divertida,... També he de dir que em va costar trobar alguna cosa que fer, que m'agradés, perquè d'opcions en tenia moltes, però així de s'obté vaig trobar l'idea clau, construir una cinta de Möbius, però no un cinta feta amb un tros de paper, sinó basada com les que apareixien abans a les indústries tèxtils en que la cinta feia rodar una politja i aquesta tenia una funció, ja fos cardar el cotó, estirar-lo etc.

Amb aquest apartat vull acabar de demostrar que la cinta de Moebius té solament una cara, i intentaré de demostrar-ho pintant-la amb un pinzell sense moure'l, també com es podria utilitzar en la vida real i buscar els avantatges i inconvenients que té enfront a una cinta normal etc...

5.2 Mecanisme de transmissió del moviment

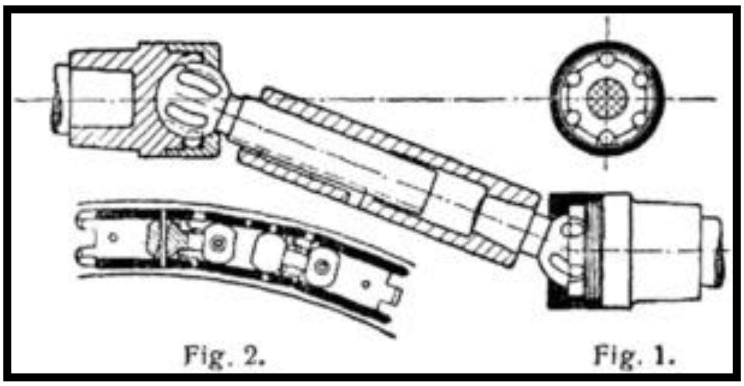
Els mecanisme de transmissió de moviment es poden considerar maquines, ja que no és possible la transmissió de moviment sense transmetre al mateix temps forces, cal considerar-los parts o conjunts mecànics d'una maquina, els quals tenen com a funció bàsica transmetre el moviment modificant-ne el valor o la forma

5.2.1 Mecanisme de transmissió directa

S'utilitzen quan cal efectuar una transmissió directa. Els mes utilitzats son els arbres i eixos i acoblaments.

- Arbres i eixos

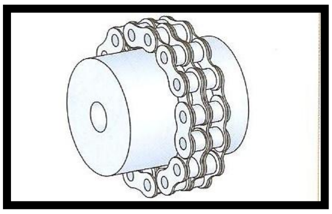
L'arbre és una peça cilíndrica, que transmet un moviment circular, per tant un moment o un parell motor. L'eix es una peça que també es cilíndrica sobre la qual giren unes altres peces d'un conjunt mecànic.
La diferència entre els dos és que l'arbre transmet un moment de torçor o un parell motor i està sotmès bàsicament a un esforç de torsió, mentre que l'eix només transmet el moment i serveix de suport. Ho trobem al palier o semieix d'un automòbil.



Eix i arbre

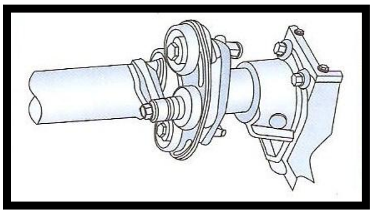
-Acoblament

-Acoblament rígid: Els arbres o eixos s'uneixen amb peces metàl·liques rígides fixades amb caragols.



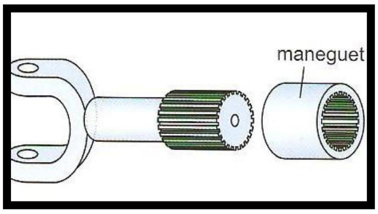
Acoblament rígid

- Acoblament flexible: Es duu a terme mitjançant una junta elàstica de goma o de cautxú.



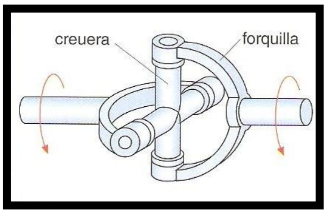
Acoblament flexible

- Acoblament mòbil: S'utilitza quan la separació entre els arbres o eixos ha de ser variable.



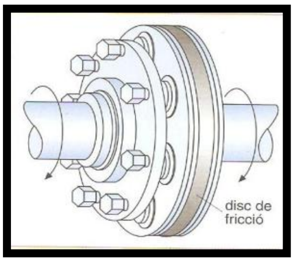
Acoblament mòbil

- Cardan o junta universal: Quan cal transmetre un moment o torçor de motor entre dos elements rotatoris,els eixos dels quals no estan alineats i es tallen. S'utilitza per transmetre
el moviment als automòbils entre la caixa de canvi i les rodes



Cardan o junta universal

- El disc de fricció: s'acobla entre l'arbre i la politja que transmet el moment, de manera que a través d'una rosca es pot ajustar la pressió entre el disc, l'arbre i la rosca.

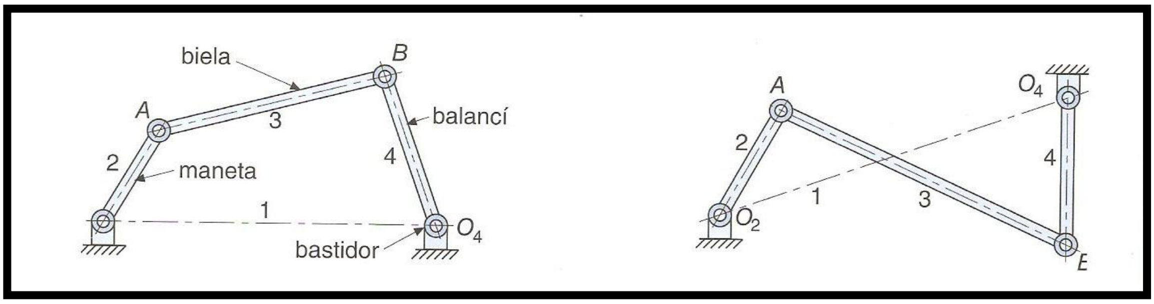


Disc de fricció

5.2.2 Mecanisme articulats

- Mecanisme de quatre barres articulades

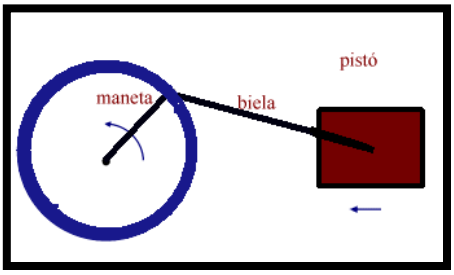
És un dispositiu molt simple format per quatre barres unides entre si amb articulacions. Si les barres unides a l'estructura giren completament s'anomenen manetes i si només oscil·len s'anomenen balancins. Ho podem trobar a les suspensions del cotxe.



Mecanisme de quatre barres articulades

- Mecanisme biela-maneta

Aquest mecanisme transforma el moviment circular en moviment rectilini i a l'inrevés, de manera il·limitada, però tenint en compte que el moviment rectilini és alternatiu.
Un cas molt clar es quan pedalem amb la bicicleta, les cames fa de biela i els genolls de pistó.



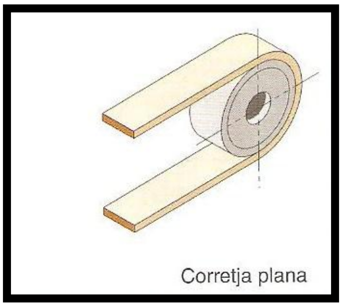
Biela-maneta

5.2.3 Transmissió mitjançant elements flexibles

- Transmissió per corretja

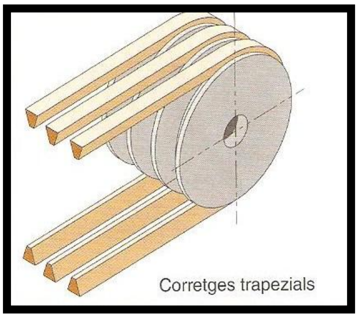
Esta formada per dues politges unides mitjançant un element flexible anomenat corretja. Te l'avantatge de poder treballar amb distancies molt llargues entre eixos. L'inconvenient es quan la corretja llisca i no assegura l'arrossegament de la politja. Ho podem trobar en molts electrodomèstics de la cuina, o en impressores.

Planes: Són corretges de perfil rectangular. Antigament s'utilitzaven de cuir o tèxtils. Actualment són de cautxús sintètics, reforçades o no amb acer, o de plàstics d'enginyeria.



Corretja plana

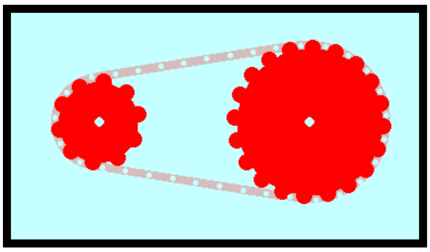
Trapezials: A diferència de les planes, la seva secció transversal és un trapezi. Aquesta forma és un artifici per augmentar les forces de fricció entre la corretja i les corrioles amb què interactuen



Corretges trapezials

-Transmissió per cadena

La transmissió es fa entre rodes dentades unides mitjançant una cadena. D'aquesta manera s'elimina la possibilitat de que es produeixi un lliscament entre els dos elements i es pot treballar amb distàncies llargues entre els eixos. L'inconvenient es que la velocitat no pot ser molt elevada. L'exemple mes clar és en una bicicleta



Transmissió per cadena

5.2.4 Transmissió mitjançant engranatges

Els engranatges son mecanismes de transmissió de moviment circular mitjançant rodes dentades. La roda que està connectada a l'aparell motor i que per tant, és la que empeny, s'anomena roda motriu i la que es empesa es diu roda conduïda. Un encenedor o una joguina de corda són els exemples més clars.

-Engranatges rectes: Transmeten el moviment rotatòria entre eixos paral·lels situats a poca distància. Velocitat de gir baixa i esforços petits.

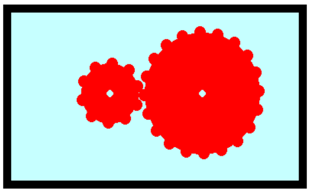
-Engranatges helicoïdals: Són igual que els engranatges rectes però la diferència es que tenen mes nombre de dents en contacte i això permet fer mes força.

-Engranatges cònics: Són els que transmeten el moviment entre dos eixos que es tallen.

-Engranatges interiors: Tenen les dents a l'interior, en contacte amb l'altre engranatge.

-El pinyó-cremallera: Es tracta d'una barra prismàtica amb dents, la cremallera, que engrana amb una roda dentada o pinyó. Quan el pinyó gira, la cremallera es mou en un sentit o un altre segons el sentit de rotació. També es pot fer a l'inrevés.

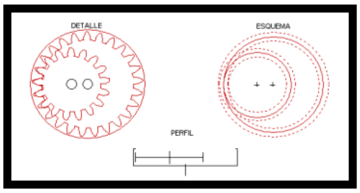
-El caragol sense fi: Es tracta de l'acoblament entre una rosca i un engranatge per la qual cosa sempre treballen amb eixos que es creuen normalment als 90º. Un dels avantatges d'aquest tipus de transmissió és que permet transmetre el moviment només en un sentit.



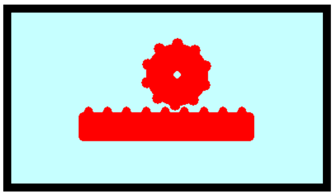
Engranatge recte

Engranatge helicoïdal

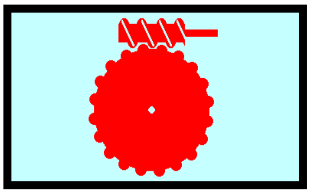
Engranatge cònic



Engranatge interior



Pinyó-cremallera



Cargol sense fi

5.3 Procés de construcció

- Material utilitzat

Retalls de fusta :4

Fusta gran per poder ficar tot el muntatge a damunt

Coixinets: 4

Tornillos de cap pla: 10

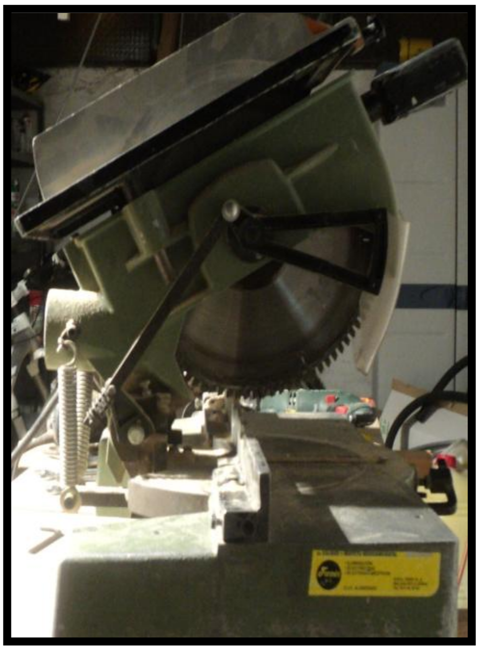
Arandelles: 8

Rosques: 14

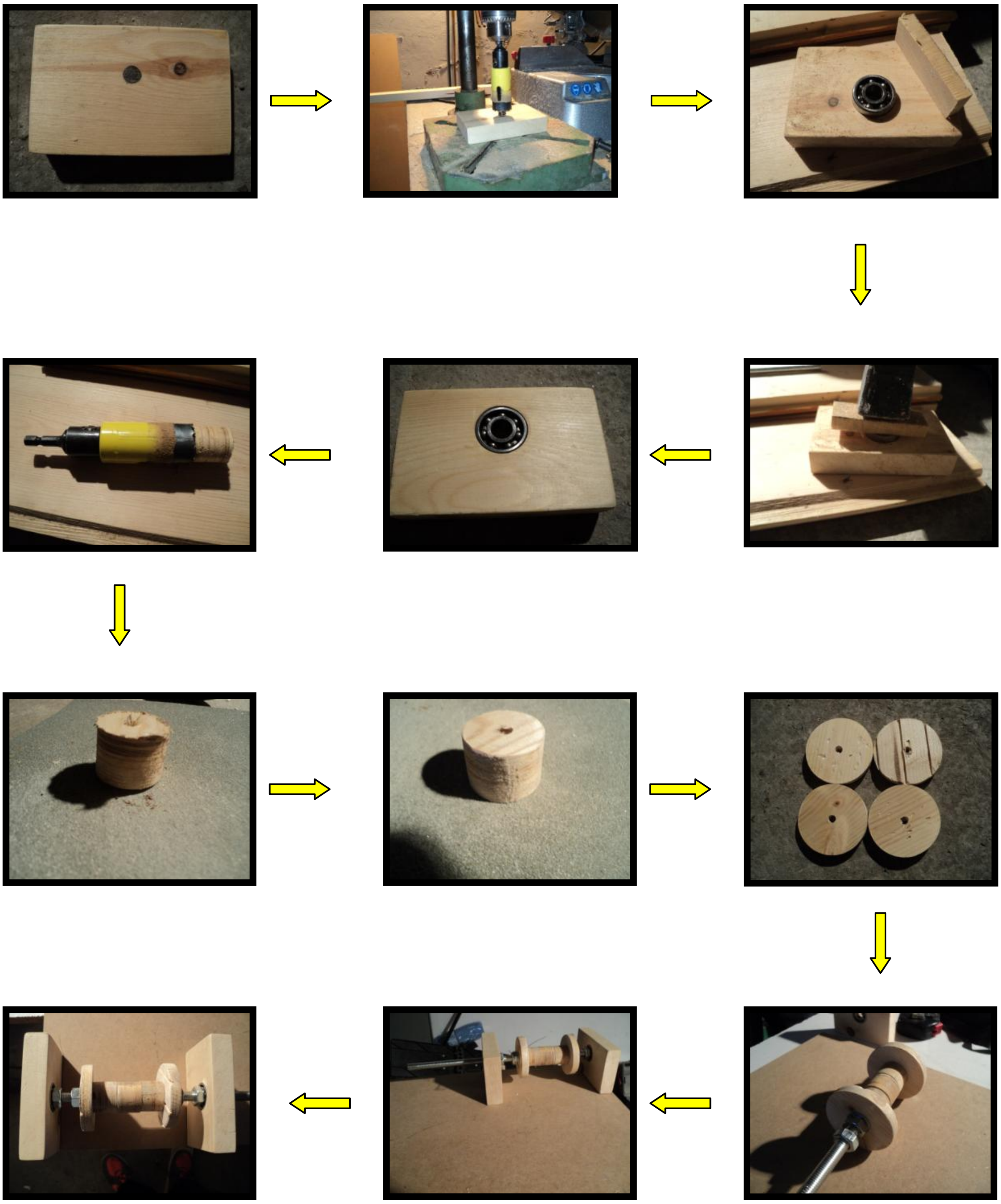
Càmera de bicicleta

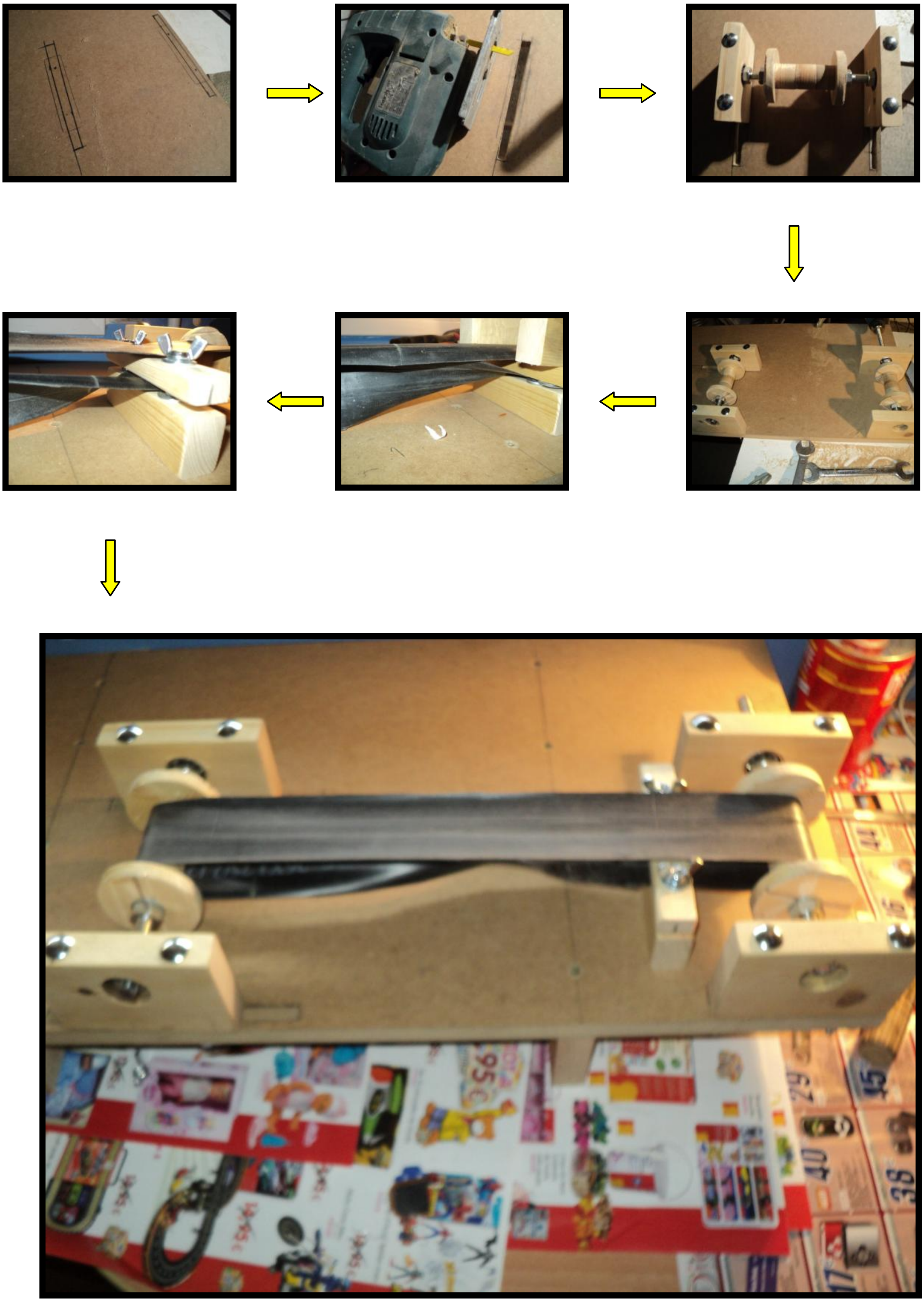
Varilles: 2

-EINES

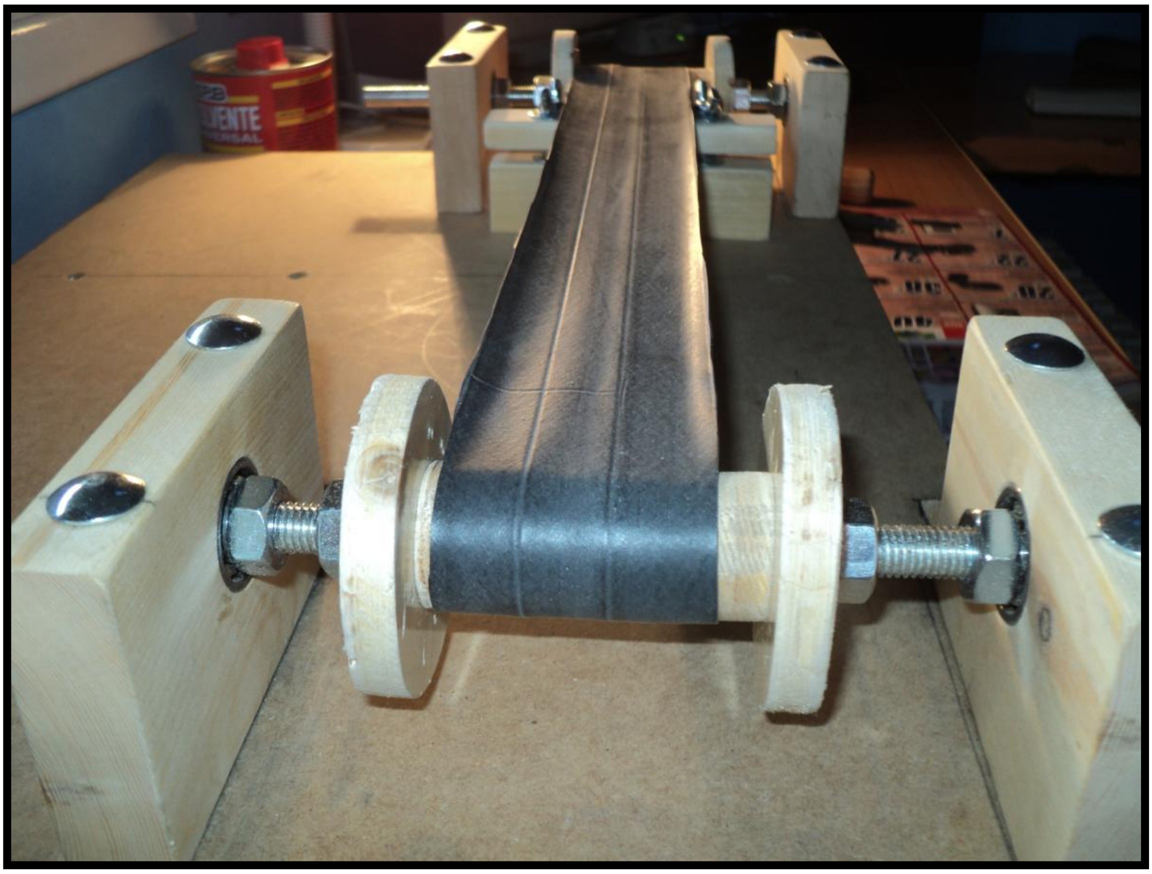


-Muntatge i explicació






TOTA
11,95 €
unitat



La part més difícil va ser la primera: de quina manera fer-ho, quin material utilitzar... Un cop vaig tenir clar això, ja va ser anar fent. Vaig decidir d'utilitzar material 100% reciclat. Primerament vaig agafar uns retalls de fustes, i vaig fer quatres retalls iguals d'una forma rectangular. Hi vaig fer uns forats per poder introduir-hi els coixinets. Com que els forats havien de ser bastant grans no vaig poder utilitzar una simple broca, així que vaig posar una corona a la broca per tal de que em quedes un forat a la mida dels coixinets, per tant dins de la corona quedava un cilindre que l'aprofitaria com a politja. També s'ha de dir que vaig haver de fer uns cilindres mes alts i prims perquè vaig poder comprovar que sinó la cinta s'escapava. Vaig col·locar els cilindres petits al mig de la varilla, seguidament els mes grans, amb les arandelles i rosques corresponents perquè quedes ben subjecte, i finalment vaig col·locar les dos fustes amb els coixinets a l'extrem. Això dos vegades.

Aleshores ho vaig col·locar a la fusta gran, la que em faria de base. Una la vaig ficar a l'extrem i l'altra vaig idea unes ranures perquè vaig pensar que la cinta havia d'anar ben tensada, i clar si ho deixava fix ben tensat, al ser goma, al final s'acabaria donant, i per això quan no es fa servir es pot destensar.

Vaig retallar la càmera de la bicicleta a la mida que necessitava, aleshores la vaig posar a les politges, vaig fer el doblec i vaig unir els extrems amb cola.

Vaig tallar la varilla que sortia pel costat, però a l'altra en vaig deixar un tros, on aniria el motor: el trepant.

Quan vaig arribar aquí ja em pensava que ja havia acabat i ja ho vaig ficar en marxa. Va ser un desastre, la cinta anava una mica "boja". Vaig trobar la solució gràcies a un cartutx de tinta de Moebius, que consistia en posar una ranura per on només pogués passar la cinta completament plana, així el dobles sempre es mantindria abans d'arribar a la ranura.

5.4 Conclusions

Aquí hem arribat a la última part, analitzar si els objectius plantejats al començament de la pràctica han estat assolits , així com explicar els diferents problemes i les corresponent solucions que s'han anat trobant en el procés de construcció.

Un dels primers objectius marcats en aquesta pràctica era construir una corretja de transmissió semblant a les utilitzades en les fabriques tèxtils. He utilitzat la trasnmissió mitjançant elements flexibles en concret la corretja plana, vaig analitzar totes les altres possibles opcions i crec que aquesta ha estat la millor.

La primera idea de construcció d'aquesta maqueta va anar canviant a mesura que apareixien complicacions en el seu funcionament :

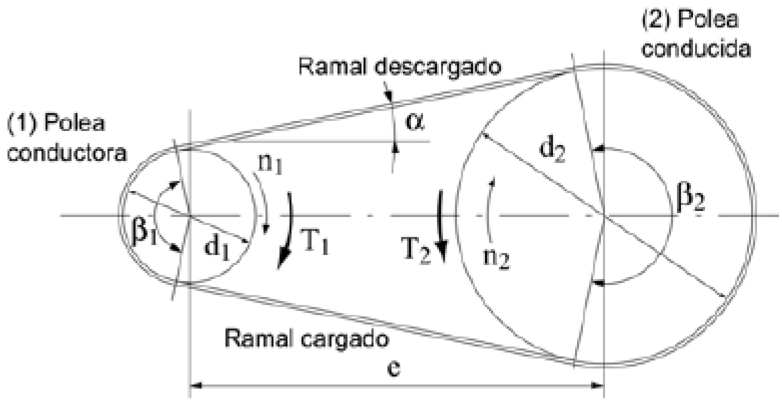
1. Primerament quan tenia acabat el muntatge, em vaig adonar de que els cilindres alts i prims que fan que la cinta es mantingui al seu lloc sempre, no eren suficientment alts i això originava que la cinta s'escapés pels costats. La solució que vaig adoptar va ser, construir uns cilindres mes alts perquè la cinta no s'escapes.

2. Una vegada que la cinta estava estabilitzada, quan posava en funcionament la maqueta vaig observar que el doblec de la cinta es desplaçava per tot el recorregut, situació gens ideal per al bon funcionament d'una corretja de transmissió. Així doncs vaig tenir que idear amb unes fustes una forma perquè el doblec es mantingués sempre per sota, però això té un inconvenient, que aleshores la cinta només pot girar en un sentit, perquè si gira en sentit contrari la cinta s'escaparà igualment, tot i que també podia haver ficat les dos fustes als dos costats i així fer que pogués girar en els dos sentits.

3. Una altre punt a tenir en compte es que aquesta no podia ser un maqueta estàtica, ja que si deixava la cinta sempre tensada la goma s'hagués donat i el dia de la presentació no hagués rodat. Això tenia dos possibles solucions utilitzar un altre tipus de material o be, la que he utilitzat jo. La meva idea va ser crear uns tensors perquè quan la cinta no estès en funcionament no estigues tensada, i així no s'acabaria donant.

4. Per un altra banda hi ha la col·locació de la cinta i la determinació de la seva longitud. En el meu cas tot plegat va ser un procés de tanteig. Jo quan vaig tenir el muntatge fet vaig agafar la cinta sense unir, la vaig col·locar de prova i vaig fer una marca d'una manera aproximada on havia de tallar la restant i així desprès poder unir-les. Com que tenia els tensors, si quedava una mica més llarga o curta no passava res.

Però també hagués pogut utilitzar la següent formula per tal de saber la distància de la cinta que necessitava:



$$L = 2e\cos\alpha + \frac{(d_1 + d_2)\pi}{2} + (d_2 - d_1)\alpha(\text{rad})$$

$$L = 2*36*\cos 0^{o} + \frac{(2.86 + 2.86)\pi}{2} + (2.86 - 2.56) = 80\text{cm}$$

Altres objectius marcats estaven més relacionats en la demostració d’alguna propietat d’aquesta cinta i en l’estudi de les seves aplicacions en l’enginyeria davant corretges de transmissió tradicionals: els avantatges i inconvenients els podem observar a partir de la pròpia experiència, ja que l’aprofitament és doble, igual que el rendiment i el desgast es redueixen a la meitat enfront a una cinta normal, i a l’hora de la construcció, no suposa molt més esforç que una cinta normal, l’única diferència es que s’ha d'unir donant mig tomb a un extrem.

Amb aquest maqueta volia demostrar d’una forma visual i clara que la cinta de Möbius té una única cara (Annex). Això s’ha aconseguit pintant amb un pinzell fix la cinta mentre la maqueta està amb funcionament. El resultat final ha sigut que la càmera de bicicleta muntada en forma de cinta de Möbius ha quedat pintada pel dos costats, cosa que no passaria si la cinta fos normal, es a dir, de dos cares.

CONCLUSIONS

Ja hem arribat a la part final del treball.

Un treball on he après molt conceptes nous: homeomorfisme, funció bijectiva, espai topològic, carta diferenciable.... I que m’ha permès entrar en contacte amb branques de les matemàtiques totalment desconegudes per mi, com la topologia o la geometria no- euclidiana.

La part que ha comportat més feina, o així m’ho ha semblat, ha estat la del estudi matemàtic, on he après que una geometria diferent a la de tota la vida, la euclidiana o la del col·legi, és possible. Per no parlar de la dificultat de la geometria diferencial (dins de les no euclidianes), i les diferents varietats que existeixen. Un cop acabada aquesta part tinc encara la sensació de deixar parts inexplorades d’aquest món de les varietats diferenciables, fins fa un mesos totalment desconegut per mi, ja que la complexitat de les matemàtiques que comportaven m’ha impossibitat pogué aprofundir-hi més.

També em resulta força sorprenent les aplicacions que té aquesta cinta, ja fos molt antigament en les indústries tèxtils o en les cintes de caset, o com s’utilitza ara, d’una forma més decorativa que atreu l’atenció de qualsevol persona, per la seva forma tant peculiar.

La part pràctica, la maqueta, ha estat un treball, a part de manual, també intel·lectual. Pensar la forma perfecta perquè funciones sense errors, requereix no només de destresa sinó també de fer funcionar el cervell.

I ja per acabar la conclusió més clara de fer un treball de recerca és que tot plegat ha sigut una experiència molt positiva ja que ha estat la primera vegada que he fet un treball d'aquesta magnitud. Però realitzar-lo sobre un tema que t'agradi, ajuda i molt a l'hora de ficat a fer-lo, perquè no ho veus com un deure, o veus com una forma d'investigar i saber coses sobre algun tema que és proper. Fer-lo t'ensenya que a més del treball pròpiament dit, s'ha de tenir en compte molts aspectes com l'organització, l'estructura, la redacció, el format...

I es clar , no puc acabar sense contestar la preguntar amb que he començat el treball:

La cinta de Möbius: matemàtiques, "màgia" o tecnologia?

Doncs després de tot no se si podria donar una resposta concreta. Crec que amb aquest treball ha quedat demostrat que la cinta de Möbius té una mica o una mica molt de les tres coses, i que tot depèn des de quin punt interessa observar-la. Des d'una vessant lúdica és portadora de màgia, des d'un punt de vista exacte, és un objecte matemàtic de gran dificultat i si l'observem des d'un punt pràctic o tecnològic el seu ús permet un estalvi de desgast i un augment de rendiment evident.

En qualsevol cas si alguna cosa crec que ha quedat clara, és que les matemàtiques estan molt presents al nostre voltant, en llocs que no podem arribar a imaginar i amb utilitats que disfrutem diàriment o gaudim estèticament, i la cinta de Möbius és un exemple evident.

BIBLIOGRAFIA

Montesinos Sirera, Jose. "Espacios topológicos" Pàgines: 29

Hernández Patricio, Luis Javier. "Introducción a la geometria diferencial" Pàgines:180

Sánchez Caja, Miguel / Flores Dorado, Jose Luís. "Introducción a la geometria diferencial de variedades" Pàgines: 290

Lucas, Pascual. "Variedades diferenciables y topologia" Pàgines: 170

Macho Stadler, Marta. "Topologia algebraica" Pàgines:128

Ivorca Castillo, Carlos. "Topologia algebraica con aplicaciones a la geometria diferencial" Pàgines: 499

Guijaro, Luís. "Topologia de variedades" Pàgines: 65

Macho Stadler, Marta. "¿Cómo estás, banda de Möbius? Pàgines: 115

De prada Vicente, M.A. "Clasificación de superficies" Pàgines:50

HISTÒRIA DE LA GEOMETRIA:

http://es.wikipedia.org/wiki/Historia_de_la_geometr%C3%ADa

http://www.profesorenlinea.cl/geometria/GeometriaHistoria.htm

http://www.jimena.com/egipto/apartados/mates.htm

http://ca.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Milet

http://ca.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A0gores

http://es.wikipedia.org/wiki/Los_elementos

http://es.wikipedia.org/wiki/Nikol%C3%A1i_Lobachevski

http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

http://es.wikipedia.org/wiki/J%C3%A1nos_BolyaiGGeometria

http://es.wikipedia.org/wiki/Postulados_de_Euclides

http://es.wikipedia.org/wiki/Relatividad_general

http://html.rincondelvago.com/geometria-euclidiana.html

http://issuu.com/ngiraldo/docs/geometriaeuclidiana

http://astroseti.org/articulo/4150/historia-de-la-geometria-no-euclidiana

http://www.scribd.com/doc/2873590/geometria-no-euclidiana http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_de_Riemann

http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_euclidiana

http://wapedia.mobi/es/Geometr%C3%ADa_no_euclidiana

GEOMETRIA DIFERENCIAL I VARIETATS:

http://es.wikipedia.org/wiki/Homeomorfismo

http://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa

http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto

http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_topol%C3%B3gico

http://es.wikipedia.org/wiki/Biyeccion

http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_inyectiva

http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_sobreyectiva

http://es.wikipedia.org/wiki/Variedad_diferenciable

http://es.wikipedia.org/wiki/Variedad_topol%C3%B3gica

http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_diferencial

http://es.wikipedia.org/wiki/Variedad_%28matem%C3%A1tica%29 http://ocw.upm.es/geometria-y-topologia/geometria-de-ayer-y-hoy/contenidos/unidad4/unidad41.htm

http://www.portalplanetasedna.com.ar/cien12.htm

http://www.monografias.com/trabajos57/variedades-afinidades-matematica/variedades-afinidades-matematica.shtml

http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/es/Mathematical_variety

http://es.wikiwix.com/?lang=es&action=Superficie%20cerrada

CINTA DE MÖBIUS:

http://brunodavid.wordpress.com/2007/07/28/la-cinta-de-mobius-moebius/

http://ztfnews.wordpress.com/2010/07/26/algunas-patentes-de-mobius/#more-2186

http://www.cs.berkeley.edu/~sequin/GEOM/MATHmodels/MoebSuspBridge.jpg

http://es.wikipedia.org/wiki/Banda_de_M%C3%B6bius

http://www.epsilones.com/paginas/p-laboratorio2.html#laboratorio-cintamoebius2

http://www.fotolog.com/mael_53/42715114

http://alquimiayciencias.blogspot.com/

LLIBRES:

Pickover, Clifford. 2009. **La banda de Möbius.** Almuzara.

Joseph, Joan. Hoyos, Roger. Garravé, Jaume. Garófano, Francesc. Vila, Francesc. **Tecnologia industrial 1r batxillerat.** McGrawHill

AGRAÏMENTS

Principalment agrair a la meva tutora del treball, la Vanessa, sense ella molta part del treball no hagués estat possible, m'ha ajudat a entendre conceptes, a estructurar el treball, ... però sobre tot s'ha quedat moltes tardes fins tard per tal de poder-me ajudar, ha fet una feina increible.

També donar gràcies a la Rosana, ella també m'ha ajudat en la part mes pràctica i tota la teoria tecnològica.

I per ùltim, el meu pare, ell m'ha proporcionat tot el material i les eines necessaries per poder construir la maqueta, juntament amb la meva mare han intentat ajudar en la part teorica del treball, però des d'un bon principi ja els hi vaig dir que no feia falta, tampoc haguessin entés res.