

[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
24 DE SETEMBRE DE 2018



CÀLCUL DE TRAJECTÒRIES DE COETS

Índex

Índex	3
Agraïments	4
Introducció	5
Hipòtesis	9
1 PARÀBOLES I TRAJECTÒRIA BÀSICA D'UN MÍSSIL BALÍSTIC	11
1.1 Què és una paràbola?	11
1.2 Trajectòria bàsica d'un cos	11
1.3 Moviment parabòlic bidimensional	11
1.4 Simulació del moviment parabòlic bidimensional	14
1.5 Conclusions del moviment parabòlic bidimensional bàsic	18
1.6 Moviment parabòlic tridimensional	18
1.7 Simulació del moviment parabòlic tridimensional	22
1.8 Conclusions del moviment parabòlic tridimensional ideal	26
2 EFECTES DE LA ROTACIÓ TERRESTRE	27
2.1 Efectes directes de la rotació	27
2.2 Conclusions de l'efecte directe de la rotació terrestre sobre el moviment parabòlic bàsic	30
2.3 L'efecte Coriolis (Conservació del moviment angular)	31
2.4 Simulacions del moviment parabòlic amb l'efecte Coriolis	33
2.5 Conclusions de l'efecte Coriolis	42
3 FREGAMENT	43
3.1 Desenvolupament teòric	43
3.2 Simulació dels efectes del fregament	47
3.3 Conclusions dels efectes del fregament	55
4 VARIACIÓ DEL CAMP GRAVITATORI	57
4.1 Simulacions de la variació del camp gravitatori	58
4.2 Conclusions de la variació del camp gravitatori	62
5 CURVATURA TERRESTRE	63

6	MECÀNICA ORBITAL	67
6.1	Base teòrica de la mecànica orbital	67
6.2	Òrbites circulars	69
6.3	Simulacions d'òrbites circulars	70
6.4	Conclusions de les òrbites circulars	79
6.5	Òrbites el·líptiques	80
6.6	Simulacions d'òrbites el·líptiques	84
6.7	Conclusions de les òrbites el·líptiques	93
6.8	Òrbites de transferència de Hohmann	93
6.9	Simulació de transferències d'òrbita	94
7	PROPULSIÓ	97
7.1	Base teòrica de la propulsió	97
7.2	Simulació de la posada en òrbita mitjançant propulsió	98
8	EXEMPLES CONCRETS	107
	EXEMPLE 1: COET CAP A LA LLUNA	107
	EXEMPLE 2: COET CAP A JÚPITER	110
	EXEMPLE 3: COET INTERESTELAR	111
	Bibliografia	115
	ANNEXOS	
A	CÀLCUL D'EQUACIONS DIFERENCIALS	2
B	TAULES DE VALORS	11
C	CARACTERÍSTIQUES DEL FALCON 9	45

Introducció

La indústria aeroespacial és un sector que es va trobar en el seu punt àlgid durant les dècades dels seixanta i els setanta degut a l'anomenada cursa aeroespacial entre els Estats Units i la Unió Soviètica. Eren els temps de la Guerra Freda i s'invertien molts diners en la recerca i desenvolupament de Tecnologies Aeroespacials amb un interès més o menys patriòtic en un intent de demostrar "poder científic". Tot i això, la Guerra freda va anar deixant de costat la cursa aeroespacial després de l'arribada de l'home a la Lluna el 1969, fet que va reduir any rere any el pressupost de les agències espacials per part dels estats. Durant els últims anys aquestes agències s'han vist limitades per la reducció de capital i per tant, no hi han hagut grans novetats en la recerca i descobriment de nous mètodes per a optimitzar, tant econòmicament com temporalment, els llançaments de coets.

L'any 2002 es va fundar l'empresa privada SpaceX, la qual ha tornat a donar vida a aquest sector que portava gairebé parat (en relació al seu potencial) des dels anys vuitanta. Des d'aquell moment SpaceX s'ha convertit en líder privat del sector, ha provocat l'aparició de competència i ha realitzat grans avenços en l'optimització econòmica i temporal. L'any 2015, després de 13 de recerca i desenvolupament, van aconseguir fer aterrar la primera etapa (més de 50 metres d'alçada) per a reutilitzar-la reduint, notablement, els costos dels llançaments.

Jo vaig veure com passava mitjançant una retransmissió en directe i em va impactar tant que vaig decidir investigar sobre el tema, saber més dades de com ho havien aconseguit i descobrir la ciència que s'hi trobava al darrera. Per això, vaig decidir que el meu TDR era una bona ocasió per a aprofundir en aquest món de forma més seriosa i és ben sabut que la base d'aquests llançaments és la planificació. Per a planificar un llançament i saber que ha de fer el coet en cada moment, cal saber com és comportarà aquest.

El meu TDR no tenia unes hipòtesis ben marcades ja que el càlcul de trajectòries de coets comporta moltes variables les quals tenen desenes o centenars d'anys de recerca i experimentació al darrera. Per tant es va decidir realitzar una àlisis de les variables més significatives dins de les matemàtiques i la física que ja sabia i que podia tenir al meu abast.

S'ha dividit aquest TDR en set capítols teoricopràctics en els quals s'analitza una variable o diverses variables que provoquen un comportament concret en un cos. Les hipòtesis s'han anat plantejant a mesura que es realitzaven els capítols. Pel que fa a la part pràctica,

no es podia realitzar una pràctica real degut als costos, el temps i la dificultat que comportaria, per això s'ha optat per realitzar programes mitjançant llenguatges com ara C o M capaços de calcular trajectòries de coets tenint en compte les diverses variables. També s'ha utilitzat l'eina MatLab per a realitzar els gràfics de les dades generades pels programes.

Finalment, s'han introduït tres annexos en els quals es troba: la derivació i integració d'algunes equacions diferencials, les taules de valors generades pels programes i les característiques del coet Falcon9 utilitzat com a model en aquest treball.

Hipòtesis

Hipòtesi 1:

L'angle de llançament respecte a l'eix y en el moviment parabòlic afecta a l'alçada màxima mentre que l'angle respecte a l'eix x no hi fa cap efecte.

Hipòtesi 2:

Si es llança el coet en sentit contrari al de la rotació terrestre hi hauran canvis notables en la trajectòria a diferència que si es llença en sentit favorable.

Hipòtesi 3:

El fregament és una força que sempre s'oposa al vector velocitat.

Hipòtesi 4:

Per a canviar d'una òrbita baixa a una alta només s'ha de canviar a la velocitat de l'òrbita alta.

Hipòtesi 5:

La quantitat de massa que expulsa un coet és constant, per tant, també ho és el seu vector de propulsió.

Hipòtesi 6:

La trajectòria d'un coet es pot calcular agafant de base el moviment parabòlic i afegint-hi forces.

Capítol 1

PARÀBOLES I TRAJECTÒRIA BÀSICA D'UN MÍSSIL BALÍSTIC

En aquest apartat es parlarà sobre què són les paràboles, què és la trajectòria ideal d'un cos (en aquest cas d'un projectil) i s'explicarà la base teòrica darrera del moviment parabòlic. Finalment, es farà una anàlisi pràctica d'aquest marc teòric mitjançant una simulació per ordinador.

1.1 Què és una paràbola?

Una paràbola és una corba que es pot situar en un espai bidimensional o tridimensional la qual té un eix de simetria que passa per un punt anomenat vèrtex. Matemàticament, s'obté com a resultat d'una funció quadràtica mentre que en física s'obté com a trajectòria quan a un cos se li apliquen dues components: una constant i una accelerativa.

1.2 Trajectòria bàsica d'un cos

Cal aclarir que com a trajectòria bàsica s'entén aquella que es troba en un entorn sense cap tipus de comònent externa a part de les dues fonamentals (la constant i l'accelerativa), com ara la fricció i sense cap tipus de moviment del marc de referència. Per això una paràbola es correspon a la trajectòria bàsica d'un projectil: hi intervé una component d'acceleració (força gravitatòria) i una velocitat inicial que és manté constant gràcies a la Primera llei de Newton (en aquest cas no hi ha propulsió, estem parlant d'un projectil no d'un coet).

1.3 Moviment parabòlic bidimensional

En el cas d'un entorn bidimensional, trobarem els eixos x (component horitzontal) i y (component vertical). L'objecte, que parteix amb una velocitat inicial (v_0), tindrà una velocitat final (v) diferent a l'inicial degut a l'acceleració de la gravetat. Per treballar amb aquesta velocitat inicial, l'hem de descompondre en les dues components; per tant, utilitzem les raons trigonomètriques de la següent manera:

$$v_{0x} = v_0 * \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 * \sin \alpha$$

α = angle de v_0 respecte a l'horitzontal | v_0 = mòdul de la velocitat inicial
 v_{0x} = velocitat inicial de la component x | v_{0y} = velocitat inicial de la component y

A continuació es veurà quin tipus de moviment aplica per a cada component i les equacions del moviment que corresponen a cadascuna.

- Component horitzontal (x): En la component x , no hi ha cap tipus d'acceleració ni força que pari a l'objecte; per tant, la velocitat de moviment serà constant. Es tracta de **Moviment Rectilini Uniforme** (MRU), al que correspon la següent expressió matemàtica (equació del moviment per a la component x):

$$x = x_0 + v_{0x} * t$$

$$\begin{aligned} x &= \text{posició final} \mid x_0 = \text{posició inicial (normalment 0)} \\ v_{0x} &= \text{velocitat inicial de la component } x \mid t = \text{temps de vol} \end{aligned}$$

- Component vertical (y): En la component vertical y , trobem una acceleració; la gravetat. A més a més, hi trobem la component vertical de la velocitat inicial. Aquesta velocitat inicial es veurà disminuïda en la component y per l'efecte de l'acceleració gravitatòria i no tindrà una velocitat constant com la de la component x . Per tant, es tracta d'un **Moviment Rectilini Uniformement Accelerat** (MRUA) que s'expressa amb la següent expressió matemàtica (equació del moviment per a la component y):

$$y = y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2$$

$$\begin{aligned} y &= \text{posició final} \mid y_0 = \text{posició inicial (normalment 0)} \\ v_{0y} &= \text{velocitat inicial de la component } y \mid t = \text{temps de vol} \mid g = \text{gravetat} \end{aligned}$$

Per a obtenir una funció de la trajectòria parabòlica ideal bidimensional necessitem l'anomenada equació de la trajectòria, que es una correlació de les dues components. Per a relacionar dos equacions entre elles fem un sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} * t \\ y = y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2 \end{cases} \quad t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} = \frac{x}{v_0 * \cos \alpha}$$

$$y = y_0 + v_{0y} * \frac{x}{v_0 * \cos \alpha} - \frac{1}{2} * g * \left(\frac{x}{v_0 * \cos \alpha} \right)^2$$

$$y = 0 + v_0 * \sin \alpha * \frac{x}{v_0 * \cos \alpha} - \frac{1}{2} * g * \left(\frac{x}{v_0 * \cos \alpha} \right)^2$$

$$y = \frac{v_0 * \sin \alpha * x}{v_0 * \cos \alpha} - \frac{1 * g * x^2}{2 * v_0^2 * \cos^2 \alpha}$$

$$y = \tan \alpha * x - \frac{g}{2 * v_0^2 * \cos^2 \alpha} * x^2$$

Un cop tenim l'equació de la trajectòria podem determinar que la funció d'un projectil en dues dimensions és:

$$f(x) = \tan \alpha * x - \frac{g}{2 * v_0^2 * \cos^2 \alpha} * x^2$$

x = posició final | $f(x)$ = funció de x | α = angle de v_0 respecte a l'horitzontal
 v_0 = velocitat inicial | t = temps de vol | g = gravetat

Per a les simulacions ens és interessant calcular el temps de vol, l'abast màxim i l'altura màxima per a poder obtenir uns resultats contrastables més enllà dels gràfics. Per a calcular el temps de vol podem aïllar la variable del temps d'una de les equacions del moviment, i com que l'utilitzarem per a calcular l'abast màxim, l'aïllem del de l'equació de les y .

$$y = y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2$$

$$y = (\cancel{y_0} + v_{0y} - \frac{1}{2} * g * t) * t$$

La variable t ens indica el temps de vol. Això significa que en l'instant del valor de la mateixa l'altura serà 0:

$$0 = (v_0 * \sin \alpha - \frac{1}{2} * g * t) * t$$

Aïllant l'expressió anterior obtenim la fórmula del temps de vol per al moviment parabòlic bidimensional ideal:

$$t = \frac{2 * v_0 * \sin \alpha}{g}$$

Un cop més s'utilitza el temps de vol per a calcular l'abast màxim (el valor més gran de x), que es compleix quan el vol acaba:

$$x = x_0 + v_{0x} * t$$

$$x = \cancel{x_0} + v_0 * \cos \alpha * \frac{2 * v_0 * \sin \alpha}{g}$$

$$x_{max} = \frac{v_0^2 * \sin 2\alpha}{g}$$

Finalment, es calcula l'alçada màxima sabent que quan l'objecte arriba al punt més alt deixa de pujar i comença a baixar per efecte de la gravetat. Així, la seva velocitat de l'eix y equival a 0:

$$v_y = v_{0y} * t - g * t$$

$$0 = v_0 * \sin\alpha * t - g * t$$

Un cop més s'utilitza el temps de vol per a simplificar l'expressió anterior:

$$y = v_0 * \sin\alpha * \frac{2 * v_0 * \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} * g * \left(\frac{2 * v_0 * \sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$y = \frac{v_0^2 * \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 * \sin^2\alpha}{2g}$$

Fent denominador comú, queda la següent expressió indicadora de l'alçada màxima a la que arribarà l'objecte:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 * \sin^2\alpha}{2g}$$

1.4 Simulació del moviment parabòlic bidimensional

En aquest apartat, es proposa descobrir com afecta l'angle de llançament i la velocitat en el moviment parabòlic bidimensional mitjançant un codi MatLab. El codi que s'ha realitzat és el següent (les anotacions del codi es troben en verd):

```

1  %aquesta simulació es realitza en un entorn ideal, no hi ha forces
2  %externes(fricció...) la terra es plana, no es mou...
3  alpha = 90; %indica l'angle de llançament respecte a l'eix 'x' (graus)
4  v0 = 100; %indica la velocitat inicial del llançament (m/s)
5  g = 9.8067; %variable corresponent a la gravetat (m/s^2)
6  t = (2 * v0 * sind(alpha))/g; %inicia i calcula la variable del temps de
   vol
7  tvol = linspace(0,t); %crea un vector que conté tots els valors enre el 0
   i el temps de vol
8  xmax = (v0^2 * sind(2*alpha))/g; %calcula l'abast màxim
9  ymax = (v0^2 * (sind(alpha))^2)/(2*g); %calcula l'altura màxima
10 x = v0 * cosd(alpha) * tvol; %inicia i calcula una variable que conté
   tots els valors de x
11 y = v0 * sind(alpha) * tvol - ((g/2)* tvol.^2); %inicia i calcula la
   variable que conté tots els valors de y
12 plot(x,y) %crea el gràfic de x sobre y
13 grid on %activa la quadrícula del gràfic
14 %aquesta primera part del codi ha estat dedicada a iniciar i calcular
   totes les variables
15 %les variables s'han agrupat en vectors (arrays) ja que per exemple volem
   calcular molts valors del temps de vol per tal d'obtenir un gràfic
   gairebé continu.

```

```

16
17 if xmax > ymax %s'ha programat aquesta funció if per a que escali els
    eixos
18     xlim([0 xmax])
19     ylim([0 xmax])
20 else
21     xlim([0 ymax])
22     ylim([0 ymax])
23 end
24 xmax %mostra l'alçada màxima a la consola
25 ymax %mostra l'alçada màxima a la consola

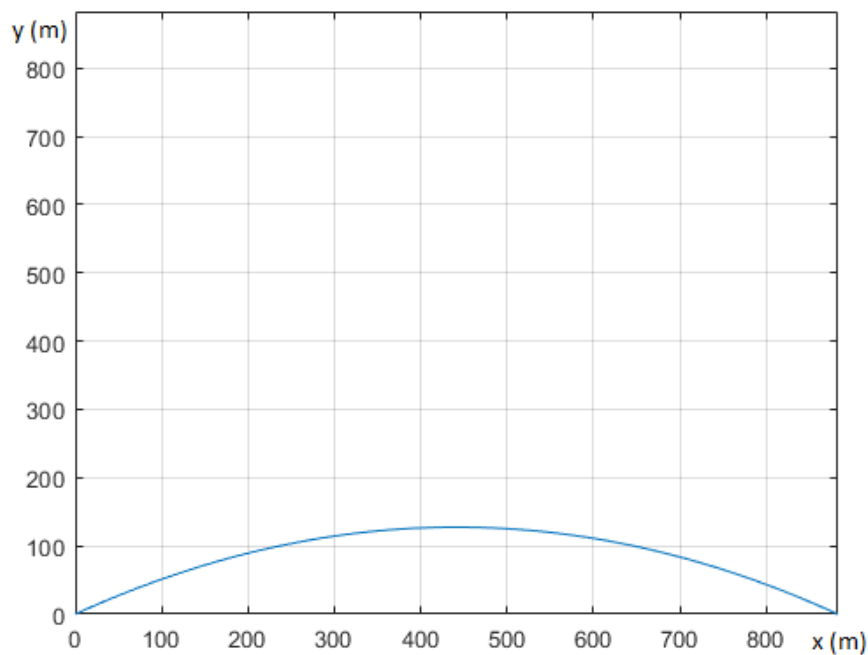
```

Listing 1.1: Codi del moviment parabòlic bidimensional ideal

Primer de tot, es tractarà d'analitzar els canvis que produeix l'angle en el llançament. Per a dur a terme aquesta tasca, es realitzen simulacions amb angles de 30° , 45° i 60° . Totes les simulacions consten d'una velocitat inicial de 100 m/s.

Simulació 1.1 (30° a 100 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} i y_{max} són:

$x_{max} =$

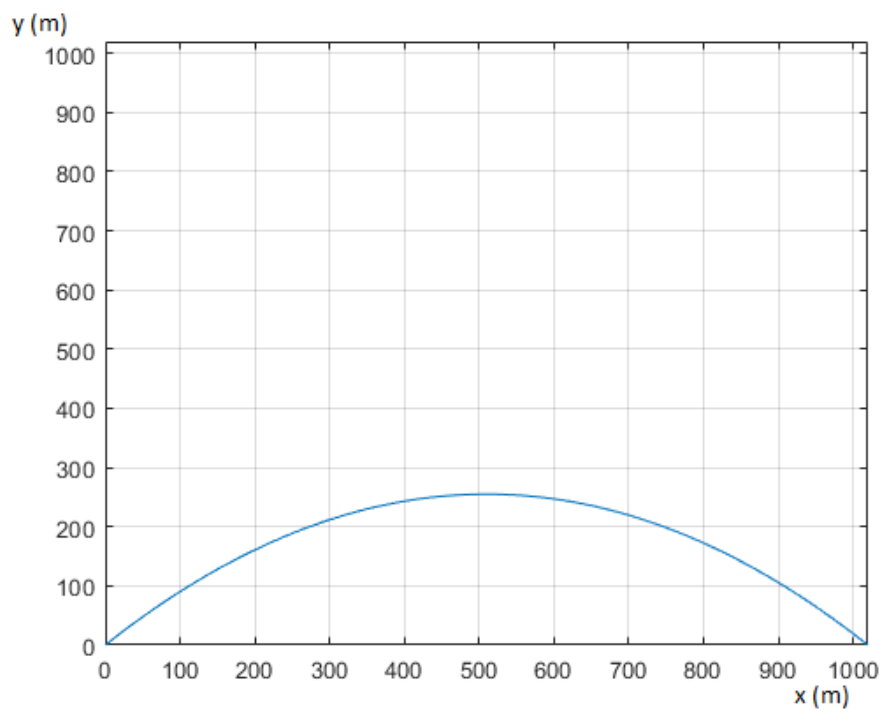
883.0956

$y_{max} =$

127.4639

Simulació 1.2 (45° a 100 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} i y_{max} són:

$x_{max} =$

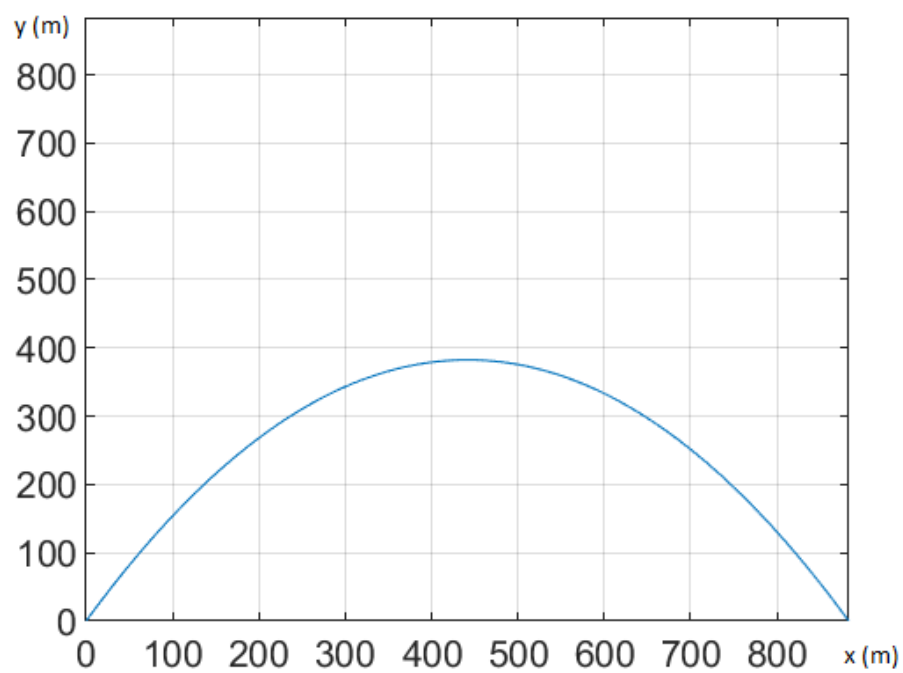
1.0197e+03

$y_{max} =$

254.9278

Simulació 1.3 (60° a 100 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} i y_{max} són:

$x_{max} =$

883.0956

$y_{max} =$

382.3916

1.5 Conclusions del moviment parabòlic bidimensional bàsic

Les simulacions del moviment parabòlic bidimensional han donat els següents resultats:

Simulació	Angle	x_{max}	y_{max}
1.1	30°	883.0956	127.4639
1.2	45°	1019.7	254.9278
1.3	60°	883.0956	382.3916

D'aquests resultats se'n poden extreure dues proporcionalitats:

- La del angle respecte a l'abast màxim.
- La del angle respecte a l'alçada màxima.

Pel que fa a l'abast màxim s'observa que els valors per a 30° i per a 60° són els mateixos (883.0956 m) mentre que a 45° l'abast màxim augmenta fins a 1019.7 m. Això indica que dels 0° fins als 45° l'abast màxim anirà de 0 m fins a 1019.7 m, i que dels 45° als 90° farà la inversa (de 1019.7 m a 0 m). Aquest fet explicaria que els valors de 30° i 60° siguessin iguals.

Per l'altra, banda s'aprecia que l'alçada màxima sempre augmenta amb l'angle de llançament.

Es pot afirmar que en el moviment parabòlic bidimensional bàsic un angle de 45° aconseguirà l'abast màxim més gran possible mentre que un angle de 90° farà arribar l'objecte a l'alçada més gran possible.

1.6 Moviment parabòlic tridimensional

El nostre univers funciona mitjançant tres dimensions. Per tant, el primer pas a realitzar per a resoldre el problema del coet és afegir una tercera dimensió a les dues que ja tenim: longitud (eix x) i alçada (eix y). Aquesta dimensió l'anomenarem profunditat (eix z). D'ara en endavant aquestes tres dimensions apareixeràn com x , y i z . Al haver afegit una dimensió més, també s'hauràn de tenir en compte els nous angles i les noves velocitats que apareixeràn:

1. α = angle de x respecte a v_0
2. β = angle de y respecte a v_0
3. v_{0x} = velocitat inicial a l'eix x
4. v_{0y} = velocitat inicial a l'eix y
5. v_{0z} = velocitat inicial a l'eix z

A continuació es troben les equacions de la velocitat inicial als diversos eixos:

$$v_{0x} = v_0 * \cos \alpha * \sin \beta$$

$$v_{0y} = v_0 * \cos \beta$$

$$v_{0z} = v_0 * \sin \alpha * \sin \beta$$

Tot seguit, es realitza una anàlisi teòrica de les equacions del moviment parabòlic tridimensional i es tracta d'obtenir una nova funció que apliqui per a tres dimensions. En l'eix x , continuem trobant un velocitat constant ja que no hi han components externes que l'afectin: es tracta de MRU. En l'eix y , continuem trobant una acceleració causada per la gravitació terrestre: es considerarà MRUA. Finalment, en l'eix z trobem que no hi ha cap acceleració que s'apliqui a aquest (la gravetat afecta només a l'eix y) ja que estem parlant d'unes condicions bàsiques: terra plana - la gravetat és vertical -, sense fricció, etc. Per tant, podem dir que es tracta de MRU.

$$x = x_0 + v_{0x} * t$$

x = posició final | x_0 = posició inicial (normalment 0)
 v_{0x} = velocitat inicial de la component x | t = temps de vol

$$y = y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2$$

y = posició final | y_0 = posició inicial (normalment 0)
 v_{0y} = velocitat inicial de la component y | t = temps de vol | g = gravetat

$$z = z_0 + v_{0z} * t$$

z = posició final | z_0 = posició inicial (normalment 0)
 v_{0z} = velocitat inicial de la component z | t = temps de vol

Un cop més es realitza un sistema d'equacions per a trobar una correlació entre totes tres:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + v_{0x} * t \\ y = y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2 \\ z = z_0 + v_{0z} * t \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t = \frac{z - z_0}{v_{0z}} = \frac{z}{v_{0z}} \\ t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} = \frac{x}{v_{0x}} \end{array}$$

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} = \frac{z - z_0}{v_{0z}}$$

$$t = z * (x_0 + v_{0x}) = x * (z_0 + v_{0z})$$

$$t = z * x_0 + z * v_{0x} = x * z_0 + x * v_{0z}$$

$$t = \cancel{z * 0} + z * v_{0x} = \cancel{x * 0} + x * v_{0z}$$

$$t = \frac{z * v_{0x}}{x * v_{0z}}$$

$$t = \frac{z * \cancel{v_0} * \cos \alpha * \cancel{\sin \beta}}{x * \cancel{v_0} * \sin \alpha * \cancel{\sin \beta}}$$

$$t = \frac{z}{x} * \cot \alpha$$

$$y = y_0 + v_0 y * \left(\frac{z}{x} * \cot \alpha \right) - \frac{g}{2} * \left(\frac{z}{x} * \cot \alpha \right)^2$$

$$y = v_0 * \cos \beta * \frac{z}{x} * \cot \alpha - \frac{g * z^2}{2 * x^2} * \cot^2 \alpha$$

Una vegada més hem obtingut una equació de la trajectòria a partir de les equacions del moviment, però aquesta s'adequa més al nostre univers tridimensional. D'aquesta n'extreiem la següent funció:

$$f(x, z) = v_0 * \cos \beta * \frac{z}{x} * \cot \alpha - \frac{g * z^2}{2 * x^2} * \cot^2 \alpha$$

x = posició final eix x | z = posició final eix z | $f(x, z)$ = funció de x i z | α = angle de v_0 respecte a x
 β = angle de v_0 respecte a y | v_0 = velocitat inicial | t = temps de vol | g = gravetat

Es tornen a calcular el temps de vol, l'abast màxim (x) i l'alçada màxima (y) per a realitzar el codi de les simulacions. El temps de vol es torna a obtenir de l'equació de les y :

$$y = y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2$$

$$y = (y_0 + v_{0y} - \frac{1}{2} * g * t) * t$$

La variable t indica el temps de vol, que indica que quan el temps de vol acabi el valor de y serà 0:

$$0 = (v_0 * \cos \beta - \frac{1}{2} * g * t) * t$$

Aïllant l'expressió anterior:

$$t = \frac{2 * v_0 * \cos \beta}{g}$$

Un cop més, s'utilitza el temps de vol per a calcular l'abast màxim (el valor més gran de x) que es compeix quan el vol acaba, per tant:

$$x = x_0 * v_{0x} * t$$

$$x = \cancel{x_0} * v_0 * \cos\alpha * \sin\beta * \frac{2 * v_0 * \cos\beta}{g}$$

$$x_{max} = \frac{v_0^2 * \cos\alpha * \sin 2\beta}{g}$$

En el moviment tridimensional cal afegir l'abast màxim de l'eix z , que es calcula igual que el de l'eix x :

$$z = z_0 * v_{0z} * t$$

$$z = \cancel{z_0} * v_0 * \sin\alpha * \sin\beta * \frac{2 * v_0 * \cos\beta}{g}$$

$$z_{max} = \frac{v_0^2 * \sin\alpha * \sin 2\beta}{g}$$

Finalment, es calcula l'alçada màxima de l'objecte en un entorn tridimensional:

$$v_y = v_{0y} * t - g * t$$

$$0 = v_0 * \cos\beta * t - g * t$$

Un cop més s'utilitza el temps de vol per a simplificar l'expressió anterior:

$$y = v_0 * \cos\beta * \frac{2 * v_0 * \cos\beta}{g} - \frac{1}{2} * g * \left(\frac{2 * v_0 * \cos\beta}{g} \right)^2$$

$$y = \frac{v_0^2 * \cos^2\beta}{g} - \frac{v_0^2 * \cos^2\beta}{2g}$$

Fent denominador comú, queda la següent expressió que indica l'alçada màxima a la que arribarà l'objecte:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 * \cos^2\beta}{2g}$$

1.7 Simulació del moviment parabòlic tridimensional

Aquest apartat és l'homòleg de la seció 1.3 però s'ha adequat el codi al moviment parabòlic tridimensional i s'han tornat a realitzar les simulacions. El codi que s'ha utilitzat per a obtenir els gràfics i resultats és el següent:

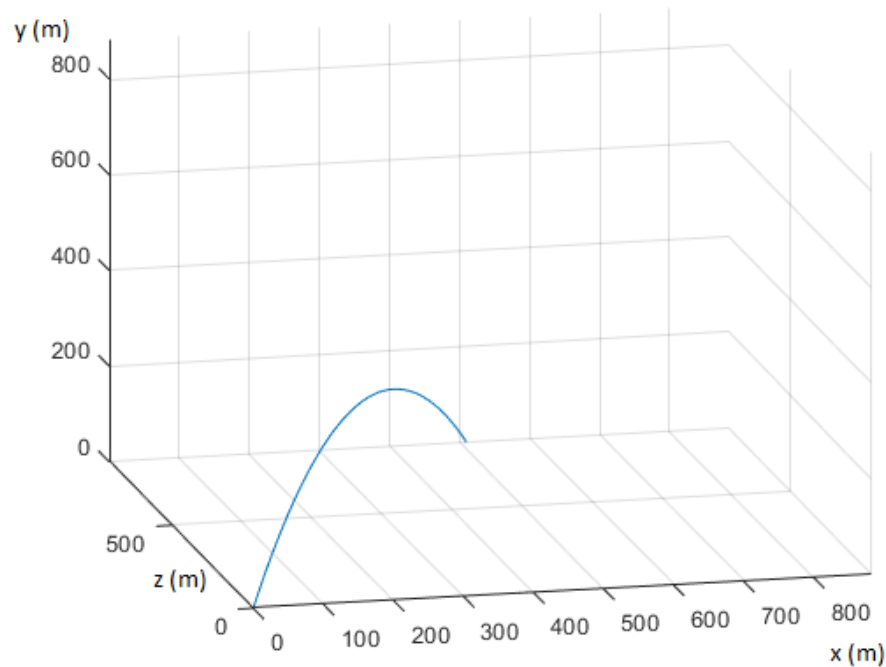
```
1 alpha = 45; %inicia la variable alpha amb un valor de 45 (graus)
2 beta = 10; %inicia la variable beta amb un valor de 45 (graus)
3 v0 = 100; %inicia la variable v0 amb un valor de 100m/s (velocitat inicial)
4 g = 9.8067; %inicia la variable g amb un valor de 9.8067 m/s^2 (gravetat)
5 t = (2*v0*cosd(beta))/g; %inicia la variable t i la calcula per quan y és 0
   (temps de vol)
6 tvol = linspace(0,t);
7 xmax = (v0^2 * cosd(alpha) * sind(2*beta))/g; %inicia la variable xmax i en
   calcula el valor a l'impacte ja que t és el temps de vol
8 ymax = (v0^2 * (cosd(beta))^2)/(2*g); %inicia i calcula la variable ymax
9 zmax = (v0^2 * sind(alpha) * sind(2*beta))/g; %inicia la variable zmax i en
   calcula el valor a l'impacte ja que t és el temps de vol
10 ; %inicia la variable zmax i en calcula el valor a l'impacte ja que t és el
   temps de vol
11 x = v0 * cosd(alpha) * sind(beta) * tvol; %calcula la matriu de x
12 y = v0 * cosd(beta) * tvol * ((g/2) * tvol.^2); %calcula la matriu de y
13 z = v0 * sind(alpha) * sind(beta) * tvol; %calcula la matriu de z
14 plot3(x,z,y); %diuixa el gràfic 3D
15 grid on; %activa la quadrícula al gràfic
16 if xmax >= zmax %determina la llargada dels eixos
17     if xmax > ymax
18         xlim([0 xmax])
19         ylim([0 xmax])
20         zlim([0 xmax])
21     else
22         xlim([0 ymax])
23         ylim([0 ymax])
24         zlim([0 ymax])
25     end
26 else
27     if xmax > ymax
28         xlim([0 xmax])
29         ylim([0 xmax])
30         zlim([0 xmax])
31     else
32         xlim([0 zmax])
33         ylim([0 zmax])
34         zlim([0 zmax])
35     end
36 end
37 xmax %mostra la variable xmax
38 ymax %mostra la variable ymax
39 zmax %mostra la variable zmax
```

Listing 1.2: Codi del moviment parabòlic tridimensional ideal

Les simulacions del moviment parabòlic tridimensional parteixen d'una velocitat inicial de 100 m/s. S'han realitzat les següents simulacions amb els següents angles::

Simulació 1.4 ($60^\circ(\alpha)$ i $45^\circ(\beta)$ a 100 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$x_{max} =$

509.8555

$y_{max} =$

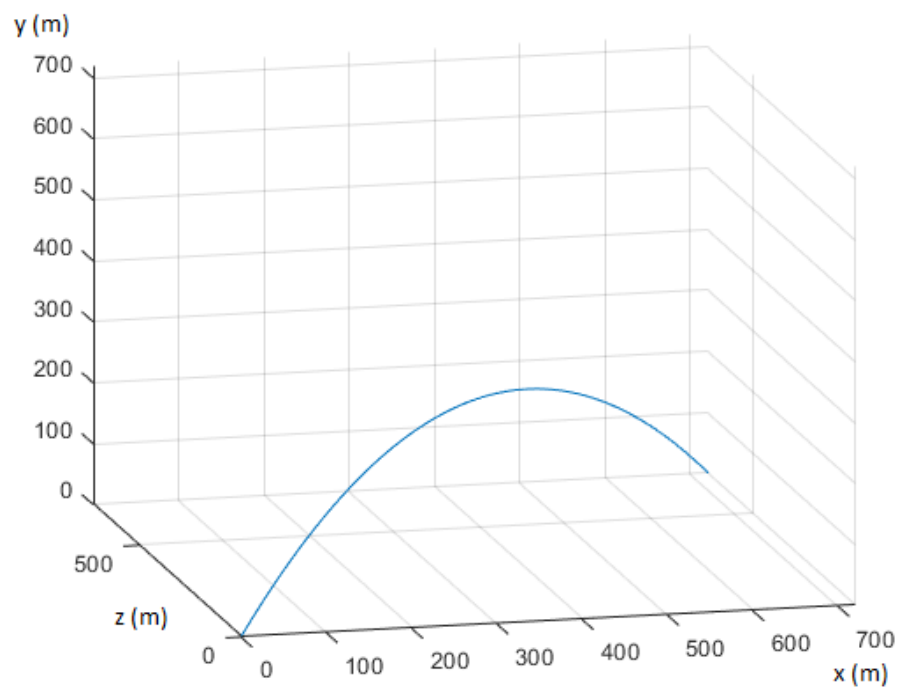
254.9278

$z_{max} =$

883.0956

Simulació 1.5 ($45^\circ(\alpha)$ i $45^\circ(\beta)$ a 100 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$x_{max} =$

721.0446

$y_{max} =$

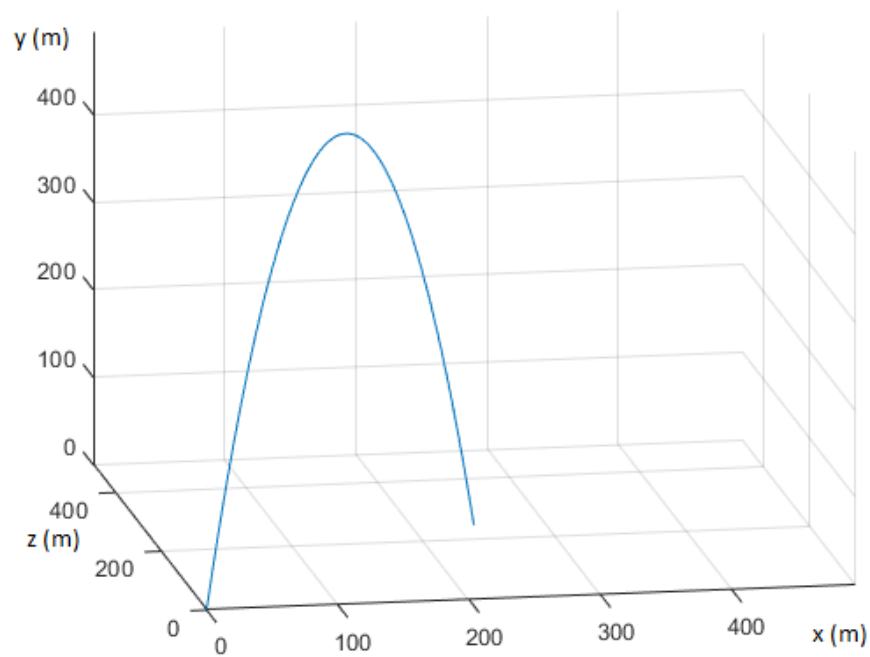
254.9278

$z_{max} =$

721.0446

Simulació 1.6 ($45^\circ(\alpha)$ i $10^\circ(\beta)$ a 100 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$x_{max} =$

246.6118

$y_{max} =$

494.4815

$z_{max} =$

246.6118

1.8 Conclusions del moviment parabòlic tridimensional ideal

Les simulacions del moviment parabòlic tridimensional han donat els següents resultats:

Simulació	Angle(α)	Angle(β)	x_{max}	y_{max}	z_{max}
1.4	60°	45°	509.8555	254.9278	883.0956
1.5	45°	45°	721.0446	254.9278	721.0446
1.6	45°	10°	246.6118	494.4815	246.6118

L'angle α determina la profunditat de la trajectòria, és a dir, agafa una trajectòria bidimensional i la mou cap a un espai tridimensional. Com més gran sigui l'angle α , més a prop de l'eix z es trobarà la trajectòria (com es pot veure al gràfic de la simulació 1.4). Com més petit sigui l'angle, més a prop de l'eix x es trobarà (sent grau 0 o 90 una trajectòria bidimensional).

Per l'altra, banda l'angle β determina l'alçada màxima, l'abast màxim i el comportament del projectil que correspon a l'explicat a l'apartat 1.3. L'única diferència és que β és l'angle respecte a l'eix y i no respecte a l'eix x . Per tant, un angle de 10° resultarà en una alçada màxima superior a la d'un angle de 80°.

Es pot concloure que una paràbola tridimensional no és més que una paràbola bidimensional desplaçada a un espai tridimensional per mitjà d'un angle (α en aquest cas).

Capítol 2

EFFECTES DE LA ROTACIÓ TERRESTRE

Durant aquest capítol s'avaluaran els efectes que té la rotació terrestre sobre la trajectòria parabòlica tridimensional bàsica que ha estat analitzada en el capítol anterior. El planeta Terra completa una volta sobre el seu eix de rotació cada 23 hores 56 minuts i 4 segons (86164 segons) i el radi de la terra és de 6378 km. Amb les dades anteriors es pot calcular la velocitat de rotació:

$$l = 2 * \pi * r = 2 * \pi * 6378000 = 40074155.89 \text{ m}$$

Una vegada calculada la longitud de la terra a l'equador, es pot calcular la velocitat de rotació dividint aquesta pel període de rotació:

$$v_{RT} = \frac{40074155.89}{86164} = 465.09 \text{ m/s}$$

2.1 Efectes directes de la rotació

La rotació de la Terra, al ser constant, actua com una velocitat inicial que només afecta a l'eix x si es considera que:

$x \rightarrow$ Eix paral·lel a l'equador

$y \rightarrow$ Eix d'altitud

$z \rightarrow$ Eix paral·lel al meridià

Per tant, la velocitat inicial de l'eix x ja no es pot expressar com:

$$v_0 * \cos \alpha * \sin \beta$$

Ara s'hi afegeix la velocitat de rotació:

$$v_{RT} + v_0 * \cos \alpha * \sin \beta$$

O també:

$$v_{RT} + v_{0x}$$

Un cop més s'escriuen les equacions del moviment parabòlic:

$$x = x_0 + (v_{RT} + v_{0x}) * t$$

x = posició final | x_0 = posició inicial (normalment 0) | v_{RT} = velocitat de la rotació terrestre
 v_{0x} = velocitat inicial de la component x | t = temps de vol

$$y = y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2$$

y = posició final | y_0 = posició inicial (normalment 0)
 v_{0y} = velocitat inicial de la component y | t = temps de vol | g = gravetat

$$z = z_0 + v_{0z} * t$$

z = posició final | z_0 = posició inicial (normalment 0)
 v_{0z} = velocitat inicial de la component z | t = temps de vol

Cal esmentar que l'alçada màxima i el temps de vol no es veuen afectats, ja que aquests es calculen amb l'equació de l'eix y , que en aquest cas no varia. Per tant, l'única equació a recalculer és la de l'abast màxim, que quedaria de la següent manera:

$$x = x_0 + v_{0x} * t$$

$$x = x_0 + (v_{RT} + v_0 * \cos \alpha * \sin \beta) * \frac{2 * v_0 * \cos \beta}{g}$$

$$x_{max} = \frac{(v_{RT} + v_0 * \cos \alpha * \sin \beta) * 2 * v_0 * \cos \beta}{g}$$

Per a veure quins efectes té la rotació terrestre sobre el projectil es calculen llançaments amb un angle β de 30° i una velocitat inicial de 100 m/s. L'únic que varia entre un llançament i un altre és l'angle α que comprén els valors entre 0° i 360° en intervals de 30° . Els resultats obtinguts són els següents:

x	z	y (h)	t	Angle β
931,1584661	0	9187,5	17,67398783	0
812,7651969	441,8496958	9187,5	17,67398783	0,5235987756
489,3087703	765,3061224	9187,5	17,67398783	1,047197551
47,45907449	883,6993916	9187,5	17,67398783	1,570796327
-394,3906213	765,3061224	9187,5	17,67398783	2,094395102
-717,847048	441,8496958	9187,5	17,67398783	2,617993878
-836,2403171	0	9187,5	17,67398783	3,141592654
-717,847048	-441,8496958	9187,5	17,67398783	3,665191429
-394,3906213	-765,3061224	9187,5	17,67398783	4,188790205
47,45907449	-883,6993916	9187,5	17,67398783	4,71238898
489,3087703	-765,3061224	9187,5	17,67398783	5,235987756
812,7651969	-441,8496958	9187,5	17,67398783	5,759586532
931,1584661	0	9187,5	17,67398783	6,283185307

Un cop obtinguts els resultats, aquests s'introdueixen al MatLab i es tracta d'obtenir un gràfic mitjançant el breu codi que es mostra a continuació:

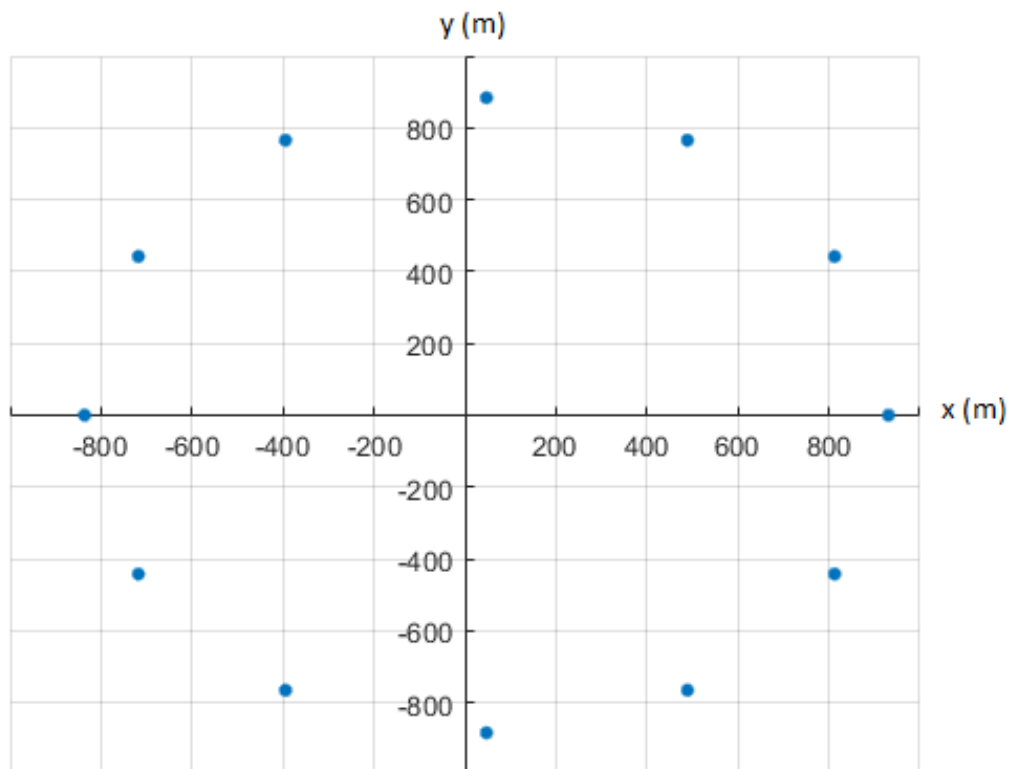
```

1 x = [931.1584661, 812.7651969, 489.3087703, 47.45907449, 394.3906213,
      717.847048, 836.2403171, 717.847048, 394.3906213, 47.45907449,
      489.3087703, 812.7651969, 931.1584661]; %inicialitza la matriu x amb les
      dades obtingudes
2 z = [0, 441.8496958, 765.3061224, 883.6993916, 765.3061224, 441.8496958,
      0, 441.8496958, 765.3061224, 883.6993916, 765.3061224, 441.8496958,
      0]; %inicialitza la matriu z amb les dades obtingudes
3 plot(x,z, '.', 'MarkerSize',15) %genera el gràfic i en determina el gruix
      dels punts
4 ax = gca;
5 ax.Box = 'off';
6 ax.XAxisLocation = 'origin'; %centra l'eix x
7 ax.YAxisLocation = 'origin'; %centra l'eix z
8 grid on; %activa la quadrícula

```

Listing 2.1: Codi del moviment parabòlic amb la rotació terrestre

L'execució d'aquest codi dona com a resultat el gràfic següent:



2.2 Conclusions de l'efecte directe de la rotació terrestre sobre el moviment parabòlic bàsic

Mai s'han de formular unes conclusions sense revisar totes les variables (físicament parlant) que afecten a una recerca. En aquest cas, el que es veu a plena vista és que la rotació terrestre ha desplaçat el cercle cap a la dreta (cap al sentit de rotació) però, si és conlúis que la rotació terrestre ha tingut un efecte sobre el projectil s'estaria cometent una incorrecció. S'ha de tenir en compte que durant el temps que el projectil ha estat viatjant el sistema de referència (els eixos) també s'han mogut de posició. Es pot concluir que sí que hi ha una velocitat inicial però que, aquesta, es mou juntament amb el sistema de referència i per tant:

- La rotació terrestre no afecta a aquells projectils que no surten del sistema referenciar (Terra).
- La rotació terrestre s'ha de tenir en compte per als coets que sí que marxen del sistema referenciar (Terra), ja que el sistema de referència exterior es considera quiet.

2.3 L'efecte Coriolis (Conservació del moviment angular)

L'efecte Coriolis és una força fictícia que només s'observa en sistemes de referència no inercials i en rotació. Un sistema de referència no inercial és aquell en el qual hi ha una component accelerativa com, per exemple, la Terra. L'efecte Coriolis va ser descrit per primera vegada pel científic, matemàtic i enginyer mecànic Gaspard-Gustave de Coriolis l'any 1835. Aquesta força es veu present des de la rotació de les tempestes i huracans fins a l'aigua que marxa pel desguàs de la dutxa.

Aquest efecte fa que sembli que un cos tingui una trajectòria que es va curvant a mesura que transcorre la mateixa. L'efecte Coriolis es comporta de forma diferent depenent de l'hemisferi en que ens trobem. Això, es deu als anomenats cercles inercials; aquests tenen un radi determinat que és donat per la següent expressió:

$$R = \frac{v}{f}$$

R = radi cercle inercial | f = paràmetre de Coriolis z | v = velocitat de la massa

De l'equació anterior n'és interessant analitzar l'anomenat paràmetre de Coriolis (f) que també es pot expressar com:

$$f = 2\Omega * \sin \lambda$$

f = paràmetre de Coriolis | Ω = vector velocitat angular | λ = latitud en la que es troba l'objecte

Cal destacar que si l'objecte es troba en l'hemisferi nord, la latitud serà positiva mentre que en l'hemisferi sud aquesta serà negativa. Aquest canvi de signe provoca que el radi del cercle inercial sigui negatiu a l'hemisferi sud i positiu a l'hemisferi nord. Això explica perquè el sentit de rotació (de l'efecte Coriolis) és horari en la meitat nord de la Terra i antihorari en la meitat sud.

El vector acceleració de l'efecte Coriolis és el producte vectorial del vector acceleració angular amb el vector velocitat de l'objecte multiplicat per dos:

$$a_c = 2\vec{v} \times \vec{\Omega}$$

a_c = acceleració de Coriolis | \vec{v} = vector velocitat de l'objecte | $\vec{\Omega}$ = vector acceleració angular

Si es multiplica l'acceleració de Coriolis per la massa de l'objecte s'obté l'anomenada força de Coriolis que s'expressa de la següent forma:

$$F_c = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega}$$

F_c = força de Coriolis | m = massa de l'objecte | \vec{v} = vector velocitat de l'objecte
 $\vec{\Omega}$ = vector velocitat angular

Un cop explicada la base teòrica de l'efecte Coriolis es tracta d'introduir-la en el moviment d'un projectil partint de la base que el vector acceleració total del sistema equival a:

$$\vec{a}_t = \vec{g} + 2\vec{v} \times \vec{\Omega}$$

\vec{a}_t = vector acceleració | \vec{g} = vector gravetat | \vec{v} = vector velocitat de l'objecte
 $\vec{\Omega}$ = vector velocitat angular

També cal esmentar que la component $\vec{\Omega}$ es negligeix per a exponents més grans de 1 ja que té valors extremadament petits. Com a exemple d'aquest cas, en trobem la força centrífuga ($\vec{\Omega}^2$) que s'ha negligit en aquesta situació. Mitjançant els corresponents processos de derivació i integració (Annex A.2) s'extreuen les següents equacions del moviment:

$$x = x_0 + v_{0x} * t - [v_{0z} * \Omega * \sin \lambda + v_{0y} * \Omega * \cos \lambda] * t^2 + g * \Omega * \cos \lambda * \frac{t^3}{3}$$

x = posició a l'eix x | Ω = velocitat angular | λ = latitud | t = temps
 v_{0x} = velocitat inicial de l'eix x | v_{0y} = velocitat inicial de l'eix y | v_{0z} = velocitat inicial de l'eix z

$$y = (y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2) + (v_{0x} * \Omega * \cos \lambda * t^2)$$

y = posició a l'eix y | Ω = velocitat angular | λ = latitud | t = temps
 v_{0x} = velocitat inicial de l'eix x | v_{0y} = velocitat inicial de l'eix y | g = gravetat

$$z = (z_0 + v_{0z} * t) + (v_{0x} * \Omega * \sin \lambda * t^2)$$

z = posició a l'eix z | Ω = velocitat angular | λ = latitud | t = temps
 v_{0x} = velocitat inicial de l'eix x | v_{0z} = velocitat inicial de l'eix z

Aïllant la variable t de l'equació del moviment corregida de la component y quan $y = 0$ s'obté el temps de vol:

$$t_{vol} = \frac{2 * v_{0y}}{g + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda}$$

Substituint el temps de vol a les equacions corregides del moviment de les components x i z s'obtenen els valors màxims que adquiriran aquestes variables:

$$x_{max} = x_0 + v_{0x} * \frac{2 * v_{0y}}{g + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} - [v_{0z} * \Omega * \sin \lambda + v_{0y} * \Omega * \cos \lambda] * \left(\frac{2 * v_{0y}}{g + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^2 + g * \Omega * \cos \lambda * \frac{\left(\frac{2 * v_{0y}}{g + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^3}{3}$$

$$z_{max} = z_0 + v_{0z} * \frac{2 * v_{0y}}{g + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} + v_{0x} * \Omega * \sin \lambda * \left(\frac{2 * v_{0y}}{g + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^2$$

D'altra banda, el valor màxim que prendrà la variable y , s'obté del fet que quan el projectil es troba al punt més alt $v_{0y} = 0$. Per tant:

$$v_y = v_{0y} * t - g * t + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda * t^2$$

$$0 = v_{0y} * t - g * t + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda * t^2$$

$$\frac{-v_{0y}}{-g} = v_{0x} * \Omega * \cos \lambda * t$$

$$\frac{-v_{0y}}{-g} = v_{0x} * \Omega * \cos \lambda * t$$

$$\frac{v_{0y}}{g + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} = t$$

$$y_{max} = y_0 + v_{0y} * \frac{v_{0y}}{g + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} - \frac{1}{2} * g * \left(\frac{v_{0y}}{g + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^2 + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda * \left(\frac{v_{0y}}{g + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^2$$

2.4 Simulacions del moviment parabòlic amb l'efecte Coriolis

En aquest apartat es realitzaran unes simulacions mitjançant el programari MatLab que tenen com a objectiu trobar quines variacions introdueix l'efecte Coriolis en la trajectòria d'un cos. Per això les simulacions tindran els mateixos paràmetres inicials que les realitzades en la secció 5 del capítol 1. Tot i així la velocitat inicial s'augmenta en dos xifres per tal de veure l'efecte coriolis de forma més clara. El codi utilitzat en les simulacions és el següent:

```

1 alpha = 45; %inicia la variable alpha amb un valor de 45 (graus)
2 beta = 45; %inicia la variable beta amb un valor de 45 (graus)
3 lambda = 30; %inicia la variable lambda amb un valor de 30 (graus)
4 omega = 2*pi/86164;
5 v0 = 10000; %inicia la variable v0 amb un valor de 10000m/s (velocitat
   inicial)
6 g = 9.8067; %inicia la variable g amb un valor de 9.8067 m/s^2 (gravetat)
7 t = ((2*v0*cosd(beta))/(g + (v0 * cosd(alpha) * sind(beta)) * omega *
   cosd(lambda))); %inicia la variable t i la calcula per quan y és 0 (
   temps de vol)
8 tvol = linspace(0,t);
9 xmax = (v0 * cosd(alpha) * sind(beta) * ((2*v0*cosd(beta))/(g + (v0 *
   cosd(alpha) * sind(beta)) * omega * cosd(lambda)))) * ((v0 * sind(

```

```

alpha) * sind(beta) * omega * sind(lambda)) + ((v0 * cosd(beta)) *
omega * cosd(lambda)) * ((2*v0*cosd(beta))/(g + (v0 * cosd(alpha) *
sind(beta) * omega * cosd(lambda)))^2 + g * omega * cosd(lambda) *
(((2*v0*cosd(beta))/(g + (v0 * cosd(alpha) * sind(beta) * omega *
cosd(lambda)))^3)/3);%inicia i calcula la variable xmax
10 ymax = ((v0 * cosd(beta) * ((v0*cosd(beta))/(g + (v0 * cosd(alpha) * sind
(beta) * omega * cosd(lambda)))) (g * ((v0*cosd(beta))/(g + (v0 *
cosd(alpha) * sind(beta) * omega * cosd(lambda)))^2)/2) + (v0 * cosd(
alpha) * sind(beta) * omega * cosd(lambda) * ((v0*cosd(beta))/(g + (v0
* cosd(alpha) * sind(beta) * omega * cosd(lambda)))^2;%inicia i
calcula la variable ymax
11 zmax = (v0 * sind(alpha) * sind(beta) * ((2*v0*cosd(beta))/(g + (v0 *
cosd(alpha) * sind(beta) * omega * cosd(lambda)))) + (v0 * cosd(alpha)
* sind(beta) * omega * sind(lambda) * ((2*v0*cosd(beta))/(g + (v0 *
cosd(alpha) * sind(beta) * omega * cosd(lambda)))^2;%inicia i calcula
la variable zmax
12 x = (v0 * cosd(alpha) * sind(beta) * tvol) (((v0 * sind(alpha) * sind(
beta) * omega * sind(lambda)) + ((v0 * cosd(beta)) * omega * cosd(
lambda))) .* tvol.^2 + g * omega * cosd(lambda) * ((tvol.^3)/3); %
calcula la matriu de x
13 y = ((v0 * cosd(beta) * tvol) (g * tvol.^2)/2) + (v0 * cosd(alpha) *
sind(beta) * omega * cosd(lambda) * tvol.^2; %calcula la matriu de y
14 z = (v0 * sind(alpha) * sind(beta) * tvol) + (v0 * cosd(alpha) * sind(
beta) * omega * sind(lambda) * tvol.^2; %calcula la matriu de z
15 plot3(x,z,y); %diuixa el gràfic 3D
16 grid on; %activa la quadrícula al gràfic
17 if xmax >= zmax %determina la llargada dels eixos
18     if xmax > ymax
19         xlim([0 xmax])
20         ylim([0 xmax])
21         zlim([0 xmax])
22     else
23         xlim([0 ymax])
24         ylim([0 ymax])
25         zlim([0 ymax])
26     end
27 else
28     xlim([0 zmax])
29     ylim([0 zmax])
30     zlim([0 zmax])
31 end
32 xmax
33 ymax
34 zmax

```

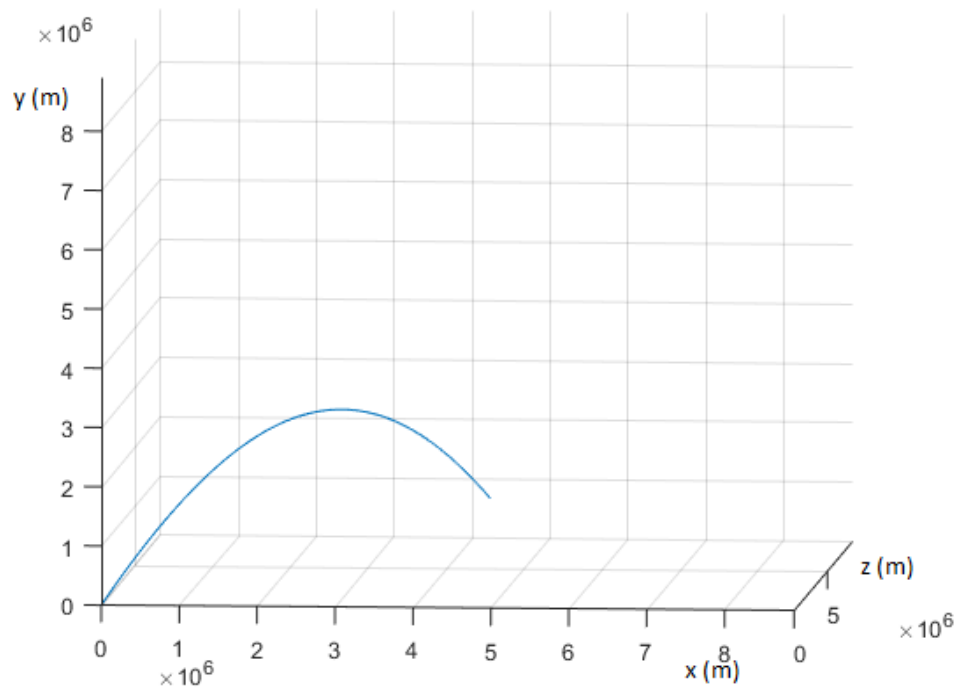
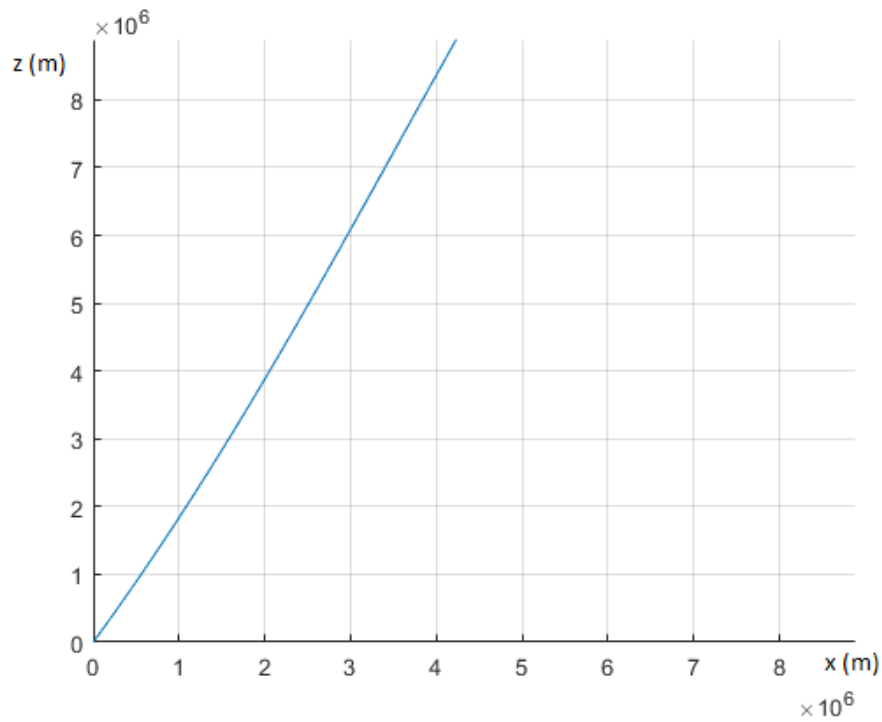
Listing 2.2: Codi del moviment parabòlic amb l'efecte Coriolis

Les simulacions es veuen des de dalt per tal d'observar si hi ha una curvatura de la trajectòria perceptible. Es realitzen dos grups de simulacions:

- Amb latitud positiva (hemisferi nord)
- Amb latitud negativa (hemisferi sud)

Simulació 2.1 ($60^\circ(\alpha)$, $45^\circ(\beta)$ i $+30^\circ$ de latitud (λ) a 10000 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$x_{max} =$

$y_{max} =$

$z_{max} =$

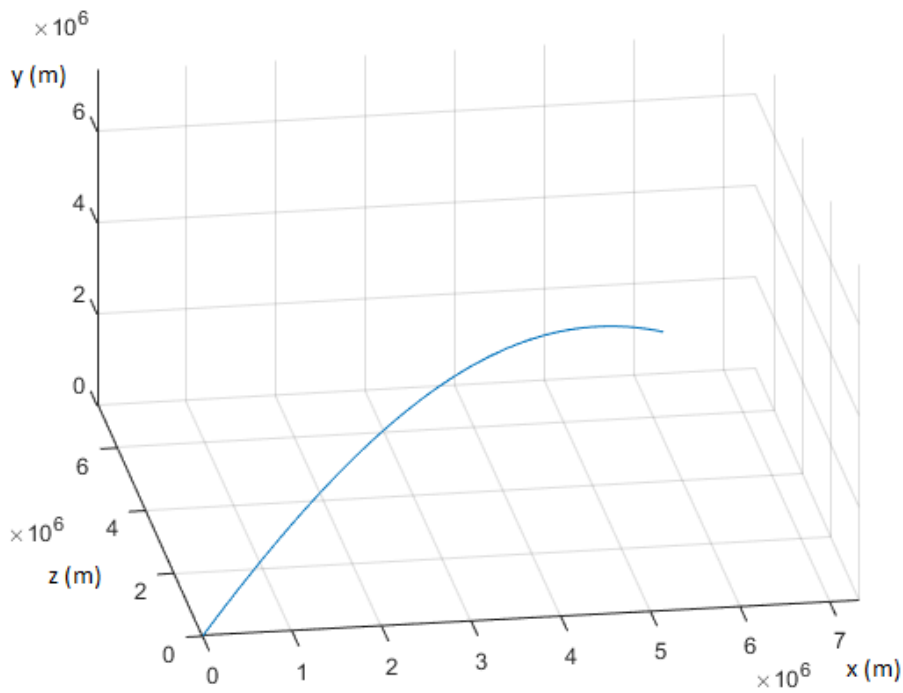
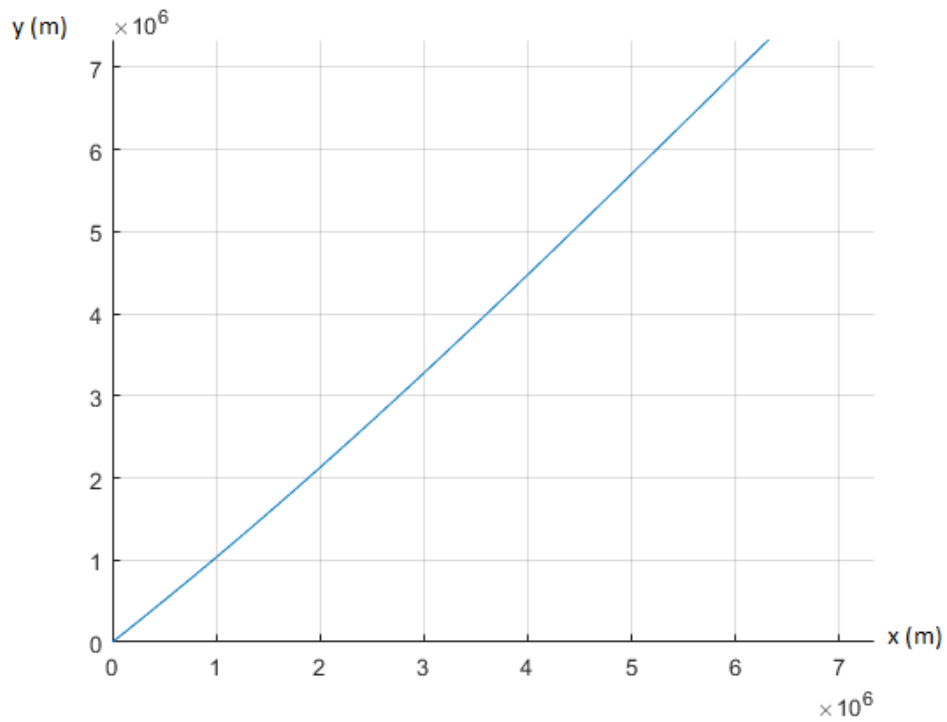
4.2321e+06

2.6590e+06

8.8906e+06

Simulació 2.2 ($45^\circ(\alpha)$, $45^\circ(\beta)$ i $+30^\circ$ de latitud (λ) a 10000 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$$x_{max} =$$

$$y_{max} =$$

$$z_{max} =$$

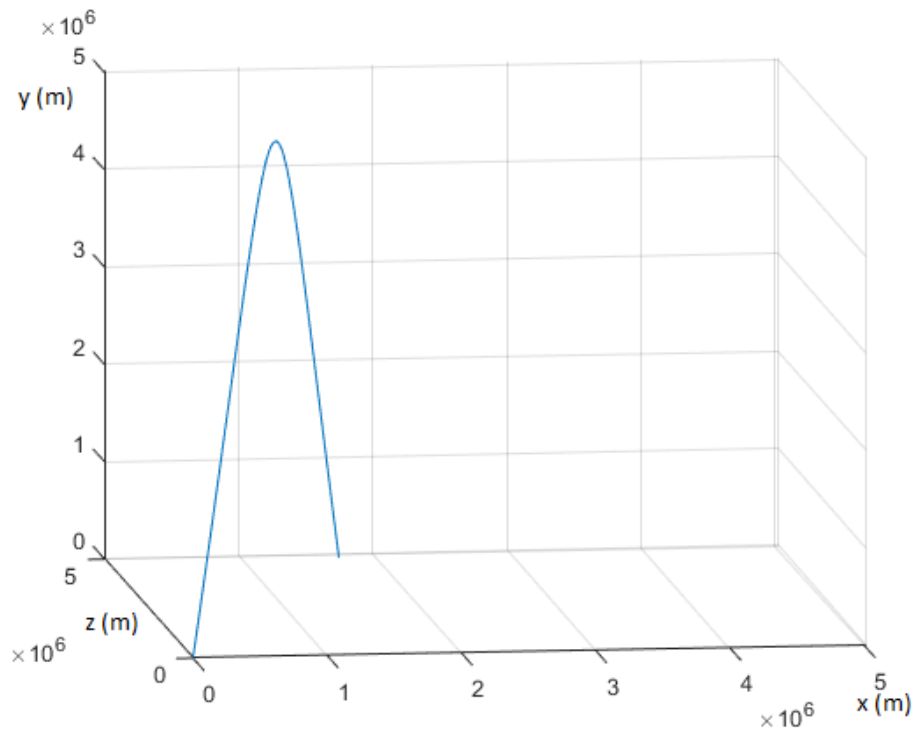
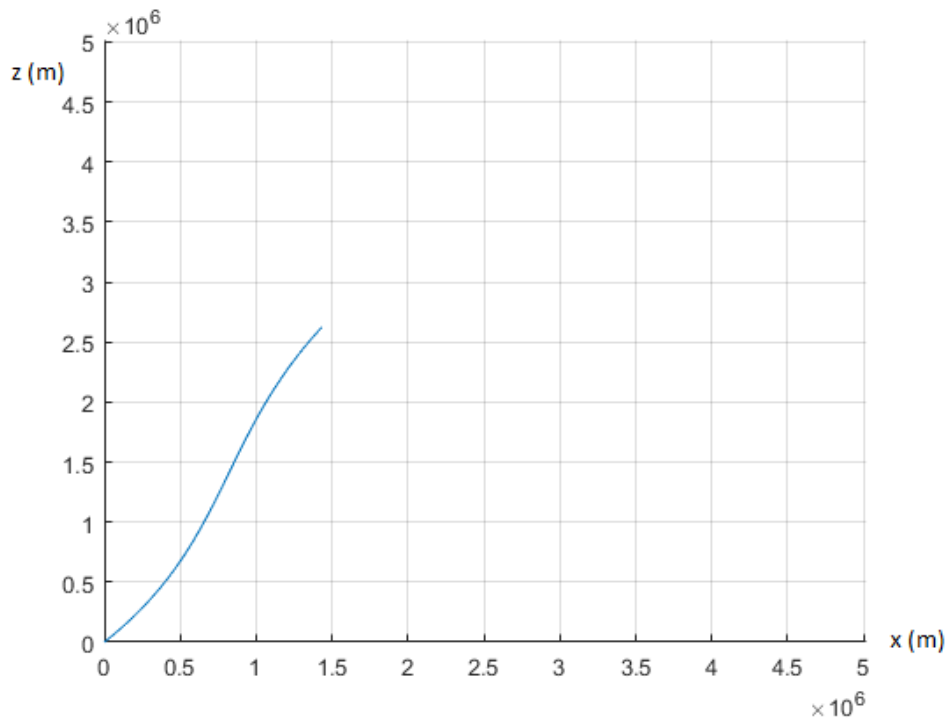
$$6.3210e+06$$

$$2.7009e+06$$

$$7.3414e+06$$

Simulació 2.3 ($45^\circ(\alpha)$, $10^\circ(\beta)$ i $+30^\circ$ de latitud (λ) a 10000 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$x_{max} =$

$y_{max} =$

$z_{max} =$

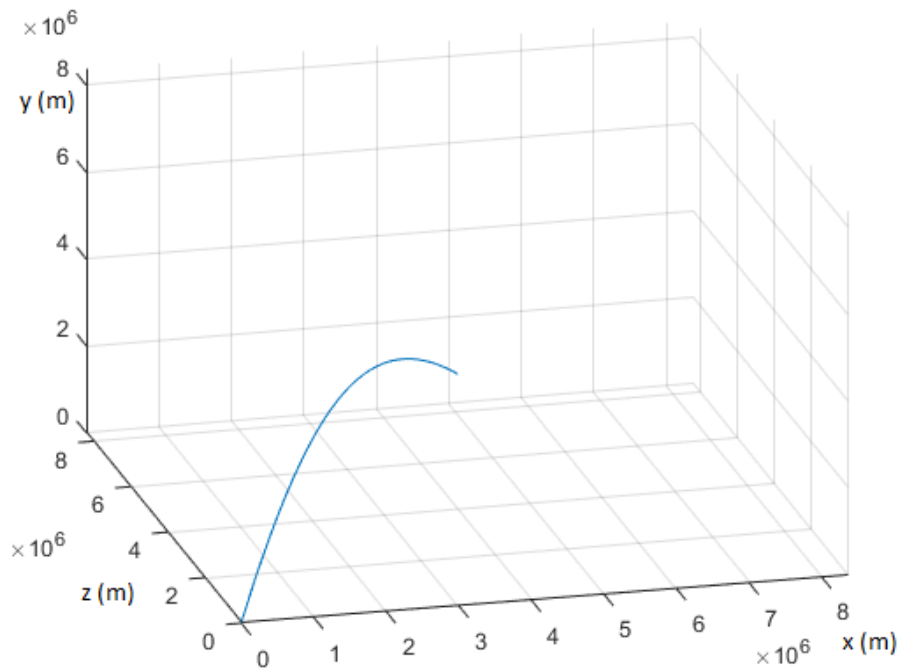
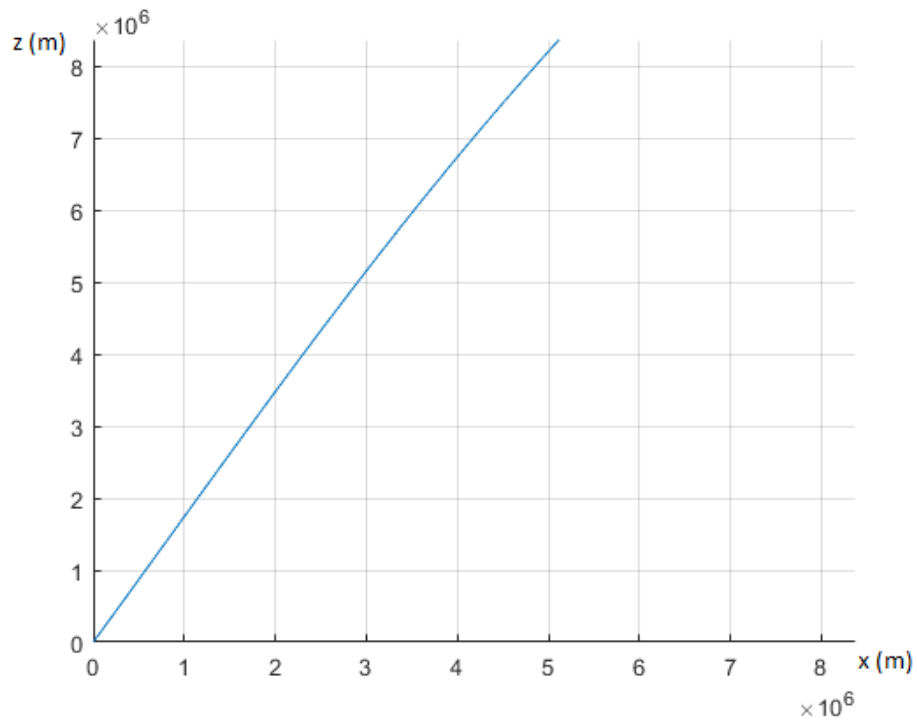
1.4329e+06

5.0215e+06

2.6245e+06

Simulació 2.4 ($60^\circ(\alpha)$, $45^\circ(\beta)$ i -30° de latitud (λ) a 10000 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$x_{max} =$

$y_{max} =$

$z_{max} =$

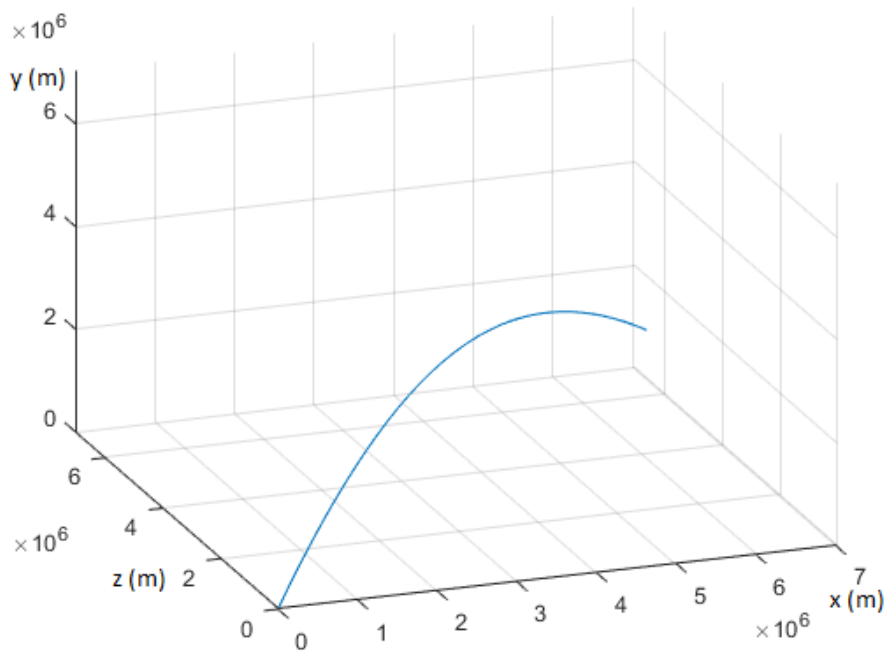
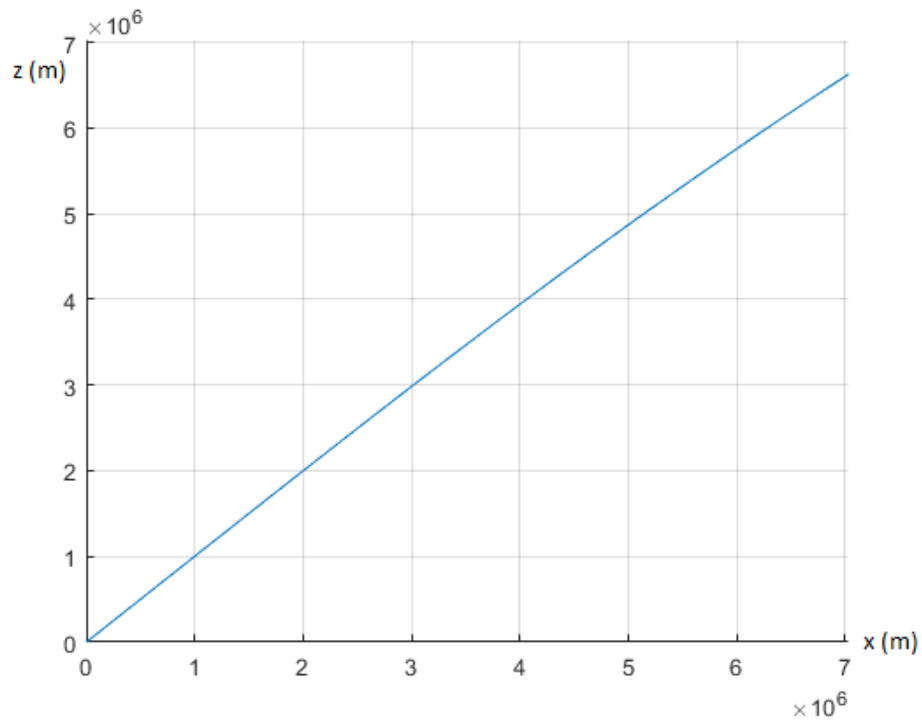
5.1198e+06

2.6590e+06

8.3781e+06

Simulació 2.5 ($45^\circ(\alpha)$, $45^\circ(\beta)$ i -30° de latitud (λ) a 10000 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$x_{max} =$

$y_{max} =$

$z_{max} =$

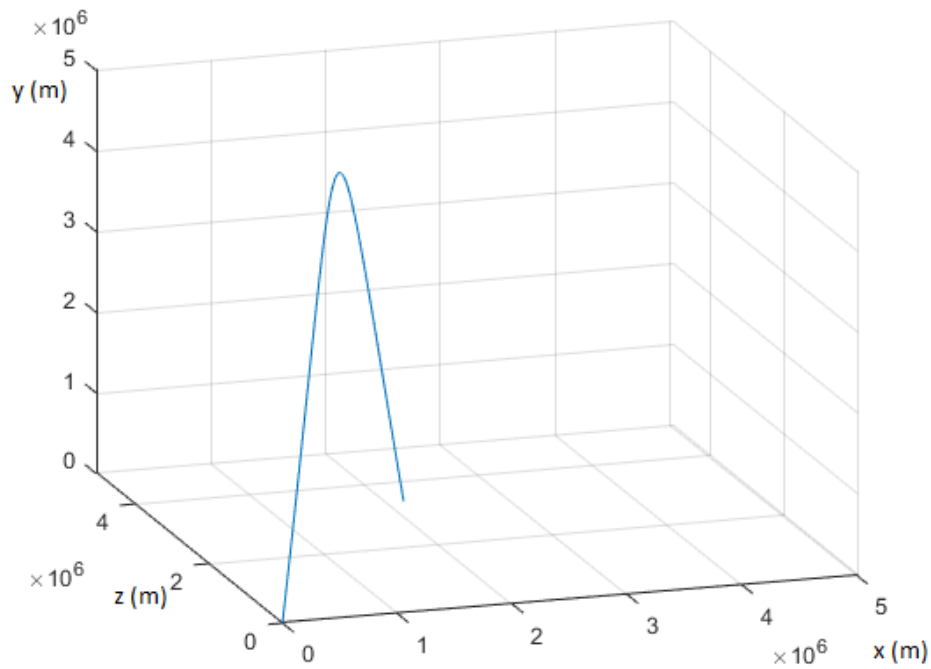
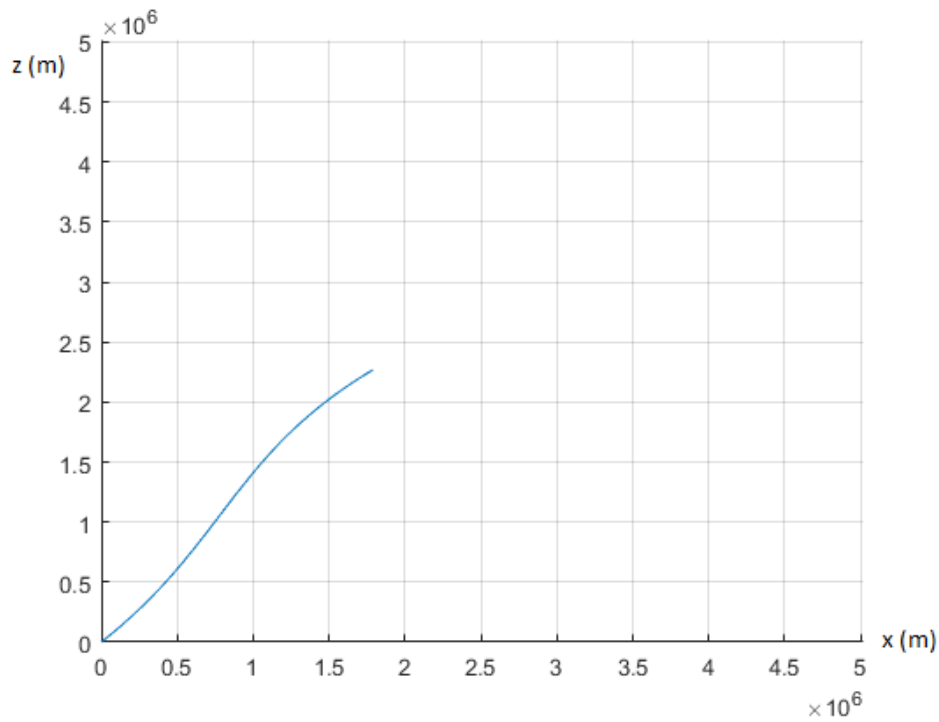
7.0327e+06

2.7009e+06

6.6297e+06

Simulació 2.6 ($45^\circ(\alpha)$, $10^\circ(\beta)$ i -30° de latitud (λ) a 10000 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$x_{max} =$

$y_{max} =$

$z_{max} =$

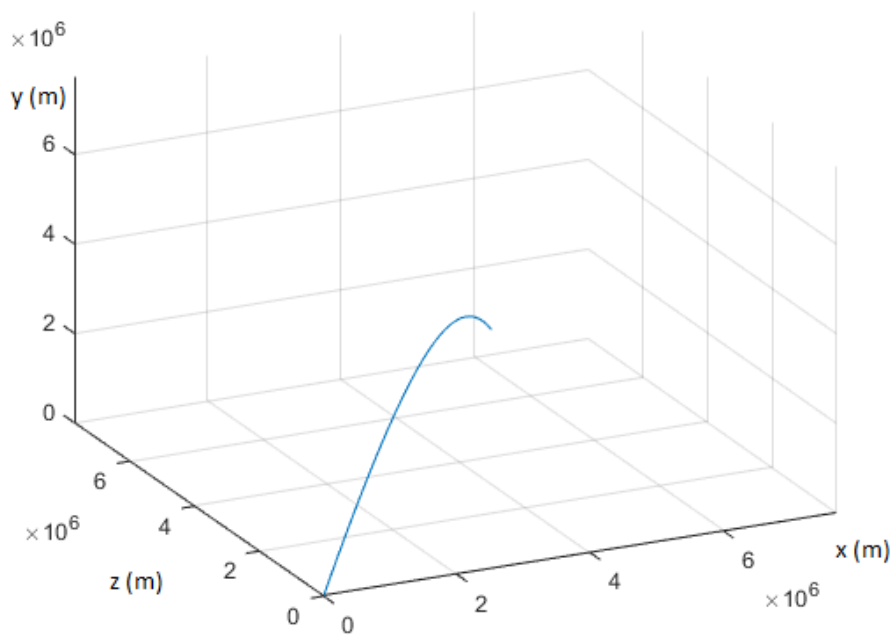
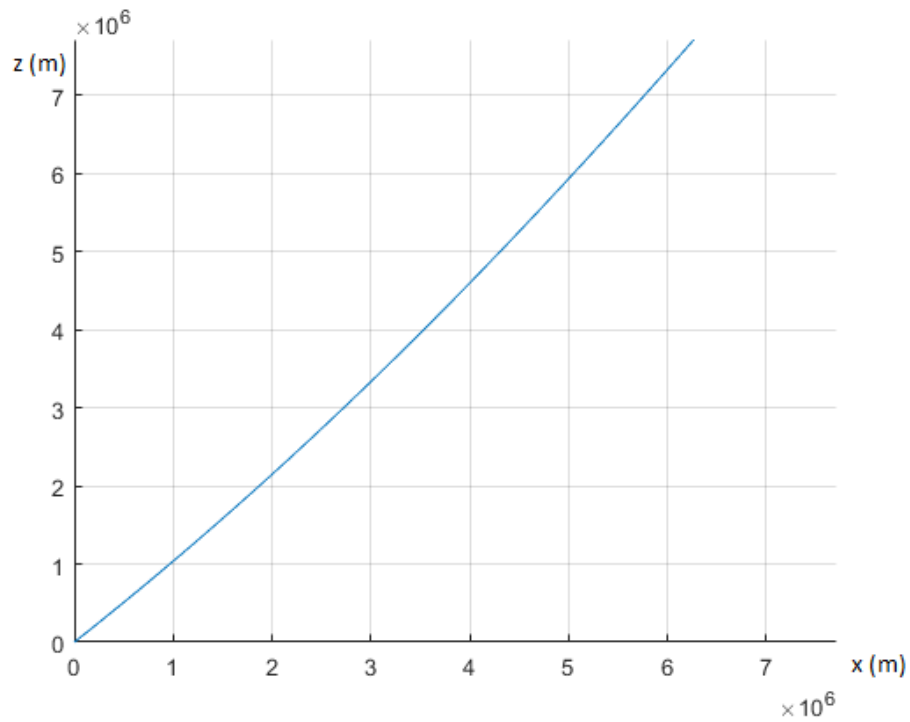
1.7885e+06

5.0215e+06

2.2690e+06

Simulació 2.7 ($45^\circ(\alpha)$, $45^\circ(\beta)$ i $+60^\circ$ de latitud (λ) a 10000 m/s)

El gràfic obtingut d'aquesta simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$x_{max} =$

$y_{max} =$

$z_{max} =$

6.2674e+06

2.6398e+06

7.7118e+06

2.5 Conclusions de l'efecte Coriolis

En la següent taula es recopilen les dades de les simulacions corresponents a l'efecte Coriolis:

Simulació	Angle (α)	Angle (β)	Latitud (λ)	xmax	ymax	zmax
2.1	60°	45°	+30°	4.2321e+06	2.6590e+06	8.8906e+06
2.2	45°	45°	+30°	6.3210e+06	2.7009e+06	7.3414e+06
2.3	45°	10°	+30°	1.4329e+06	5.0215e+06	2.6245e+06
2.4	60°	45°	-30°	5.1198e+06	2.6590e+06	8.3781e+06
2.5	45°	45°	-30°	7.0327e+06	2.7009e+06	6.6297e+06
2.6	45°	10°	-30°	1.7885e+06	5.0215e+06	2.2690e+06
2.7	45°	45°	+60°	6.2674e+06	2.6398e+06	7.7118e+06

En els gràfics es pot observar com les trajectòries es corben quan es sotmeten a l'efecte Coriolis. Si la latitud és positiva es corben cap a l'esquerra mentre que si aquesta és negativa es corben cap a la dreta. Això també es pot veure a l'anterior taula de valors on per a latituds positives els valors de x_{max} són més petites que per a latituds negatives. D'altra banda, els valors de z_{max} prenen valors més grans quan λ és positiva.

Cal també esmentar que el signe de λ no afecta a l'altura màxima del projectil. En canvi, com més alta sigui la latitud més alt arribara aquest, com es pot observar en la simulació número 7.

Per tant, es conclueix que el comportament general de la paràbola no canvia amb l'efecte Coriolis. L'efecte Coriolis intrudueix unes petites desviacions que fan que el punt d'impacte sigui diferent pel simple fet de trobar-se en un sistema en rotació.

Capítol 3

FREGAMENT

El fregament és aquella força que s'oposa al moviment d'un conjunt de partícules respecte a un altre. Aquesta força es troba normalment entre sòlids, però també hi és present en líquids i gasos. Fins ara s'havia considerat que el projectil es trobava en un entorn sense cap tipus de partícula que el pogués afectar. En aquest capítol es tractarà d'afegir l'atmosfera a les simulacions, fet que afegirà una fricció que l'aire exerceix sobre el projectil també coneguda com a 'drag' en anglès. El fregament es pot expressar de la següent manera:

$$D_f = C_f * \frac{\rho * v^2}{2} * A$$

D_f = força del 'drag' | C_f = coeficient de fregament | ρ = densitat del aire
 v = velocitat del cos respecte al medi | A = secció

El coeficient de fregament (C_f) és una constant que ve donada per recerca experimental, i que en el cas dels coets és de 0.0015 si la superfície és llisa o de 0.0045 si la superfície és rugosa. D'ara en endavant, s'utilitzarà com a model el coet Falcon 9 de la companyia americana SpaceX (Annex C) que en aquest cas està fabricat d'alumini i fibra de carboni pel que el coeficient de fregament serà de 0.0015.

3.1 Desenvolupament teòric

Per a introduir el fregament a les equacions del moviment s'ha d'esbrinar l'acceleració que s'obté partint de la base que:

$$a = \frac{F}{m}$$

F = força | m = massa | a = acceleració

$$a_f = \frac{C_f * \rho * v^2 * A}{2 * m}$$

a_f = acceleració del 'drag' | C_f = coeficient de fregament | ρ = densitat del aire
 v = velocitat del cos respecte al medi | A = secció | m = massa

Per acabar es descomposa l'acceleració en les tres components que li pertocuen (les mateixes de la velocitat):

$$a_{fx} = \left(\frac{C_f * \rho * v_x^2 * A}{2 * m} \right) * \cos \alpha * \sin \beta$$

α = angle respecte a l'eix x | β = angle respecte a l'eix y
 a_{fx} = acceleració del 'drag' x | C_f = coeficient de fregament | ρ = densitat del aire
 v = velocitat del cos respecte al medi | A = secció | m = massa

$$a_{fy} = \left(\frac{C_f * \rho * v_y^2 * A}{2 * m} \right) * \cos \beta$$

β = angle respecte a l'eix y
 a_{fy} = acceleració del 'drag' y | C_f = coeficient de fregament | ρ = densitat del aire
 v = velocitat del cos respecte al medi | A = secció | m = massa

$$a_{fz} = \left(\frac{C_f * \rho * v_z^2 * A}{2 * m} \right) * \sin \alpha * \sin \beta$$

α = angle respecte a l'eix x | β = angle respecte a l'eix y
 a_{fz} = acceleració del 'drag' z | C_f = coeficient de fregament | ρ = densitat del aire
 v = velocitat del cos respecte al medi | A = secció | m = massa

Per últim s'introdueixen a les equacions del moviment corregides (per l'efecte Coriolis) mitjançant els processos de derivació i integració corresponents (Annex A.3) quedant:

$$x = (x_0 + v_{0x} * t - \frac{1}{2} * a_{fx} * t^2) - [v_{0z} * \Omega * \sin \lambda + v_{0y} * \Omega * \cos \lambda] * t^2 + g * \Omega * \cos \lambda * \frac{t^3}{3}$$

x = posició a l'eix x | Ω = velocitat angular | λ = latitud | t = temps | a_{fx} = fricció a l'eix x
 v_{0x} = velocitat inicial de l'eix x | v_{0y} = velocitat inicial de l'eix y | v_{0z} = velocitat inicial de l'eix z

$$y = (y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * (g + a_{fy}) * t^2) + (v_{0x} * \Omega * \cos \lambda * t^2)$$

y = posició a l'eix y | Ω = velocitat angular | λ = latitud | t = temps | a_{fy} = fricció a l'eix y
 v_{0x} = velocitat inicial de l'eix x | v_{0y} = velocitat inicial de l'eix y | g = gravetat

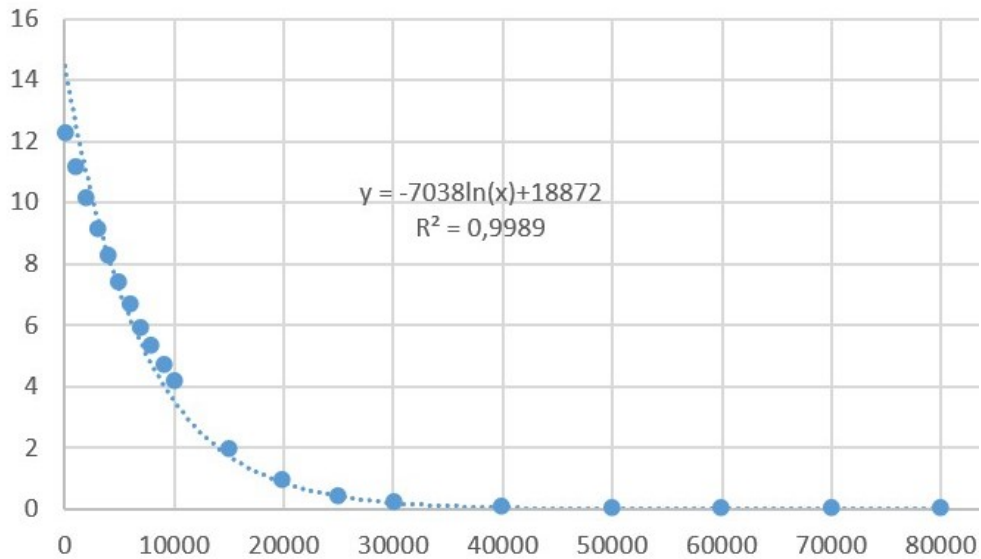
$$z = (z_0 + v_{0z} * t - \frac{1}{2} * a_{fz} * t^2) + (v_{0x} * \Omega * \sin \lambda * t^2)$$

z = posició a l'eix z | Ω = velocitat angular | λ = latitud | t = temps
 v_{0x} = velocitat inicial de l'eix x | v_{0z} = velocitat inicial de l'eix z | a_{fz} = fricció a l'eix z

Cal tenir en compte que l'acceleració del fregament no és constant ja que depén de la densitat, variable que canvia depenent de l'altura. Ara es tracta d'obtenir una relació altura-densitat partint de la següent taula de valors obtinguda, experimentalment, per científics d'arreu del món:

Altura (m)	Densitat (kg/m ³)
0	1,225
1000	1,112
2000	1,007
3000	0,9093
4000	0,8194
5000	0,7364
6000	0,6601
7000	0,59
8000	0,5258
9000	0,4671
10000	0,4135
15000	0,1948
20000	0,08891
25000	0,04008
30000	0,01841
40000	0,003996
50000	0,001027
60000	0,0003097
70000	0,00008283
80000	0,00001846

Si es genera un gràfic de dispersió s'observa, clarament, que té una relació exponencial:



Amb l'equació de la recta que es veu al gràfic s'extreu la següent equació de la densitat respecte a l'altura:

$$\rho = \frac{e^{\frac{y - 18872}{-7038}}}{10}$$

Aïllant la variable t de l'equació de l'eix y quan $y = 0$ s'obté el següent temps de vol:

$$t_{vol} = \left(\frac{2 * v_{0y}}{(g + a_{fy_0}) + 2 * v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)$$

En l'equació anterior apareix una nova variable d'acceleració (a_{fy_0}) que es correspon a l'acceleració del fregament quan $y = 0$:

$$\rho = \frac{e}{10} = 1,4606 \frac{kg}{m^3}$$

$$a_{fy_0} = \frac{C_f * 1,4606 * v_y^2 * A}{2 * m}$$

El temps de vol ha de ser una variable amb un valor constant fet que la variable v_y que apareix en el numerador impedeix, per aixó s'ha aproximat que el valor de v_y en el moment d'impacte és el mateix que el de v_{0y} quedant:

$$a_{fy_0} = \frac{C_f * 1,4606 * v_{0y}^2 * A}{2 * m}$$

Substituint la variable t_{vol} a les equacions del moviment de la pàgina anterior, s'obtenen els valors màxims que adquiriran les variables x i z respectivament:

$$x_{max} = (x_0 + v_{0x} * \left(\frac{2 * v_{0y}}{(g + a_{fy_0}) + 2 * v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right) - \frac{1}{2} * a_{fx} * \left(\frac{2 * v_{0y}}{(g + a_{fy_0}) + 2 * v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^2) - [v_{0z} * \Omega * \sin \lambda + v_{0y} * \Omega * \cos \lambda] * \left(\frac{2 * v_{0y}}{(g + a_{fy_0}) + 2 * v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^2 + g * \Omega * \cos \lambda * \left(\frac{2 * v_{0y}}{(g + a_{fy_0}) + 2 * v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^3$$

$$z_{max} = (z_0 + v_{0z} * \left(\frac{2 * v_{0y}}{(g + a_{fy_0}) + 2 * v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right) - \frac{1}{2} * a_{fz} * \left(\frac{2 * v_{0y}}{(g + a_{fy_0}) + 2 * v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^2) + (v_{0x} * \Omega * \sin \lambda * \left(\frac{2 * v_{0y}}{(g + a_{fy_0}) + 2 * v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^2)$$

Aïllant el temps de l'equació de la velocitat de l'eix y quan $v_y = 0$ s'obté:

$$t_{vol} = \left(\frac{v_{0y}}{(g + a_{fy}) + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)$$

Que si es substitueix a l'equació de l'eix y s'obté l'alçada màxima:

$$y_{max} = (y_0 + v_{0y} * \left(\frac{v_{0y}}{(g + a_{fy}) + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right) - \frac{1}{2} * (g + a_{fy}) * \left(\frac{v_{0y}}{(g + a_{fy}) + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^2) + (v_{0x} * \Omega * \cos \lambda * \left(\frac{v_{0y}}{(g + a_{fy}) + v_{0x} * \Omega * \cos \lambda} \right)^2)$$

3.2 Simulació dels efectes del fregament

Fins ara totes les simulacions es podien realitzar, fàcilment, amb MatLab degut que només s'havien de calcular els valors de x , y i z per a diversos moments en el temps tenint en compte que totes les altres variables venien donades per les condicions inicials.

En canvi, el fregament introdueix la variable a_f que és proporcional a l'alçada i a la velocitat del cos. Per tant, a mesura que el coet ascendeix o redueix la seva velocitat aquesta acceleració disminueix. Per a resoldre aquest problema es planteja el següent codi en llenguatge C que calcula l'acceleració del fregament respecte a l'última alçada i velocitat registrada.

Cal tenir en compte que aquest codi només genera una taula de valors (Annex B) que s'introdueix a un programa de computació potent, com ho és MatLab, per a generar els gràfics corresponents.

```

1 //LLIBRERIES
2 #include <stdio.h>
3 #include <stdlib.h>
4 #include <math.h>
5
6 //CALCULA LA DENSITAT RESPECTE A LA Y ANTERIOR
7 double dens(double y-ans) {
8     double d;
9     double e = ME;
10    d = (pow(e,(y-ans 18872) / 7038))/10;
11    return d;
12 }
13
14 //CALCULA EL TEMPS DE VOL
15 double computet(double vy, double vx, double g, double omega, double
16 lambda, double A, double m) {
17     double tvol = (2 * vy) / ((g + (0.0015 * (pow(vy,2)) * 1.4606 * A) / (2
18 * m)) + (2 * vx * omega * cos(lambda)));
19     printf("%f\n", tvol);
20     return tvol;
21 }
22
23 //CALCULA L'ACCELERACIÓ DEL FREGAMENT A L'EIX X
24 double dragx(double densitat, double vx, double m, double A, double alpha,
25 double beta) {
26     double fregamentx = ((0.0015 * densitat * pow(vx,2) * A) / (2 * m)) *
27     cos(alpha) * sin(beta);
28     return fregamentx;
29 }
30
31 //CALCULA L'ACCELERACIÓ DEL FREGAMENT A L'EIX Y
32 double dragy(double densitat, double vy, double m, double A, double beta) {
33     double fregamenty = ((0.0015 * densitat * pow(vy,2) * A) / (2 * m)) *
34     cos(beta);
35     return fregamenty;
36 }
37
38 //CALCULA L'ACCELERACIÓ DEL FREGAMENT A L'EIX Z
39 double dragz(double densitat, double vz, double m, double A, double alpha,
40 double beta) {
41     double fregamentz = ((0.0015 * densitat * pow(vz,2) * A) / (2 * m)) *
42     sin(alpha) * sin(beta);
43     return fregamentz;
44 }
45
46 int reset() {
47     double null = 0;
48     FILE *f = fopen("output.txt", "w+");
49     FILE *fx = fopen("output_X.txt", "w+");
50     FILE *fy = fopen("output_Y.txt", "w+");
51     FILE *fz = fopen("output_Z.txt", "w+");
52     fprintf(f, "%s %s %s %s %s %s\n", "x", "y", "z", "densitat", "t", "//// //
53     hline");

```



```

47     fprintf(f, "%f %f %f %f %f %s\n", null, null, null, 1.460616, null, "
    \\\ \hline");
48     fprintf(fx, "%s", " ");
49     fprintf(fy, "%s", " ");
50     fprintf(fz, "%s", " ");
51     fclose(f);
52     fclose(fx);
53     fclose(fy);
54     fclose(fz);
55     return 0;
56 }
57
58
59 //ESCRIU EL RESULTAT A UN FITXER .TXT
60 int write(double x, double y, double z, double densitat, double t) {
61     FILE *f = fopen("output.txt", "a+");
62     FILE *fx = fopen("output_X.txt", "a+");
63     FILE *fy = fopen("output_Y.txt", "a+");
64     FILE *fz = fopen("output_Z.txt", "a+");
65     fprintf(f, "%f %s %f %s %f %s %f %s %f %s\n", x, "&", y, "&", z, "&", densitat
    , "&", t, "\\\ \hline");
66     fprintf(fx, "%f %s", x, " ");
67     fprintf(fy, "%f %s", y, " ");
68     fprintf(fz, "%f %s", z, " ");
69     fclose(f);
70     fclose(fx);
71     fclose(fy);
72     fclose(fz);
73     return 0;
74 }
75
76 //CALCULA EL VALOR DE X
77 double computex(double densitat, double v_0, double alpha, double beta,
    double lambda, double omega, double g, double afx, double t) {
78     double resultx = ((v_0 * cos(alpha) * sin(beta) * t) (1/2 * afx * pow
    (t,2))) ((v_0 * sin(alpha) * sin(beta) * omega * sin(lambda)) + (v_0 *
    cos(beta) * omega * cos(lambda))) + (g * omega * cos(lambda) * (pow(t
    ,3)/3));
79     return resultx;
80 }
81
82
83 //CALCULA EL VALOR DE Y
84 double computey(double densitat, double v_0, double alpha, double beta,
    double lambda, double omega, double g, double afy, double t) {
85     double resulty = ((v_0 * cos(beta) * t) ((g + afy) * pow(t,2))/2) + (
    v_0 * cos(alpha) * sin(beta) * omega * cos(lambda) * pow(t,2));
86     return resulty;
87 }
88
89
90 //CALCULA EL VALOR DE Z
91 double computez(double densitat, double v_0, double alpha, double beta,
    double lambda, double omega, double g, double afz, double t) {
92     double resultz = ((v_0 * sin(alpha) * sin(beta) * t) ((afz) * pow(t

```

```

,2))/2) + (v_0 * cos(alpha) * sin(beta) * omega * sin(lambda) * pow(t,2)
);
93 return resultz;
94 }
95
96 //FUNCIÓ PRINCIPAL
97 int main(double densitat, double x, double y, double z, double y_ans) {
98 //DECLARACIÓ DE VARIABLES
99 int point = 0;
100 int i = 0;
101 double v_0 = 1000;
102 double alphad = 45;
103 double alpha = alphad * (M_PI/180);
104 double betad = 45;
105 double beta = betad * (M_PI/180);
106 double lambdad = 30;
107 double lambda = lambdad * (M_PI/180);
108 double A = 10.56;
109 double omega = (2 * M_PI)/86164;
110 double m = 549054;
111 double g = 9.8067;
112 double vx = v_0 * cos(alpha) * sin(beta);
113 double vy = v_0 * cos(beta);
114 double vz = v_0 * sin(alpha) * sin(beta);
115 double afx = 0;
116 double afy = 0;
117 double afz = 0;
118 double tfinal = computet(vy, vx, g, omega, lambda, A, m);
119 double tinterval = tfinal/100;
120 double t = 0 + tinterval;
121 y_ans = 0;
122 reset();
123 while (t <= (tfinal + tinterval)) {
124     densitat = dens(y_ans);
125     vx = vx + (afx * tinterval);
126     vy = vy + ((afy + g) * tinterval);
127     vz = vz + (afz * tinterval);
128     afx = dragx(densitat, vx, m, A, alpha, beta);
129     afy = dragy(densitat, vy, m, A, beta);
130     afz = dragz(densitat, vz, m, A, alpha, beta);
131     x = computex(densitat, v_0, alpha, beta, lambda, omega, g, afx, t);
132     y = computey(densitat, v_0, alpha, beta, lambda, omega, g, afy, t);
133     z = computez(densitat, v_0, alpha, beta, lambda, omega, g, afz, t);
134     y_ans = y;
135     write(x, y, z, densitat, t);
136     t = t + tinterval;
137     printf("%s %i\n", "Data written for point", point);
138     point ++;
139 }
140 return 0;
141 }

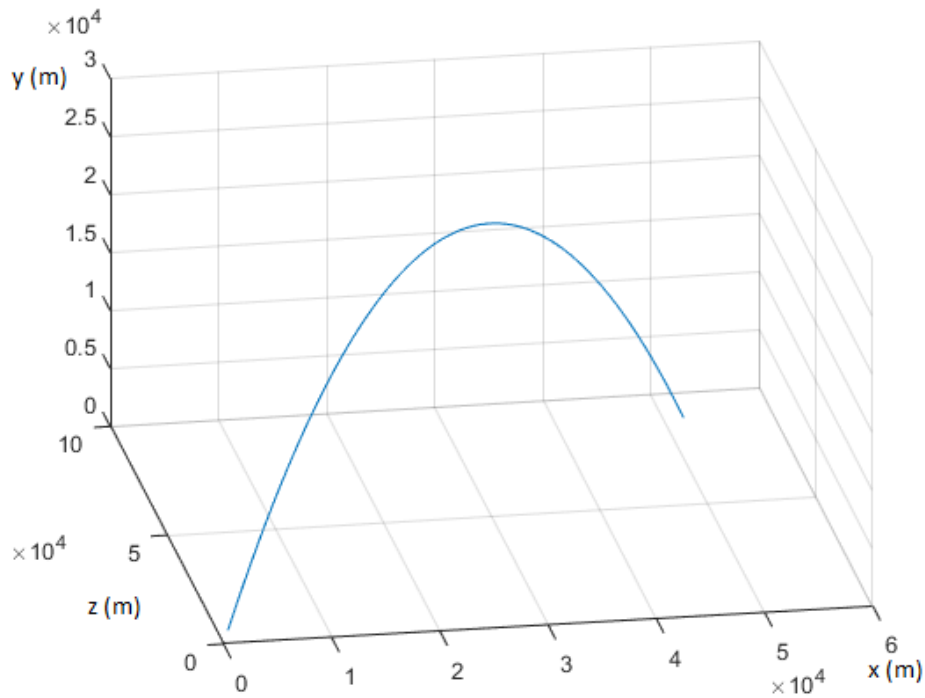
```

Listing 3.1: Codi del moviment parabòlic corregit amb l'efecte del fregament

A continuació es realitzen tres simulacions amb els paràmetres inicials indicats en el títol de cada una:

Simulació 3.1 ($60^\circ(\alpha)$, $45^\circ(\beta)$ i $+30^\circ$ de latitud (λ) a 1000 m/s

Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 1 apartat número 1. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



$x_{max} =$

5.1834e+04

$y_{max} =$

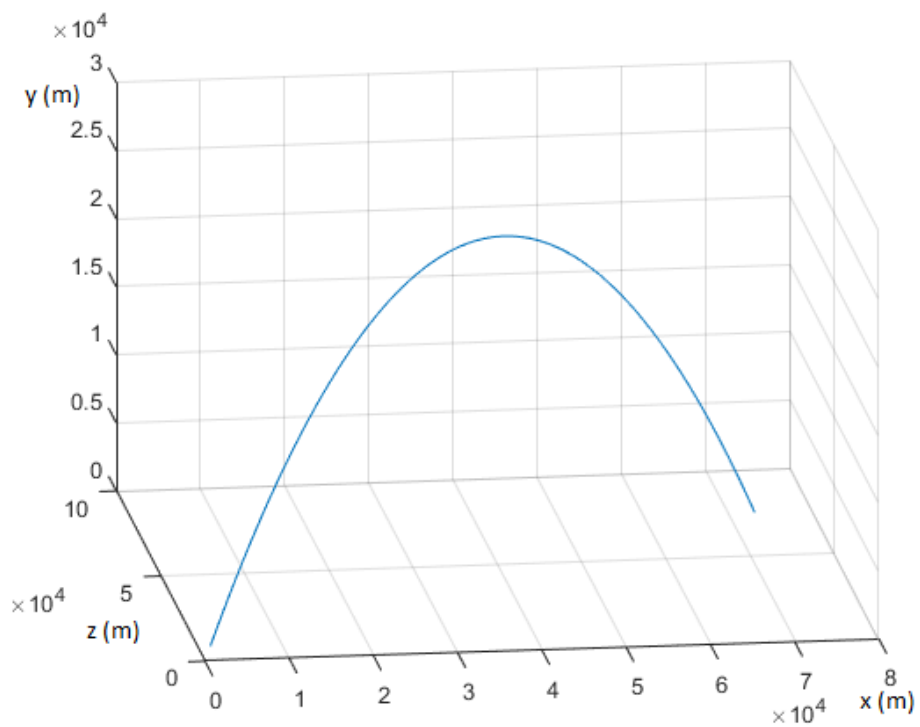
2.5607e+04

$z_{max} =$

8.8920e+04

Simulació 3.2 ($45^\circ(\alpha)$, $45^\circ(\beta)$ i $+30^\circ$ de latitud (λ) a 1000 m/s

Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 1 apartat número 2. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$$x_{max} =$$

$$y_{max} =$$

$$z_{max} =$$

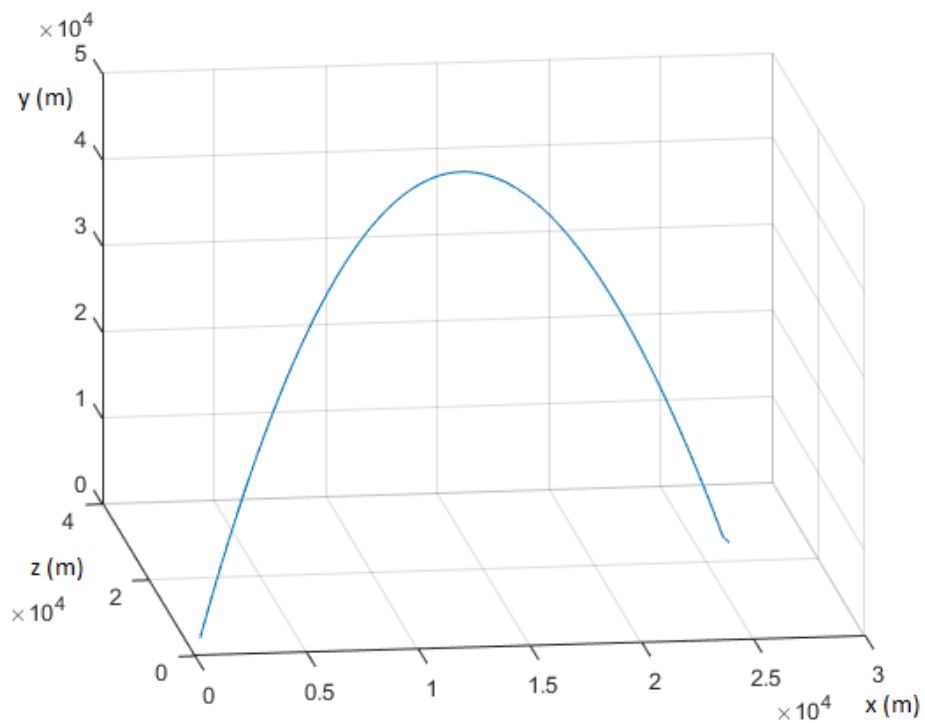
$$7.2906e+04$$

$$2.5657e+04$$

$$7.2641e+04$$

Simulació 3.3 ($45^\circ(\alpha)$, $10^\circ(\beta)$ i $+30^\circ$ de latitud (λ) a 1000 m/s

Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 1 apartat número 3. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



$x_{max} =$

2.6521e+04

$y_{max} =$

4.9525e+04

$z_{max} =$

2.4999e+04

3.3 Conclusions dels efectes del fregament

Els resultats obtinguts de les simulacions han estat els següents:

Simulació	x_{max}	y_{max}	z_{max}
3.1	5.1834e+04	2.5607e+04	8.8920e+04
3.2	7.2906e+04	2.5657e+04	7.2641e+04
3.3	2.6521e+04	4.9525e+04	2.4999e+04
2.1 (1000 m/s)	5.0098e+04	2.5608e+04	8.8376e+04
2.2 (1000 m/s)	7.1187e+04	2.5656e+04	7.2250e+04
2.3 (1000 m/s)	2.3625e+04	4.9526e+04	2.4822e+04

A la taula anterior s'hi han afegit els valors màxims de cada variable per a les simulacions sense fregament per tal d'observar quins efectes produeix. A primera vista es pot observar com hi ha una disminució molt petita de l'alçada màxima (d'un metre aproximadament). D'altra banda, en els eixos x i z es veu una desviació d'uns quants quilòmetres que s'ha de tenir en compte.

En conclusió, el fregament és una força que s'oposa sempre al vector velocitat i que canvia depenent de la densitat, de la velocitat, de la massa i de la secció del coet.

Capítol 4

VARIACIÓ DEL CAMP GRAVITATORI

En el model del coet real s'hi troben moltes variables que no són constants, fet que fa la simulació continua bastant complicada. En el capítol anterior, s'ha desenvolupat un codi capaç de calcular una acceleració a partir de les últimes dades registrades pel programa. A continuació, es mostra com es pot aprofitar el mateix codi per a introduir la variació del camp gravitatori terrestre respecte a l'altura.

Per a trobar la relació entre l'alçada i l'acceleració de la gravetat partim de la llei de gravitació universal:

$$F_G = \frac{G * M_{terra} * m}{d^2}$$

F_G = força de la gravetat | G = constant de la gravitació universal | M_{terra} = massa de la terra
 m = massa de l'objecte | d = distància fins al centre de la Terra

Tenint en compte que la primera llei de Newton és:

$$F = a * m$$

F = força | m = massa | a = acceleració

S'extreu que:

$$F_G = g * m$$

F_G = força de la gravetat | m = massa | g = gravetat

$$g * m = \frac{G * M_{terra} * m}{d^2}$$

F_G = força de la gravetat | G = constant de la gravitació universal | M_{terra} = massa de la terra
 m = massa de l'objecte | d = distància fins al centre de la Terra | g = gravetat

Per tant, l'acceleració del camp gravitatori respecte a l'alçada s'expressa de la següent forma:

$$g = \frac{G * M_{terra}}{(6371000 + y)^2}$$

G = constant de la gravitació universal | M_{terra} = massa de la terra
 d = distància fins al centre de la Terra

4.1 Simulacions de la variació del camp gravitatori

Per a introduir aquesta variació del camp gravitatori en el model anterior s'afegeix la següent funció al codi en C:

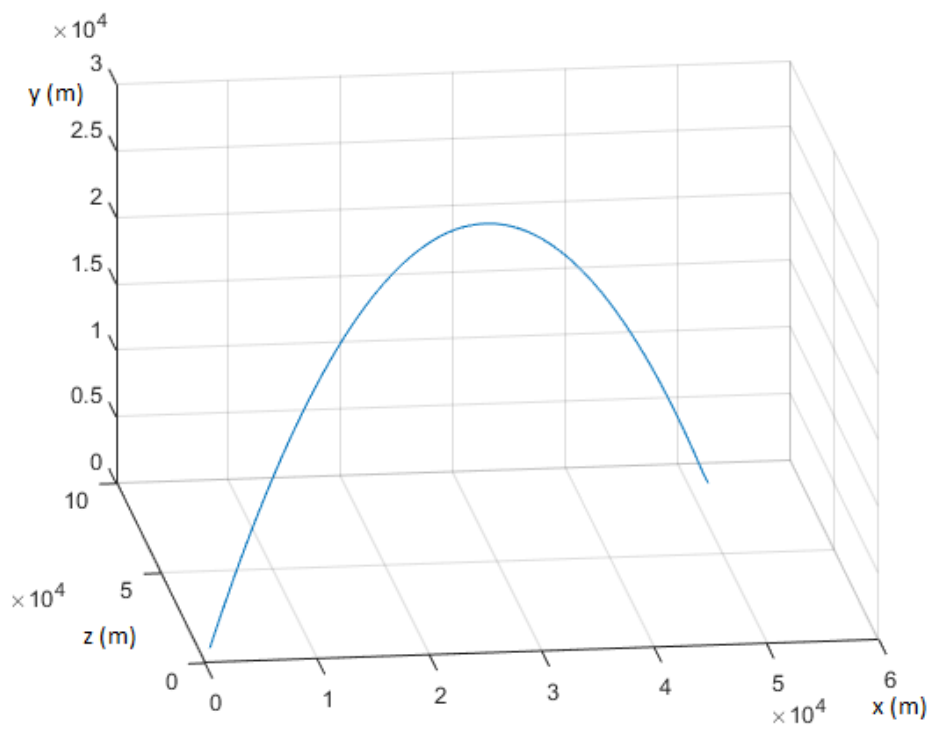
```
1 //CALCULA LA G RESPECTE A LA Y ANTERIOR
2 double gravity(double y_ans) {
3 double gy = (398709539200000)/(pow(6371000 + y_ans,2));
4 printf("%f\n", gy);
5 return gy;
6 }
7
```

Listing 4.1: Funció per a calcular l'acceleració de la gravetat

Es tornen a realitzar les simulacions corresponents:

Simulació 4.1 ($60^\circ(\alpha)$, $45^\circ(\beta)$ i $+30^\circ$ de latitud (λ) a 1000 m/s

Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 2 apartat número 1. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



$x_{max} =$

$y_{max} =$

$z_{max} =$

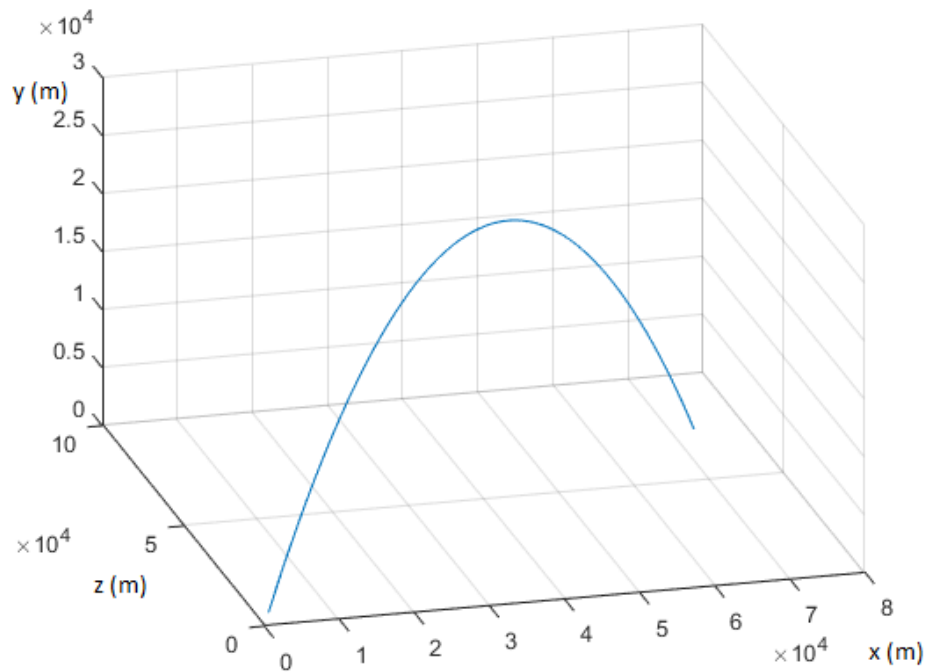
5.1835e+04

2.5775e+04

8.8919e+04

Simulació 4.2 ($45^\circ(\alpha)$, $45^\circ(\beta)$ i $+30^\circ$ de latitud (λ) a 1000 m/s

Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 2 apartat número 2. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



I els valors per a les variables x_{max} , y_{max} i z_{max} són:

$$x_{max} =$$

$$y_{max} =$$

$$z_{max} =$$

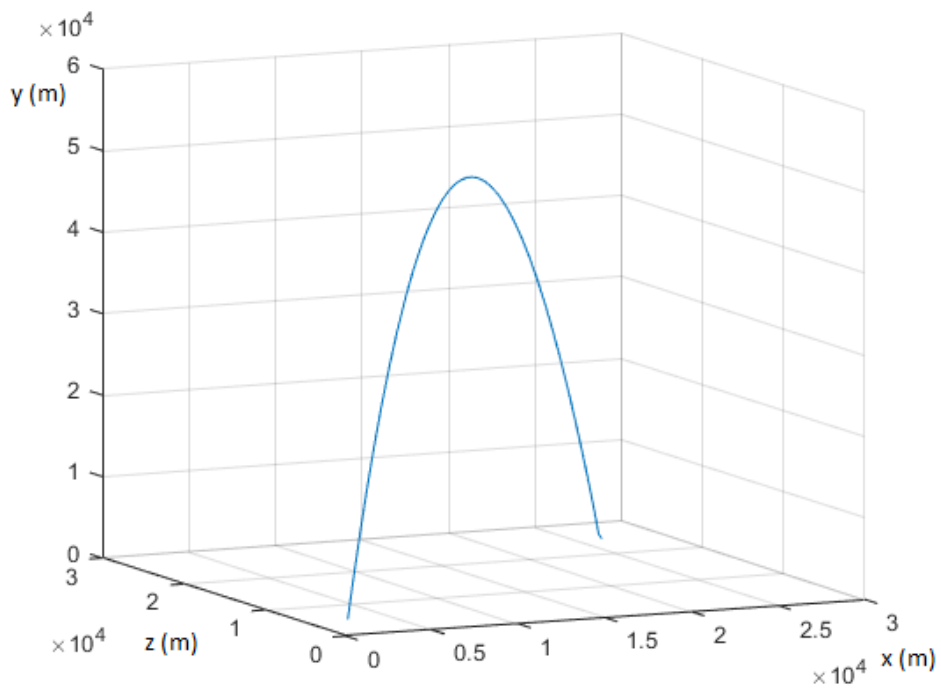
$$7.2907e+04$$

$$2.5825e+04$$

$$7.2640e+04$$

Simulació 4.3 ($45^\circ(\alpha)$, $10^\circ(\beta)$ i $+30^\circ$ de latitud (λ) a 1000 m/s

Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 2 apartat número 3. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



$x_{max} =$

2.6524e+04

$y_{max} =$

5.0228e+04

$z_{max} =$

2.4999e+04

4.2 Conclusions de la variació del camp gravitatori

En la taula següent es troben els valors màxims de les variables x , y i z de les simulacions d'aquest capítol i de l'anterior:

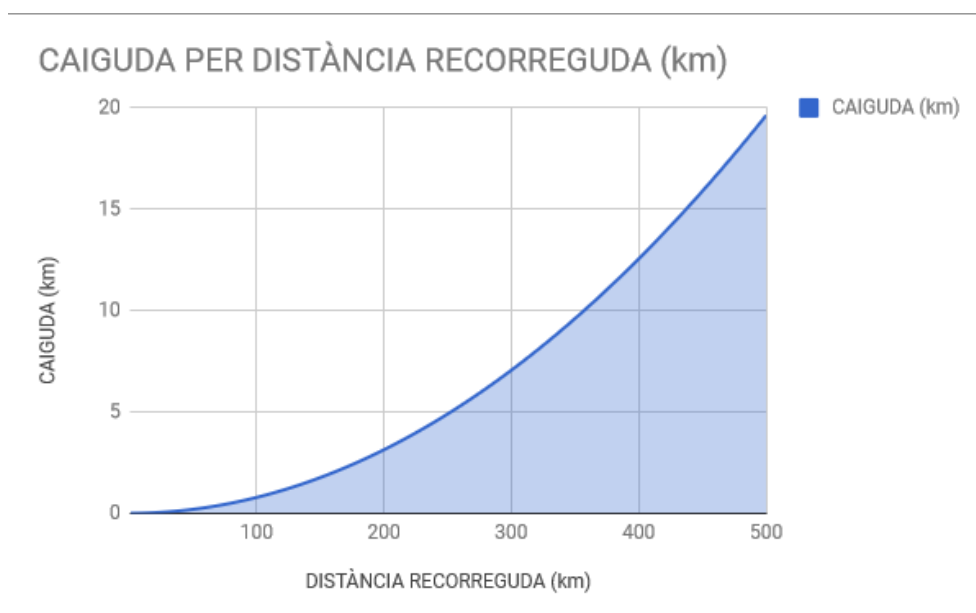
Simulació	x_{max}	y_{max}	z_{max}
4.1	5.1835e+04	2.5775e+04	8.8919e+04
4.2	7.2907e+04	2.5825e+04	7.2640e+04
4.3	2.6524e+04	5.0228e+04	2.4999e+04
3.1	5.1834e+04	2.5607e+04	8.8920e+04
3.2	7.2906e+04	2.5657e+04	7.2641e+04
3.3	2.6521e+04	4.9525e+04	2.4999e+04

Com es pot observar, els eixos x i z no canvien mentre que es pot notar una pujada substancial en els valors màxims de l'eix y . El fet que la gravetat sigui inversament proporcional a l'alçada permet que el coet arribi a una alçada major fàcilment. Podriem dir que la disminució del camp gravitatori és l'efecte contrari del fregament.

Capítol 5

CURVATURA TERRESTRE

Fins ara s'havia considerat que la superfície terrestre era plana i concident amb l'eix x . Com ja és ben sabut la superfície terrestre no és plana, sinó corba degut a la esfericitat de la Terra. Primer de tot, s'ha comprovat com d'important és aquesta relació:



Com s'observa en el gràfic anterior es tracta d'una relació exponencial i pel simple fet d'avançar 500 km les dades d'impacte serien errònies degut a una caiguda addicional de 20 km que no s'ha tingut en compte. Tot i això, aquest capítol només és una explicació d'un mètode per a corregir aquesta caiguda ja que l'objectiu d'aquest TDR no és calcular el punt d'impacte del coet o d'alguna de les seves fases. Si es tenen en compte que les equacions del moviment parabòlic bàsic són:

$$x = v_{0x} * t$$
$$y = R + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2$$

I per l'altra banda la funció d'una esfera correspon a la següent expressió:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

El que s'intentarà serà introduir les equacions del moviment parabòlic bàsic a la funció de l'esfera per tal de trobar el punt de tall. Primer s'aïlla el temps de l'equació de l'eix x i es substitueix a la de l'eix y :

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$y = R + v_{0y} * \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} * g * \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2$$

$$y = R + \tan \alpha * x - \frac{1}{2} * g * \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

Llavors es substitueix l'expressió anterior a la funció esfèrica:

$$x^2 + \left(R + \tan \alpha * x - \frac{1}{2} * g * \frac{x^2}{v_{0x}^2} \right)^2 + 0^2 = R^2$$

$$x^2 + \left[(R + \tan \alpha * x)^2 + \left(\frac{g}{2} * \frac{x^2}{v_{0x}^2} \right) - 2(R + \tan \alpha * x) * \frac{1}{2} * g * \frac{x^2}{v_{0x}^2} \right] = R^2$$

$$x^2 + R^2 + \tan^2 \alpha * x + 2 * R * \tan \alpha * x + \left(\frac{g}{2} * \frac{x^2}{v_{0x}^2} \right)^2 - R * g * \frac{x^2}{v_{0x}^2} + \tan \alpha * g * \frac{x^3}{v_{0x}^2} =$$

$$\frac{g^2}{4} * \frac{x^4}{v_{0x}^4} + \frac{g * \tan \alpha}{v_{0x}^2} * x^3 + \left(1 - \frac{R * g}{v_{0x}^2} \right) * x^2 + (\tan^2 \alpha + 2 * R * \tan \alpha) * x = 0$$

Finalment, mitjançant un programari de càlcul matemàtic, s'aïlla el valor de x :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{4 \, vx^2 \, \text{Tan}[\alpha]}{3 \, g} - (2^{1/3} (12 \, g^2 \, vx^2 (-g \, R + vx^2) - 16 \, g^2 \, vx^4 \, \text{Tan}[\alpha]^2)) / \\
 & (3 \, g^2 \\
 & (-360 \, g^4 \, R \, vx^4 \, \text{Tan}[\alpha] + 144 \, g^3 \, vx^6 \, \text{Tan}[\alpha] - 108 \, g^4 \, vx^4 \, \text{Tan}[\alpha]^2 - \\
 & 128 \, g^3 \, vx^6 \, \text{Tan}[\alpha]^3 + \\
 & \sqrt{(4 (12 \, g^2 \, vx^2 (-g \, R + vx^2) - 16 \, g^2 \, vx^4 \, \text{Tan}[\alpha]^2)^3 + \\
 & (-360 \, g^4 \, R \, vx^4 \, \text{Tan}[\alpha] + 144 \, g^3 \, vx^6 \, \text{Tan}[\alpha] - 108 \, g^4 \, vx^4 \, \text{Tan}[\alpha]^2 - \\
 & 128 \, g^3 \, vx^6 \, \text{Tan}[\alpha]^3)^2)})^{1/3}) + \\
 & \frac{1}{3 \times 2^{1/3} \, g^2} \\
 & (-360 \, g^4 \, R \, vx^4 \, \text{Tan}[\alpha] + 144 \, g^3 \, vx^6 \, \text{Tan}[\alpha] - 108 \, g^4 \, vx^4 \, \text{Tan}[\alpha]^2 - 128 \, g^3 \, vx^6 \, \text{Tan}[\alpha]^3 + \\
 & \sqrt{(4 (12 \, g^2 \, vx^2 (-g \, R + vx^2) - 16 \, g^2 \, vx^4 \, \text{Tan}[\alpha]^2)^3 + \\
 & (-360 \, g^4 \, R \, vx^4 \, \text{Tan}[\alpha] + 144 \, g^3 \, vx^6 \, \text{Tan}[\alpha] - 108 \, g^4 \, vx^4 \, \text{Tan}[\alpha]^2 - \\
 & 128 \, g^3 \, vx^6 \, \text{Tan}[\alpha]^3)^2)})^{1/3}]
 \end{aligned}$$

Capítol 6

MECÀNICA ORBITAL

Fins ara s'ha analitzat el comportament d'un cos dins del sistema de referència terrestre. L'objectiu del capítol que es presenta a continuació és profunditzar en l'àmbit de la mecànica orbital, descobrir quins tipus d'òrbites hi han i com utilitzar-les per a optimitzar el llançament d'un coet.

6.1 Base teòrica de la mecànica orbital

Per a començar, cal entendre que és una òrbita, quins tipus d'òrbites hi han i la terminologia específica de les parts d'aquestes. Per òrbita s'entén aquella trajectòria d'un cos en un sistema on les úniques forces que s'hi apliquen són els camps gravitatoris dels objectes i la propulsió (en el cas d'un coet). Fins avui en dia s'han teoritzat quatre tipus d'òrbites amb les seves equacions corresponents: circulars, el·líptiques, parabòliques i hiperbòliques. A continuació s'analitzen les condicions generals de qualsevol sistema orbital.

S'ha de tenir en compte que el centre del sistema és el centre de l'objecte amb més massa, ja que el cos amb més massa sempre serà orbitat pel de menys massa si es negligeix l'atracció gravitatòria que exerceix el coet sobre l'objecte de massa més gran. Primer de tot, es troben les equacions de l'energia en un sistema d'aquestes característiques i són:

$$E_c = \frac{1}{2} * m * v^2$$

E_c = energia cinètica | m = massa de l'objecte | v = velocitat de l'objecte

$$E_{PG} = -\frac{G * M * m}{r}$$

E_{PG} = energia potencial gravitatòria | G = constant de la gravitació universal | M = massa de l'objecte més massiu
 m = massa de l'objecte menys massiu | r = distància al centre de referència.

$$E_M = E_c + E_{PG}$$

Si es té en compte que l'energia mecànica inicial ha de ser igual que l'energia mecànica final es pot afirmar que:

$$E_{c_{inicial}} + E_{PG_{inicial}} = E_{c_{final}} + E_{PG_{final}}$$

Per a descobrir quina és la velocitat mínima per escapar de l'atracció gravitatòria de la terra es pot utilitzar l'expressió anterior. La velocitat inicial (velocitat d'escapament) és el valor que s'ha de descobrir mentre que el valor de la velocitat final serà com a mínim zero, ja que el radi tendirà a l'infinit. Per tant es reformula l'expressió anterior com a:

$$\frac{1}{2} * m * v_e^2 - \frac{G * M * m}{r} = \frac{1}{2} * m * v_f^2 - \frac{G * M * m}{\infty}$$

$$\frac{1}{2} * m * v_e^2 - \frac{G * M * m}{r} \geq 0$$

$$\frac{1}{2} * v_e^2 \geq \frac{G * M}{r}$$

$$v_e^2 \geq \frac{2 * G * M}{r}$$

$$v_e \geq \sqrt{\frac{2 * G * M}{r}}$$

v_e = velocitat d'escapament | G = constant de la gravitació universal
 M = massa de l'astre | r = radi de l'astre

Degut a l'aparició reiterada del producte de la constant de gravitació universal amb la massa d'un astre aquest es simplifica en una nova variable (amb valor únic per a cada astre) anomenada paràmetre gravitatori:

$$\mu = G * M$$

μ = paràmetre gravitatori | M = massa de l'astre
 G = constant de la gravitació universal

Geometricament parlant, les òrbites són seccions còniques i per tant en distingim quatre tipus: òrbites circulars, òrbites el·líptiques, òrbites parabòliques i òrbites hiperbòliques. A continuació, s'expliquen les característiques de les dues primeres i se'n presenten les respectives simulacions.

6.2 Òrbites circulars

Les òrbites circulars, com el seu nom ja indica, són trajectòries amb forma de cercle amb el cos orbitat al centre. Això fa que la distància entre el cos que orbita i el cos orbitat (r) sigui constant. Com ja s'ha explicat, al principi d'aquest capítol, en una òrbita hi han dues components: la velocitat i l'atracció gravitatòria. Aquesta atracció gravitatòria es pot expressar com una força gravitatòria (F_G) o una força centrípeta (F_C), per tant:

$$F_G = F_C$$
$$\frac{\mu * m}{r^2} = m * \frac{v^2}{r}$$

Si ara s'aïlla el terme velocitat de l'expressió anterior, s'obté la velocitat que el cos que orbita portarà en una òrbita donada pel terme r :

$$\frac{\mu * m}{r^2} = m * \frac{v^2}{r}$$
$$v_{orb} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

A continuació es plantejaran les equacions de la posició per a cada eix considerant que es pot saber la posició del coet mitjançant el mòdul de la distància al centre de l'astre (r) i les raons trigonomètriques.

El primer càlcul a realitzar és el període orbital que d'acord amb la Tercera Llei de Kepler es pot expressar com:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu}}$$

T = període orbital | r = radi de l'òrbita | μ = paràmetre gravitatori

D'altra banda també s'ha de calcular quin angle tindran els vectors velocitat i acceleració respecte als seus eixos, en un instant de temps determinat, tenint en compte que per a cada període orbital la variació de l'angle equivaldrà a 2π radians:

$$\alpha = \frac{2\pi * t}{T}$$

α = angle dels vectors respecte als seus eixos | t = temps | T = període orbital

Finalment, es troba un altre angle (β) que es correspon a la inclinació de l'òrbita respecte al pla de referència de l'eix x .

Tenint en compte les equacions anteriors es plantegen les equacions del moviment següents:

$$x = r * \cos \alpha * \sin \beta$$

$$y = r * \cos \alpha * \cos \beta$$

$$z = r * \sin \alpha * \sin \beta$$

Que també es poden expressar com:

$$x = r * \cos \left(\frac{2\pi * t}{T} \right) * \sin \beta$$

$$y = r * \cos \left(\frac{2\pi * t}{T} \right) * \cos \beta$$

$$z = r * \sin \left(\frac{2\pi * t}{T} \right) * \sin \beta$$

6.3 Simulacions d'òrbites circulars

Mitjançant totes les equacions esmentades en aquest apartat s'ha realitzat un codi que genera taules i vectors de dades que més tard es poden afegir al programari MatLab per a generar els gràfics corresponents. El codi emprat és el següent:

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <math.h>
4
5  //DEIXA TRIAR EL COS QUE HI HA AL CENTRE DEL SISTEMA
6  int menu_1() {
7      int object;
8      printf("Benvingut al simulador d'orbites\nTria quin cos hi haura al
9      centre de referencia:\n1. Terra\n2. Jupiter\n3. Lluna\n: ");
10     scanf("%i", &object);
11     return object;
12 }
13 //DEMANA I ASSIGNA L'ALÇADA DE L'ÓRBITA
14 double menu_2() {
```

```

15     double h;
16     printf("Escriu l'altitud de l'orbita (km): ");
17     scanf("%lf", &h);
18     return h;
19 }
20
21 //DEMANA I ASSIGNA L'ANGLE D'INCLINACIÓ (TAMBÉ EL CONVERTEIX A RADIAN)
22 double menu_3() {
23     double beta;
24     printf("Inclinacio de l'orbita respecte al pla de referencia: ");
25     scanf("%lf", &beta);
26     beta = beta / 90;
27     beta = (beta * M_PI) / 180;
28     return beta;
29 }
30
31 //ESBORRA LES DADES ANTERIORMENT ESCRITES ALS ARXIU .TXT
32 int reset() {
33     double null = 0;
34     FILE *f = fopen("orbita.txt", "w+");
35     FILE *fx = fopen("orbita_X.txt", "w+");
36     FILE *fy = fopen("orbita_Y.txt", "w+");
37     FILE *fz = fopen("orbita_Z.txt", "w+");
38     fprintf(f, "%s %s %s %s %s \n", "x", "y", "z", "t", "//// \\hline");
39     fprintf(fx, "%s", "x = [");
40     fprintf(fy, "%s", "y = [");
41     fprintf(fz, "%s", "z = [");
42     fclose(f);
43     fclose(fx);
44     fclose(fy);
45     fclose(fz);
46     return 0;
47 }
48
49 //ESCRIU EL RESULTAT A UN FITXER .TXT
50 int write(double x, double y, double z, double alpha, double t) {
51     FILE *f = fopen("orbita.txt", "a+");
52     FILE *fx = fopen("orbita_X.txt", "a+");
53     FILE *fy = fopen("orbita_Y.txt", "a+");
54     FILE *fz = fopen("orbita_Z.txt", "a+");
55     fprintf(f, "%f %s %f %s %f %s %f %s %f %s \n", x, "&", y, "&", z, "&", t, "&",
alpha, "//// \\hline");
56     fprintf(fx, "%f %s", x, ", ");
57     fprintf(fy, "%f %s", y, ", ");
58     fprintf(fz, "%f %s", z, ", ");
59     fclose(f);
60     fclose(fx);
61     fclose(fy);
62     fclose(fz);
63     return 0;
64 }
65
66 //ACABAR DE DONAR FORMAT A CADA VECTOR PER A PODER LO FICAR AL MATLAB
67 int lastwrite() {
68     FILE *fx = fopen("orbita_X.txt", "a+");

```

```

69 FILE *fy = fopen("orbita-Y.txt", "a+");
70 FILE *fz = fopen("orbita-Z.txt", "a+");
71 fprintf(fx, "%s", "]");
72 fprintf(fy, "%s", "]");
73 fprintf(fz, "%s", "]");
74 fclose(fx);
75 fclose(fy);
76 fclose(fz);
77 return 0;
78 }
79
80 //CALCULA LA VELOCITAT A L'ÓRBIA
81 double vobrita(double r, double g_parameter){
82     double v_o = sqrt((g_parameter/r));
83     return v_o;
84 }
85
86 //CALCULA EL PERIODE ORBIAL
87 double periode_orbital(double g_parameter, double r) {
88     double T = (2 * M_PI) * sqrt((pow(r,3)/g_parameter));
89     return T;
90 }
91
92 //CALCULA ALPHA
93 double computea(double t, double T) {
94     double alpha = ((2*M_PI) * t)/T;
95     return alpha;
96 }
97
98 //CALCULA X
99 double computex(double v_o, double alpha, double beta, double r, double t)
100 {
101     double x = (r * cos(alpha) * sin(beta)) ;
102     return x;
103 }
104
105 //CALCULA Y
106 double computey(double v_o, double alpha, double beta, double r, double t)
107 {
108     double y = (r * cos(alpha) * cos(beta)) ;
109     return y;
110 }
111
112 //CALCULA Z
113 double computez(double v_o, double alpha, double beta, double r, double t)
114 {
115     double z = (r * sin(alpha) * sin(beta));
116     return z;
117 }
118
119 //FUNCIÓ PRINCIPAL
120 int main() {
121     int object;
122     double M;
123     double m;

```

```

121 double h;
122 double g_parameter;
123 double r;
124 double v_o;
125 double T;
126 double t_interval;
127 double t = 0;
128 double alpha;
129 double beta;
130 double x;
131 double y;
132 double z;
133 int point = 0;
134 reset();
135 object = menu_1();
136 h = menu_2();
137 beta = menu_3();
138 if (object = 1) {
139     g_parameter = 398600441800000;
140     r = (6371000 + (h * 1000));
141 }
142 else {
143     if (object = 2) {
144         g_parameter = 126686534000000000;
145         r = (71492000 + (h * 1000));
146     }
147     else {
148         g_parameter = 4904869500000;
149         r = (1737000 + (h * 1000));
150     }
151 }
152 v_o = vobrita(r, g_parameter);
153 T = periode_orbital(g_parameter, r);
154 t_interval = T/100;
155 t = t + t_interval;
156 while(t <= T) {
157     t = t + t_interval;
158     alpha = computea(t, T);
159     x = computex(v_o, alpha, beta, r, t);
160     y = computey(v_o, alpha, beta, r, t);
161     z = computez(v_o, alpha, beta, r, t);
162     write(x, y, z, alpha, t);
163     printf("%s %i\n", "Data written for point ", point);
164     point ++;
165 }
166 lastwrite();
167 printf("%f %f %f %f\n", g_parameter, r, v_o, T);
168 return 0;
169 }
170
171

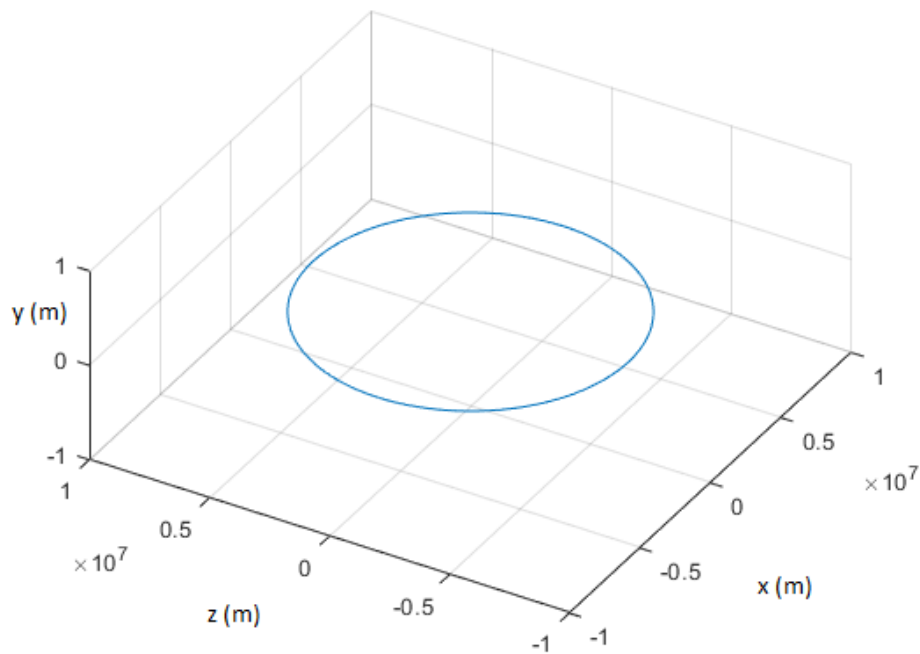
```

Listing 6.1: Codi de les òrbites circulars

Fent ús d'aquest codi es realitzen quatre simulacions d'òrbites circulars amb diferents combinacions de condicions inicials per tal d'analitzar els resultats.

Simulació 6.1 (Al voltant de la Terra, 200 km altura, 0° inclinació(β))

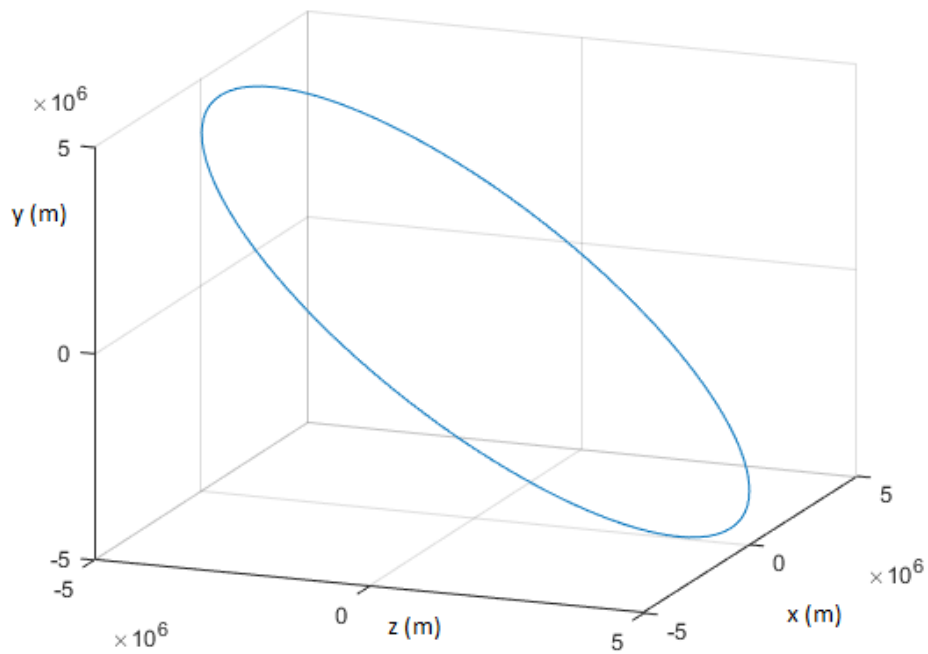
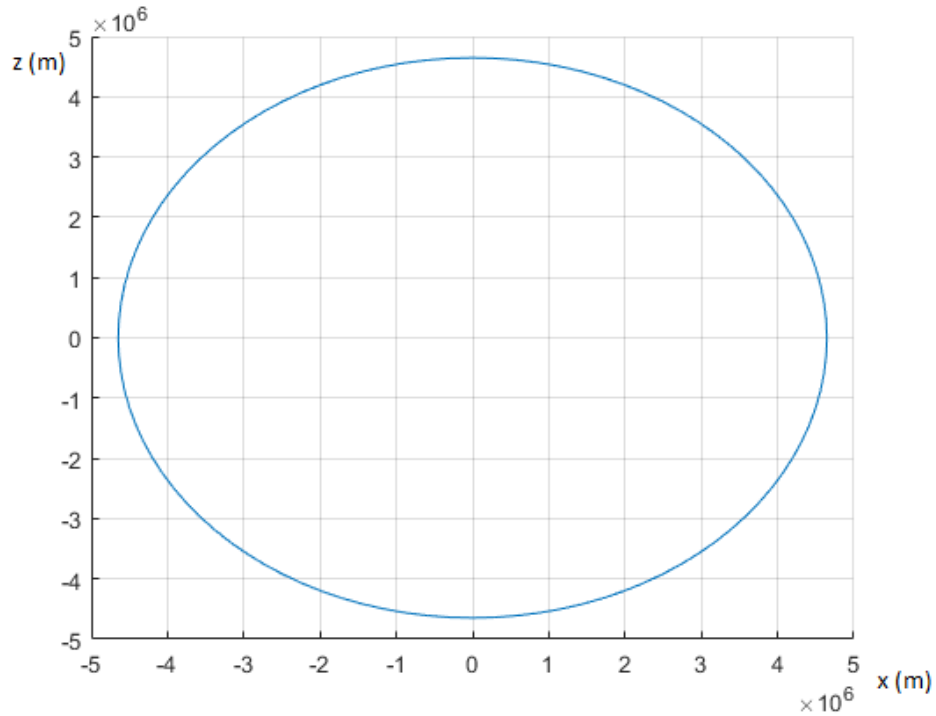
Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 3 apartat número 1. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



$r =$	$T =$	$v_{orb} =$
6571000 m	5301.004602 s	7788.487985 m/s

Simulació 6.2 (Al voltant de la Terra, 200 km altura, 45° inclinació(β))

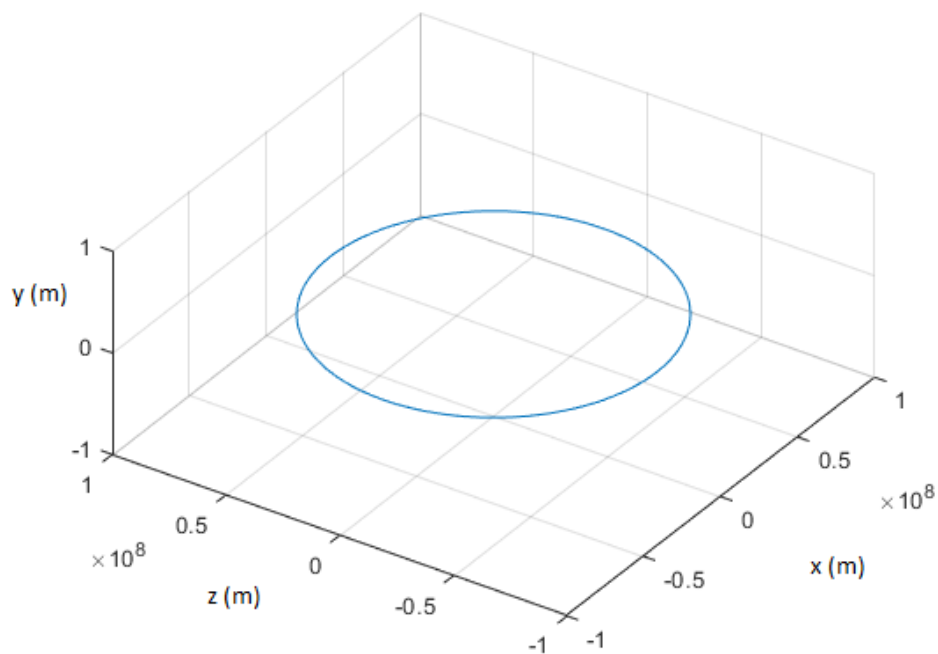
Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 3 apartat número 2. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



$r =$	$T =$	$v_{orb} =$
6571000 m	5301.004602 s	7788.487985 m/s

Simulació 6.3 (Al voltant de Júpiter, 200 km altura, 0° inclinació(β))

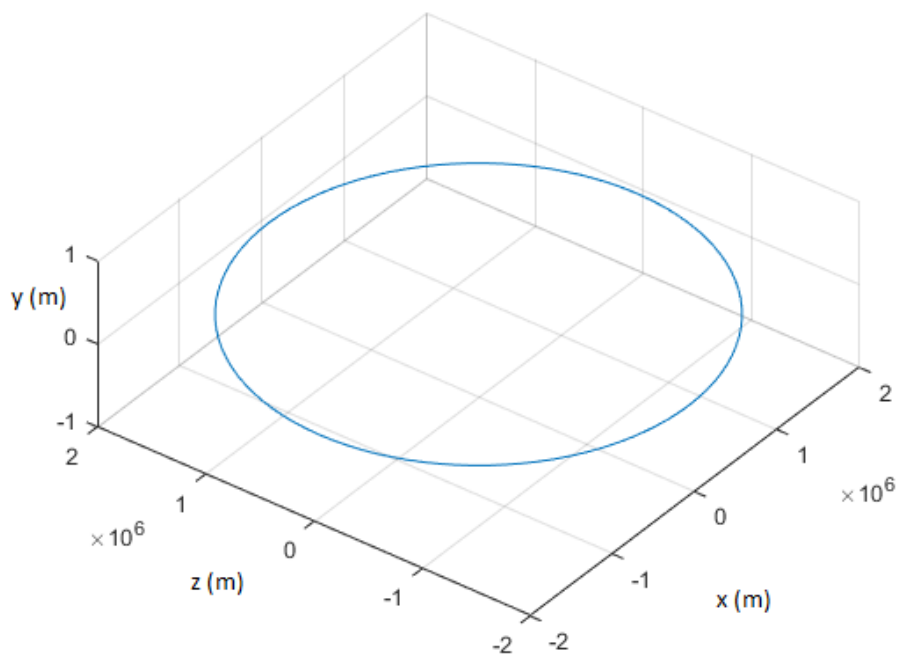
Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 3 apartat número 3. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



$r =$	$T =$	$v_{orb} =$
71692000 m	10715.703425 s	42036.822332 m/s

Simulació 6.4 (Al voltant de la lluna, 200 km altura, 0° inclinació(β))

Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 3 apartat número 4. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



$r =$	$T =$	$v_{orb} =$
1937000 m	1591.288478 s	7648.223506 m/s

6.4 Conclusions de les òrbites circulars

En la taula que es mostra a continuació es troben els valors de les variables r , T i v_{orb} de les simulacions d'òrbites circulars:

Simulació	Radi (r)	Període (T)	Velocitat (v_{orb})
6.1	6571000 m	5301.004602 s	7788.487985 m/s
6.2	6571000 m	5301.004602 s	7788.487985 m/s
6.3	71692000 m	10715.703425 s	42036.822332 m/s
6.4	1937000 m	1591.288478 s	7648.223506 m/s

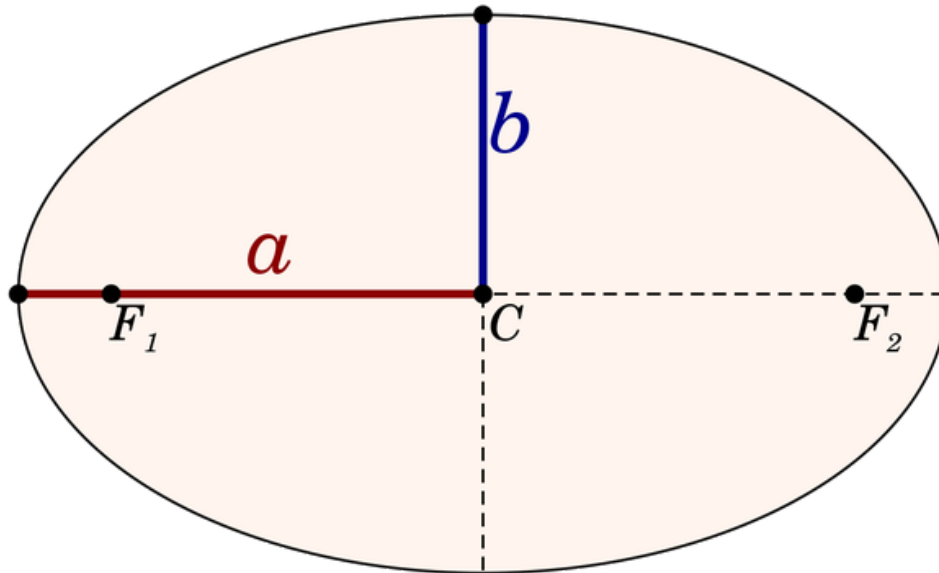
Un dels primers fets que salta a la vista és que el període de rotació i la velocitat no es veuen afectats per una inclinació de l'òrbita. Això, es demostrable fàcilment de forma geomètrica: la distància entre un punt qualsevol de la superfície d'una esfera perfecta i el seu centre és constant i equival a r . Si es té en compte que un cercle no és més que la secció d'una esfera que passa pel seu centre, qualsevol secció de l'esfera, és a dir, feta amb qualsevol inclinació, tindrà r com a distància al centre. Conseqüentment, si el valor de r no canvia tampoc ho farà la velocitat orbital (v_{orb}) ni el període (T).

S'observa també que la velocitat a l'òrbita ha de ser molt major per casos com el de Júpiter al tenir una massa molt superior i, per tant, una atracció gravitatòria major. D'altra banda la velocitat orbital al voltant de la lluna és molt menor i, per tant, ho és la seva massa. Aquest fet provoca que el període orbital sigui molt més curt a Júpiter i més llarg a la lluna degut a les velocitats a l'òrbita.

Es conclou que les òrbites circulars són constants i venen donades per les condicions inicials.

6.5 Òrbites el·líptiques

El fet que les òrbites siguin circulars és una creença molt estesa però, la veritat és totalment diferent. La majoria de les òrbites de l'univers són el·líptiques, és a dir, tenen forma d'el·lipse, una de les formes més abundants en l'univers. Una el·lipse consta de tres parts fonamentals: els focus (f_1 i f_2), el semieix major (a) i el semieix menor (b). Aquestes parts es poden veure en la següent il·lustració:



El·lipse ¹

Tot i que es tendeix a pensar que l'el·lipse és una figura provinent del cercle, aquesta afirmació és com a poc, falsa. El cert és que és tot el contrari: el cercle només és un cas especial d'una el·lipse. L'explicació geomètrica d'aquesta afirmació es troba en els anomenats focus de l'el·lipse.

Ja s'ha dit anteriorment que en un cercle la distància al centre és constant i equival a r . Doncs en una el·lipse es troba una correlació molt semblant: la suma de les distàncies entre un punt qualsevol de l'el·lipse i cada focus és constant. D'altra banda, el semieix major i el semieix menor han de ser de llargada diferent per a que es doni una el·lipse. Com més gran és la diferència de llargada entre els dos, més allunyats estaran els focus del centre de l'el·lipse i com més petita la diferència, més a prop estaran del centre. Si es dona el cas que els dos semieixos tenen la mateixa llargada, els dos focus es superposaran en el centre de l'el·lipse que passarà a ser un cercle. Per tant, un cercle no deixa de ser una el·lipse en la que els seus semieixos tenen la mateixa llargada.

Aquesta relació entre la llargada dels semieixos s'anomena excentricitat i ve donada per la següent expressió:

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

¹Quora - A place to share knowledge and better understand the world, Mountain View, California, 17-09-2018, <<https://qph.fs.quoracdn.net/main-qimg-7c2cb8ede637a96cbbd5c79856182d73>>.

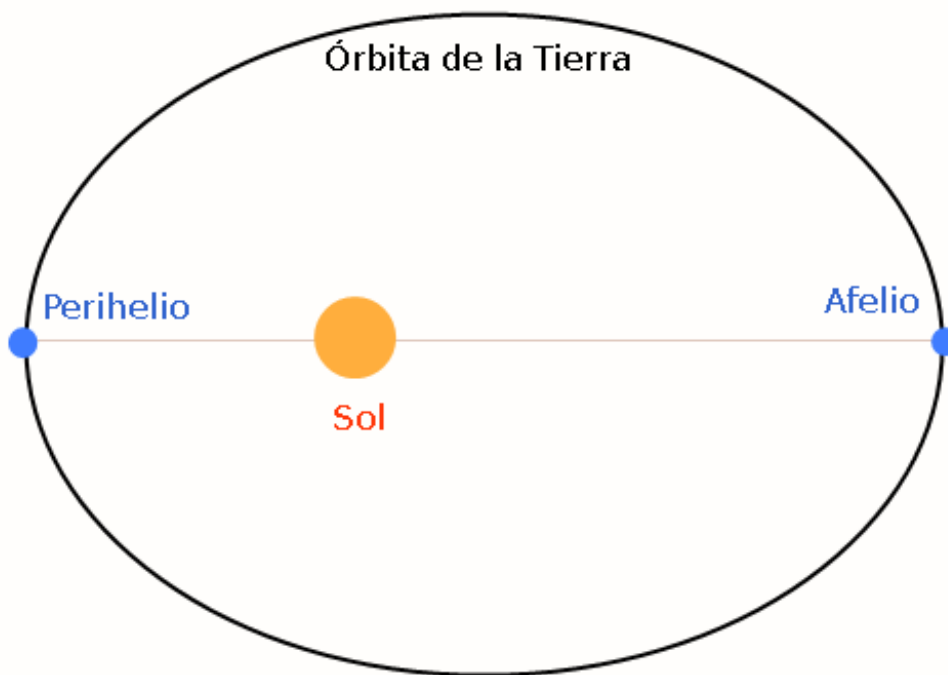
Per a un cercle, l'excentricitat serà sempre un valor entre 0 i 1. L'excentricitat d'un cercle sempre equivaldrà a 0, ja que:

$$a = b$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 1$$

$$\epsilon = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0} = 0$$

Si traslладem la forma el·líptica a una òrbita apareixen nous termes. Primer de tot, cal esmentar que en una òrbita el·líptica, l'astre orbitat sempre es trobarà en un dels focus de l'el·lipse. Els termes periastre i afeli es refereixen a la posició en l'òrbita més propera a l'objecte orbitat (periastre) i la més llunyana (afeli). Aquestes parts es troben marcades en la següent il·lustració:



Òrbita Kepler ²

Per a determinar la posició d'un cos en una òrbita, cal saber la distància entre el cos i el focus on es troba l'objecte orbitat. En un cercle, com ja s'ha dit, aquesta distància és constant. El repte d'una el·lipse és que aquesta distància canvia respecte a la posició. Per a saber aquesta distància (a la que s'anomenarà radi (r)) s'utilitza la següent expressió:

² *Wikimedia Commons*, Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5b/Afelio_Perihelio_Sol_Tierra.png>.

$$r = \frac{a * (1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon * \cos \theta}$$

r = distància al focus | ϵ = excentricitat | θ = angle de r respecte a a | a = semieix major

Però primer de tot el que cal és establir les condicions inicials de l'òrbita. Per això es necessita saber la r al periastre (r_p) i al afeli (r_a). Seguidament, es calcula el semieix major realitzant la mitjana aritmètica de les dues distàncies:

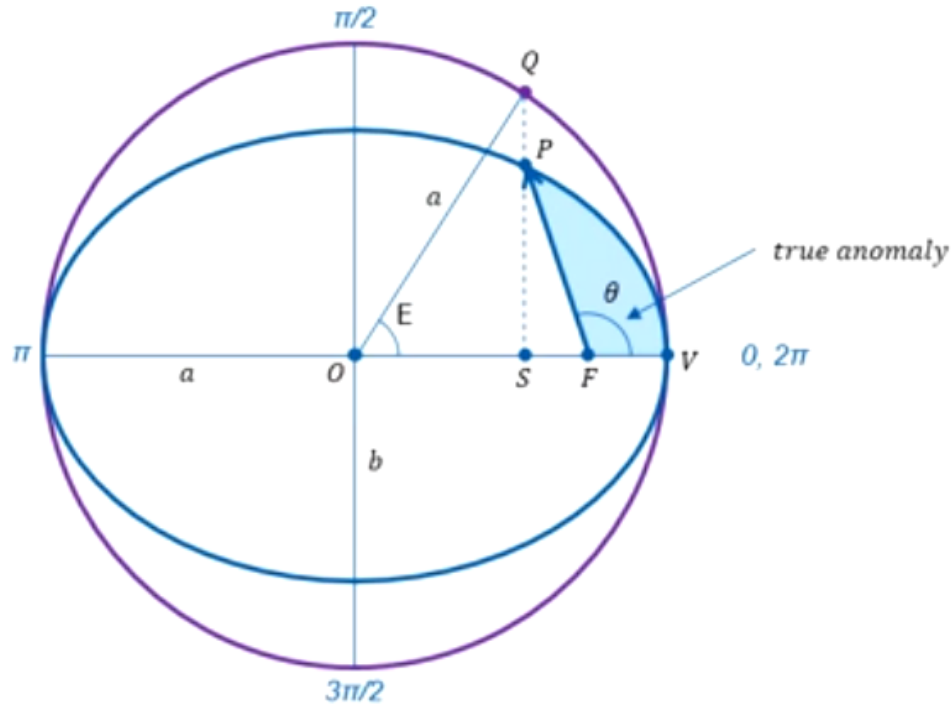
$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

A continuació es necessita calcular l'excentricitat però no es té coneixement de la llargada del semieix menor (b) per a les variables r_p i r_a desitjades. Per tant, s'ha de buscar un mètode alternatiu que no requereixi de l'equació de l'excentricitat. Sabent la distància al focus al periastre i que l'angle (θ) al periastre equival a 0, es pot calcular l'excentricitat aïllant-la de l'expressió de la distància al focus, quedant:

$$\epsilon = \frac{-r_p \pm \sqrt{r_p^2 - (4 * a * (r_p - a))}}{2 * a}$$

ϵ = excentricitat | r_p = distància del focus al periastre | a = semieix major

Finalment, el que faltaria per determinar és la relació entre el temps i l'angle θ que en aquest cas no és una relació directa ja que la r no és constant. El que es fa és dibuixar un cercle al voltant de l'el·lipse fent que aquesta quedi circumscrita en aquest. Llavors, es desplaça el mòbil a la circumferència i es dibuixa una línia del centre del cercle al mòbil quedant un angle anomenat anomalia de l'excentricitat o E com es mostra en la següent il·lustració:



Geometria ³

L'expressió de θ respecte a l'anomalia de l'excentricitat és:

$$\theta = 2 * \arctan\left(\sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} * \tan\left(\frac{E}{2}\right)\right)$$

θ = angle entre el radi i el semieix major | ϵ = excentricitat | E = anomalia de l'excentricitat

Per a calcular l'anomalia de l'excentricitat i vincular-la al temps, l'astrònom i matemàtic alemany Johannes Kepler va idear la següent expressió:

$$M = E - \epsilon * \sin E$$

E = anomalia de l'excentricitat | ϵ = excentricitat

A l'expressió anterior, la variable M equival a:

$$M = \frac{t}{T} * 2\pi$$

t = instant en el temps | T = període orbital

Per a calcular el període orbital, s'utilitza la Tercera Llei de Kepler, que diu que el quadrat del període orbital és proporcional al cub del semieix major:

³TOELLNER, Jon: *Orbital Dynamics Part 18 - Formula for True Anomaly*, Youtube, Youtube Headquarters, San Bruno, California, 2014, 17-09-2018, <<https://www.youtube.com/watch?v=I01hUIxb7RI>>.

$$T = 2\pi * \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

T = període orbital | a = semieix major | μ = paràmetre gravitatori

Finalment, l'expressió de la velocitat a l'òrbita ve donada per:

$$v_{orb} = \sqrt{\mu * \frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$

6.6 Simulacions d'òrbites el·líptiques

Utilitzant les equacions descrites en l'apartat anterior, s'ha realitzat un programa capaç de simular òrbites el·líptiques a partir del semieix major i del radi del periastre juntament amb l'angle d'inclinació, si s'escau. El codi encarregat de generar les dades que més tard són utilitzades per a generar els gràfics és el següent:

```

1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <math.h>
4
5  //DEIXA TRIAR EL COS QUE HI HA AL CENTRE DEL SISTEMA
6  int menu_1() {
7      int object;
8      printf("Benvingut al simulador d'orbites\nTria quin cos hi haura al
9      centre de referencia:\n1. Terra\n2. Jupiter\n3. Lluna\n: ");
10     scanf("%i", &object);
11     return object;
12 }
13
14 //DEMANA I ASSIGNA L'ALÇADA DE L'ÓRBITA
15 double menu_2() {
16     double a;
17     printf("Escriu la llargada del semieix major: ");
18     scanf("%lf", &a);
19     return a;
20 }
21
22 //DEMANA I ASSIGNA EL RADI AL PERIASTRE
23 double menu_3() {
24     double b;
25     printf("Escriu la distància al centre de l'astre al periastre: ");
26     scanf("%lf", &b);
27     return b;
28 }
29
30 //DEMANA I ASSIGNA L'ANGLE D'INCLINACIÓ (TAMBÉ EL CONVERTEIX A RADIANES)
31 double menu_4() {
32     double beta;
33     printf("Inclinacio de l'orbita respecte al pla de referencia: ");

```

```

33     scanf("%lf", &beta);
34     beta = (beta * M_PI) / 180;
35     return beta;
36 }
37
38 //ESBORRA LES DADES ANTERIORMENT ESCRITES ALS ARXIUS .TXT
39 int reset() {
40     double null = 0;
41     FILE *f = fopen("orbita.txt", "w+");
42     FILE *fx = fopen("orbita_X.txt", "w+");
43     FILE *fy = fopen("orbita_Y.txt", "w+");
44     FILE *fz = fopen("orbita_Z.txt", "w+");
45     fprintf(f, "%s %s %s %s %s %s %s %s %s %s %s\n", "x", "&", "y", "&", "z", "&",
&", "$v_{orb}$", "&", "t", "&", "\\\\ \\hline");
46     fprintf(fx, "%s", "x = [");
47     fprintf(fy, "%s", "y = [");
48     fprintf(fz, "%s", "z = [");
49     fclose(f);
50     fclose(fx);
51     fclose(fy);
52     fclose(fz);
53     return 0;
54 }
55
56 //ESCRIU EL RESULTAT A UN FITXER .TXT
57 int write(double x, double y, double z, double v_o, double t) {
58     FILE *f = fopen("orbita.txt", "a+");
59     FILE *fx = fopen("orbita_X.txt", "a+");
60     FILE *fy = fopen("orbita_Y.txt", "a+");
61     FILE *fz = fopen("orbita_Z.txt", "a+");
62     fprintf(f, "%f %s %f %s %f %s %f %s %f %s\n", x, "&", y, "&", z, "&", v_o, "&
", t, "\\\\ \\hline");
63     fprintf(fx, "%f %s", x, ", ");
64     fprintf(fy, "%f %s", y, ", ");
65     fprintf(fz, "%f %s", z, ", ");
66     fclose(f);
67     fclose(fx);
68     fclose(fy);
69     fclose(fz);
70     return 0;
71 }
72
73 //ACABA DE DONAR FORMAT A CADA VECTOR PER A PODER LO FICAR AL MATLAB
74 int lastwrite() {
75     FILE *fx = fopen("orbita_X.txt", "a+");
76     FILE *fy = fopen("orbita_Y.txt", "a+");
77     FILE *fz = fopen("orbita_Z.txt", "a+");
78     fprintf(fx, "%s", "]");
79     fprintf(fy, "%s", "]");
80     fprintf(fz, "%s", "]");
81     fclose(fx);
82     fclose(fy);
83     fclose(fz);
84     return 0;
85 }

```

```

86
87 //CALCULA EL RADI
88 double radius(double a, double alpha, double ecc) {
89     double r = (a * (1 - (pow(ecc,2))))/(1 + (ecc * cos(alpha)));
90     printf("%f\n", r);
91     return r;
92 }
93
94 //CALCULA LA VELOCITAT A L'ÓRBIA
95 double vobrita(double g-parameter, double r, double a) {
96     double v_o = sqrt((g-parameter * ((2/r) - (1/a))));
97     return v_o;
98 }
99
100 //CALCULA EL PERIODE ORBIAL
101 double periode_orbital(double g-parameter, double a) {
102     double T = (2 * M_PI) * sqrt((pow((a),3)/g-parameter));
103     return T;
104 }
105
106 //CALCULA L'EXCENTRICITAT
107 double eccentricity(double a, double dperiheli) {
108     double e;
109     double eccpositiu = (dperiheli + sqrt((pow(dperiheli,2) - (4 * a *
110 (dperiheli - a)))))/(2 * a);
111     double eccnegatiu = (dperiheli - sqrt((pow(dperiheli,2) - (4 * a *
112 (dperiheli - a)))))/(2 * a);
113     if (0 < eccpositiu && eccpositiu < 1) {
114         e = eccpositiu;
115     }
116     if (0 < eccnegatiu && eccnegatiu < 1) {
117         e = eccnegatiu;
118     }
119     printf("%f\n", eccpositiu);
120     printf("%f\n", eccnegatiu);
121     return e;
122 }
123 //CALCULA L'ANOMALIA DE L'EXCENTRICITAT
124 double eccanomaly(double ecc, double M) {
125     double E = 0.01;
126     int i = 0;
127     while (i == 0) {
128         E = E + 0.01;
129         double checke_unrefined = E - (ecc * sin(E));
130         double checke = floorf(checke_unrefined * 100) / 100;
131         if (checke == M) {
132             checke = E;
133             i = 1;
134         }
135         if (checke > M) {
136             checke = E;
137             i = 1;
138         }
139     }
140 }

```

```

139     return E;
140 }
141
142 //CALCULA ALPHA
143 double computea(double ecc, double E) {
144     double alpha = 2 * (atan(sqrt((1 + ecc)/(1 - ecc)) * (tan(E/2))));
145     return alpha;
146 }
147
148 //CALCULA X
149 double computex(double v_o, double alpha, double beta, double r, double t)
150 {
151     double x = (r * cos(alpha) * sin(beta));
152     return x;
153 }
154
155 //CALCULA Y
156 double computey(double v_o, double alpha, double beta, double r, double t)
157 {
158     double y = (r * cos(alpha) * cos(beta));
159     return y;
160 }
161
162 //CALCULA Z
163 double computez(double v_o, double alpha, double beta, double r, double t)
164 {
165     double z = (r * sin(alpha) * sin(beta));
166     return z;
167 }
168
169 //FUNCIÓ PRINCIPAL
170 int main() {
171     int object;
172     double MASS;
173     double m;
174     double h;
175     double g_parameter;
176     double r;
177     double v_o;
178     double T;
179     double t_interval;
180     double t = 0;
181     double alpha;
182     double beta;
183     double x;
184     double y;
185     double z;
186     double x_ans = 0;
187     double a;
188     double dperiheli;
189     double ecc;
190     double M_unrefined;
191     double M;
192     double E;
193     int point = 0;

```

```

191 reset();
192 object = menu_1();
193 a = menu_2(); //SEMIMAJOR
194 dperiheli = menu_3(); //DISTÀNCIA AL PERIHELÍ
195 beta = menu_4();
196 if (object = 1) {
197     g-parameter = 398600441800000;
198
199 }
200 else {
201     if (object = 2) {
202         g-parameter = 126686534000000000;
203
204     }
205     else{
206         g-parameter = 4904869500000;
207
208     }
209 }
210 T = periode_orbital(g-parameter , a);
211 t_interval = T/100;
212 t = t    t_interval;
213 ecc = eccentricity(a, dperiheli);
214 printf("%f\n" , T);
215 while(t <= T) {
216     t = t + t_interval;
217     M_unrefined = (t/T) * (2 * M_PI);
218     M = floorf(M_unrefined * 100)/100;
219     E = eccanomaly(ecc ,M);
220     alpha = computea(ecc ,E);
221     r = radius(a, alpha , ecc);
222     v_o = vobrita(g-parameter , r , a);
223     x = computex(v_o , alpha , beta , r , t);
224     y = computey(v_o , alpha , beta , r , t);
225     z = computez(v_o , alpha , beta , r , t);
226     write(x,y,z , v_o , t);
227     x = x_ans;
228     printf("%s %i\n" , "Data written for point " , point);
229     point ++;
230 }
231 lastwrite();
232 printf("%f %f %f %f\n" , g-parameter , r , ecc , T);
233 return 0;
234 }
235
236

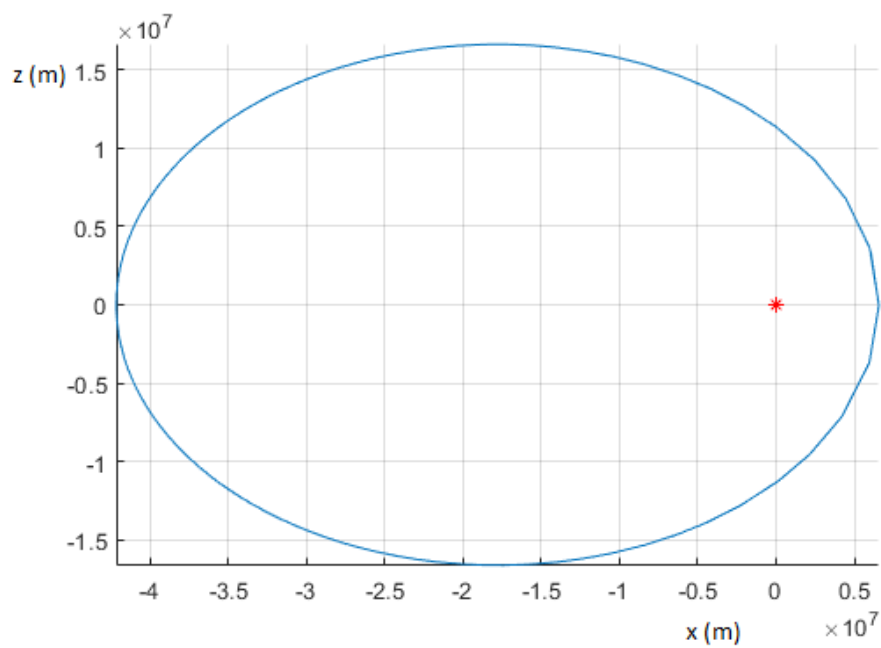
```

Listing 6.2: Codi de les òrbites el·líptiques

A continuació, es mostren quatre simulacions per a estudiar el comportament de les òrbites el·líptiques. El punt on es troba l'astre ve marcat pels eixos marcats en negreta.

Simulació 6.5 (Al voltant de la terra, 200 km r_p , 35786 km r_a , 0° d'inclinació)

Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 3 apartat número 5. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



$$\Delta r =$$

$$29215000 \text{ m}$$

$$T =$$

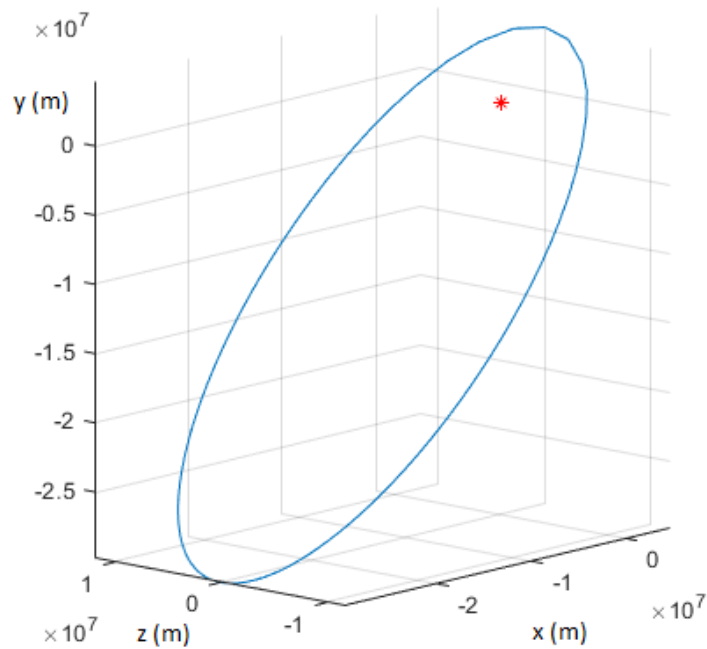
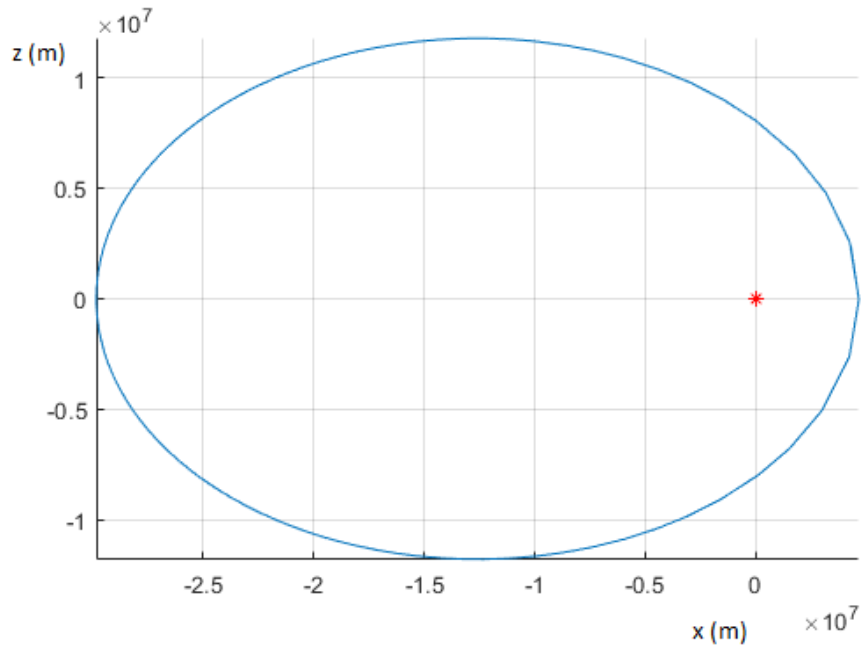
$$37847.209722 \text{ s}$$

$$\Delta v_{orb} =$$

$$8648.061097 \text{ m/s}$$

Simulació 6.6(Al voltant de la terra, 200 km r_p , 35786 km r_a , 45° d'inclinació)

Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 3 apartat número 6. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



$$\Delta r =$$

$$29215000 \text{ m}$$

$$T =$$

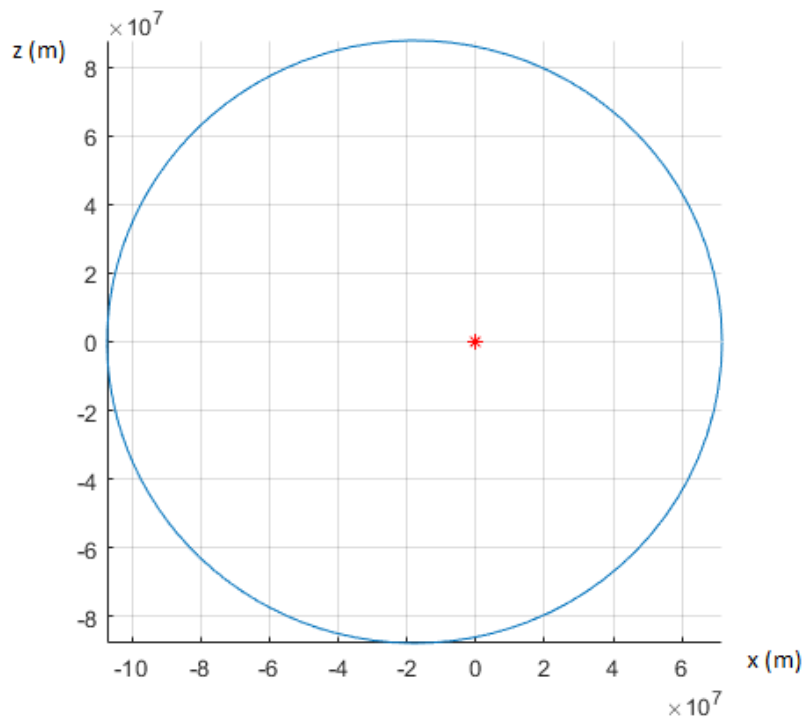
$$37847.209722 \text{ s}$$

$$\Delta v_{orb} =$$

$$8648.061097 \text{ m/s}$$

Simulació 6.7(Al voltant de Júpiter, 200 km r_p , 35786 km r_a , 0° d'inclinació)

Per a consultar la taula de valors d'aquesta simulació referiu-vos a l'Annex B secció 3 apartat número 6. El gràfic obtingut de la simulació és el següent:



$$\Delta r =$$

$$T =$$

$$\Delta v_{orb} =$$

$$35586000 \text{ m}$$

$$266401.302664 \text{ s}$$

$$856.39842 \text{ m/s}$$

Simulació 6.8(Al voltant de la lluna, 200 km r_p , 35786 km r_a , 0° d'inclinació)

No existeix una òrbita capaç d'allunyar-se 35786km de la lluna i tornar ja que la velocitat necessitada superaria la velocitat d'escapament.

$$\Delta r =$$

$$T =$$

$$\Delta v_{orb} =$$

$$\infty \text{ m}$$

$$\infty \text{ s}$$

$$> v_e$$

6.7 Conclusions de les òrbites el·líptiques

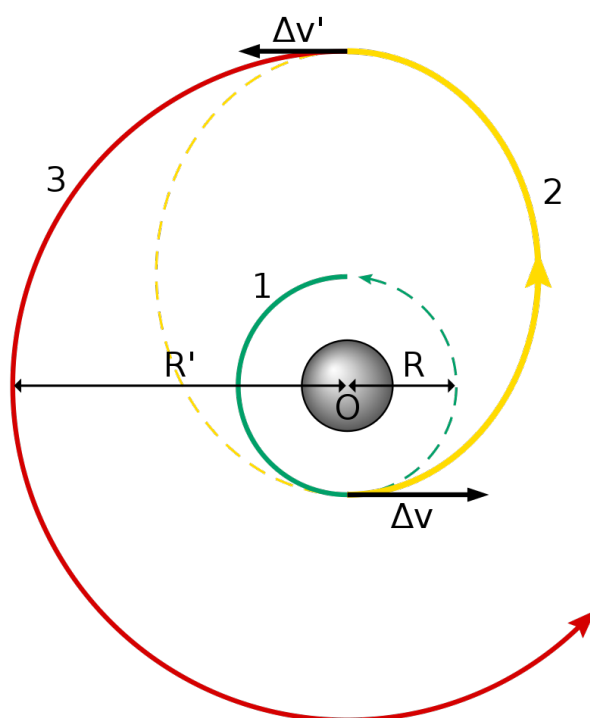
La taula següent conté els valors de Δr , T i Δv_{orb} de les simulacions d'òrbites el·líptiques:

Simulació	Canvi del radi (r)	Període (T)	Canvi de velocitat (v_{orb})
6.5	29215000 m	37847.209722 s	8648.061097 m/s
6.6	29215000 m	37847.209722 s	8648.061097 m/s
6.7	35586000 m	266401.302664 s	856.39842 m/s
6.8	∞ m	∞ s	$> v_e$ m/s

Generalment, no es troba cap tipus de canvi en el comportament de les òrbites el·líptiques respecte al de les òrbites circulars ja explicades anteriorment en aquest capítol. També dir que el fet que la simulació 6.8 no s'hagi pogut calcular és degut a que no existeix una el·lipse que sigui capaç de realitzar un canvi de radi de 35586000 m al voltant de la Lluna.

6.8 Òrbites de transferència de Hohmann

Les òrbites de transferència de Hohmann són òrbites el·líptiques que permeten el pas d'una òrbita circular a una altra mitjançant dos canvis de velocitat, estant el primer al periastre de l'òrbita de Hohmann i el segon a l'apoastre. La característica que sempre ha de complir una òrbita de transferència de Hohmann és que el radi del apoastre ha de ser igual al radi de l'òrbita més gran. A continuació, es troba una il·lustració d'una òrbita de transferència de Hohmann:



Òrbita Hohmann ⁴

⁴ *Wikimedia Commons*, Wikimedia Foundation
Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018,
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/df/Hohmann_transfer_orbit.svg/200px-Hohmann_transfer_orbit.svg.png>.

Els canvis de velocitat a introduir venen donats per les següents expressions:

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} * \left(\sqrt{\frac{2 * r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right)$$

Δv_1 = variació de velocitat al periastre | μ = paràmetre gravitatori
 r_1 = radi òrbita inicial | r_2 = radi òrbita final

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} * \left(1 - \sqrt{\frac{2 * r_1}{r_1 + r_2}} \right)$$

Δv_2 = variació de velocitat al apoastre | μ = paràmetre gravitatori
 r_1 = radi òrbita inicial | r_2 = radi òrbita final

El temps que es tarda per a passar d'una òrbita a una altra mitjançant la transferència de Hohmann és:

$$T = \pi * \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{8\mu}}$$

T = període de transferència | μ = paràmetre gravitatori
 r_1 = radi de l'òrbita d'origen | r_2 = radi de l'òrbita final

6.9 Simulació de transferències d'òrbita

Utilitzant els codis anteriorment mostrats i el que es mostrarà a continuació que serveix per a calcular els canvis de velocitat, es poden generar gràfics de transferències d'òrbites. El codi de les velocitats és el següent:

```

1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <math.h>
4  int menu_1() {
5      int object;
6      printf("Benvingut a la calculadora de velocitats de transferència\nTria
7      quin cos hi haurà al centre de referència:\n1. Terra\n2. Jupiter\n3.
8      Lluna\n: ");
9      scanf("%i", &object);
10     return object;
11 }
12
13 double orbitaorigen() {
14     double inicial;
15     printf("Radi de l'òrbita circular d'origen: ");
16     scanf("%lf",&inicial);
17     return inicial;
18 }
19
20 double orbitafinal() {

```

```

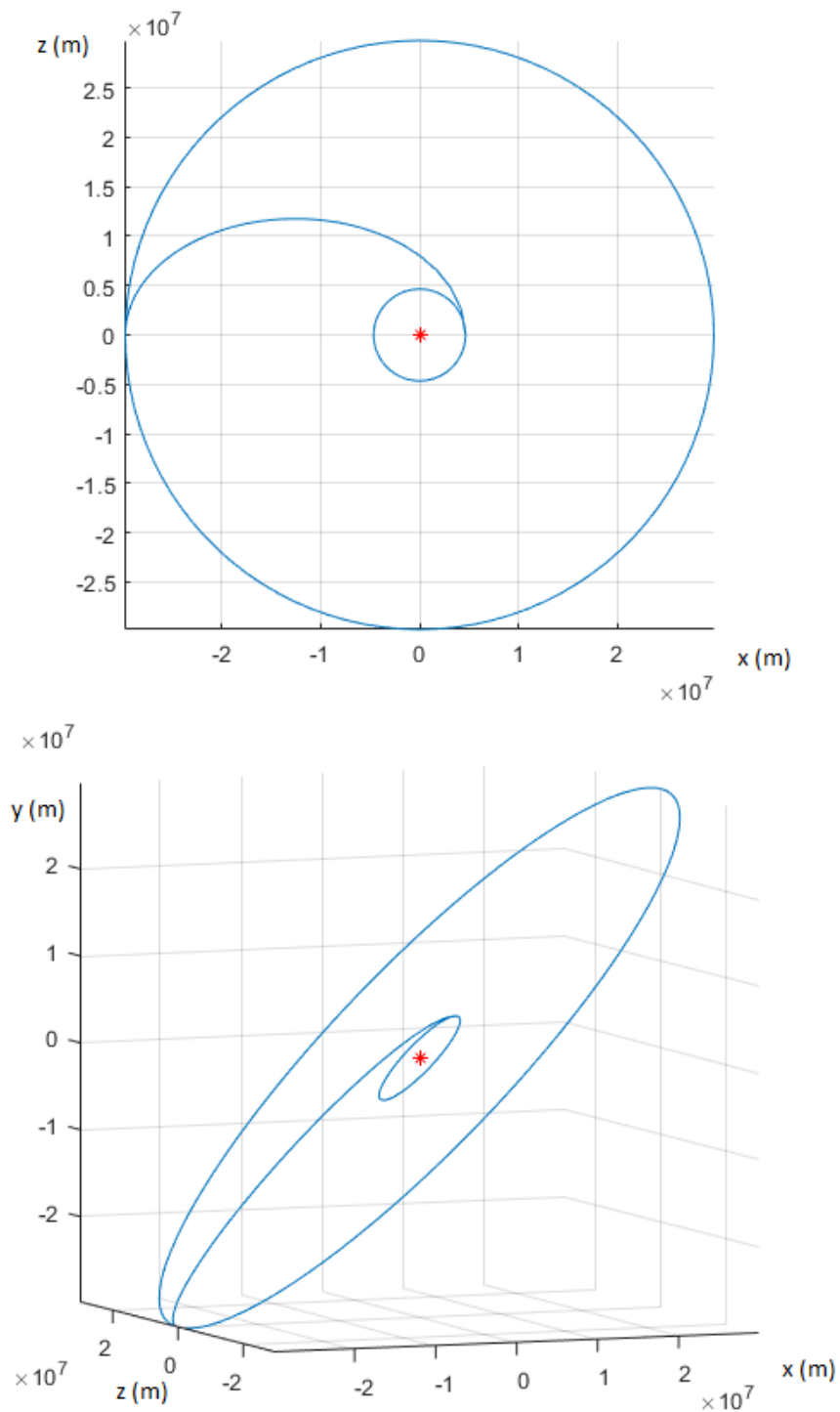
19     double final;
20     printf("Radi de l'òrbita circular final: ");
21     scanf("%lf",&final);
22     return final;
23 }
24
25 double canvi1(double r1,double r2, double g_parameter) {
26     double deltav1 = (sqrt(g_parameter/r1)) * (sqrt((2 * r2)/(r1 + r2))
27     1);
28     printf("%f %f %f\n", g_parameter, r1, r2);
29     return deltav1;
30 }
31
32 double canvi2(double r1,double r2, double g_parameter) {
33     double deltav2 = (sqrt(g_parameter/r2) * (1 - (sqrt((2 * r1)/(r1 + r2))
34     )))
35     );
36     printf("%f %f %f\n", g_parameter, r1, r2);
37     return deltav2;
38 }
39
40 int main() {
41     double r1;
42     double r2;
43     double v1;
44     double v2;
45     double g_parameter;
46     double object;
47     object = menu_1();
48     if (object == 1) {
49         g_parameter = 398600441800000;
50     }
51     else {
52         if (object == 2) {
53             g_parameter = 126686534000000000;
54         }
55         else{
56             g_parameter = 4904869500000;
57         }
58     }
59     printf("%f\n", g_parameter);
60     r1 = orbitaorigen();
61     printf("%f\n",r1);
62     r2 = orbitafinal();
63     printf("%f\n",r2);
64     v1 = canvi1(r1,r2,g_parameter);
65     v2 = canvi2(r1,r2,g_parameter);
66     printf("%s %f\n", "El primer canvi de velocitat a realitzar és de: ",
67     v1);
68     printf("%s %f\n", "El segon canvi de velocitat a realitzar és de: ", v2
69     );
70     return 0;
71 }

```

Listing 6.3: Codi de canvis de velocitat de maniobres de Hohmann

Com a exemple, s'ha generat la transferència d'una òrbita baixa (200 km) a una geoes-

tacionària (35786 km). Els canvis de velocitat són de 2340.112411 m/s al periastre i de 1478.673772 al apoastre. Els gràfics generats són els següents (angle d'inclinació de 45°):



S'ha de tenir en compte que les òrbites de transferència també poden servir per a passar d'un astre a un altre. Per això, moltes vegades és millor utilitzar òrbites de transferència ja que es pot utilitzar un coet multietapa usant l'etapa més gran per a arribar a l'òrbita baixa i llavors la més petita tindrà la capacitat d'arribar més lluny.

Capítol 7

PROPULSIÓ

Fins aquest instant s'ha analitzat el comportament d'un cos dins i fora de la Terra, però per a que un coet sigui efectiu s'ha de trobar una manera de portar-lo fins a una òrbita. La solució més òbvia seria aconseguir una paràbola en la qual en el seu punt més alt la velocitat (en aquest cas horitzontal, ja que en el punt més alt $v_y = 0$) es correspongués amb la velocitat a l'òrbita per a aquella altitud.

7.1 Base teòrica de la propulsió

Durant els primers capítols s'havia suposat una velocitat inicial instantània. El problema que es planteja ara és que no es pot aconseguir una velocitat sense un canvi en l'energia del cos o una acceleració, i en conseqüència, una força que s'apliqui sobre el cos. La solució, en aquest cas, és l'anomenada propulsió que es basa en la Tercera Llei de Newton. El que diu aquesta llei és que si un cos exerceix una força sobre un altre aquest també n'exercirà una de mòdul igual però de sentit contrari. Es pot aprofitar aquesta llei per a accelerar un coet si s'expulsa massa a altes velocitats (massa en combustió) cap a la part posterior del mateix, fet que provocarà una força cap a la part superior del mateix anomenada propulsió o *thrust* en anglés.

En el cas del coet Falcon 9 el combustible utilitzat és el RP-1 (*Rocket Propellant*) un derivat del petroli i molt semblant al querosè utilitzat en avions. Al RP-1 se l'hi afegeix un oxidant que genera un reacció de reducció exotèrmica en la qual es produeix molta energia que permet al combustible tenir una energia cinètica major i una velocitat de exhauriment (v_e) major. Per al Falcon 9 aquest oxidant és l'òxigen líquid que genera temperatures de gairebé 3400 graus Celsius. La combinació entre el RP-1 i el LOX també es coneix com a *Kerolox*.

La força realitzada per la propulsió ve donada per la següent expressió:

$$F_T = \dot{m} * v_e$$

F_T = força de la propulsió | \dot{m} = massa expulsada per unitat de temps | v_e = velocitat d'exhauriment

En l'equació anterior apareix la velocitat d'exhauriment (velocitat a la qual s'expulsa el combustible) i que es calcula amb la fórmula que es presenta a continuació:

$$v_e = Isp * g_0$$

v_e = velocitat d'exhauriment | Isp = impuls específic | g_0 = gravitació estàndard

Un cop més es troba un nou terme anomenat impuls específic (Isp), tractant-se aquest d'una manera de mesurar l'eficiència del combustible i que també s'expressa amb una altra fórmula:

$$Isp = J/m$$

Isp = impuls específic | J = impuls | m = massa del combustible

Finalment l'impuls (J) ve donat per la següent expressió i és constant per a la primera etapa del Falcon 9:

$$J = F_{mitjana} * \Delta t$$

J = impuls | $F_{mitjana}$ = força mitjana | δt = derivada del temps

$$J = \frac{15834000}{2} * (162 - 0) = 1282554000$$

Si es divideix la força de la propulsió per la massa total del coet en un instant donat, s'obté l'acceleració de la propulsió que es pot incorporar a les equacions del moviment de la següent manera:

$$x = (x_0 + v_{0x} * t + \frac{1}{2} * (a_{tx} - a_{fx}) * t^2) - [v_{0z} * \Omega * \sin \lambda + v_{0y} * \Omega * \cos \lambda] * t^2 + g * \Omega * \cos \lambda * \frac{t^3}{3}$$

$$y = (y_0 + v_{0y} * t + \frac{1}{2} * (a_{ty} - g - a_{fy}) * t^2) + (v_{0x} * \Omega * \cos \lambda * t^2)$$

$$z = (z_0 + v_{0z} * t + \frac{1}{2} * (a_{tz} - a_{fz}) * t^2) + (v_{0x} * \Omega * \sin \lambda * t^2)$$

7.2 Simulació de la posada en òrbita mitjançant propulsió

Per a realitzar les simulacions s'ha desenvolupat un programa que fa el següent:

1. Calcula la propulsió en un moment determinat del temps.
2. Calcula la posició del coet amb les equacions de la posició amb propulsió.

3. Escriu les dades del pas anterior.
4. Calcula una paràbola donant com a condicions inicials les del pas 2.
5. Calcula la velocitat a l'òrbita de l'altura màxima d'aquesta paràbola.
6. Compara si aquesta velocitat a l'òrbita és la mateixa que portarà el cos en aquella altura. Si ho és, escriu tots els punts de la paràbola. En cas contrari, torna al pas 1.

El codi emprat es mostra a continuació:

```

1 //LLIBRERIES
2 #include <stdio.h>
3 #include <stdlib.h>
4 #include <math.h>
5
6 //CALCULA EL VALOR MÀXIM DE LA Y PER A LA PARÀBOLA
7 double ymaxima(double densitat, double v_0, double alpha, double beta,
8 double lambda, double omega, double g, double afy, double t) {
9     double resultymax = ((v_0 * cos(beta) * t) - ((g + afy) * pow(t,2))
10 /2) + (v_0 * cos(alpha) * sin(beta) * omega * cos(lambda) * pow(t,2));
11     return resultymax;
12 }
13
14 //CALCULA LA VELOCITAT A L'ÓRBITA
15 double vorbita(double ycheck) {
16     double v_o = sqrt((398600441800000/(6371000 + ycheck)));
17     return v_o;
18 }
19
20 //CALCULA LA FORÇA DE LA PROPULSIÓ
21 double thrust(double m, double J, double g) {
22     double isp = J / m;
23     double ve = isp * g;
24     double Ft = 2537.037037 * ve;
25     return Ft;
26 }
27
28 //CALCULA LA MASSA
29 double mass(double t) {
30     double massa = 549054 * (2537.037037 * t);
31     return massa;
32 }
33
34 //CALCULA LA DENSITAT RESPECTE A LA Y ANTERIOR
35 double dens(double y_ans) {
36     double d;

```

```

35     double e = ME;
36     d = (pow(e,(y_ans 18872) / 7038))/10;
37     return d;
38 }
39
40 //CALCULA LA G RESPECTE A LA Y ANTERIOR
41 double gravity(double y_ans) {
42     double gy = (398709539200000)/(pow(6371000 + y_ans,2));
43     return gy;
44 }
45
46 //CALCULA EL TEMPS DE VOL
47 double computety(double vy, double vx, double g, double omega, double
lambda, double A, double m) {
48     double tvol = (vy) / ((9.8067 + (0.0015 * (pow(vy,2)) * 1.4606 * A) /
(2 * m)) + (vx * omega * cos(lambda)));
49     printf("%f\n", tvol);
50     printf("%s %f %f\n", "Velocitats vx i vy (computety): ", vx, vy);
51     return tvol;
52 }
53
54 //CALCULA EL TEMPS DE VOL PER AL VALOR DE Y MAXIM
55 double computet(double vy, double vx, double g, double omega, double
lambda, double A, double m) {
56     double tvol = (2 * vy) / ((9.8067 + (0.0015 * (pow(vy,2)) * 1.4606 *
A) / (2 * m)) + (2 * vx * omega * cos(lambda)));
57     return tvol;
58 }
59
60 //CALCULA L'ACCELERACIÓ DEL FREGAMENT A L'EIX X
61 double dragx(double densitat, double vx, double m, double A, double alpha,
double beta) {
62     double fregamentx = ((0.0015 * densitat * pow(vx,2) * A) / (2 * m)) *
cos(alpha) * sin(beta);
63     return fregamentx;
64 }
65
66 //CALCULA L'ACCELERACIÓ DEL FREGAMENT A L'EIX Y
67 double dragy(double densitat, double vy, double m, double A, double beta) {
68     double fregamenty = ((0.0015 * densitat * pow(vy,2) * A) / (2 * m)) *
cos(beta);
69     return fregamenty;
70 }
71
72 //CALCULA L'ACCELERACIÓ DEL FREGAMENT A L'EIX Z
73 double dragz(double densitat, double vz, double m, double A, double alpha,
double beta) {
74     double fregamentz = ((0.0015 * densitat * pow(vz,2) * A) / (2 * m)) *
sin(alpha) * sin(beta);
75     return fregamentz;
76 }
77
78 int reset() {
79     double null = 0;
80     FILE *f = fopen("output.txt", "w+");

```



```

81     FILE *fx = fopen("output_X.txt", "w+");
82     FILE *fy = fopen("output_Y.txt", "w+");
83     FILE *fz = fopen("output_Z.txt", "w+");
84     fprintf(f, "%s %s %s %s %s %s\n", "x", "y", "z", "densitat", "t", "\\\\ \\
hline");
85     fprintf(f, "%f %f %f %f %f %s\n", null, null, null, 1.460616, null, "
\\\\ \\hline");
86     fprintf(fx, "%s", " ");
87     fprintf(fy, "%s", " ");
88     fprintf(fz, "%s", " ");
89     fclose(f);
90     fclose(fx);
91     fclose(fy);
92     fclose(fz);
93     return 0;
94 }
95
96
97 //ESCRIU EL RESULTAT A UN FITXER .TXT
98 int write(double x, double y, double z, double mcombustible) {
99     FILE *f = fopen("output.txt", "a+");
100    FILE *fx = fopen("output_X.txt", "a+");
101    FILE *fy = fopen("output_Y.txt", "a+");
102    FILE *fz = fopen("output_Z.txt", "a+");
103    fprintf(f, "%f %s %f %s %f %s %f %s\n", x, "&", y, "&", z, "&", mcombustible
, "\\\\ \\hline");
104    fprintf(fx, "%f %s", x, " ");
105    fprintf(fy, "%f %s", y, " ");
106    fprintf(fz, "%f %s", z, " ");
107    fclose(f);
108    fclose(fx);
109    fclose(fy);
110    fclose(fz);
111    return 0;
112 }
113 //CALCULA EL VALOR DE Y
114 double computeycheck(double densitatcheck, double v_0, double alpha,
double beta, double lambda, double omega, double g, double afy, double t) {
115     double resulty = ((v_0 * cos(beta) * t) - ((g + afy) * pow(t,2))/2) +
(v_0 * cos(alpha) * sin(beta) * omega * cos(lambda) * pow(t,2));
116     return resulty;
117 }
118
119 //CALCULA EL VALOR DE X
120 double computex(double x_0, double densitat, double v_0, double alpha,
double beta, double lambda, double omega, double g, double afx, double t) {
121     double resultx = x_0 + ((v_0 * cos(alpha) * sin(beta) * t) - (1/2 *
afx * pow(t,2))) - ((v_0 * sin(alpha) * sin(beta) * omega * sin(lambda))
+ (v_0 * cos(beta) * omega * cos(lambda))) + (g * omega * cos(lambda) *
(pow(t,3)/3));
122     return resultx;
123 }
124
125
126 //CALCULA EL VALOR DE Y

```

```

127     double computey(double y_0, double densitat, double v_0, double alpha,
128     double beta, double lambda, double omega, double g, double afy, double t) {
129         double resulty = y_0 + ((v_0 * cos(beta) * t) + ((g + afy) * pow(t,2)
130     )/2) + (v_0 * cos(alpha) * sin(beta) * omega * cos(lambda) * pow(t,2));
131         return resulty;
132     }
133
134     //CALCULA EL VALOR DE Z
135     double computez(double z_0, double densitat, double v_0, double alpha,
136     double beta, double lambda, double omega, double g, double afz, double t) {
137         double resultz = z_0 + ((v_0 * sin(alpha) * sin(beta) * t) + ((afz) *
138     pow(t,2))/2) + (v_0 * cos(alpha) * sin(beta) * omega * sin(lambda) *
139     pow(t,2));
140         return resultz;
141     }
142
143     //CALCULA EL VALOR DE X AMB PROPULSIÓ
144     double computexthrust(double densitat, double v_0, double alpha, double
145     beta, double lambda, double omega, double g, double afx, double t, double atx)
146     {
147         double resultx = ((v_0 * cos(alpha) * sin(beta) * t) + (1/2 * (afx +
148     atx) * pow(t,2))) + ((v_0 * sin(alpha) * sin(beta) * omega * sin(lambda)
149     ) + (v_0 * cos(beta) * omega * cos(lambda))) + (g * omega * cos(lambda)
150     * (pow(t,3)/3));
151         return resultx;
152     }
153
154     //CALCULA EL VALOR DE Y AMB PROPULSIÓ
155     double computeythrust(double densitat, double v_0, double alpha, double
156     beta, double lambda, double omega, double g, double afy, double t, double aty)
157     {
158         double resulty = ((v_0 * cos(beta) * t) + ((aty + g + afy) * pow(t,2)
159     )/2) + (v_0 * cos(alpha) * sin(beta) * omega * cos(lambda) * pow(t,2));
160         return resulty;
161     }
162
163     //CALCULA EL VALOR DE Z AMB PROPULSIÓ
164     double computezthrust(double densitat, double v_0, double alpha, double
165     beta, double lambda, double omega, double g, double afz, double t, double atz)
166     {
167         double resultz = ((v_0 * sin(alpha) * sin(beta) * t) + ((afz + atz)
168     * pow(t,2))/2) + (v_0 * cos(alpha) * sin(beta) * omega * sin(lambda) *
169     pow(t,2));
170         return resultz;
171     }
172
173     //CALCULA UNA PARÀBOLA PERÓ NO L'ESCRIU
174     double check(double vy, double vx, double g, double omega, double lambda,
175     double A, double m, double densitat, double alpha, double beta, double afy,
176     int point) {
177
178         int subpoint = 0;

```

```

163     double activate = 0;
164     double v_0 = vy / (cos(beta));
165     double t = 0;
166     double tfinal = computety(vy,vx,g,omega,lambda,A,m);
167     double tinterval = tfinal / 1000;
168     double ymax = ymaxima(densitat , v_0 , alpha , beta , lambda , omega , g , afy , t );
169     double y_anscheck;
170     double afxcheck = 0;
171     double afycheck = 0;
172     double afzcheck = 0;
173     double ycheck;
174     double vxcheck = vx;
175     double vycheck = vy;
176     printf("%f %f %f\n", vxcheck , vycheck , v_0);
177     double vzcheck;
178     double densitatcheck;
179     printf("%s %i\n", "Checking point", point);
180     while (t <= (tfinal + tinterval)) {
181         densitatcheck = dens(y_anscheck);
182         g = gravity(y_anscheck);
183         vxcheck = vxcheck (afxcheck * tinterval);
184         vycheck = vycheck ((afycheck + g) * tinterval);
185         vzcheck = vzcheck (afzcheck * tinterval);
186         afxcheck = dragx(densitatcheck , vxcheck ,m,A, alpha , beta );
187         afycheck = dragy(densitatcheck , vycheck ,m,A, beta );
188         afzcheck = dragz(densitatcheck , vzcheck ,m,A, alpha , beta );
189         ycheck = computeycheck(densitatcheck , v_0 , alpha , beta , lambda , omega , g ,
afy , t );
190         y_anscheck = ycheck;
191         t = t + tinterval;
192         printf("%s %i %s %i\n", "Computing point", point , "." , subpoint);
193         subpoint++;
194     }
195     double vorb = vorbita(ycheck);
196     double vttotalcheck = vxcheck / (cos(alpha) * sin(beta));
197     printf("%f %f %f\n", vttotalcheck , vorb , ycheck);
198     if (vttotalcheck >= vorb - 50 && vttotalcheck <= vorb + 50) {
199         activate = 1;
200     }
201     return activate;
202 }
203
204 //ESCRIU UNA PARÀBOLA
205 double drawparabola(double vy, double vx, double vz, double g, double omega
, double lambda, double A, double m, double y_ans, double afx, double afy ,
double afz , double alpha , double beta , double densitat , double v_0 , double x ,
double y, double z, double mcombustible) {
206     int point = 0;
207     double tfinal = computet(vy,vx,g,omega,lambda,A,m);
208     double tinterval = tfinal/1000;
209     double t = 0 + tinterval;
210     double x_0 = x;
211     double y_0 = y;
212     double z_0 = z;
213     while (t <= (tfinal + tinterval)) {

```

```

214     densitat = dens(y_ans);
215     g = gravity(y_ans);
216     vx = vx + (afx * tinterval);
217     vy = vy + ((afy + g) * tinterval);
218     vz = vz + (afz * tinterval);
219     afx = dragx(densitat, vx, m, A, alpha, beta);
220     afy = dragy(densitat, vy, m, A, beta);
221     afz = dragz(densitat, vz, m, A, alpha, beta);
222     x = computex(x_0, densitat, v_0, alpha, beta, lambda, omega, g, afx, t);
223     y = computey(y_0, densitat, v_0, alpha, beta, lambda, omega, g, afy, t);
224     z = computez(z_0, densitat, v_0, alpha, beta, lambda, omega, g, afz, t);
225     y_ans = y;
226     write(x, y, z, mcombustible);
227     t = t + tinterval;
228     printf("%s %i\n", "Data written for point", point);
229     point++;
230 }
231 return 0;
232 }
233
234 //FUNCIÓN PRINCIPAL
235 int main() {
236     int point = 0;
237     int i = 0;
238     double v_0 = 0;
239     double alphad = 45;
240     double alpha = alphad * (M_PI/180);
241     double betad = 0;
242     double beta = betad * (M_PI/180);
243     double lambdad = 0;
244     double lambda = lambdad * (M_PI/180);
245     double A = 10.56;
246     double omega = (2 * M_PI)/86164;
247     double m = 549054;
248     double g = 9.8067;
249     double vx = 0;
250     double vy = 0;
251     double vz = 0;
252     double afx = 0;
253     double afy = 0;
254     double afz = 0;
255     double fthrust;
256     double at;
257     double atx;
258     double aty;
259     double atz;
260     double testy;
261     double J = 1282554000;
262     int o = 0;
263     double tfinal = 162;
264     double tinterval = tfinal/1000;
265     double t = 0 + tinterval;
266     double y_ans = 0;
267     double densitat;
268     double x;

```

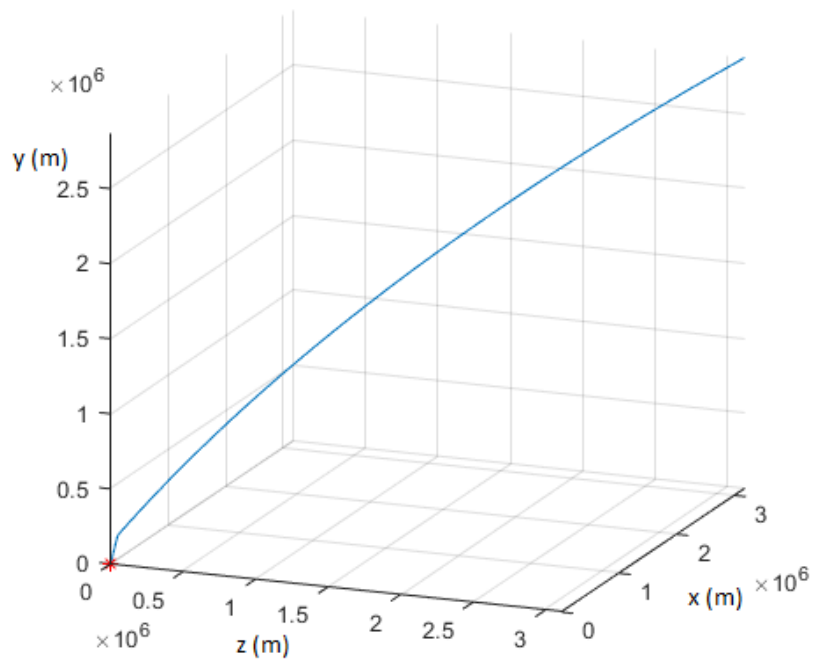
```

269     double y;
270     double z;
271     double mcombustible;
272     reset();
273
274     //AMB PROPULSIÓ
275     while (o == 0) {
276         densitat = dens(y_ans);
277         g = gravity(y_ans);
278         m = mass(t);
279         printf("%s %f\n", "Massa: ", m);
280         fthrust = thrust(m,J,g);
281         at = fthrust / m;
282         printf("%s %f\n", "Thrust: ", at);
283         atx = at * cos(alpha) * sin(beta);
284         aty = at * cos(beta);
285         atz = at * sin(alpha) * sin(beta);
286         afx = dragx(densitat ,vx,m,A,alpha ,beta);
287         afy = dragy(densitat ,vy,m,A,beta);
288         afz = dragz(densitat ,vz,m,A,alpha ,beta);
289         vx = vx + (( afx + atx) * tinterval);
290         vy = vy + (( afy  g + aty) * tinterval);
291         vz = vz + (( afz + atz) * tinterval);
292         printf("%s %i\n", "Computing point", point);
293         x = computexthrust(densitat ,v_0 ,alpha ,beta ,lambda ,omega ,g ,afx ,t ,atx
294     );
295         y = computeythrust(densitat ,v_0 ,alpha ,beta ,lambda ,omega ,g ,afy ,t ,aty
296     );
297         z = computezthrust(densitat ,v_0 ,alpha ,beta ,lambda ,omega ,g ,afz ,t ,atz
298     );
299         mcombustible = m (4000 + 107500 + 22000);
300         write(x,y,z ,mcombustible);
301         y_ans = y;
302         t = t + tinterval;
303         //COMPROBAR SI ES PODEN APAGAR MOTORS
304         o = check(vy ,vx ,g ,omega ,lambda ,A,m ,densitat ,alpha ,beta ,afy ,point);
305         if (beta < (M_PI/4)) {
306             beta = beta + 0.05;
307         }
308         printf("%s %f\n", "Beta: ", beta);
309         point++;
310     }
311     v_0 = vx / (cos(alpha) * sin(beta));
312     drawparabola(vy ,vx ,vz ,g ,omega ,lambda ,A,m ,y_ans ,afx ,afy ,afz ,alpha ,beta
, densitat ,v_0 ,x ,y ,z ,mcombustible);
return 0;
}

```

Listing 7.1: Codi de la propulsió

Executant aquest codi es genera la trajectòria d'un coet Falcon 9 per a posar una segona etapa en òrbita. Per a aquesta simulació s'han generat més de 1300 punts de dades amb una precisió de set decimals cada un. El gràfic obtingut és el següent:



L'alçada màxima a la que arribaria el coet seria de 2870 km per sobre de la superfície. En l'instant que es paren els motors de la primera etapa queden 173975 kg de combustible amb els quals es podrien realitzar altres maniobres com a ara l'aterratge de la primera etapa com ja ha fet diverses vegades la companyia SpaceX.

Capítol 8

EXEMPLES CONCRETS

Per a finalitzar aquest Treball de Recerca es realitzaran tres simulacions fent ús dels codis que ja s'han anat mostrant durant tot el treball. El model de coet utilitzat tornarà a ser el Falcon 9, mentre que la situació del llançament serà a l'equador amb un angle (α) que donarà una òrbita també inclinada l'equivalent a α respecte al pla de referència que passa per l'equador. D'aquesta òrbita es passarà a l'òrbita de transferència corresponent per arribar a assolir tres objectius diferents (un per a cada simulació): arribar a la lluna, arribar a Júpiter i marxar cap a l'espai interestel·lar.

EXEMPLE 1: COET CAP A LA LLUNA

Les condicions inicials són:

- Coet model: Falcon 9
- Posició inicial a l'eix x : 0 m
- Posició inicial a l'eix y : 6371000 m
- Posició inicial a l'eix z : 0 m
- Angle respecte a l'eix x (α): 5.14°
- Velocitat inicial: 0 m/s

L'angle de llançament de 5.14° ve donat per la inclinació de l'òrbita llunar respecte a l'equatorial terrestre. Primer, es genera la posada en òrbita del coet mitjançant propulsió i com a posició final i velocitat final dona els següents resultats:

x	y	z	v_{orb}
2874939.962012	9229878.321543	2923020.763382	6571.596771

A partir de les dades anteriors, es genera una òrbita circular amb un radi de 9229878 m.

Tenint en compte que la distància entre la terra i la lluna és de 384400 km i que es vol una òrbita llunar a 2000 km de distància de la superfície de la mateixa el radi de l'òrbita el·líptica al apoastre serà de 386400 km mentre que al periastre serà de 9229,878 km. Es calcula el semieix major:

$$a = \frac{386400 + 9229,878}{2} = \frac{395629.878}{2} = 197814.939 \text{ km}$$

Amb la informació del semieix major i el radi al perisatre es genera l'òrbita de transferència de Hohmann corresponent que té el període de transferència (del periastre al apoastre) següent:

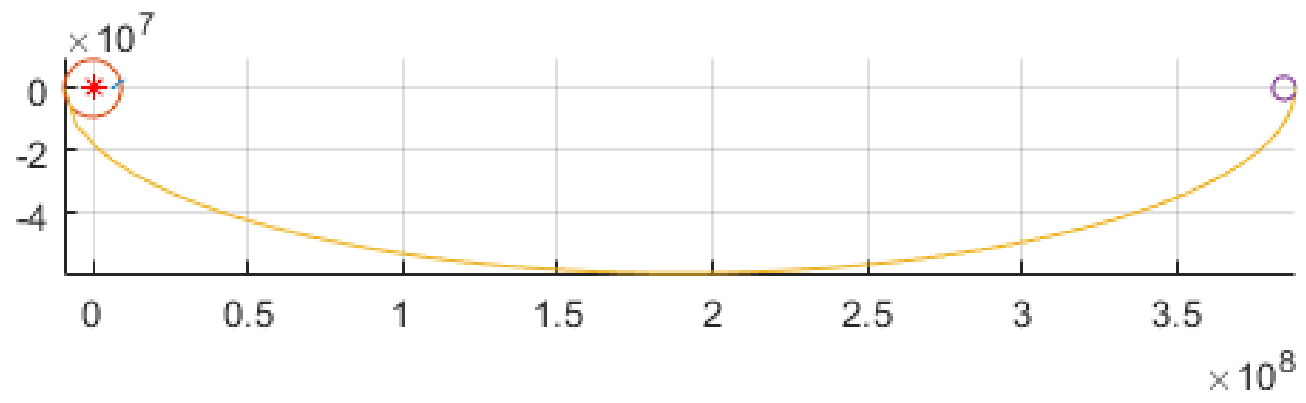
$$T = \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{4 * \pi^2 + (a_H)^3}{\mu}}$$

$$T = \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{4 * \pi^2 + (197814939)^3}{3.98 * 10^{14}}} = 438123.92 \text{ s} = 121,7010 \text{ h}$$

Si es considera que la posició de la lluna quan es vol aconseguir l'òrbita llunar serà:

x	y	z
0.000000	384400.000000	0.000000

El primer canvi de velocitat (de l'òrbita terrestre a la de Hohmann) s'haurà de realitzar 121,7010 hores abans que la lluna es trobi en la posició anteriorment indicada. Finalment s'ha generat una òrbita circular al voltant de la lluna a 2000 km d'alçada (respecte a la superfície) amb una velocitat orbital de 1145.650581 m/s i un període orbital de 20495.135157 segons. El primer canvi de velocitat serà de 77.06 m/s negatiu. El segon canvi de velocitat serà de 987.189 m/s positiu. El gràfic que s'ha generat fent ús de tots els codis és el següent:



EXEMPLE 2: COET CAP A JÚPITER

Les condicions inicials són:

- Coet model: Falcon 9
- Posició inicial a l'eix x : 0 m
- Posició inicial a l'eix y : 6371000 m
- Posició inicial a l'eix z : 0 m
- Angle respecte a l'eix x (α): 1.30°
- Velocitat inicial: 0 m/s

L'angle de llançament de 1.30° ve donat per la inclinació de l'òrbita de Júpiter respecte al pla de l'eclíptica. Per a començar, es calcula la posada en òrbita del coet mitjançant propulsió i com a posició final i velocitat final dona els següents resultats:

x	y	z	v_{orb}
2874939.962012	9229878.321543	2923020.763382	6571.596771

A partir de les dades anteriors es genera una òrbita circular amb un radi de 9229878 m. Tenint en compte que la distància entre la Terra i Júpiter és de 588000000 km no hi ha una òrbita el·líptica que pugui anar tant lluny. La solució és superar la velocitat d'escapament de la Terra en l'instant adequat per a més tard fer una correcció de velocitat per a entrar en òrbita amb Júpiter. Si es sap que la velocitat d'escapament és:

$$v_e \geq \sqrt{\frac{2 * G * M}{r}}$$
$$v_e \geq \sqrt{\frac{2 * 6,67 * 10^{-11} * 5.94 * 10^{24}}{6371}} = 11180.50 m/s$$

Llavors el primer canvi de velocitat haurà de ser de 4612.21 m/s, el que significa que la nau tardarà 608.69 dies en arribar a la posició desitjada. Si es vol anar a una velocitat orbital de 5000 m/ es pot calcular aïllant de l'equació de la velocitat orbital el radi.

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{G * M}{r}}$$
$$v_{orb} = \left(\sqrt{\frac{6,67 * 10^{-11} * 5.94 * 10^{24}}{r}} \right)^2 = (5000)^2 m/s$$
$$v_{orb} = \frac{6,67 * 10^{-11} * 5.94 * 10^{24}}{(5000)^2} = r = 71010.7$$

Si se li resta el radi de l'òrbita al radi de Júpiter, dona que el coet orbitarà a 1099.7 km sobre la superfície de Júpiter. No s'ha generat cap gràfic, ja que la distància entre la Terra i Júpiter és tant gran que no es veurien les òrbites.

EXEMPLE 3: COET INTERESTELAR

Les condicions inicials són:

- Coet model: Falcon 9
- Posició inicial a l'eix x : 0 m
- Posició inicial a l'eix y : 6371000 m
- Posició inicial a l'eix z : 0 m
- Angle respecte a l'eix x (α): 0°
- Velocitat inicial: 0 m/s

Com que l'únic objectiu de coet és marxar del sistema solar, l'angle de llançament és 0° per a evitar l'efecte coriolis en el llançament. Per a començar es calcula la posada en òrbita del coet mitjançant propulsió i com a posició final i velocitat final dona els següents resultats:

x	y	z	v_{orb}
2874939.962012	9229878.321543	2923020.763382	6571.596771

A partir de les dades anteriors es genera una òrbita circular amb un radi de 9229878 m.

Com a l'exemple anterior, s'arriba a la velocitat d'escapament de la Terra:

$$v_e \geq \sqrt{\frac{2 * G * M}{r}}$$
$$v_e \geq \sqrt{\frac{2 * 6,67 * 10^{-11} * 5,94 * 10^{24}}{6371}} = 11180,50 \text{ m/s}$$

Llavors, el primer canvi de velocitat haurà de ser de 4612,21 m/s. La resta del combustible s'ha d'invertir en accelerar la nau uo en realitzar maniobres d'assistència gravitatòria amb planetes pesats. Aquestes maniobres consisteixen en aprofitar l'acceleració de la gravetat d'un planeta per a accelerar un altre cos.

No s'ha generat cap gràfic, ja que no existeix gràfic que pugui respresentar aquest viatge si es suposa que l'univers és infinit.

Conclusions

Conclusió 1:

En el moviment parabòlic tridimensional, per a valors més grans de β hi hauran valors més grans de y_{max} . D'altra banda, l'angle respecte a l'eix x (inclinació de la paràbola) α no afecta a l'alçada màxima.

Conclusió 2:

La rotació directa de la Terra no s'ha de tenir en compte en el llançament de coets ja que en el temps que el cos viatja més lluny o més a prop, degut a la velocitat inicial de la rotació terrestre, els eixos (el sistema de referència) també ha viatjat aquella distància. En altres paraules el cos es mou amb el sistema.

Conclusió 3:

El fregament sempre s'oposa al vector velocitat. Si es va d'altituds baixes a altes, el fregament farà que sigui necessària més potència, mentre que quan el coet comença a caure d'altures altes a baixes, el fregament el frena una mica fent que tardi més temps a completar la paràbola.

Conclusió 4:

Per a canviar d'una òrbita baixa a una alta s'ha de passar primer a una òrbita de transferència de Hohmann que tingui com a radi al apoastre el radi de l'òrbita més gran i al periastre la de la més petita. Realitzant els canvis de velocitat adequats es pot passar d'una òrbita baixa a una alta mitjançant una òrbita el·líptica de transferència.

Conclusió 5:

La quantitat de massa que expulsa un coet és constant, però la força de la propulsió no és constant degut a diferències de pressió, reducció del fregament i consumició de la massa del coet. Aquests fets fan que com més alt es troba el coet més kiloNewtons de força produeix.

Conclusió 6:

La trajectòria d'un coet es pot calcular agafant de base el moviment parabòlic i afegint-hi forces fins que arribi l'espai on l'entorn ja no es basa en les paràboles, sinó en les òrbites circulars i el·líptiques

Bibliografía

BARRADAS SOLAS, Francisco; SÁNCHEZ RAMOS, Guillem; VALERA ARROYO, Pedro; VIDAL FERNÁNDEZ, M.^a del Carmen: *Física*, Santillana Grup Promotor, Barcelona, 2016.

—“Cross section (geometry)”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_section_\(geometry\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_section_(geometry))>.

—“Drag (Physics)”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics))>.

—“Eccentricity (mathematics)”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Eccentricity_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Eccentricity_(mathematics))>.

—“Efecto Coriolis”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <https://es.wikipedia.org/wiki/Efecto_Coriolis>.

—“Elliptic orbit”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_orbit>.

—“Falcon 9”, *SpaceX* (2002-2018), SpaceX Headquarters, Hawthorne, California, 17-09-2018, <<https://www.spacex.com/falcon9>>.

—“Falcon 9 FT (Falcon 9 v1.2)”, *Spaceflight101*, 17-09-2018, <<http://spaceflight101.com/spacerockets/falcon-9-ft/>>.

—“Focus (geometry)”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Focus_\(geometry\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Focus_(geometry))>.

—“General Thrust Equation”, *National Aeronautics and Space Administration Glenn Research Center* (1942-2018), John H. Glenn Research Center, Cleveland,

Ohio, 17-09-2018, <<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/thrsteq.html>>.

—“Impulse (physics)”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Impulse_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Impulse_(physics))>.

—“Kerolox”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <<https://es.wikipedia.org/wiki/Kerolox>>.

LUIDENS, Roger W.: *Exploring in aerospace rocketry, 9. Rocket trajectories, drag and stability*, National Aeronautics and Space Administration, Lewis Research Center, Cleveland, Ohio, 1966-1967, <<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19680008648.pdf>>.

MANLEY, Scott: *Orbital Mechanics On Paper - Part 1 - Addendum*, Youtube, Youtube Headquarters, San Bruno, California, 2014, 17-09-2018, <<https://www.youtube.com/watch?v=000zDI2nmq8>>.

—“Merlin Engines”, *SpaceX* (2002-2018), SpaceX Headquarters, Hawthorne, California, 17-09-2018, <<https://www.spacex.com/news/2013/03/26/merlin-engines>>.

—“Multistage rocket”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <https://en.wikipedia.org/wiki/Multistage_rocket>.

—“Órbita de transferencia de Hohmann”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%93rbita_de_transferencia_de_Hohmann>.

—“Orbital mechanics”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_mechanics>.

PANCORBO PALENZUELA, L.; RUIZ BUENO, G.: *M1 Matemàtiques*, Vicens Vives, Barcelona, 2015.

PERAIRE, J.; WIDNALL, S.: *Lecture L14 - Variable Mass Systems: The Rocket Equation*, MIT OpenCourseWare, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, Massachusetts, 2008, 17-09-2018, <https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/MIT16_07F09_Lec14.pdf>.

REILLY H., M.: *Equations of Powered Rocket Ascent and Orbit Trajectory*, Naval Research Laboratory of Washington DC, Defense Technical Information Center, Fort Belvoir, Virginia, 1979, 17-09-2018, <<http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a069296.pdf>>.

—“Rocket Weight”, *National Aeronautics and Space Administration Glenn Research Center* (1942-2018), John H. Glenn Research Center, Cleveland, Ohio, 17-09-2018, <<https://spaceflightsystems.grc.nasa.gov/education/rocket/rktwt1.html>>.

—“Rotating Frames”, *University of Cambridge, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics* (1209-2018), University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom, 17-09-2018, <<http://www.damtp.cam.ac.uk//user/stcs/courses/dynamics/lecturenotes/section4.pdf>>.

—“RP-1”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <<https://es.wikipedia.org/wiki/RP-1>>.

—“Semi-major and semi-minor axes”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-major_and_semi-minor_axes>.

—“Specific impulse”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <https://en.wikipedia.org/wiki/Specific_impulse>.

—“The Effect of the Coriolis Force on projectile trajectories”, *University of British Columbia, Department of Physics and Astronomy* (1209-2018), University of British Columbia, Vancouver, Canada, 17-09-2018, <<http://www.damtp.cam.ac.uk//user/stcs/courses/dynamics/lecturenotes/section4.pdf>>.

TOELLNER, Jon: *Orbital Dynamics Part 18 - Formula for True Anomaly*, Youtube, Youtube Headquarters, San Bruno, California, 2014, 17-09-2018, <<https://www.youtube.com/watch?v=I01hUIxb7RI>>.

—“Tsiolkovsky rocket equation”, *Wikipedia The Free Encyclopedia* (2001-2018), Wikimedia Foundation Headquarters, San Francisco, California, 17-09-2018, <https://en.wikipedia.org/wiki/Tsiolkovsky_rocket_equation>.

ANNEXOS

Annex A

CÀLCUL D'EQUACIONS DIFERENCIALS

Les equacions del moviment s'obtenen mitjançant càlculs de derivació i posterior integració. No es poden introduir 'correccions' en una equació sense tornar a calcular-la ja que aquesta podria canviar d'estructura. En el següent annex es poden trobar tots els càlculs de les corresponents equacions diferencials que s'han obtingut durant la realització d'aquest treball.

A1. Equacions diferencials del moviment parabòlic bàsic

Només es fan dos càlculs ja a que les equacions diferencials dels eixos x i z són les mateixes en el moviment parabòlic bàsic tridimensional. Es calculen les equacions diferencials x , y i z a continuació:

Eix x o z (MRU):

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_{0x} = \text{constant}$$

$$v_{0x} = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v_{0x} * dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_{0x} * dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = v_{0x} * \int_0^t dt$$

$$x - x_0 = v_{0x} * (t - 0)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_{0x} * \mathbf{t}$$

Eix y (MRUA):

$$a_y = g$$

$$\frac{dv_y}{dt} = g$$

$$dv_y = g * dt$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int_0^t g * dt$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = g * \int_0^t dt$$

$$v_y - v_{0y} = g * (t - 0)$$

$$v_y = v_{0y} + g * t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_{0y} + g * t$$

$$dy = v_{0y} * dt + g * t * dt$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^t v_{0y} * dt + \int_0^t g * t * dt$$

$$\int_{y_0}^y dy = v_{0y} * \int_0^t dt + g * \int_0^t t * dt$$

$$y - y_0 = v_{0y} * (t - 0) + g * \frac{1}{2} * t^2$$

$$\mathbf{y = y_0 + v_{0y} * t + \frac{1}{2} * g * t^2}$$

A2. Equacions diferencials amb l'efecte coriolis

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

Equacions generals del moviment i la velocitat:

$$\vec{r}_g = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$\vec{v}_g = \vec{v}_0 - g * t$$

Sabent que:

$$\vec{a}_g = \vec{g}$$

$$\vec{a}_c = 2 * \vec{v} \times \vec{\Omega}$$

$$\vec{a}_t = \vec{g} + 2 * \vec{v} \times \vec{\Omega}$$

$$\vec{a}_t = \frac{d^2\vec{r}_g}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_g}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \vec{g} + 2 * [\vec{v}_g + \vec{v}_c] \times \vec{\Omega}$$

I tenint en compte que:

$$\frac{d^2\vec{r}_g}{dt^2} = \vec{g}$$

Extreiem:

$$\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = 2 * \vec{v}_g \times \vec{\Omega}$$

Cal esmentar que el terme v_c s'ha negligit ja que estava sent multiplicat per Ω . Si es sap que v_c és proporcional a Ω el producte d'ambdòs termes és proporcional a Ω^2 que com ja s'ha esmentat en el Capítol 2 es negligeix per tenir un valor extremadament petit. A continuació es realitza el producte vectorial entre \vec{v}_g i $\vec{\Omega}$:

$$\vec{v}_g \times \vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_{0x} & v_{0y} - g * t & v_{0z} \\ 0 & \vec{\Omega} * \sin \lambda & -\vec{\Omega} * \cos \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -[v_{0z} * \Omega * \sin \lambda + (v_{0y} - gt) * \Omega * \cos \lambda] \vec{i} + (v_{0x} * \Omega * \cos \lambda) \vec{j} + (v_{0x} * \Omega * \sin \lambda) \vec{k}$$

Correcció de l'eix x:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2 * v_{0g} \times \vec{\Omega}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2 * [v_{0z} * \Omega * \sin \lambda + (v_{0y} - gt) * \Omega * \cos \lambda]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2 * [v_{0z} * \Omega * \sin \lambda + v_{0y} * \Omega * \cos \lambda - gt * \Omega * \cos \lambda]$$

$$d^2x = -2 * [v_{0z} * \Omega * \sin \lambda + v_{0y} * \Omega * \cos \lambda - gt * \Omega * \cos \lambda] * dt^2$$

$$\int_{x_0}^x d^2x = \int -2 * [\int v_{0z} * \Omega * \sin \lambda + \int v_{0y} * \Omega * \cos \lambda - \int gt * \Omega * \cos \lambda] * \int_0^t dt^2$$

$$\mathbf{x} = -[\mathbf{v}_{0z} * \Omega * \sin \lambda + \mathbf{v}_{0y} * \Omega * \cos \lambda] * \mathbf{t}^2 + \mathbf{g} * \Omega * \cos \lambda * \frac{\mathbf{t}^3}{3}$$

Correcció de l'eix y:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2 * v_{0g} \times \vec{\Omega}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2 * (v_{0x} * \Omega * \cos \lambda)$$

$$d^2 y = 2 * (v_{0x} * \Omega * \cos \lambda) * dt^2$$

$$\int_{y_0}^y d^2 y = \int 2 * \int (v_{0x} * \Omega * \cos \lambda) * \int_0^t dt^2$$

$$y = +(v_{0x} * \Omega * \cos \lambda * t^2)$$

Correcció de l'eix z:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 2 * v_{0g} \times \vec{\Omega}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 2 * (v_{0x} * \Omega * \sin \lambda)$$

$$d^2 z = 2 * (v_{0x} * \Omega * \sin \lambda) * dt^2$$

$$\int_{z_0}^z d^2 z = \int 2 * \int (v_{0x} * \Omega * \sin \lambda) * \int_0^t dt^2$$

$$z = +(v_{0x} * \Omega * \sin \lambda * t^2)$$

Per a trobar l'equació del moviment amb la correcció corresponent per efecte Coriolis es parteix de la base que:

$$r = r_g + r_c$$

Eix x:

$$x = x_0 + v_{0x} * t - [v_{0z} * \Omega * \sin \psi + v_{0y} * \Omega * \cos \psi] * t^2 + g * \Omega * \cos \psi * \frac{t^3}{3}$$

Eix y:

$$y = (y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2) + (v_{0x} * \Omega * \cos \psi * t^2)$$

Eix z:

$$z = (z_0 + v_{0z} * t) + (v_{0x} * \Omega * \sin \psi * t^2)$$

A.3 Equacions diferencials corregides amb fregament

Primer introduïm l'acceleració del fregament a les equacions bàsiques del moviment parabòlic:

Eix x (MRUA):

$$a_x = -a_{fx}$$

$$v_x = v_{0x} - a_{fx} * t$$

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x} - a_{fx} * t$$

$$dx = v_{0x} * dt - a_{fx} * t * dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_{0x} * dt - \int_0^t a_{fx} * t * dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = v_{0x} * \int_0^t dt - a_{fx} * t * \int_0^t t$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_{0x} * \mathbf{t} - \frac{1}{2} * \mathbf{a}_{fx} * \mathbf{t}^2$$

Eix z (MRUA):

$$a_z = -a_{fz}$$

$$v_z = v_{0z} - a_{fz} * t$$

$$\frac{dz}{dt} = v_{0z} - a_{fz} * t$$

$$dz = v_{0z} * dt - a_{fz} * t * dt$$

$$\int_{z_0}^z dz = \int_0^t v_{0z} * dt - \int_0^t a_{fz} * t * dt$$

$$\int_{z_0}^z dz = v_{0z} * \int_0^t dt - a_{fz} * t * \int_0^t t$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{v}_{0z} * \mathbf{t} - \frac{1}{2} * \mathbf{a}_{fz} * \mathbf{t}^2$$

Eix y (MRUA):

$$a_y = -g - a_{fy}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - a_{fy}$$

$$dv_y = -g * dt - a_{fy} * dt$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = - \int_0^t g * dt - \int_0^t a_{fy} * dt$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = -g * \int_0^t dt - a_{fy} * \int_0^t dt$$

$$v_y - v_{0y} = -g * t - a_{fy} * t$$

$$v_y = v_{0y} - (g * t + a_{fy} * t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_{0y} - (g + a_{fy}) * t$$

$$dy = v_{0y} * dt - (g + a_{fy}) * t * dt$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^t v_{0y} * dt - \int_0^t (g + a_{fy}) * t * dt$$

$$\int_{y_0}^y dy = v_{0y} * \int_0^t dt + (g + a_{fy}) * \int_0^t t * dt$$

$$y - y_0 = v_{0y} * t - (g + a_{fy}) * \frac{1}{2} * t^2$$

$$y = y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * (g + a_{fy}) * t^2$$

Finalment s'hi afegeix la correcció de coriolis corresponent per tal d'obtenir unes equacions del moviment parabòlic corregides per l'efecte coriolis desaccelerades per efecte del fregament.

Eix x:

$$x = x_0 + v_{0x} * t - \frac{1}{2} * a_{fx} * t^2$$

$$x = (x_0 + v_{0x} * t - \frac{1}{2} * a_{fx} * t^2) - [v_{0z} * \Omega * \sin \lambda + v_{0y} * \Omega * \cos \lambda] * t^2 + g * \Omega * \cos \lambda * \frac{t^3}{3}$$

Eix y:

$$y = y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * (g + a_{fy}) * t^2$$

$$y = (y_0 + v_{0y} * t - \frac{1}{2} * (g + a_{fy}) * t^2) + (v_{0x} * \Omega * \cos \lambda * t^2)$$

Eix z:

$$z = z_0 + v_{0z} * t - \frac{1}{2} * a_{fz} * t^2$$

$$z = (z_0 + v_{0z} * t - \frac{1}{2} * a_{fz} * t^2) + (v_{0x} * \Omega * \sin \lambda * t^2)$$

Annex B

TAULES DE VALORS

B1. Simulacions del capítol 3

Simulació 3.1:

x	y	z	densitat	t
0.000000	0.000000	0.000000	1.460616	0.000000
506.935865	1003.959735	878.175171	1.460616	1.434019
1013.942365	1987.834926	1756.396055	1.266440	2.868038
1520.956170	2951.631022	2634.665735	1.101216	4.302057
2027.980933	3895.351506	3512.986360	0.960284	5.736076
2535.020307	4818.998504	4391.359402	0.839780	7.170094
3042.077943	5722.573210	5269.785839	0.736495	8.604113
3549.157495	6606.076205	6148.266291	0.647758	10.038132
4056.262615	7469.507661	7026.801126	0.571340	11.472151
4563.396956	8312.867501	7905.390531	0.505376	12.906170
5070.564171	9136.155496	8784.034571	0.448305	14.340189
5577.767911	9939.371338	9662.733224	0.398814	15.774208
6085.011830	10722.514688	10541.486419	0.355800	17.208227
6592.299581	11485.585201	11420.294047	0.318333	18.642245
7099.634815	12228.582548	12299.155982	0.285624	20.076264
7607.021185	12951.506429	13178.072092	0.257008	21.510283
8114.462345	13654.356571	14057.042240	0.231919	22.944302
8621.961946	14337.132738	14936.066295	0.209877	24.378321
9129.523641	14999.834725	15815.144133	0.190473	25.812340
9637.151083	15642.462356	16694.275636	0.173356	27.246359
10144.847924	16265.015486	17573.460696	0.158229	28.680378
10652.617818	16867.493993	18452.699216	0.144834	30.114397
11160.464416	17449.897779	19331.991105	0.132951	31.548415
11668.391371	18012.226765	20211.336282	0.122392	32.982434
12176.402336	18554.480886	21090.734675	0.112994	34.416453
12684.500964	19076.660094	21970.186219	0.104615	35.850472
13192.690906	19578.764352	22849.690853	0.097134	37.284491

13700.975817	20060.793631	23729.248525	0.090446	38.718510
14209.359347	20522.747913	24608.859187	0.084458	40.152529
14717.845150	20964.627183	25488.522794	0.079093	41.586548
15226.436879	21386.431434	26368.239306	0.074280	43.020567
15735.138185	21788.160661	27248.008686	0.069959	44.454585
16243.952722	22169.814864	28127.830898	0.066077	45.888604
16752.884143	22531.394043	29007.705911	0.062589	47.322623
17261.936099	22872.898202	29887.633690	0.059455	48.756642
17771.112243	23194.327344	30767.614206	0.056639	50.190661
18280.416229	23495.681474	31647.647428	0.054111	51.624680
18789.851708	23776.960596	32527.733324	0.051843	53.058699
19299.422334	24038.164713	33407.871862	0.049811	54.492718
19809.131758	24279.293829	34288.063009	0.047997	55.926736
20318.983633	24500.347946	35168.306731	0.046380	57.360755
20828.981613	24701.327063	36048.602991	0.044946	58.794774
21339.129349	24882.231181	36928.951749	0.043681	60.228793
21849.430495	25043.060295	37809.352963	0.042572	61.662812
22359.888702	25183.814400	38689.806587	0.041610	63.096831
22870.507624	25304.493487	39570.312571	0.040786	64.530850
23381.290912	25405.097544	40450.870859	0.040093	65.964869
23892.242221	25485.626555	41331.481391	0.039524	67.398888
24403.365201	25546.080499	42212.144098	0.039074	68.832906
24914.663506	25586.459352	43092.858907	0.038740	70.266925
25426.140789	25606.763082	43973.625734	0.038519	71.700944
25937.800702	25606.991652	44854.444487	0.038408	73.134963
26449.646897	25587.145014	45735.315063	0.038406	74.568982
26961.683028	25547.223115	46616.237346	0.038515	76.003001
27473.912746	25487.225888	47497.211207	0.038734	77.437020
27986.339705	25407.153255	48378.236502	0.039066	78.871039
28498.967557	25307.005124	49259.313068	0.039513	80.305058
29011.799954	25186.781385	50140.440722	0.040079	81.739076
29524.840550	25046.481907	51021.619257	0.040769	83.173095
30038.092996	24886.106539	51902.848441	0.041590	84.607114
30551.560946	24705.655097	52784.128012	0.042549	86.041133
31065.248052	24505.127369	53665.457671	0.043654	87.475152
31579.157967	24284.523101	54546.837082	0.044915	88.909171
32093.294342	24043.841995	55428.265862	0.046346	90.343190
32607.660832	23783.083697	56309.743576	0.047958	91.777209
33122.261088	23502.247788	57191.269728	0.049768	93.211227
33637.098763	23201.333775	58072.843755	0.051794	94.645246
34152.177510	22880.341069	58954.465011	0.054057	96.079265
34667.500980	22539.268974	59836.132756	0.056579	97.513284
35183.072828	22178.116663	60717.846147	0.059389	98.947303
35698.896705	21796.883151	61599.604210	0.062516	100.381322

36214.976264	21395.567267	62481.405830	0.065995	101.815341
36731.315158	20974.167614	63363.249720	0.069868	103.249360
37247.917039	20532.682523	64245.134395	0.074179	104.683379
37764.785559	20071.110002	65127.058138	0.078981	106.117397
38281.924372	19589.447662	66009.018963	0.084335	107.551416
38799.337131	19087.692642	66891.014562	0.090308	108.985435
39317.027486	18565.841507	67773.042256	0.096982	110.419454
39834.999092	18023.890126	68655.098923	0.104446	111.853473
40353.255601	17461.833524	69537.180920	0.112807	113.287492
40871.800665	16879.665700	70419.283992	0.122185	114.721511
41390.637938	16277.379405	71301.403152	0.132721	116.155530
41909.771071	15654.965869	72183.532549	0.144579	117.589548
42429.203717	15012.414459	73065.665304	0.157948	119.023567
42948.939529	14349.712268	73947.793311	0.173047	120.457586
43468.982159	13666.843600	74829.907002	0.190133	121.891605
43989.335260	12963.789330	75711.995056	0.209505	123.325624
44510.002485	12240.526117	76594.044052	0.231515	124.759643
45030.987486	11497.025424	77476.038048	0.256572	126.193662
45552.293916	10733.252289	78357.958060	0.285160	127.627681
46073.925428	9949.163807	79239.781434	0.317847	129.061700
46595.885673	9144.707212	80121.481077	0.355306	130.495718
47118.178305	8319.817483	81003.024508	0.398330	131.929737
47640.806977	7474.414332	81884.372693	0.447862	133.363756
48163.775340	6608.398398	82765.478603	0.505024	134.797775
48687.087047	5721.646443	83646.285432	0.571151	136.231794
49210.745752	4814.005243	84526.724371	0.647843	137.665813
49734.755106	3885.283816	85406.711833	0.737018	139.099832
50259.118763	2935.243476	86286.145961	0.840982	140.533851
50783.840374	1963.585059	87164.902228	0.962522	141.967870
51308.923593	969.932420	88042.827836	1.105017	143.401888
51834.372071	-46.188999	88919.734561	1.272578	144.835907

Simulació 3.2:

x	y	z	densitat	t
0.000000	0.000000	0.000000	1.460616	0.000000
715.604877	1002.117977	715.701807	1.460616	1.431334
1431.276271	1984.264423	1431.474349	1.266772	2.862669
2146.954929	2946.444763	2147.319294	1.101775	4.294003
2862.644483	3888.662468	2863.237808	0.960992	5.725337
3578.348566	4810.919655	3579.230689	0.840578	7.156672

4294.070810	5713.217522	4295.298469	0.737341	8.588006
5009.814847	6595.556649	5011.441486	0.648620	10.019340
5725.584308	7457.937211	5727.659939	0.572194	11.450675
6441.382826	8300.359135	6443.953931	0.506207	12.882009
7157.214034	9122.822195	7160.323498	0.449102	14.313343
7873.081563	9925.326085	7876.768629	0.399570	15.744677
8588.989045	10707.870467	8593.289286	0.356511	17.176012
9304.940112	11470.454999	9309.885411	0.318996	18.607346
10020.938397	12213.079353	10026.556935	0.286238	20.038680
10736.987532	12935.743230	10743.303787	0.257574	21.470015
11453.091149	13638.446358	11460.125892	0.232439	22.901349
12169.252880	14321.188499	12177.023180	0.210352	24.332683
12885.476357	14983.969450	12893.995583	0.190905	25.764018
13601.765212	15626.789035	13611.043038	0.173748	27.195352
14318.123078	16249.647108	14328.165486	0.158581	28.626686
15034.553586	16852.543549	15045.362873	0.145150	30.058021
15751.060369	17435.478256	15762.635151	0.133234	31.489355
16467.647058	17998.451152	16479.982276	0.122643	32.920689
17184.317286	18541.462173	17197.404208	0.113215	34.352024
17901.074686	19064.511268	17914.900912	0.104809	35.783358
18617.922888	19567.598401	18632.472356	0.097302	37.214692
19334.865526	20050.723543	19350.118510	0.090589	38.646026
20051.906231	20513.886674	20067.839348	0.084579	40.077361
20769.048636	20957.087782	20785.634847	0.079192	41.508695
21486.296372	21380.326857	21503.504985	0.074359	42.940029
22203.653072	21783.603895	22221.449742	0.070019	44.371364
22921.122367	22166.918896	22939.469098	0.066120	45.802698
23638.707891	22530.271860	23657.563035	0.062615	47.234032
24356.413275	22873.662791	24375.731537	0.059465	48.665367
25074.242151	23197.091691	25093.974587	0.056633	50.096701
25792.198152	23500.558566	25812.292168	0.054089	51.528035
26510.284909	23784.063419	26530.684263	0.051807	52.959370
27228.506055	24047.606255	27249.150855	0.049761	54.390704
27946.865221	24291.187076	27967.691928	0.047932	55.822038
28665.366041	24514.805885	28686.307461	0.046302	57.253373
29384.012145	24718.462683	29404.997436	0.044854	58.684707
30102.807166	24902.157467	30123.761832	0.043574	60.116041
30821.754737	25065.890237	30842.600627	0.042452	61.547375
31540.858489	25209.660985	31561.513795	0.041476	62.978710
32260.122055	25333.469704	32280.501310	0.040637	64.410044
32979.549066	25437.316382	32999.563144	0.039928	65.841378
33699.143155	25521.201004	33718.699263	0.039344	67.272713
34418.907953	25585.123550	34437.909633	0.038877	68.704047
35138.847094	25629.083997	35157.194213	0.038526	70.135381

35858.964209	25653.082314	35876.552961	0.038286	71.566716
36579.262930	25657.118464	36595.985827	0.038156	72.998050
37299.746890	25641.192403	37315.492757	0.038134	74.429384
38020.419720	25605.304078	38035.073691	0.038220	75.860719
38741.285053	25549.453427	38754.728560	0.038416	77.292053
39462.346520	25473.640372	39474.457289	0.038722	78.723387
40183.607754	25377.864826	40194.259792	0.039141	80.154722
40905.072388	25262.126682	40914.135972	0.039677	81.586056
41626.744052	25126.425816	41634.085723	0.040335	83.017390
42348.626380	24970.762079	42354.108921	0.041120	84.448724
43070.723003	24795.135298	43074.205429	0.042040	85.880059
43793.037553	24599.545267	43794.375092	0.043102	87.311393
44515.573663	24383.991744	44514.617732	0.044317	88.742727
45238.334965	24148.474441	45234.933151	0.045695	90.174062
45961.325091	23892.993019	45955.321120	0.047250	91.605396
46684.547673	23617.547079	46675.781382	0.048997	93.036730
47408.006342	23322.136146	47396.313640	0.050953	94.468065
48131.704733	23006.759658	48116.917560	0.053137	95.899399
48855.646475	22671.416951	48837.592756	0.055572	97.330733
49579.835202	22316.107234	49558.338789	0.058284	98.762068
50304.274546	21940.829568	50279.155152	0.061302	100.193402
51028.968138	21545.582837	51000.041265	0.064659	101.624736
51753.919611	21130.365710	51720.996461	0.068394	103.056071
52479.132598	20695.176601	52442.019968	0.072551	104.487405
53204.610729	20240.013614	53163.110898	0.077179	105.918739
53930.357638	19764.874484	53884.268221	0.082335	107.350073
54656.376955	19269.756496	54605.490743	0.088085	108.781408
55382.672315	18754.656394	55326.777078	0.094505	110.212742
56109.247348	18219.570266	56048.125614	0.101681	111.644076
56836.105687	17664.493409	56769.534471	0.109713	113.075411
57563.250964	17089.420152	57491.001456	0.118717	114.506745
58290.686810	16494.343655	58212.523998	0.128824	115.938079
59018.416859	15879.255646	58934.099088	0.140190	117.369414
59746.444742	15244.146113	59655.723190	0.152994	118.800748
60474.774092	14589.002913	60377.392140	0.167442	120.232082
61203.408540	13913.811293	61099.101030	0.183777	121.663417
61932.351718	13218.553301	61820.844058	0.202281	123.094751
62661.607259	12503.207052	62542.614356	0.223284	124.526085
63391.178796	11767.745815	63264.403769	0.247172	125.957420
64121.069959	11012.136887	63986.202602	0.274399	127.388754
64851.284381	10236.340177	64707.999297	0.305499	128.820088
65581.825695	9440.306441	65429.780049	0.341100	130.251422
66312.697532	8623.975078	66151.528325	0.381946	131.682757
67043.903524	7787.271348	66873.224284	0.428919	133.114091

67775.447304	6930.102883	67594.844052	0.483066	134.545425
68507.332504	6052.355269	68316.358827	0.545632	135.976760
69239.562755	5153.886459	69037.733774	0.618106	137.408094
69972.141691	4234.519658	69758.926635	0.702271	138.839428
70705.072943	3294.034251	70479.885998	0.800270	140.270763
71438.360143	2332.154167	71200.549106	0.914684	141.702097
72172.006923	1348.532893	71920.839093	1.048638	143.133431
72906.016916	342.734058	72640.661445	1.205930	144.564766

Simulació 3.3:

x	y	z	densitat	t
0.000000	0.000000	0.000000	1.460616	0.000000
245.646209	1951.060478	245.729073	1.460616	2.001104
491.369012	3862.877732	491.493920	1.106985	4.002209
737.111665	5735.488305	737.294611	0.843663	6.003313
982.884095	7568.906869	983.131180	0.646570	8.004418
1228.696227	9363.137052	1229.003638	0.498289	10.005522
1474.557985	11118.177382	1474.911986	0.386157	12.006627
1720.479295	12834.024430	1720.856221	0.300930	14.007731
1966.470083	14510.674398	1966.836338	0.235823	16.008836
2212.540274	16148.123832	2212.852330	0.185834	18.009940
2458.699794	17746.369894	2458.904193	0.147259	20.011045
2704.958567	19305.410398	2704.991921	0.117344	22.012149
2951.326519	20825.243746	2951.115512	0.094028	24.013254
3197.813576	22305.868828	3197.274961	0.075765	26.014358
3444.429663	23747.284913	3443.470267	0.061391	28.015463
3691.184704	25149.491559	3689.701428	0.050022	30.016567
3938.088627	26512.488531	3935.968444	0.040986	32.017672
4185.151355	27836.275740	4182.271313	0.033770	34.018776
4432.382815	29120.853194	4428.610034	0.027980	36.019880
4679.792931	30366.220967	4674.984608	0.023312	38.020985
4927.391630	31572.379167	4921.395035	0.019531	40.022089
5175.188835	32739.327923	5167.841314	0.016455	42.023194
5423.194474	33867.067371	5414.323446	0.013941	44.024298
5671.418471	34955.597646	5660.841430	0.011877	46.025403
5919.870752	36004.918877	5907.395266	0.010175	48.026507
6168.561241	37015.031185	6153.984956	0.008766	50.027612
6417.499865	37985.934680	6400.610498	0.007594	52.028716
6666.696548	38917.629461	6647.271893	0.006615	54.029821
6916.161217	39810.115616	6893.969142	0.005795	56.030925

7165.903796	40663.393222	7140.702244	0.005105	58.032030
7415.934210	41477.462349	7387.471200	0.004522	60.033134
7666.262386	42252.323056	7634.276009	0.004028	62.034239
7916.898249	42987.975396	7881.116672	0.003608	64.035343
8167.851723	43684.419412	8127.993188	0.003250	66.036448
8419.132735	44341.655145	8374.905559	0.002944	68.037552
8670.751209	44959.682628	8621.853784	0.002681	70.038656
8922.717072	45538.501889	8868.837862	0.002456	72.039761
9175.040248	46078.112953	9115.857795	0.002262	74.040865
9427.730662	46578.515841	9362.913582	0.002095	76.041970
9680.798241	47039.710571	9610.005223	0.001951	78.043074
9934.252909	47461.697159	9857.132718	0.001827	80.044179
10188.104592	47844.475617	10104.296067	0.001721	82.045283
10442.363216	48188.045955	10351.495271	0.001630	84.046388
10697.038705	48492.408183	10598.730329	0.001552	86.047492
10952.140985	48757.562306	10846.001241	0.001487	88.048597
11207.679982	48983.508331	11093.308007	0.001432	90.049701
11463.665620	49170.246259	11340.650627	0.001386	92.050806
11720.107825	49317.776094	11588.029102	0.001350	94.051910
11977.016523	49426.097836	11835.443431	0.001322	96.053015
12234.401639	49495.211482	12082.893614	0.001302	98.054119
12492.273098	49525.117030	12330.379651	0.001289	100.055224
12750.640826	49515.814473	12577.901541	0.001284	102.056328
13009.514748	49467.303804	12825.459286	0.001285	104.057432
13268.904789	49379.585012	13073.052884	0.001294	106.058537
13528.820875	49252.658081	13320.682336	0.001311	108.059641
13789.272931	49086.522995	13568.347641	0.001334	110.060746
14050.270882	48881.179727	13816.048799	0.001366	112.061850
14311.824655	48636.628250	14063.785810	0.001407	114.062955
14573.944173	48352.868523	14311.558674	0.001457	116.064059
14836.639363	48029.900499	14559.367390	0.001516	118.065164
15099.920151	47667.724118	14807.211958	0.001588	120.066268
15363.796460	47266.339303	15055.092377	0.001671	122.067373
15628.278218	46825.745958	15303.008647	0.001770	124.068477
15893.375348	46345.943962	15550.960767	0.001884	126.069582
16159.097777	45826.933160	15798.948736	0.002017	128.070686
16425.455429	45268.713360	16046.972553	0.002171	130.071791
16692.458231	44671.284312	16295.032217	0.002350	132.072895
16960.116108	44034.645702	16543.127726	0.002559	134.074000
17228.438984	43358.797128	16791.259078	0.002801	136.075104
17497.436786	42643.738074	17039.426272	0.003083	138.076208
17767.119439	41889.467876	17287.629303	0.003413	140.077313
18037.496867	41095.985682	17535.868168	0.003799	142.078417
18308.578997	40263.290388	17784.142864	0.004252	144.079522

18580.375754	39391.380561	18032.453384	0.004786	146.080626
18852.897063	38480.254342	18280.799722	0.005418	148.081731
19126.152850	37529.909299	18529.181868	0.006166	150.082835
19400.153040	36540.342250	18777.599813	0.007058	152.083940
19674.907558	35511.549015	19026.053543	0.008123	154.085044
19950.426329	34443.524080	19274.543039	0.009402	156.086149
20226.719280	33336.260151	19523.068281	0.010943	158.087253
20503.796335	32189.747544	19771.629240	0.012807	160.088358
20781.667420	31003.973351	20020.225879	0.015073	162.089462
21060.342460	29778.920310	20268.858153	0.017839	164.090567
21339.831381	28514.565245	20517.526001	0.021231	166.091671
21620.144107	27210.876927	20766.229344	0.025409	168.092776
21901.290565	25867.813107	21014.968081	0.030580	170.093880
22183.280680	24485.316411	21263.742079	0.037009	172.094984
22466.124376	23063.308609	21512.551159	0.045042	174.096089
22749.831580	21601.682599	21761.395091	0.055127	176.097193
23034.412217	20100.291131	22010.273565	0.067851	178.098298
23319.876212	18558.930884	22259.186167	0.083986	180.099402
23606.233491	16977.319843	22508.132344	0.104549	182.100507
23893.493978	15355.064984	22757.111348	0.130893	184.101611
24181.667600	13691.615819	23006.122166	0.164824	186.102716
24470.764281	11986.197112	23255.163415	0.208769	188.103820
24760.793948	10237.710573	23504.233197	0.266013	190.104925
25051.766524	8444.589741	23753.328883	0.341033	192.106029
25343.691937	6604.582987	24002.446804	0.439992	194.107134
25636.580111	4714.423771	24251.581787	0.571461	196.108238
25930.440971	2769.319207	24500.726441	0.747520	198.109343
26225.284443	762.135517	24749.870045	0.985484	200.110447
26521.120452	-1317.944659	24998.996715	1.310711	202.111552

B2. Simulacions del capítol 4

Simulació 4.1:

x	y	z	densitat	t
0.000000	0.000000	0.000000	1.460616	0.000000
506.935866	1003.943040	878.175171	1.460616	1.434019
1013.942372	1987.780873	1756.396055	1.266443	2.868038
1520.956187	2951.537458	2634.665734	1.101225	4.302057
2027.980962	3895.234006	3512.986359	0.960297	5.736076
2535.020340	4818.889589	4391.359401	0.839794	7.170094
3042.077962	5722.521583	5269.785837	0.736506	8.604113

3549.157466	6606.145970	6148.266291	0.647763	10.038132
4056.262485	7469.777562	7026.801128	0.571334	11.472151
4563.396651	8313.430153	7905.390537	0.505357	12.906170
5070.563591	9137.116619	8784.034583	0.448269	14.340189
5577.766930	9940.848999	9662.733247	0.398760	15.774208
6085.010292	10724.638535	10541.486455	0.355726	17.208227
6592.297296	11488.495710	11420.294102	0.318236	18.642245
7099.631562	12232.430262	12299.156061	0.285506	20.076264
7607.016707	12956.451203	13178.072199	0.256867	21.510283
8114.456346	13660.566820	14057.042382	0.231756	22.944302
8621.954092	14344.784683	14936.066478	0.209692	24.378321
9129.513559	15009.111639	15815.144361	0.190266	25.812340
9637.138360	15653.553819	16694.275917	0.173128	27.246359
10144.832105	16278.116630	17573.461036	0.157980	28.680378
10652.598406	16882.804757	18452.699620	0.144564	30.114397
11160.440874	17467.622158	19331.991581	0.132662	31.548415
11668.363120	18032.572063	20211.336837	0.122084	32.982434
12176.368755	18577.656973	21090.735315	0.112667	34.416453
12684.461391	19102.878653	21970.186951	0.104271	35.850472
13192.644641	19608.238136	22849.691684	0.096773	37.284491
13700.922118	20093.735718	23729.249463	0.090068	38.718510
14209.297437	20559.370954	24608.860240	0.084064	40.152529
14717.774214	21005.142662	25488.523969	0.078682	41.586548
15226.356067	21431.048915	26368.240613	0.073853	43.020567
15735.046615	21837.087046	27248.010132	0.069517	44.454585
16243.849481	22223.253640	28127.832495	0.065620	45.888604
16752.768287	22589.544537	29007.707666	0.062116	47.322623
17261.806662	22935.954831	29887.635616	0.058966	48.756642
17770.968233	23262.478863	30767.616314	0.056134	50.190661
18280.256635	23569.110225	31647.649729	0.053589	51.624680
18789.675501	23855.841757	32527.735832	0.051304	53.058699
19299.228471	24122.665545	33407.874591	0.049256	54.492718
19808.919188	24369.572916	34288.065976	0.047424	55.926736
20318.751299	24596.554444	35168.309952	0.045789	57.360755
20828.728454	24803.599938	36048.606484	0.044336	58.794774
21338.854309	24990.698450	36928.955534	0.043051	60.228793
21849.132522	25157.838264	37809.357062	0.041921	61.662812
22359.566760	25305.006900	38689.811025	0.040937	63.096831
22870.160692	25432.191107	39570.317373	0.040090	64.530850
23380.917992	25539.376862	40450.876054	0.039372	65.964869
23891.842342	25626.549370	41331.487009	0.038777	67.398888
24402.937428	25693.693055	42212.150175	0.038300	68.832906
24914.206943	25740.791561	43092.865481	0.037936	70.266925
25425.654585	25767.827747	43973.632846	0.037683	71.700944

25937.284060	25774.783684	44854.452184	0.037539	73.134963
26449.099080	25761.640650	45735.323394	0.037502	74.568982
26961.103364	25728.379124	46616.246368	0.037572	76.003001
27473.300639	25674.978785	47497.220981	0.037750	77.437020
27985.694638	25601.418503	48378.247095	0.038037	78.871039
28498.289104	25507.676337	49259.324555	0.038437	80.305058
29011.087787	25393.729525	50140.453186	0.038952	81.739076
29524.094444	25259.554480	51021.632789	0.039588	83.173095
30037.312842	25105.126781	51902.863142	0.040350	84.607114
30550.746756	24930.421164	52784.143993	0.041245	86.041133
31064.399973	24735.411517	53665.475056	0.042282	87.475152
31578.276284	24520.070864	54546.856007	0.043470	88.909171
32092.379495	24284.371356	55428.286478	0.044820	90.343190
32606.713417	24028.284260	56309.766050	0.046347	91.777209
33121.281876	23751.779939	57191.294244	0.048064	93.211227
33636.088705	23454.827840	58072.870516	0.049990	94.645246
34151.137748	23137.396471	58954.494242	0.052144	96.079265
34666.432862	22799.453379	59836.164707	0.054550	97.513284
35181.977913	22440.965123	60717.881090	0.057233	98.947303
35697.776781	22061.897246	61599.642448	0.060224	100.381322
36213.833355	21662.214232	62481.447694	0.063557	101.815341
36730.151538	21241.879468	63363.295573	0.067270	103.249360
37246.735245	20800.855191	64245.184634	0.071410	104.683379
37763.588403	20339.102425	65127.113198	0.076028	106.117397
38280.714955	19856.580908	66009.079315	0.081184	107.551416
38798.118853	19353.249003	66891.080715	0.086945	108.985435
39315.804066	18829.063592	67773.114756	0.093391	110.419454
39833.774576	18283.979942	68655.178353	0.100612	111.853473
40352.034379	17717.951549	69537.267894	0.108714	113.287492
40870.587486	17130.929945	70419.379148	0.117818	114.721511
41389.437923	16522.864458	71301.507140	0.128067	116.155530
41908.589732	15893.701924	72183.646018	0.139623	117.589548
42428.046970	15243.386323	73065.788873	0.152680	119.023567
42947.813710	14571.858341	73947.927538	0.167460	120.457586
43467.894043	13879.054820	74830.052333	0.184225	121.891605
43988.292077	13164.908073	75712.151762	0.203283	123.325624
44509.011936	12429.345038	76594.212139	0.224992	124.759643
45030.057763	11672.286216	77476.217132	0.249780	126.193662
45551.433722	10893.644345	78358.147207	0.278146	127.627681
46073.143992	10093.322735	79239.978941	0.310686	129.061700
46595.192777	9271.213169	80121.684179	0.348102	130.495718
47117.584300	8427.193257	81003.228987	0.391234	131.929737
47640.322805	7561.123082	81884.572360	0.441081	133.363756
48163.412562	6672.840943	82765.664612	0.498840	134.797775

48686.857866	5762.157924	83646.445359	0.565945	136.231794
49210.663038	4828.850948	84526.840998	0.644125	137.665813
49734.832428	3872.653856	85406.761521	0.735465	139.099832
50259.370421	2893.245890	86286.096491	0.842492	140.533851
50784.281438	1890.236766	87164.709900	0.968283	141.967870
51309.569939	863.147204	88042.433588	1.116594	143.401888
51835.240437	-188.616625	88919.058733	1.292034	144.835907

Simulació 4.2:

x	y	z	densitat	t
0.000000	0.000000	0.000000	1.460616	0.000000
715.604878	1002.101344	715.701807	1.460616	1.431334
1431.276277	1984.210549	1431.474349	1.266775	2.862669
2146.954946	2946.351448	2147.319294	1.101784	4.294003
2862.644512	3888.545145	2863.237807	0.961004	5.725337
3578.348599	4810.810621	3579.230689	0.840592	7.156672
4294.070829	5713.165171	4295.298469	0.737352	8.588006
5009.814818	6595.624709	5011.441485	0.648625	10.019340
5725.584179	7458.203983	5727.659939	0.572189	11.450675
6441.382524	8300.916732	6443.953934	0.506188	12.882009
7157.213459	9123.775786	7160.323504	0.449067	14.313343
7873.080590	9926.793141	7876.768641	0.399516	15.744677
8588.987519	10709.980006	8593.289306	0.356437	17.176012
9304.937847	11473.346835	9309.885441	0.318900	18.607346
10020.935171	12216.903346	10026.556978	0.286121	20.038680
10736.983089	12940.658535	10743.303845	0.257434	21.470015
11453.085196	13644.620683	11460.125969	0.232277	22.901349
12169.245085	14328.797357	12177.023279	0.210168	24.332683
12885.466350	14993.195411	12893.995707	0.190699	25.764018
13601.752581	15637.820987	13611.043190	0.173520	27.195352
14318.107371	16262.679514	14328.165669	0.158333	28.626686
15034.534310	16867.775700	15045.363092	0.144882	30.058021
15751.036989	17453.113540	15762.635408	0.132946	31.489355
16467.618998	18018.696302	16479.982576	0.122336	32.920689
17184.283929	18564.526534	17197.404554	0.112890	34.352024
17901.035373	19090.606056	17914.901308	0.104466	35.783358
18617.876923	19596.935964	18632.472805	0.096942	37.214692
19334.812170	20083.516619	19350.119017	0.090212	38.646026
20051.844710	20550.347654	20067.839918	0.084186	40.077361
20768.978139	20997.427968	20785.635483	0.078783	41.508695

21486.216052	21424.755725	21503.505692	0.073934	42.940029
22203.562050	21832.328354	22221.450524	0.069579	44.371364
22921.019734	22220.142544	22939.469960	0.065664	45.802698
23638.592706	22588.194246	23657.563984	0.062144	47.234032
24356.284574	22936.478671	24375.732578	0.058977	48.665367
25074.098945	23264.990287	25093.975725	0.056130	50.096701
25792.039430	23573.722818	25812.293411	0.053570	51.528035
26510.109646	23862.669244	26530.685617	0.051271	52.959370
27228.313209	24131.821797	27249.152329	0.049209	54.390704
27946.653741	24381.171960	27967.693529	0.047362	55.822038
28665.134869	24610.710466	28686.309199	0.045714	57.253373
29383.760221	24820.427297	29404.999321	0.044247	58.684707
30102.533433	25010.311678	30123.763874	0.042948	60.116041
30821.458142	25180.352080	30842.602837	0.041804	61.547375
31540.537991	25330.536211	31561.516187	0.040807	62.978710
32259.776630	25460.851021	32280.503898	0.039945	64.410044
32979.177711	25571.282695	32999.565943	0.039212	65.841378
33698.744895	25661.816650	33718.702290	0.038602	67.272713
34418.481845	25732.437533	34437.912905	0.038108	68.704047
35138.392233	25783.129219	35157.197752	0.037728	70.135381
35858.479735	25813.874804	35876.556788	0.037457	71.566716
36578.748036	25824.656604	36595.989967	0.037294	72.998050
37299.200825	25815.456151	37315.497237	0.037237	74.429384
38019.841799	25786.254188	38035.078540	0.037285	75.860719
38740.674663	25737.030663	38754.733811	0.037440	77.292053
39461.703128	25667.764726	39474.462978	0.037703	78.723387
40182.930913	25578.434723	40194.265959	0.038076	80.154722
40904.361747	25469.018187	40914.142661	0.038563	81.586056
41625.999365	25339.491838	41634.092981	0.039167	83.017390
42347.847510	25189.831569	42354.116803	0.039894	84.448724
43069.909935	25020.012440	43074.213995	0.040752	85.880059
43792.190402	24830.008673	43794.384406	0.041747	87.311393
44514.692681	24619.793635	44514.627867	0.042889	88.742727
45237.420554	24389.339833	45234.944187	0.044190	90.174062
45960.377809	24138.618898	45955.333145	0.045661	91.605396
46683.568247	23867.601571	46675.794494	0.047316	93.036730
47406.995679	23576.257689	47396.327948	0.049174	94.468065
48130.663924	23264.556162	48116.933182	0.051252	95.899399
48854.576816	22932.464954	48837.609824	0.053573	97.330733
49578.738197	22579.951059	49558.357448	0.056162	98.762068
50303.151921	22206.980466	50279.175562	0.059046	100.193402
51027.821854	21813.518130	51000.063603	0.062260	101.624736
51752.751874	21399.527928	51721.020919	0.065840	103.056071
52477.945871	20964.972609	52442.046759	0.069829	104.487405

53203.407748	20509.813738	53163.140251	0.074276	105.918739
53929.141422	20034.011625	53884.300387	0.079238	107.350073
54655.150820	19537.525244	54605.525994	0.084780	108.781408
55381.439885	19020.312127	55326.815707	0.090977	110.212742
56108.012574	18482.328245	56048.167932	0.097915	111.644076
56834.872856	17923.527858	56769.580809	0.105693	113.075411
57562.024717	17343.863335	57491.052158	0.114427	114.506745
58289.472156	16743.284929	58212.579420	0.124250	115.938079
59017.219189	16121.740509	58934.159585	0.135318	117.369414
59745.269846	15479.175224	59655.789107	0.147812	118.800748
60473.628174	14815.531089	60377.463796	0.161943	120.232082
61202.298235	14130.746474	61099.178694	0.177956	121.663417
61931.284110	13424.755475	61820.927916	0.196141	123.094751
62660.589895	12697.487123	62542.704467	0.216837	124.526085
63390.219707	11948.864402	63264.500006	0.240442	125.957420
64120.177678	11178.803029	63986.304573	0.267428	127.388754
64850.467961	10387.209906	64708.106235	0.298349	128.820088
65581.094730	9573.981194	65429.890670	0.333866	130.251422
66312.062177	8738.999878	66151.640636	0.374760	131.682757
67043.374519	7882.132680	66873.335327	0.421966	133.114091
67775.035992	7003.226157	67594.949567	0.476599	134.545425
68507.050862	6102.101730	68316.452803	0.539992	135.976760
69239.423415	5178.549334	69037.807847	0.613752	137.408094
69972.157971	4232.319278	69758.969297	0.699815	138.839428
70705.258878	3263.111769	70479.881534	0.800520	140.270763
71438.730521	2270.563352	71200.476181	0.918711	141.702097
72172.577323	1254.229281	71920.668855	1.057855	143.133431
72906.803754	213.560441	72640.354980	1.222197	144.564766

Simulació 4.3:

x	y	z	densitat	t
0.000000	0.000000	0.000000	1.460616	0.000000
245.646211	1951.027969	245.729073	1.460616	2.001104
491.369025	3862.795855	491.493920	1.106991	4.002209
737.111685	5735.410163	737.294611	0.843673	6.003313
982.884080	7568.952509	983.131180	0.646578	8.004418
1228.696078	9363.490477	1229.003638	0.498285	10.005522
1474.557527	11119.083581	1474.911986	0.386138	12.006627
1720.478256	12835.786424	1720.856221	0.300891	14.007731
1966.468078	14513.650301	1966.836338	0.235764	16.008836

2212.536787	16152.723931	2212.852331	0.185755	18.009940
2458.694163	17753.053740	2458.904193	0.147163	20.011045
2704.949973	19314.683916	2704.991922	0.117232	22.012149
2951.313970	20837.656358	2951.115512	0.093904	24.013254
3197.795897	22322.010589	3197.274962	0.075632	26.014358
3444.405485	23767.783663	3443.470268	0.061251	28.015463
3691.152456	25175.010080	3689.701430	0.049876	30.016567
3938.046525	26543.721721	3935.968446	0.040838	32.017672
4185.097400	27873.947792	4182.271315	0.033620	34.018776
4432.314783	29165.714788	4428.610037	0.027830	36.019880
4679.708372	30419.046463	4674.984611	0.023164	38.020985
4927.287861	31633.963814	4921.395038	0.019385	40.022089
5175.062943	32810.485064	5167.841317	0.016312	42.023194
5423.043309	33948.625661	5414.323449	0.013801	44.024298
5671.238650	35048.398268	5660.841433	0.011740	46.025403
5919.658660	36109.812765	5907.395270	0.010042	48.026507
6168.313034	37132.876248	6153.984960	0.008636	50.027612
6417.211472	38117.593027	6400.610503	0.007467	52.028716
6666.363678	39063.964626	6647.271898	0.006492	54.029821
6915.779362	39971.989787	6893.969147	0.005676	56.030925
7165.468242	40841.664463	7140.702249	0.004989	58.032030
7415.440043	41672.981822	7387.471205	0.004409	60.033134
7665.704502	42465.932240	7634.276015	0.003918	62.034239
7916.271364	43220.503304	7881.116678	0.003500	64.035343
8167.150387	43936.679804	8127.993195	0.003144	66.036448
8418.351344	44614.443726	8374.905565	0.002840	68.037552
8669.884020	45253.774255	8621.853790	0.002579	70.038656
8921.758216	45854.647757	8868.837869	0.002355	72.039761
9173.983751	46417.037781	9115.857802	0.002163	74.040865
9426.570459	46940.915045	9362.913589	0.001997	76.041970
9679.528197	47426.247426	9610.005231	0.001853	78.043074
9932.866840	47872.999953	9857.132726	0.001730	80.044179
10186.596286	48281.134793	10104.296076	0.001623	82.045283
10440.726454	48650.611239	10351.495280	0.001532	84.046388
10695.267289	48981.385694	10598.730338	0.001454	86.047492
10950.228761	49273.411661	10846.001251	0.001387	88.048597
11205.620867	49526.639723	11093.308018	0.001331	90.049701
11461.453630	49741.017530	11340.650639	0.001283	92.050806
11717.737106	49916.489777	11588.029115	0.001245	94.051910
11974.481378	50052.998189	11835.443444	0.001214	96.053015
12231.696563	50150.481500	12082.893628	0.001191	98.054119
12489.392811	50208.875432	12330.379666	0.001175	100.055224
12747.580307	50228.112670	12577.901558	0.001165	102.056328
13006.269270	50208.122845	12825.459304	0.001162	104.057432

13265.469961	50148.832504	13073.052904	0.001165	106.058537
13525.192674	50050.165089	13320.682357	0.001175	108.059641
13785.447748	49912.040904	13568.347664	0.001191	110.060746
14046.245562	49734.377093	13816.048825	0.001215	112.061850
14307.596537	49517.087607	14063.785838	0.001246	114.062955
14569.511142	49260.083175	14311.558705	0.001285	116.064059
14831.999888	48963.271269	14559.367424	0.001333	118.065164
15095.073337	48626.556071	14807.211996	0.001390	120.066268
15358.742100	48249.838438	15055.092420	0.001459	122.067373
15623.016837	47833.015862	15303.008695	0.001539	124.068477
15887.908262	47375.982429	15550.960821	0.001633	126.069582
16153.427142	46878.628779	15798.948796	0.001742	128.070686
16419.584301	46340.842055	16046.972621	0.001870	130.071791
16686.390621	45762.505859	16295.032295	0.002018	132.072895
16953.857041	45143.500192	16543.127814	0.002191	134.074000
17221.994562	44483.701398	16791.259179	0.002393	136.075104
17490.814248	43782.982097	17039.426388	0.002628	138.076208
17760.327227	43041.211110	17287.629436	0.002903	140.077313
18030.544694	42258.253372	17535.868323	0.003225	142.078417
18301.477911	41433.969837	17784.143043	0.003605	144.079522
18573.138211	40568.217353	18032.453593	0.004053	146.080626
18845.537000	39660.848529	18280.799966	0.004583	148.081731
19118.685756	38711.711552	18529.182155	0.005214	150.082835
19392.596035	37720.649974	18777.600150	0.005967	152.083940
19667.279470	36687.502435	19026.053940	0.006869	154.085044
19942.747776	35612.102306	19274.543510	0.007955	156.086149
20219.012749	34494.277220	19523.068840	0.009269	158.087253
20496.086272	33333.848456	19771.629905	0.010864	160.088358
20773.980314	32130.630110	20020.226672	0.012812	162.089462
21052.706935	30884.427970	20268.859102	0.015200	164.090567
21332.278287	29595.037992	20517.527137	0.018145	166.091671
21612.706620	28262.244182	20766.230708	0.021793	168.092776
21894.004283	26885.815677	21014.969721	0.026336	170.093880
22176.183728	25465.502655	21263.744049	0.032025	172.094984
22459.257514	24001.030587	21512.553529	0.039186	174.096089
22743.238316	22492.092110	21761.397939	0.048251	176.097193
23028.138927	20938.335447	22010.276980	0.059788	178.098298
23313.972273	19339.347811	22259.190250	0.074558	180.099402
23600.751419	17694.631485	22508.137202	0.093575	182.100507
23888.489590	16003.569072	22757.117087	0.118209	184.101611
24177.200191	14265.372665	23006.128875	0.150315	186.102716
24466.896844	12479.008876	23255.171137	0.192425	188.103820
24757.593436	10643.087184	23504.241877	0.248024	190.104925
25049.304192	8755.691824	23753.338288	0.321945	192.106029

25342.043786	6814.125169	24002.456375	0.420967	194.107134
25635.827515	4814.509357	24251.590394	0.554698	196.108238
25930.671570	2751.154354	24500.731972	0.736965	198.109343
26226.593465	615.527136	24749.868684	0.988031	200.110447
26523.612759	-1605.492589	24998.981668	1.338301	202.111552

B3. Simulacions del capítol 6

Simulació 6.1:

x	y	z	t	Angle(β)
6571000.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
6558033.632502	0.000000	412596.503827	53.010046	0.062832
6519185.702337	0.000000	823564.677751	106.020092	0.125664
6454609.524538	0.000000	1231282.618143	159.030138	0.188496
6364559.951776	0.000000	1634141.248560	212.040184	0.251327
6249392.368575	0.000000	2030550.670038	265.050230	0.314159
6109561.288772	0.000000	2418946.435691	318.060276	0.376991
5945618.561754	0.000000	2797795.724874	371.070322	0.439823
5758211.194568	0.000000	3165603.392522	424.080368	0.502655
5548078.798474	0.000000	3520917.869807	477.090414	0.565487
5316050.670038	0.000000	3862336.892814	530.100460	0.628319
5063042.518280	0.000000	4188513.036639	583.110506	0.691150
4790052.850786	0.000000	4498159.033057	636.120552	0.753982
4498159.033057	0.000000	4790052.850786	689.130598	0.816814
4188513.036639	0.000000	5063042.518280	742.140644	0.879646
3862336.892814	0.000000	5316050.670038	795.150690	0.942478
3520917.869807	0.000000	5548078.798474	848.160736	1.005310
3165603.392522	0.000000	5758211.194568	901.170782	1.068142
2797795.724874	0.000000	5945618.561754	954.180828	1.130973
2418946.435691	0.000000	6109561.288772	1007.190874	1.193805
2030550.670038	0.000000	6249392.368575	1060.200920	1.256637
1634141.248560	0.000000	6364559.951776	1113.210966	1.319469
1231282.618143	0.000000	6454609.524538	1166.221013	1.382301
823564.677751	0.000000	6519185.702337	1219.231059	1.445133
412596.503827	0.000000	6558033.632502	1272.241105	1.507964
0.000000	0.000000	6571000.000000	1325.251151	1.570796
-412596.503827	-0.000000	6558033.632502	1378.261197	1.633628
-823564.677751	-0.000000	6519185.702337	1431.271243	1.696460
-1231282.618143	-0.000000	6454609.524538	1484.281289	1.759292
-1634141.248560	-0.000000	6364559.951776	1537.291335	1.822124
-2030550.670038	-0.000000	6249392.368575	1590.301381	1.884956

-2418946.435691	-0.000000	6109561.288772	1643.311427	1.947787
-2797795.724874	-0.000000	5945618.561754	1696.321473	2.010619
-3165603.392522	-0.000000	5758211.194568	1749.331519	2.073451
-3520917.869807	-0.000000	5548078.798474	1802.341565	2.136283
-3862336.892814	-0.000000	5316050.670038	1855.351611	2.199115
-4188513.036639	-0.000000	5063042.518280	1908.361657	2.261947
-4498159.033057	-0.000000	4790052.850786	1961.371703	2.324779
-4790052.850786	-0.000000	4498159.033057	2014.381749	2.387610
-5063042.518280	-0.000000	4188513.036639	2067.391795	2.450442
-5316050.670038	-0.000000	3862336.892814	2120.401841	2.513274
-5548078.798474	-0.000000	3520917.869807	2173.411887	2.576106
-5758211.194568	-0.000000	3165603.392522	2226.421933	2.638938
-5945618.561754	-0.000000	2797795.724874	2279.431979	2.701770
-6109561.288772	-0.000000	2418946.435691	2332.442025	2.764602
-6249392.368575	-0.000000	2030550.670038	2385.452071	2.827433
-6364559.951776	-0.000000	1634141.248560	2438.462117	2.890265
-6454609.524538	-0.000000	1231282.618143	2491.472163	2.953097
-6519185.702337	-0.000000	823564.677751	2544.482209	3.015929
-6558033.632502	-0.000000	412596.503827	2597.492255	3.078761
-6571000.000000	-0.000000	0.000000	2650.502301	3.141593
-6558033.632502	-0.000000	-412596.503827	2703.512347	3.204425
-6519185.702337	-0.000000	-823564.677751	2756.522393	3.267256
-6454609.524538	-0.000000	-1231282.618143	2809.532439	3.330088
-6364559.951776	-0.000000	-1634141.248560	2862.542485	3.392920
-6249392.368575	-0.000000	-2030550.670038	2915.552531	3.455752
-6109561.288772	-0.000000	-2418946.435691	2968.562577	3.518584
-5945618.561754	-0.000000	-2797795.724874	3021.572623	3.581416
-5758211.194568	-0.000000	-3165603.392522	3074.582669	3.644247
-5548078.798474	-0.000000	-3520917.869807	3127.592715	3.707079
-5316050.670038	-0.000000	-3862336.892814	3180.602761	3.769911
-5063042.518280	-0.000000	-4188513.036639	3233.612807	3.832743
-4790052.850786	-0.000000	-4498159.033057	3286.622853	3.895575
-4498159.033057	-0.000000	-4790052.850786	3339.632899	3.958407
-4188513.036639	-0.000000	-5063042.518280	3392.642945	4.021239
-3862336.892814	-0.000000	-5316050.670038	3445.652992	4.084070
-3520917.869807	-0.000000	-5548078.798474	3498.663038	4.146902
-3165603.392522	-0.000000	-5758211.194568	3551.673084	4.209734
-2797795.724874	-0.000000	-5945618.561754	3604.683130	4.272566
-2418946.435691	-0.000000	-6109561.288772	3657.693176	4.335398
-2030550.670038	-0.000000	-6249392.368575	3710.703222	4.398230
-1634141.248560	-0.000000	-6364559.951776	3763.713268	4.461062
-1231282.618143	-0.000000	-6454609.524538	3816.723314	4.523893
-823564.677751	-0.000000	-6519185.702337	3869.733360	4.586725
-412596.503827	-0.000000	-6558033.632502	3922.743406	4.649557

-0.000000	-0.000000	-6571000.000000	3975.753452	4.712389
412596.503827	0.000000	-6558033.632502	4028.763498	4.775221
823564.677751	0.000000	-6519185.702337	4081.773544	4.838053
1231282.618143	0.000000	-6454609.524538	4134.783590	4.900885
1634141.248560	0.000000	-6364559.951776	4187.793636	4.963716
2030550.670038	0.000000	-6249392.368575	4240.803682	5.026548
2418946.435691	0.000000	-6109561.288772	4293.813728	5.089380
2797795.724874	0.000000	-5945618.561754	4346.823774	5.152212
3165603.392522	0.000000	-5758211.194568	4399.833820	5.215044
3520917.869807	0.000000	-5548078.798474	4452.843866	5.277876
3862336.892814	0.000000	-5316050.670038	4505.853912	5.340708
4188513.036639	0.000000	-5063042.518280	4558.863958	5.403539
4498159.033057	0.000000	-4790052.850786	4611.874004	5.466371
4790052.850786	0.000000	-4498159.033057	4664.884050	5.529203
5063042.518280	0.000000	-4188513.036639	4717.894096	5.592035
5316050.670038	0.000000	-3862336.892814	4770.904142	5.654867
5548078.798474	0.000000	-3520917.869807	4823.914188	5.717699
5758211.194568	0.000000	-3165603.392522	4876.924234	5.780530
5945618.561754	0.000000	-2797795.724874	4929.934280	5.843362
6109561.288772	0.000000	-2418946.435691	4982.944326	5.906194
6249392.368575	0.000000	-2030550.670038	5035.954372	5.969026
6364559.951776	0.000000	-1634141.248560	5088.964418	6.031858
6454609.524538	0.000000	-1231282.618143	5141.974464	6.094690
6519185.702337	0.000000	-823564.677751	5194.984510	6.157522
6558033.632502	0.000000	-412596.503827	5247.994556	6.220353
6571000.000000	0.000000	-0.000000	5301.004602	6.283185
6558033.632502	0.000000	412596.503827	5354.014648	6.346017

Simulació 6.2:

x	y	z	t	Angle(β)
4646398.659177	-4646398.659177	0.000000	0.000000	0.000000
4637230.052792	-4637230.052792	291749.785750	53.010046	0.062832
4609760.417937	-4609760.417937	582348.168383	106.020092	0.125664
4564098.164712	-4564098.164712	870648.288846	159.030138	0.188496
4500423.501169	-4500423.501169	1155512.358274	212.040184	0.251327
4418987.722115	-4418987.722115	1435816.148327	265.050230	0.314159
4320112.217365	-4320112.217365	1710453.428004	318.060276	0.376991
4204187.203365	-4204187.203365	1978340.329433	371.070322	0.439823
4071670.183183	-4071670.183183	2238419.625400	424.080368	0.502655
3923084.140958	-3923084.140958	2489664.901741	477.090414	0.565487

3759015.477915	-3759015.477915	2731084.608136	530.100460	0.628319
3580111.698111	-3580111.698111	2961725.971295	583.110506	0.691150
3387078.853033	-3387078.853033	3180678.755130	636.120552	0.753982
3180678.755130	-3180678.755130	3387078.853033	689.130598	0.816814
2961725.971295	-2961725.971295	3580111.698111	742.140644	0.879646
2731084.608136	-2731084.608136	3759015.477915	795.150690	0.942478
2489664.901741	-2489664.901741	3923084.140958	848.160736	1.005310
2238419.625400	-2238419.625400	4071670.183183	901.170782	1.068142
1978340.329433	-1978340.329433	4204187.203365	954.180828	1.130973
1710453.428004	-1710453.428004	4320112.217365	1007.190874	1.193805
1435816.148327	-1435816.148327	4418987.722115	1060.200920	1.256637
1155512.358274	-1155512.358274	4500423.501169	1113.210966	1.319469
870648.288846	-870648.288846	4564098.164712	1166.221013	1.382301
582348.168383	-582348.168383	4609760.417937	1219.231059	1.445133
291749.785750	-291749.785750	4637230.052792	1272.241105	1.507964
0.000000	-0.000000	4646398.659177	1325.251151	1.570796
-291749.785750	291749.785750	4637230.052792	1378.261197	1.633628
-582348.168383	582348.168383	4609760.417937	1431.271243	1.696460
-870648.288846	870648.288846	4564098.164712	1484.281289	1.759292
-1155512.358274	1155512.358274	4500423.501169	1537.291335	1.822124
-1435816.148327	1435816.148327	4418987.722115	1590.301381	1.884956
-1710453.428004	1710453.428004	4320112.217365	1643.311427	1.947787
-1978340.329433	1978340.329433	4204187.203365	1696.321473	2.010619
-2238419.625400	2238419.625400	4071670.183183	1749.331519	2.073451
-2489664.901741	2489664.901741	3923084.140958	1802.341565	2.136283
-2731084.608136	2731084.608136	3759015.477915	1855.351611	2.199115
-2961725.971295	2961725.971295	3580111.698111	1908.361657	2.261947
-3180678.755130	3180678.755130	3387078.853033	1961.371703	2.324779
-3387078.853033	3387078.853033	3180678.755130	2014.381749	2.387610
-3580111.698111	3580111.698111	2961725.971295	2067.391795	2.450442
-3759015.477915	3759015.477915	2731084.608136	2120.401841	2.513274
-3923084.140958	3923084.140958	2489664.901741	2173.411887	2.576106
-4071670.183183	4071670.183183	2238419.625400	2226.421933	2.638938
-4204187.203365	4204187.203365	1978340.329433	2279.431979	2.701770
-4320112.217365	4320112.217365	1710453.428004	2332.442025	2.764602
-4418987.722115	4418987.722115	1435816.148327	2385.452071	2.827433
-4500423.501169	4500423.501169	1155512.358274	2438.462117	2.890265
-4564098.164712	4564098.164712	870648.288846	2491.472163	2.953097
-4609760.417937	4609760.417937	582348.168383	2544.482209	3.015929
-4637230.052792	4637230.052792	291749.785750	2597.492255	3.078761
-4646398.659177	4646398.659177	0.000000	2650.502301	3.141593
-4637230.052792	4637230.052792	-291749.785750	2703.512347	3.204425
-4609760.417937	4609760.417937	-582348.168383	2756.522393	3.267256
-4564098.164712	4564098.164712	-870648.288846	2809.532439	3.330088

-4500423.501169	4500423.501169	-1155512.358274	2862.542485	3.392920
-4418987.722115	4418987.722115	-1435816.148327	2915.552531	3.455752
-4320112.217365	4320112.217365	-1710453.428004	2968.562577	3.518584
-4204187.203365	4204187.203365	-1978340.329433	3021.572623	3.581416
-4071670.183183	4071670.183183	-2238419.625400	3074.582669	3.644247
-3923084.140958	3923084.140958	-2489664.901741	3127.592715	3.707079
-3759015.477915	3759015.477915	-2731084.608136	3180.602761	3.769911
-3580111.698111	3580111.698111	-2961725.971295	3233.612807	3.832743
-3387078.853033	3387078.853033	-3180678.755130	3286.622853	3.895575
-3180678.755130	3180678.755130	-3387078.853033	3339.632899	3.958407
-2961725.971295	2961725.971295	-3580111.698111	3392.642945	4.021239
-2731084.608136	2731084.608136	-3759015.477915	3445.652992	4.084070
-2489664.901741	2489664.901741	-3923084.140958	3498.663038	4.146902
-2238419.625400	2238419.625400	-4071670.183183	3551.673084	4.209734
-1978340.329433	1978340.329433	-4204187.203365	3604.683130	4.272566
-1710453.428004	1710453.428004	-4320112.217365	3657.693176	4.335398
-1435816.148327	1435816.148327	-4418987.722115	3710.703222	4.398230
-1155512.358274	1155512.358274	-4500423.501169	3763.713268	4.461062
-870648.288846	870648.288846	-4564098.164712	3816.723314	4.523893
-582348.168383	582348.168383	-4609760.417937	3869.733360	4.586725
-291749.785750	291749.785750	-4637230.052792	3922.743406	4.649557
-0.000000	0.000000	-4646398.659177	3975.753452	4.712389
291749.785750	-291749.785750	-4637230.052792	4028.763498	4.775221
582348.168383	-582348.168383	-4609760.417937	4081.773544	4.838053
870648.288846	-870648.288846	-4564098.164712	4134.783590	4.900885
1155512.358274	-1155512.358274	-4500423.501169	4187.793636	4.963716
1435816.148327	-1435816.148327	-4418987.722115	4240.803682	5.026548
1710453.428004	-1710453.428004	-4320112.217365	4293.813728	5.089380
1978340.329433	-1978340.329433	-4204187.203365	4346.823774	5.152212
2238419.625400	-2238419.625400	-4071670.183183	4399.833820	5.215044
2489664.901741	-2489664.901741	-3923084.140958	4452.843866	5.277876
2731084.608136	-2731084.608136	-3759015.477915	4505.853912	5.340708
2961725.971295	-2961725.971295	-3580111.698111	4558.863958	5.403539
3180678.755130	-3180678.755130	-3387078.853033	4611.874004	5.466371
3387078.853033	-3387078.853033	-3180678.755130	4664.884050	5.529203
3580111.698111	-3580111.698111	-2961725.971295	4717.894096	5.592035
3759015.477915	-3759015.477915	-2731084.608136	4770.904142	5.654867
3923084.140958	-3923084.140958	-2489664.901741	4823.914188	5.717699
4071670.183183	-4071670.183183	-2238419.625400	4876.924234	5.780530
4204187.203365	-4204187.203365	-1978340.329433	4929.934280	5.843362
4320112.217365	-4320112.217365	-1710453.428004	4982.944326	5.906194
4418987.722115	-4418987.722115	-1435816.148327	5035.954372	5.969026
4500423.501169	-4500423.501169	-1155512.358274	5088.964418	6.031858
4564098.164712	-4564098.164712	-870648.288846	5141.974464	6.094690

4609760.417937	-4609760.417937	-582348.168383	5194.984510	6.157522
4637230.052792	-4637230.052792	-291749.785750	5247.994556	6.220353
4646398.659177	-4646398.659177	-0.000000	5301.004602	6.283185
4637230.052792	-4637230.052792	291749.785750	5354.014648	6.346017

Simulació 6.3:

x	y	z	t	Angle(β)
71692000.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
71550532.214480	0.000000	4501577.926096	107.157034	0.062832
71126687.166638	0.000000	8985390.180692	214.314069	0.125664
70422137.579241	0.000000	13433741.205280	321.471103	0.188496
69439663.987634	0.000000	17829075.390623	428.628137	0.251327
68183143.766232	0.000000	22154046.360729	535.785171	0.314159
66657535.826301	0.000000	26391585.431070	642.942206	0.376991
64868861.045394	0.000000	30524968.970883	750.099240	0.439823
62824178.505705	0.000000	34537884.403700	857.256274	0.502655
60531557.635090	0.000000	38414494.585634	964.413308	0.565487
58000046.360729	0.000000	42139500.307352	1071.570343	0.628319
55239635.401082	0.000000	45698200.673063	1178.727377	0.691150
52261218.837096	0.000000	49076551.118240	1285.884411	0.753982
49076551.118240	0.000000	52261218.837096	1393.041445	0.816814
45698200.673063	0.000000	55239635.401082	1500.198480	0.879646
42139500.307352	0.000000	58000046.360729	1607.355514	0.942478
38414494.585634	0.000000	60531557.635090	1714.512548	1.005310
34537884.403700	0.000000	62824178.505705	1821.669582	1.068142
30524968.970883	0.000000	64868861.045394	1928.826617	1.130973
26391585.431070	0.000000	66657535.826301	2035.983651	1.193805
22154046.360729	0.000000	68183143.766232	2143.140685	1.256637
17829075.390623	0.000000	69439663.987634	2250.297719	1.319469
13433741.205280	0.000000	70422137.579241	2357.454754	1.382301
8985390.180692	0.000000	71126687.166638	2464.611788	1.445133
4501577.926096	0.000000	71550532.214480	2571.768822	1.507964
0.000000	0.000000	71692000.000000	2678.925856	1.570796
-4501577.926095	-0.000000	71550532.214480	2786.082891	1.633628
-8985390.180692	-0.000000	71126687.166638	2893.239925	1.696460
-13433741.205280	-0.000000	70422137.579241	3000.396959	1.759292
-17829075.390623	-0.000000	69439663.987634	3107.553993	1.822124
-22154046.360729	-0.000000	68183143.766232	3214.711028	1.884956
-26391585.431070	-0.000000	66657535.826301	3321.868062	1.947787
-30524968.970883	-0.000000	64868861.045394	3429.025096	2.010619

-34537884.403700	-0.000000	62824178.505705	3536.182130	2.073451
-38414494.585634	-0.000000	60531557.635091	3643.339165	2.136283
-42139500.307352	-0.000000	58000046.360729	3750.496199	2.199115
-45698200.673063	-0.000000	55239635.401082	3857.653233	2.261947
-49076551.118239	-0.000000	52261218.837096	3964.810267	2.324779
-52261218.837096	-0.000000	49076551.118240	4071.967302	2.387610
-55239635.401082	-0.000000	45698200.673063	4179.124336	2.450442
-58000046.360729	-0.000000	42139500.307352	4286.281370	2.513274
-60531557.635090	-0.000000	38414494.585634	4393.438404	2.576106
-62824178.505705	-0.000000	34537884.403700	4500.595439	2.638938
-64868861.045394	-0.000000	30524968.970883	4607.752473	2.701770
-66657535.826300	-0.000000	26391585.431070	4714.909507	2.764602
-68183143.766232	-0.000000	22154046.360729	4822.066541	2.827433
-69439663.987634	-0.000000	17829075.390623	4929.223576	2.890265
-70422137.579241	-0.000000	13433741.205280	5036.380610	2.953097
-71126687.166638	-0.000000	8985390.180692	5143.537644	3.015929
-71550532.214480	-0.000000	4501577.926096	5250.694678	3.078761
-71692000.000000	-0.000000	0.000000	5357.851713	3.141593
-71550532.214480	-0.000000	-4501577.926095	5465.008747	3.204425
-71126687.166638	-0.000000	-8985390.180692	5572.165781	3.267256
-70422137.579241	-0.000000	-13433741.205280	5679.322815	3.330088
-69439663.987634	-0.000000	-17829075.390623	5786.479850	3.392920
-68183143.766232	-0.000000	-22154046.360729	5893.636884	3.455752
-66657535.826301	-0.000000	-26391585.431070	6000.793918	3.518584
-64868861.045394	-0.000000	-30524968.970883	6107.950952	3.581416
-62824178.505705	-0.000000	-34537884.403700	6215.107987	3.644247
-60531557.635091	-0.000000	-38414494.585634	6322.265021	3.707079
-58000046.360729	-0.000000	-42139500.307352	6429.422055	3.769911
-55239635.401082	-0.000000	-45698200.673063	6536.579089	3.832743
-52261218.837096	-0.000000	-49076551.118239	6643.736124	3.895575
-49076551.118240	-0.000000	-52261218.837096	6750.893158	3.958407
-45698200.673063	-0.000000	-55239635.401082	6858.050192	4.021239
-42139500.307352	-0.000000	-58000046.360729	6965.207226	4.084070
-38414494.585634	-0.000000	-60531557.635090	7072.364261	4.146902
-34537884.403700	-0.000000	-62824178.505705	7179.521295	4.209734
-30524968.970883	-0.000000	-64868861.045394	7286.678329	4.272566
-26391585.431070	-0.000000	-66657535.826300	7393.835363	4.335398
-22154046.360729	-0.000000	-68183143.766232	7500.992398	4.398230
-17829075.390623	-0.000000	-69439663.987634	7608.149432	4.461062
-13433741.205280	-0.000000	-70422137.579241	7715.306466	4.523893
-8985390.180692	-0.000000	-71126687.166638	7822.463500	4.586725
-4501577.926096	-0.000000	-71550532.214480	7929.620535	4.649557
-0.000000	-0.000000	-71692000.000000	8036.777569	4.712389
4501577.926095	0.000000	-71550532.214480	8143.934603	4.775221

8985390.180692	0.000000	-71126687.166638	8251.091637	4.838053
13433741.205280	0.000000	-70422137.579241	8358.248672	4.900885
17829075.390623	0.000000	-69439663.987634	8465.405706	4.963716
22154046.360729	0.000000	-68183143.766232	8572.562740	5.026548
26391585.431070	0.000000	-66657535.826301	8679.719774	5.089380
30524968.970883	0.000000	-64868861.045394	8786.876809	5.152212
34537884.403700	0.000000	-62824178.505705	8894.033843	5.215044
38414494.585634	0.000000	-60531557.635090	9001.190877	5.277876
42139500.307352	0.000000	-58000046.360729	9108.347911	5.340708
45698200.673063	0.000000	-55239635.401082	9215.504946	5.403539
49076551.118240	0.000000	-52261218.837096	9322.661980	5.466371
52261218.837096	0.000000	-49076551.118239	9429.819014	5.529203
55239635.401082	0.000000	-45698200.673063	9536.976048	5.592035
58000046.360729	0.000000	-42139500.307352	9644.133083	5.654867
60531557.635091	0.000000	-38414494.585634	9751.290117	5.717699
62824178.505705	0.000000	-34537884.403700	9858.447151	5.780530
64868861.045394	0.000000	-30524968.970883	9965.604185	5.843362
66657535.826301	0.000000	-26391585.431070	10072.761220	5.906194
68183143.766232	0.000000	-22154046.360728	10179.918254	5.969026
69439663.987634	0.000000	-17829075.390622	10287.075288	6.031858
70422137.579241	0.000000	-13433741.205279	10394.232322	6.094690
71126687.166638	0.000000	-8985390.180692	10501.389357	6.157522
71550532.214480	0.000000	-4501577.926095	10608.546391	6.220353
71692000.000000	0.000000	0.000000	10715.703425	6.283185

Simulació 6.4:

x	y	z	t	Angle(β)
1937000.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1933177.772966	0.000000	121625.236328	76.482235	0.062832
1921726.176446	0.000000	242770.473414	152.964470	0.125664
1902690.404661	0.000000	362957.606353	229.446705	0.188496
1876145.583106	0.000000	481712.311438	305.928940	0.251327
1842196.472064	0.000000	598565.918104	382.411175	0.314159
1800977.053166	0.000000	713057.258550	458.893410	0.376991
1752650.000627	0.000000	824734.487762	535.375645	0.439823
1697406.039245	0.000000	933156.866735	611.857881	0.502655
1635463.191697	0.000000	1037896.501874	688.340116	0.565487
1567065.918104	0.000000	1138540.033691	764.822351	0.628319
1492484.151257	0.000000	1234690.268143	841.304586	0.691150
1412012.231315	0.000000	1325967.744184	917.786821	0.753982

1325967.744184	0.000000	1412012.231315	994.269056	0.816814
1234690.268143	0.000000	1492484.151257	1070.751291	0.879646
1138540.033691	0.000000	1567065.918104	1147.233526	0.942478
1037896.501874	0.000000	1635463.191697	1223.715761	1.005310
933156.866735	0.000000	1697406.039245	1300.197996	1.068142
824734.487762	0.000000	1752650.000627	1376.680231	1.130973
713057.258550	0.000000	1800977.053166	1453.162466	1.193805
598565.918104	0.000000	1842196.472064	1529.644701	1.256637
481712.311438	0.000000	1876145.583106	1606.126936	1.319469
362957.606353	0.000000	1902690.404661	1682.609171	1.382301
242770.473414	0.000000	1921726.176446	1759.091406	1.445133
121625.236328	0.000000	1933177.772966	1835.573642	1.507964
-0.000000	-0.000000	1937000.000000	1912.055877	1.570796
-121625.236328	-0.000000	1933177.772966	1988.538112	1.633628
-242770.473414	-0.000000	1921726.176446	2065.020347	1.696460
-362957.606353	-0.000000	1902690.404661	2141.502582	1.759292
-481712.311438	-0.000000	1876145.583106	2217.984817	1.822124
-598565.918104	-0.000000	1842196.472064	2294.467052	1.884956
-713057.258550	-0.000000	1800977.053166	2370.949287	1.947787
-824734.487762	-0.000000	1752650.000627	2447.431522	2.010619
-933156.866735	-0.000000	1697406.039245	2523.913757	2.073451
-1037896.501874	-0.000000	1635463.191697	2600.395992	2.136283
-1138540.033691	-0.000000	1567065.918104	2676.878227	2.199115
-1234690.268143	-0.000000	1492484.151257	2753.360462	2.261947
-1325967.744184	-0.000000	1412012.231315	2829.842697	2.324779
-1412012.231315	-0.000000	1325967.744184	2906.324932	2.387610
-1492484.151257	-0.000000	1234690.268143	2982.807167	2.450442
-1567065.918104	-0.000000	1138540.033691	3059.289403	2.513274
-1635463.191697	-0.000000	1037896.501874	3135.771638	2.576106
-1697406.039245	-0.000000	933156.866735	3212.253873	2.638938
-1752650.000627	-0.000000	824734.487762	3288.736108	2.701770
-1800977.053166	-0.000000	713057.258550	3365.218343	2.764602
-1842196.472064	-0.000000	598565.918104	3441.700578	2.827433
-1876145.583106	-0.000000	481712.311438	3518.182813	2.890265
-1902690.404661	-0.000000	362957.606353	3594.665048	2.953097
-1921726.176446	-0.000000	242770.473414	3671.147283	3.015929
-1933177.772966	-0.000000	121625.236328	3747.629518	3.078761
-1937000.000000	-0.000000	-0.000000	3824.111753	3.141593
-1933177.772966	-0.000000	-121625.236328	3900.593988	3.204425
-1921726.176446	-0.000000	-242770.473414	3977.076223	3.267256
-1902690.404661	-0.000000	-362957.606353	4053.558458	3.330088
-1876145.583106	-0.000000	-481712.311438	4130.040693	3.392920
-1842196.472064	-0.000000	-598565.918104	4206.522928	3.455752
-1800977.053166	-0.000000	-713057.258550	4283.005164	3.518584

-1752650.000627	-0.000000	-824734.487762	4359.487399	3.581416
-1697406.039245	-0.000000	-933156.866735	4435.969634	3.644247
-1635463.191697	-0.000000	-1037896.501874	4512.451869	3.707079
-1567065.918104	-0.000000	-1138540.033691	4588.934104	3.769911
-1492484.151257	-0.000000	-1234690.268143	4665.416339	3.832743
-1412012.231315	-0.000000	-1325967.744184	4741.898574	3.895575
-1325967.744184	-0.000000	-1412012.231315	4818.380809	3.958407
-1234690.268143	-0.000000	-1492484.151257	4894.863044	4.021239
-1138540.033691	-0.000000	-1567065.918104	4971.345279	4.084070
-1037896.501874	-0.000000	-1635463.191697	5047.827514	4.146902
-933156.866735	-0.000000	-1697406.039245	5124.309749	4.209734
-824734.487762	-0.000000	-1752650.000627	5200.791984	4.272566
-713057.258550	-0.000000	-1800977.053166	5277.274219	4.335398
-598565.918104	-0.000000	-1842196.472064	5353.756454	4.398230
-481712.311438	-0.000000	-1876145.583106	5430.238689	4.461062
-362957.606353	-0.000000	-1902690.404661	5506.720925	4.523893
-242770.473414	-0.000000	-1921726.176446	5583.203160	4.586725
-121625.236328	-0.000000	-1933177.772966	5659.685395	4.649557
0.000000	0.000000	-1937000.000000	5736.167630	4.712389
121625.236328	0.000000	-1933177.772966	5812.649865	4.775221
242770.473414	0.000000	-1921726.176446	5889.132100	4.838053
362957.606353	0.000000	-1902690.404661	5965.614335	4.900885
481712.311438	0.000000	-1876145.583106	6042.096570	4.963716
598565.918104	0.000000	-1842196.472064	6118.578805	5.026548
713057.258550	0.000000	-1800977.053166	6195.061040	5.089380
824734.487762	0.000000	-1752650.000627	6271.543275	5.152212
933156.866735	0.000000	-1697406.039245	6348.025510	5.215044
1037896.501874	0.000000	-1635463.191697	6424.507745	5.277876
1138540.033691	0.000000	-1567065.918104	6500.989980	5.340708
1234690.268143	0.000000	-1492484.151257	6577.472215	5.403539
1325967.744184	0.000000	-1412012.231315	6653.954450	5.466371
1412012.231315	0.000000	-1325967.744184	6730.436686	5.529203
1492484.151257	0.000000	-1234690.268143	6806.918921	5.592035
1567065.918104	0.000000	-1138540.033691	6883.401156	5.654867
1635463.191697	0.000000	-1037896.501874	6959.883391	5.717699
1697406.039245	0.000000	-933156.866735	7036.365626	5.780530
1752650.000627	0.000000	-824734.487762	7112.847861	5.843362
1800977.053166	0.000000	-713057.258550	7189.330096	5.906194
1842196.472064	0.000000	-598565.918104	7265.812331	5.969026
1876145.583106	0.000000	-481712.311438	7342.294566	6.031858
1902690.404661	0.000000	-362957.606353	7418.776801	6.094690
1921726.176446	0.000000	-242770.473414	7495.259036	6.157522
1933177.772966	0.000000	-121625.236328	7571.741271	6.220353
1937000.000000	0.000000	0.000000	7648.223506	6.283185

Simulació 6.5:

x	y	z	v_{orb}	t
6571000.000000	0.000000	0.000000	10245.041165	0.000000
5983765.455491	0.000000	3632154.260361	9875.624057	378.472097
4453498.941769	0.000000	6786653.644351	9047.019982	756.944194
2452038.705596	0.000000	9259920.954557	8176.977389	1135.416292
33867.601242	0.000000	11345009.404744	7342.228934	1513.888389
-2082446.003045	-0.000000	12721282.132746	6744.134840	1892.360486
-4221702.670588	-0.000000	13822571.472497	6228.830390	2270.832583
-6309555.735271	-0.000000	14679064.924880	5790.899451	2649.304681
-8512147.579125	-0.000000	15388890.012787	5382.454351	3027.776778
-10342076.844271	-0.000000	15846331.683281	5076.351310	3406.248875
-11982769.434141	-0.000000	16163528.436292	4822.916330	3784.720972
-14132906.651072	-0.000000	16454849.995891	4515.786140	4163.193069
-15583876.541552	-0.000000	16575168.857618	4322.097677	4541.665167
-17042796.890915	-0.000000	16635835.010491	4136.777895	4920.137264
-18504417.161349	-0.000000	16636630.121872	3959.425078	5298.609361
-20206035.815691	-0.000000	16561895.573125	3762.073852	5677.081458
-21655473.663695	-0.000000	16433247.717356	3600.703433	6055.553555
-22852939.923196	-0.000000	16280837.233414	3471.469387	6434.025653
-24272943.865337	-0.000000	16044269.778597	3322.421680	6812.497750
-25438680.468220	-0.000000	15802979.322859	3203.062486	7190.969847
-26585306.851725	-0.000000	15522189.648847	3087.964709	7569.441944
-27709957.047046	-0.000000	15202602.584513	2977.010640	7947.914042
-28809820.014401	-0.000000	14845016.931080	2870.100705	8326.386139
-29670013.941274	-0.000000	14532186.907572	2787.429578	8704.858236
-30718378.229845	-0.000000	14108518.518195	2687.608446	9083.330333
-31734435.804249	-0.000000	13649586.180096	2591.654520	9461.802430
-32522311.532055	-0.000000	13257818.222813	2517.658426	9840.274528
-33286623.503496	-0.000000	12844840.584557	2446.118244	10218.746625
-34026148.982462	-0.000000	12411313.941452	2377.040115	10597.218722
-34913901.402511	-0.000000	11841568.220623	2294.179007	10975.690819
-35593395.093416	-0.000000	11364390.390780	2230.711014	11354.162917
-36244411.949387	-0.000000	10869031.960587	2169.789660	11732.635014
-36865910.482330	-0.000000	10356285.397860	2111.461391	12111.107111
-37456896.427172	-0.000000	9826970.987719	2055.782312	12489.579208
-38016424.332471	-0.000000	9281935.520307	2002.818034	12868.051305
-38414885.516181	-0.000000	8863365.596120	1964.921078	13246.523403
-39037577.281448	-0.000000	8148212.931005	1905.341727	13624.995500
-39385798.290228	-0.000000	7709228.942102	1871.805623	14003.467597
-39819813.668104	-0.000000	7113194.033281	1829.755759	14381.939694

-40218590.842913	-0.000000	6505779.531408	1790.845692	14760.411791
-40581491.856246	-0.000000	5887957.170111	1755.181948	15138.883889
-40829772.454996	-0.000000	5418354.234556	1730.629905	15517.355986
-41128528.255743	-0.000000	4784705.543405	1700.908751	15895.828083
-41389952.189262	-0.000000	4143402.344067	1674.730832	16274.300180
-41613626.033025	-0.000000	3495470.584858	1652.197907	16652.772278
-41756390.374760	-0.000000	3005794.972181	1637.747106	17031.244375
-41913177.187173	-0.000000	2348762.882237	1621.812465	17409.716472
-42031376.861450	-0.000000	1687973.272724	1609.753316	17788.188569
-42094587.725677	-0.000000	1190550.940209	1603.287544	18166.660666
-42144842.208712	-0.000000	525732.034840	1598.138559	18545.132764
-42156138.938996	-0.000000	-139927.929634	1596.980068	18923.604861
-42139032.245171	-0.000000	-639084.238284	1598.734227	19302.076958
-42082146.932484	-0.000000	-1303653.758395	1604.561037	19680.549055
-41986404.166112	-0.000000	-1966137.710592	1614.346363	20059.021152
-41889186.696600	-0.000000	-2460994.291709	1624.255155	20437.493250
-41725849.206705	-0.000000	-3117281.240403	1640.843155	20815.965347
-41578203.350483	-0.000000	-3606280.876228	1655.775018	21194.437444
-41348071.164006	-0.000000	-4253156.328278	1678.935821	21572.909541
-41080255.888481	-0.000000	-4893227.637494	1705.724755	21951.381639
-40854920.394678	-0.000000	-5368199.458611	1728.135768	22329.853736
-40522226.545936	-0.000000	-5993907.044401	1761.023790	22708.325833
-40153170.783363	-0.000000	-6610025.657551	1797.248251	23086.797930
-39852869.463282	-0.000000	-7065228.297641	1826.540803	23465.270027
-39421635.490338	-0.000000	-7662204.586458	1868.344454	23843.742125
-38955800.314472	-0.000000	-8246922.982453	1913.193493	24222.214222
-38456109.172593	-0.000000	-8818448.060926	1960.990844	24600.686319
-37923361.463932	-0.000000	-9375865.503670	2011.646447	24979.158416
-37358409.471178	-0.000000	-9918283.561686	2065.078276	25357.630514
-36762156.997001	-0.000000	-10444834.481791	2121.213069	25736.102611
-36135557.918166	-0.000000	-10954675.894838	2179.986815	26114.574708
-35479614.659533	-0.000000	-11446992.163326	2241.345048	26493.046805
-34795376.590388	-0.000000	-11920995.686248	2305.242972	26871.518902
-34083938.345678	-0.000000	-12375928.159081	2371.645468	27249.991000
-33346438.074830	-0.000000	-12811061.786917	2440.527000	27628.463097
-32584055.620952	-0.000000	-13225700.448775	2511.871468	28006.935194
-31597948.676035	-0.000000	-13714170.391495	2604.505954	28385.407291
-30577336.548907	-0.000000	-14168362.050438	2700.985032	28763.879388
-29737714.651146	-0.000000	-14506269.177886	2780.954253	29142.351486
-28661475.604261	-0.000000	-14895958.507261	2884.436992	29520.823583
-27558071.028558	-0.000000	-15248415.698034	2991.892937	29899.295680
-26657639.414568	-0.000000	-15502979.121843	3080.773819	30277.767777
-25512328.119536	-0.000000	-15786262.394125	3195.604294	30656.239875
-24112741.481968	-0.000000	-16074063.122840	3339.026841	31034.711972

-22928828.857333	-0.000000	-16269744.370099	3463.393331	31413.184069
-21732079.335242	-0.000000	-16424759.729552	3592.330582	31791.656166
-20040764.215117	-0.000000	-16572744.341356	3780.849035	32170.128263
-18581987.153899	-0.000000	-16634997.701567	3950.224975	32548.600361
-17363947.297204	-0.000000	-16641146.013718	4097.134359	32927.072458
-15661174.767483	-0.000000	-16579891.753117	4312.052600	33305.544555
-13968843.916671	-0.000000	-16437429.191107	4538.332530	33684.016652
-12295243.780418	-0.000000	-16214456.109246	4776.630948	34062.488750
-10416003.226193	-0.000000	-15862464.266568	5064.531974	34440.960847
-8358848.995395	-0.000000	-15345327.806028	5409.366050	34819.432944
-6378059.820439	-0.000000	-14703978.068188	5777.436813	35197.905041
-4489669.266601	-0.000000	-13943606.480294	6169.395892	35576.377138
-2329342.770535	-0.000000	-12861681.132504	6680.587193	35954.849236
146627.434793	0.000000	-11261757.084859	7377.133643	36333.321333
2132344.648690	0.000000	-9578055.098115	8054.986684	36711.793430
4217201.941513	0.000000	-7137149.867103	8933.320631	37090.265527
5966708.754562	0.000000	-3683873.323655	9865.375947	37468.737624
6570876.399317	0.000000	-53015.293320	10244.959830	37847.209722
6051802.204478	0.000000	3417681.457256	9916.760737	38225.681819

Simulació 6.6:

x	y	z	v_{orb}	t
4646398.659177	4646398.659177	0.000000	10245.041165	0.000000
4231161.130607	4231161.130607	2568320.907817	9875.624057	378.472097
3149099.301732	3149099.301732	4798888.813485	9047.019982	756.944194
1733853.196459	1733853.196459	6547752.900219	8176.977389	1135.416292
23948.010501	23948.010501	8022133.082720	7342.228934	1513.888389
-1472511.690208	-1472511.690208	8995304.861452	6744.134840	1892.360486
-2985194.586526	-2985194.586526	9774034.021638	6228.830390	2270.832583
-4461529.646685	-4461529.646685	10379666.349860	5790.899451	2649.304681
-6018997.275660	-6018997.275660	10881588.482976	5382.454351	3027.776778
-7312952.668137	-7312952.668137	11205048.590179	5076.351310	3406.248875
-8473097.524276	-8473097.524276	11429340.565204	4822.916330	3784.720972
-9993474.130849	-9993474.130849	11635336.015502	4515.786140	4163.193069
-11019464.779705	-11019464.779705	11720414.298533	4322.097677	4541.665167
-12051077.251951	-12051077.251951	11763311.746619	4136.777895	4920.137264
-13084598.856694	-13084598.856694	11763873.975268	3959.425078	5298.609361
-14287824.946174	-14287824.946174	11711028.669060	3762.073852	5677.081458
-15312732.277406	-15312732.277406	11620060.897861	3600.703433	6055.553555
-16159468.789741	-16159468.789741	11512290.411141	3471.469387	6434.025653

-17163563.206540	-17163563.206540	11345011.959632	3322.421680	6812.497750
-17987863.463516	-17987863.463516	11174393.842145	3203.062486	7190.969847
-18798650.754780	-18798650.754780	10975845.559563	3087.964709	7569.441944
-19593898.534354	-19593898.534354	10749863.379193	2977.010640	7947.914042
-20371619.096947	-20371619.096947	10497012.138796	2870.100705	8326.386139
-20979868.055774	-20979868.055774	10275807.907815	2787.429578	8704.858236
-21721173.553377	-21721173.553377	9976229.116711	2687.608446	9083.330333
-22439634.754313	-22439634.754313	9651714.948336	2591.654520	9461.802430
-22996747.024178	-22996747.024178	9374693.169089	2517.658426	9840.274528
-23537197.202126	-23537197.202126	9082673.880600	2446.118244	10218.746625
-24060120.683162	-24060120.683162	8776124.251436	2377.040115	10597.218722
-24687856.439394	-24687856.439394	8373253.188685	2294.179007	10975.690819
-25168331.036006	-25168331.036006	8035837.509372	2230.711014	11354.162917
-25628669.469530	-25628669.469530	7685566.204264	2169.789660	11732.635014
-26068135.296672	-26068135.296672	7322999.632730	2111.461391	12111.107111
-26486025.465855	-26486025.465855	6948717.823940	2055.782312	12489.579208
-26881671.441955	-26881671.441955	6563319.548945	2002.818034	12868.051305
-27163426.046996	-27163426.046996	6267345.917152	1964.921078	13246.523403
-27603735.616806	-27603735.616806	5761656.618066	1905.341727	13624.995500
-27849965.053466	-27849965.053466	5451248.062680	1871.805623	14003.467597
-28156860.270301	-28156860.270301	5029787.736829	1829.755759	14381.939694
-28438838.314791	-28438838.314791	4600280.823563	1790.845692	14760.411791
-28695448.082218	-28695448.082218	4163414.442321	1755.181948	15138.883889
-28871008.977232	-28871008.977232	3831355.022125	1730.629905	15517.355986
-29082261.229859	-29082261.229859	3383297.735723	1700.908751	15895.828083
-29267115.866014	-29267115.866014	2929827.894674	1674.730832	16274.300180
-29425277.157713	-29425277.157713	2471670.953991	1652.197907	16652.772278
-29526226.791866	-29526226.791866	2125418.007686	1637.747106	17031.244375
-29637091.810123	-29637091.810123	1660826.161429	1621.812465	17409.716472
-29720671.601339	-29720671.601339	1193577.347605	1609.753316	17788.188569
-29765368.432078	-29765368.432078	841846.643170	1603.287544	18166.660666
-29800903.717817	-29800903.717817	371748.686923	1598.138559	18545.132764
-29808891.712406	-29808891.712406	-98943.987921	1596.980068	18923.604861
-29796795.453199	-29796795.453199	-451900.798640	1598.734227	19302.076958
-29756571.462848	-29756571.462848	-921822.412881	1604.561037	19680.549055
-29688871.103497	-29688871.103497	-1390269.307906	1614.346363	20059.021152
-29620127.971555	-29620127.971555	-1740185.752129	1624.255155	20437.493250
-29504630.924828	-29504630.924828	-2204250.703955	1640.843155	20815.965347
-29400229.538680	-29400229.538680	-2550025.662444	1655.775018	21194.437444
-29237501.509053	-29237501.509053	-3007435.681172	1678.935821	21572.909541
-29048127.511624	-29048127.511624	-3460034.444361	1705.724755	21951.381639
-28888791.255914	-28888791.255914	-3795890.239946	1728.135768	22329.853736
-28653541.179409	-28653541.179409	-4238332.316898	1761.023790	22708.325833
-28392579.347057	-28392579.347057	-4673993.966272	1797.248251	23086.797930

-28180234.247229	-28180234.247229	-4995870.839893	1826.540803	23465.270027
-27875305.780682	-27875305.780682	-5417996.821923	1868.344454	23843.742125
-27545910.568912	-27545910.568912	-5831455.164816	1913.193493	24222.214222
-27192575.573991	-27192575.573991	-6235584.423422	1960.990844	24600.686319
-26815866.056535	-26815866.056535	-6629738.077138	2011.646447	24979.158416
-26416384.671414	-26416384.671414	-7013285.564199	2065.078276	25357.630514
-25994770.503624	-25994770.503624	-7385613.290446	2121.213069	25736.102611
-25551698.045895	-25551698.045895	-7746125.610941	2179.986815	26114.574708
-25087876.119641	-25087876.119641	-8094245.782877	2241.345048	26493.046805
-24604046.741003	-24604046.741003	-8429416.888241	2305.242972	26871.518902
-24100983.933773	-24100983.933773	-8751102.724764	2371.645468	27249.991000
-23579492.491129	-23579492.491129	-9058788.663729	2440.527000	27628.463097
-23040406.688135	-23040406.688135	-9351982.473271	2511.871468	28006.935194
-22343123.780409	-22343123.780409	-9697382.882174	2604.505954	28385.407291
-21621442.024355	-21621442.024355	-10018544.884171	2700.985032	28763.879388
-21027739.686816	-21027739.686816	-10257481.305401	2780.954253	29142.351486
-20266723.758586	-20266723.758586	-10533033.272758	2884.436992	29520.823583
-19486498.900714	-19486498.900714	-10782258.142431	2991.892937	29899.295680
-18849797.600467	-18849797.600467	-10962261.665649	3080.773819	30277.767777
-18039940.217180	-18039940.217180	-11162573.188476	3195.604294	30656.239875
-17050283.014897	-17050283.014897	-11366079.035381	3339.026841	31034.711972
-16213130.369686	-16213130.369686	-11504446.572269	3463.393331	31413.184069
-15366900.667234	-15366900.667234	-11614058.984126	3592.330582	31791.656166
-14170960.276670	-14170960.276670	-11718699.906644	3780.849035	32170.128263
-13139449.124443	-13139449.124443	-11762719.679800	3950.224975	32548.600361
-12278164.882018	-12278164.882019	-11767067.193016	4097.134359	32927.072458
-11074122.879435	-11074122.879435	-11723753.889968	4312.052600	33305.544555
-9877464.258814	-9877464.258814	-11623017.646306	4538.332530	33684.016652
-8694050.253475	-8694050.253475	-11465351.868100	4776.630948	34062.488750
-7365226.514102	-7365226.514102	-11216456.049219	5064.531974	34440.960847
-5910598.807558	-5910598.807558	-10850785.351173	5409.366050	34819.432944
-4509969.349846	-4509969.349846	-10397282.602434	5777.436813	35197.905041
-3174675.583698	-3174675.583698	-9859618.696413	6169.395892	35576.377138
-1647094.068753	-1647094.068753	-9094581.946252	6680.587193	35954.849236
103681.253450	103681.253450	-7963264.802779	7377.133643	36333.321333
1507795.360916	1507795.360916	-6772707.710455	8054.986684	36711.793430
2982012.090477	2982012.090477	-5046727.069373	8933.320631	37090.265527
4219100.221716	4219100.221716	-2604891.808189	9865.375947	37468.737624
4646311.260296	4646311.260296	-37487.473413	10244.959830	37847.209722
4279270.377186	4279270.377186	2416665.734361	9916.760737	38225.681819

Simulació 6.7:

x	y	z	v_{orb}	t
71692000.000000	0.000000	0.000000	2581.747426	0.000000
71405800.688490	0.000000	7008374.856911	2580.038791	2664.013027
70687179.909107	0.000000	13105455.308328	2575.755513	5328.026053
69335537.357056	0.000000	19993218.575062	2567.725945	7992.039080
67149331.387107	0.000000	27586921.312586	2554.811834	10656.052107
64972487.221332	0.000000	33341839.868220	2542.041751	13320.065133
62390257.741072	0.000000	38933450.109070	2527.006439	15984.078160
58959061.351842	0.000000	45088801.295099	2507.213775	18648.091186
55036913.694447	0.000000	50955738.023118	2484.842766	21312.104213
51221949.652016	0.000000	55823165.450577	2463.335925	23976.117240
47068950.421150	0.000000	60417171.041937	2440.198986	26640.130266
41934910.970409	0.000000	65303861.657640	2411.981578	29304.143293
37128038.393006	0.000000	69238057.281614	2385.935738	31968.156320
32052162.597375	0.000000	72833124.936095	2358.810909	34632.169346
26732145.220591	0.000000	76071455.981534	2330.784475	37296.182373
21194043.705072	0.000000	78937189.074110	2302.031703	39960.195400
15464983.669234	0.000000	81416287.854587	2272.724316	42624.208426
10423621.598941	0.000000	83224243.447049	2247.289009	45288.221453
3547029.641517	0.000000	85167965.190196	2213.108064	47952.234480
-1702435.692932	-0.000000	86268791.317722	2187.398884	50616.247506
-7009809.683161	-0.000000	87059142.955618	2161.731115	53280.260533
-12355991.514083	-0.000000	87536175.691467	2136.194556	55944.273559
-18616579.069409	-0.000000	87694486.203013	2106.682082	58608.286586
-23980748.927809	-0.000000	87488284.477798	2081.719136	61272.299613
-29322649.572035	-0.000000	86967219.404474	2057.145802	63936.312639
-35501080.575296	-0.000000	85963922.377861	2029.067140	66600.325666
-40728981.622740	-0.000000	84768588.805067	2005.584948	69264.338693
-45023300.807289	-0.000000	83539218.104248	1986.479299	71928.351719
-50085709.679307	-0.000000	81788658.515944	1964.161724	74592.364746
-55843708.980003	-0.000000	79374813.719272	1939.038696	77256.377773
-59844069.831915	-0.000000	77411846.260157	1921.742667	79920.390799
-64504901.553719	-0.000000	74801345.390406	1901.749264	82584.403826
-68997620.872730	-0.000000	71921640.453008	1882.633421	85248.416853
-72601449.812940	-0.000000	69323693.053047	1867.407417	87912.429879
-76744445.515979	-0.000000	65978037.752608	1850.018637	90576.442906
-80035484.268532	-0.000000	63008069.495502	1836.291193	93240.455932
-83778676.635208	-0.000000	59236905.457836	1820.767397	95904.468959
-86717143.768423	-0.000000	55930816.738020	1808.646237	98568.481986
-89483336.437217	-0.000000	52484930.104566	1797.286983	101232.495012
-92565661.721603	-0.000000	48177483.225406	1784.686878	103896.508039
-95378886.168577	-0.000000	43696649.432073	1773.238455	106560.521066
-97510342.388859	-0.000000	39841789.734177	1764.596654	109224.534092
-99442546.769159	-0.000000	35887346.311148	1756.786255	111888.547119

-101491415.439014	-0.000000	31024496.494181	1748.528366	114552.560146
-102968984.906208	-0.000000	26886074.632996	1742.588255	117216.573172
-104233658.769932	-0.000000	22680451.587225	1737.514004	119880.586199
-105465832.424827	-0.000000	17559809.352022	1732.578917	122544.599226
-106251769.986739	-0.000000	13243543.106957	1729.435568	125208.612252
-106816606.692121	-0.000000	8894174.901228	1727.178650	127872.625279
-107158930.743371	-0.000000	4522575.890243	1725.811693	130536.638305
-107274837.463308	-0.000000	-737300.465498	1725.349006	133200.651332
-107125408.011994	-0.000000	-5119307.336010	1725.945526	135864.664359
-106752694.064068	-0.000000	-9488518.604266	1727.433936	138528.677385
-106157627.210295	-0.000000	-13834013.517536	1729.811908	141192.690412
-105341694.807905	-0.000000	-18144930.601628	1733.075722	143856.703439
-104306936.262974	-0.000000	-22410494.808912	1737.220273	146520.716465
-103055937.932972	-0.000000	-26620044.450335	1742.239080	149184.729492
-101273743.616116	-0.000000	-31582761.679968	1749.404518	151848.742519
-99558773.623122	-0.000000	-35632278.942677	1756.317147	154512.755545
-97231452.095423	-0.000000	-40373262.315323	1765.725831	157176.768572
-95073240.660726	-0.000000	-44213797.428002	1774.479926	159840.781598
-92228924.128857	-0.000000	-48675738.865472	1786.060512	162504.794625
-89653559.289458	-0.000000	-52260868.192092	1796.589571	165168.807652
-86898580.476091	-0.000000	-55715372.565165	1807.899662	167832.820678
-83365241.555944	-0.000000	-59676219.820080	1822.477385	170496.833705
-80239957.362946	-0.000000	-62813447.548938	1835.440757	173160.846732
-76284299.412983	-0.000000	-66370216.994253	1851.943962	175824.859758
-72826487.663394	-0.000000	-69152245.884736	1866.459764	178488.872785
-68496325.901947	-0.000000	-72261943.988215	1884.758896	181152.885812
-63983686.920274	-0.000000	-75111577.126871	1903.976798	183816.898838
-60095460.520868	-0.000000	-77280182.760330	1920.659982	186480.911865
-55290893.918273	-0.000000	-79627094.895175	1941.438934	189144.924892
-50351375.390438	-0.000000	-81687435.475341	1962.996544	191808.937918
-45294681.870023	-0.000000	-83453789.499640	1985.277340	194472.950945
-41004380.172134	-0.000000	-84696559.535678	2004.354789	197136.963971
-34902920.603856	-0.000000	-86080190.924771	2031.769865	199800.976998
-29605251.976907	-0.000000	-86930786.116647	2055.853556	202464.990025
-24265071.998542	-0.000000	-87468524.352486	2080.404118	205129.003051
-18006777.706383	-0.000000	-87697950.272197	2109.538561	207793.016078
-12640529.214263	-0.000000	-87552704.316842	2134.844188	210457.029105
-7292824.052971	-0.000000	-87092363.171520	2160.371346	213121.042131
-1982908.186259	-0.000000	-86318583.567247	2186.034372	215785.055158
4138748.242731	0.000000	-85023466.753571	2216.026550	218449.068185
10152982.979938	0.000000	-83311905.042805	2245.932694	221113.081211
15200195.693048	0.000000	-81519696.237214	2271.380237	223777.094238
21742026.939501	0.000000	-78674978.529420	2304.857961	226441.107265
26484671.860086	0.000000	-76210064.165952	2329.490557	229105.120291

31815187.472987	0.000000	-72988357.041796	2357.553826	231769.133318
36902722.208775	0.000000	-69409152.981821	2384.723525	234433.146344
42387613.474199	0.000000	-64903448.382118	2414.452932	237097.159371
46872253.454250	0.000000	-60619344.026445	2439.110149	239761.172398
51040163.055639	0.000000	-56038326.154439	2462.317211	242425.185424
55389542.517158	0.000000	-50468155.291787	2486.843191	245089.198451
58812124.339653	0.000000	-45328169.389210	2506.370844	247753.211478
61859494.301938	0.000000	-39966166.135925	2523.930997	250417.224504
64863699.681847	0.000000	-33600039.661234	2541.405866	253081.237531
67339184.258480	0.000000	-27018987.596382	2555.929750	255745.250558
69270113.378396	0.000000	-20265106.216053	2567.338170	258409.263584
70503173.745283	0.000000	-14247626.388669	2574.660354	261073.276611
71452462.123709	0.000000	-6412491.852750	2580.317256	263737.289638
71691546.034843	0.000000	-279345.235407	2581.744715	266401.302664

Annex C

CARACTERÍSTIQUES DEL FALCON 9

El Falcon 9 és un coet de la marca estadounidenca SpaceX dirigida i financada per Elon Musk. S'ha triat aquest coet com a model de simulació (a partir del capítol 3) degut a la quantitat d'informació pública sobre el mateix que permet apropar les simulacions encara més a un entorn real. A continuació és troben totes les característiques corresponents al Falcon 9:

C1. Característiques generals

Família	Falcon
Fabricant	SpaceX
Model	Falcon 9 Full Thrust
Versió	Block 5
Altura	70 <i>m</i>
Diàmetre	3,66 <i>m</i>
Secció	Circular
Àrea	10,52 <i>m</i> ²
Massa total	549054 <i>kg</i>
Massa estructura	75554 <i>kg</i>
Massa combustible	518500 <i>kg</i>
Material	Alumini + Liti

Capacitat de càrrega:

Càrrega a LEO	22800 <i>kg</i>
Càrrega a GTO	8300 <i>kg</i>
Càrrega a Mart	4020 <i>kg</i>

C2. Primera etapa

Característiques generals:

Altura	42,6 <i>m</i>
Diàmetre	3,66 <i>m</i>
Secció	Circular
Àrea	10,52 <i>m</i> ²
Massa estructura	22000 <i>kg</i>
Material	Alumini + Liti
Motors	9 × Merlin 1D

Característiques respecte a la propulsió:

Combustible	RP-1 (Derivat del querosè)
Oxidant	LoX (Oxigen líquid)
Massa combustible	411000 <i>kg</i>
Massa RP-1	123570 <i>kg</i>
Massa LoX	287430 <i>kg</i>
Volum RP-1	143900 <i>L</i>
Volum LoX	234700 <i>L</i>
Propulsió a nivell del mar	7607 <i>kN</i>
Propulsió al buit	8227 <i>kN</i>
Període de propulsió	162 <i>s</i>

C3. Segona etapa

Característiques generals:

Altura	12,6 <i>m</i>
Diàmetre	3,66 <i>m</i>
Secció	Circular
Àrea	10,52 <i>m</i> ²
Massa estructura	4000 <i>kg</i>
Material	Alumini + Liti
Motors	1 × Merlin 1D Vac

Característiques respecte a la propulsió:

Combustible	RP-1 (Derivat del querosè)
Oxidant	LoX (Oxigen líquid)
Massa combustible	107500 <i>kg</i>
Massa RP-1	32300 <i>kg</i>
Massa LoX	75200 <i>kg</i>
Propulsió al buit	934 <i>kN</i>
Període de propulsió	397 <i>s</i>