

Análisis de la inclinación óptima para el vaciado de una botella

Resumen

El objetivo de esta investigación es responder a la pregunta ¿qué ángulo de inclinación resulta ser el óptimo para vaciar una botella en el menor tiempo posible?

Para ello, se ha encontrado experimentalmente una relación entre la velocidad del vertido del agua en una botella a diversas inclinaciones y el tiempo que tarda en producirse. Posteriormente, se ha realizado una gráfica entre los flujos obtenidos (lo que se corresponde con el gradiente de la lineación de los datos anteriores) y la inclinación a la que se sometía la botella, con la finalidad de encontrar una relación entre ellos. El ángulo deseado viene dado por la optimización de la función obtenida del ajuste de los datos, para una geometría determinada.

Se ha llegado a la conclusión de que existe un ángulo óptimo para el vaciado de la botella, que se corresponde con $60 \pm 1^\circ$, cuyo flujo es de $143 \pm 24 \times 10^{-6} m^3 s^{-1}$. Además, dicho valor no ha podido ser contrastado analíticamente puesto que el modelo teórico, las ecuaciones de Navier-Stokes, requiere una solución numérica que escapa del objetivo de esta investigación. Asimismo, existen extrapolaciones posibles a tal experimento: por ejemplo, en determinadas punciones arteriales, la aguja se introduce con el ángulo complementario al encontrado. Como este experimento se ha llevado a cabo ateniendo a una geometría para este determinado recipiente, se han propuesto diversas ampliaciones de investigación, como la posibilidad de utilizar un líquido con densidad distinta a la del agua o experimentar con distintas geometrías de botellas.

Total: 244 palabras

Índice

1. Introducción a la mecánica de fluidos	P. 4
1. 1. Viscosidad	P. 4
1. 2. Número de Reynolds	P. 4
1. 3. Campos de velocidades	P. 5
1. 2. Aplicación de la hidráulica en una botella	P. 6
2. Hipótesis	P. 8
3. Experimentación	P. 9
3. 1. Suposiciones iniciales	P. 9
3. 2. Montaje	P. 9
3. 3. Metodología	P. 10
3. 4. Cálculo del Número de Reynolds	P. 11
3. 5. Cálculo del flujo	P. 12
3. 6. Optimización de la función	P. 15
3. 7. Precisión del resultado	P. 17
4. Conclusión	P. 20
4. 1. Extrapolaciones posibles	P. 20
4. 2. Implicación de las limitaciones experimentales	P. 21
4. 3. Propuestas de ampliación	P. 22
Referencias	P. 23
Anexo I	P. 24

1. Introducción a la mecánica de fluidos

El vaciar una botella es un hecho cotidiano, pero detrás de ella se esconden principios de mecánica de fluidos que han sido estudiados en conductos y depósitos, aunque no en la geometría de una botella, que resulta ser distinta a los conductos por el hecho de tener tan solo un orificio de salida. Por eso, me pregunté cuál era la forma más rápida de realizarlo. Sin aplicar ninguna fuerza, tan solo con la fuerza de la gravedad, ni girándola, existen diversas alternativas que abarcan desde la inclinación nula, 0° , hasta la máxima, 90° . Así, decidí abordar este tema para averiguar el ángulo óptimo para una determinada geometría.

La mecánica de fluidos es una de las ramas más desarrolladas y, a la vez, con mayor controversia de la física. Las aplicaciones de dicho ámbito son innumerables debido a la cantidad de posibilidades que existen: desde el agua procedente de la hidrosfera, incluyendo los gases atmosféricos, y sin olvidar procesos de nuestro propio organismo, como la respiración o la circulación sanguínea.

En una botella, la presión del interior cambia al salir el líquido y no permite la entrada de aire en todas las condiciones, de manera que este experimento constituye una pequeña aportación epistemológica a esta disciplina. La pregunta de investigación que se plantea es:

¿Cuál es el ángulo óptimo para el vaciado más rápido de una botella de agua?

1. 1. Viscosidad

Entre todas las variables que se deben de tener en cuenta a la hora de trabajar con fluidos, es notorio prestar atención a la viscosidad porque “*determina la resistencia de un fluido a ser deformado ante un esfuerzo cortante dado*” (Crowe, et al, 2009, pág. 40).

En este experimento, se tendrá en cuenta la viscosidad cinemática del fluido, que viene determinada por las propiedades intrínsecas de la sustancia y la temperatura. Por eso, se realizará el experimento con agua a una temperatura ambiental constante.

1. 2. Número de Reynolds

En 1883 (White, 2008, pág. 4 y 28) Osborne Reynolds consiguió demostrar la importancia de los efectos viscosos en los fluidos newtonianos a través de un parámetro adimensional: el número de Reynolds (Re). Valores muy pequeños de Re se

corresponden con movimientos viscosos y lentos; valores medianos del parámetro se corresponden con un flujo laminar, cuyas líneas de corriente siguen la misma trayectoria; y valores altos de Re se relacionan con efectos turbulentos, cuyas líneas de corriente siguen trayectorias aparentemente aleatorias. Aun así cabe mencionar que los valores de Re dependen en gran medida de la geometría del conducto (White, 2008, pág. 48), en este caso, de la botella que estamos utilizando, y es por esta razón que se procederá a calcular una estimación cuantitativa de Re , para averiguar en qué condiciones (flujo turbulento o laminar) se vacía la botella.

Su cálculo viene dado por la ecuación

$$Re = \frac{V_{media}D}{\nu},$$

Donde V_{media} es la velocidad media del fluido ($m\ s^{-1}$); D hace referencia al diámetro (m), siempre que hablemos de conductos cilíndricos; y ν es la viscosidad cinemática ($m^2\ s^{-1}$): la viscosidad cinemática del agua a una temperatura constante de $20^\circ C$, se corresponde con $1,011 \times 10^{-6} m^2\ s^{-1}$ (Universidad de Castilla La Mancha, 2001, pág. 11); mientras que el diámetro de la abertura de la botella es de $2,5 \times 10^{-2} m$.

$0 < Re < 1$	movimiento laminar “lento” altamente viscoso
$1 < Re < 10^2$	laminar, fuerte dependencia del número de Reynolds
$10^2 < Re < 10^3$	laminar, es útil la teoría de capa limite
$10^3 < Re < 10^4$	transición a turbulencia
$10^4 < Re < 10^6$	turbulento, moderada dependencia del número de Reynolds
$10^6 < Re < \infty$	turbulento, débil dependencia del número de Reynolds

Tabla 1. Valores de Re . (Fuente: Mecánica de fluidos)

1. 3. Campos de velocidades

A diferencia de los cuerpos sólidos, los fluidos se caracterizan por ser un medio continuo (Hewakandamby, 2012, pág. 56): al aplicar una fuerza sobre éstos, se debe considerar cada una de las partículas sobre las que se ha aplicado la fuerza, es decir, que se debe atender a un campo de velocidades.

$$V(x, y, z, t) = iu(x, y, z, t) + jv(x, y, z, t) + kw(x, y, z, t)$$

Por otro lado, dado que el flujo se considera estacionario¹, la ecuación de continuidad nos permite establecer una relación de proporcionalidad inversa entre las secciones transversales de la botella y las velocidades a las que fluye el agua:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

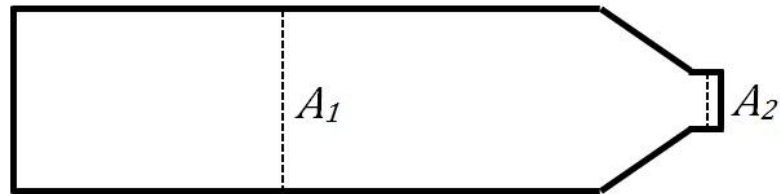


Fig. 1. Geometría de la botella. (Fuente: elaboración propia)

Dada la geometría de la botella, se puede considerar que la ecuación de la continuidad se cumple tanto en el cuerpo del cilindro (A_1), como en el orificio (A_2). Por lo tanto, se puede considerar tan solo la velocidad de salida del agua para cada ángulo de inclinación. En nuestro caso, se realiza una aproximación al campo de velocidades, encontrando una velocidad media para cada tiempo de vaciado.

1. 4. Aplicación de la hidráulica en una botella

La aproximación más cercana a esta geometría se corresponde con la formación de una contracción de vena líquida (Fernández, Fernández, Fidalgo y Gutiérrez, 2003, pág. 329):

La velocidad de salida de un líquido ideal, únicamente sometido a la acción de la gravedad, por un orificio relativamente pequeño (...) es equivalente a la que adquiere un sólido en caída libre desde la superficie del líquido hasta el centro del orificio.

Este hecho se debe a considerar que el agua es un fluido ideal, es decir, que obedece las leyes de la cinemática; sin embargo, un fluido no ideal se caracteriza por no poder resistir un esfuerzo cortante con una deformación estática, pero es necesaria una distinción técnica para diferenciar que “un líquido [a diferencia de un gas], al estar compuesto por agrupaciones de moléculas muy cercanas con enormes fuerzas cohesivas, tiende a conservar su volumen y formará una superficie libre en un campo gravitatorio si no está limitado por arriba” (White, 2008, pág. 6).

¹ Véase el apartado 3. 1. Suposiciones iniciales.

En segundo lugar, un método alternativo sería utilizar la ecuación de Bernoulli (Hewakandamby, 2012, pág. 69):

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = k$$

Donde P , equivale a la presión; v , a la velocidad del fluido; ρ , a la densidad; g , a la fuerza de la gravedad; z , a la altura y la suma es siempre constante. Sin embargo este método no es adecuado para nuestro estudio, ya que existen cambios de presión en el aire del interior de la botella. Además, dado que esta ecuación es consecuencia de la conservación de la energía, el fluido debe ser laminar, porque en condiciones de turbulencias hay pérdidas energéticas (Universidad de Sydney, 2006, pág. 35).

Para este caso concreto, sería necesario hallar una solución para las ecuaciones de Navier-Stokes, ecuaciones diferenciales que parten de la segunda ley de Newton, son no lineales y en derivadas parciales (Crowe, Elger, Roberson y Williams, 2009, pág. 365).

$$\rho \frac{D_u}{D_t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \rho g_x$$
$$\rho \frac{D_v}{D_t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho g_y$$

Aun así, no se ha encontrado solución analítica para dichas ecuaciones. Es más: no se ha comprobado que tan solo exista una solución única para cualquier problema dentro del dominio tridimensional.

De esta forma, se procederá a realizar un proceso experimental, basado en analizar el comportamiento del agua como fluido, en el que se producirá el vaciado de una botella atendiendo a distintas inclinaciones desde 0° a 90° , aunque no se podrá comparar el resultado con una solución analítica.

2. Hipótesis

El estudio se centra en un plano inclinado, donde la velocidad de la salida del agua viene determinada por la componente paralela al plano del peso, es decir, $P_x = P \sin \alpha$. Al aumentar el ángulo, también lo hace el seno, de manera que cuanto mayor sea el ángulo, mayor será la componente horizontal del peso y, consecuentemente, mayor será su velocidad. Al verter un líquido a través de un orificio nos encontramos con que se produce un vacío en su interior al salir la masa de agua, que es reemplazada por aire. Analicémoslo a partir de tres casos distintos:

En el primer caso de la *Fig. 2.*, la inclinación de la botella no es muy grande y, por tanto el fluido no desciende a gran velocidad. Como se puede observar, la superficie del orificio cubierta por agua es suficiente para que no se genere ningún vacío y el aire pueda sustituir el volumen de agua expulsado pasivamente, sin esfuerzo alguno. En este caso, el flujo podría ser laminar.

En el segundo caso, se ha aumentado la inclinación hasta tal punto que el agua cubre la totalidad del orificio y se genera un vacío en la parte posterior de la botella. Cuando la fuerza que ejerza la presión atmosférica sobre la superficie de orificio sea ligeramente superior a la fuerza que ejerce el agua al verterse, se producirá el borboteo y el aire procedente del exterior de la botella ocupará dicho espacio. El flujo, en este caso, podría ser turbulento debido al borboteo producido por el aire al entrar en la botella.

Lo que estamos buscando es el tercer caso: la inclinación habrá aumentado (de la misma forma, la velocidad) hasta tal punto que el agua ocupará gran parte del orificio, pero dejando el espacio suficiente para que no se genere el vacío.

Por lo tanto, estamos buscando un ángulo que se encuentre entre 0° y 90° : la hipótesis formulada será que esta inclinación óptima es de 45° , cuando pueda salir la mayor cantidad de agua y permitir a su vez la entrada de aire, ya que el flujo podría ser laminar y sin borboteo.

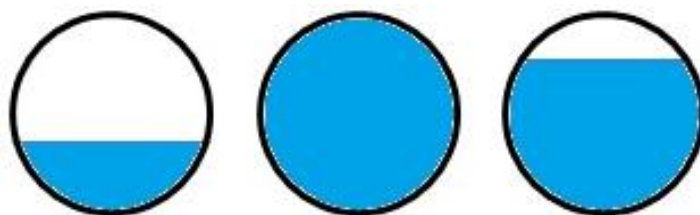


Fig. 2. Orificios ocupados por el flujo de agua. (Fuente: elaboración propia)

3. Experimentación

3. 1. Suposiciones iniciales

Para llevar a cabo la experimentación, se harán diversas suposiciones acerca de las características del experimento:

En primer lugar, éste se llevará a cabo para una determinada geometría. Como se puede observar en la *Fig. 1*, la botella se caracteriza por tener un cuello troncocónico.

En segundo lugar, el fluido debe considerarse estacionario: para poder establecer la ecuación de la continuidad se debe tener en cuenta que la velocidad en un punto determinado tiene que ser constante (White, 2008, pág. 43).

Asimismo, para evitar cualquier error ambiental, la temperatura, la presión externa (atmosférica) y la humedad se considerarán constantes, es decir, variables controladas.

Además, las variaciones de presión del interior de la botella, causantes del borboteo del agua y, consecuentemente, de las características del flujo, que se producen en el interior de la botella, no se tendrán en consideración.

3. 2. Montaje

El primer paso a llevar a cabo para poder realizar el experimento es la construcción de un aparataje que sea capaz de sostener la botella en una determinada inclinación. Los materiales utilizados para su construcción son: dos soportes de madera, una varilla roscada, dos bisagras, cuatro patas de nivelación roscadas y una pletina de acero inoxidable.

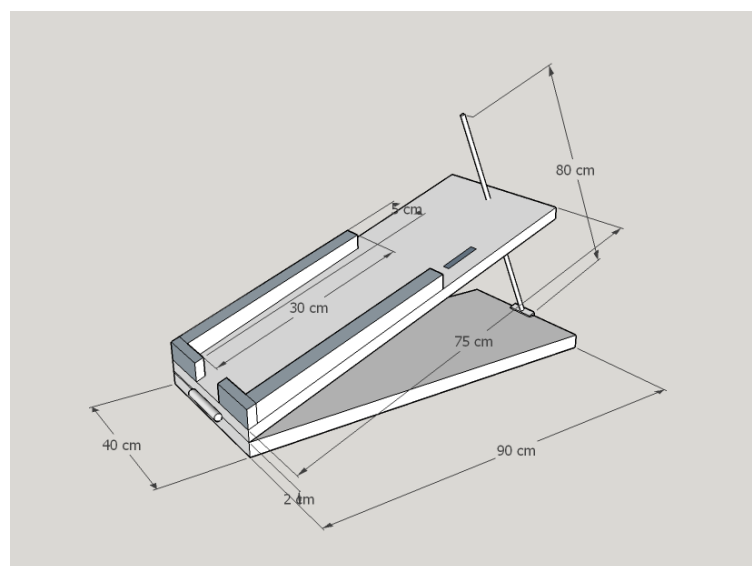


Fig. 3. Esquema del soporte utilizado para el experimento.
(Fuente: elaboración propia)

El mecanismo consiste en situar la botella en el espacio preparado, para evitar movimientos u oscilaciones. Con la disposición de la bisagra en la parte delantera, es posible inclinar el plano superior (donde se encuentra la botella) y, con la ayuda de la varilla roscada de la parte trasera, mantener la inclinación fija. Para aumentar la estabilidad de la inclinación, se puede introducir una tuerca a través de la varilla roscada, en la parte inferior del plano inclinado.

El posicionamiento de la pletina de acero inoxidable en el lateral del soporte superior, permitirá sujetar el inclinómetro, gracias a la imantación del aparato. El inclinómetro es un aparato electrónico medidor de la inclinación que, en este caso, se expresa en grados hexadecimales (°).

Un hecho importante es la disposición de cuatro patas de nivelación roscadas como soporte del sistema: con ellas, se puede regular la inclinación inicial de manera que no exista error sistemático alguno por lo que respecta a la variable inclinación.

A continuación, debemos situar un recipiente donde se recogerá el agua que vaya saliendo de la botella. El cubo debe estar situado sobre una báscula, que permitirá registrar la cantidad de agua que sale en función del tiempo. Para evitar salpicaduras dentro del recipiente es conveniente situar una esponja o material absorbente (Kenton, Neufeld y Huppert, 2012, pág. 2).

3. 3. Metodología

El experimento se basa en situar la botella en el espacio proveído por el soporte superior en una inclinación determinada (según la lectura del inclinómetro). El contenido utilizado será de 2000 gramos de agua, lo que equivale a 2000 mililitros, debido a la densidad del agua (1 kg m^{-3}). Antes de abrir el tapón de la botella que retiene el líquido, debemos situar una cámara que grabe la báscula y poder recoger luego los datos con un programa de edición de vídeo. Con ello, conseguimos saber la cantidad de agua que fluye, en función del tiempo. Esta magnitud se conoce como caudal (Q):

$$\text{Flujo } (\phi) = \text{Área} \times \text{Velocidad} = \text{Área} \times \frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Tiempo}} = \text{Caudal } (Q)$$

$$\text{Volumen} = \text{Caudal} \times \text{Tiempo}$$

Se trazará una línea de mejor ajuste para los datos obtenidos, en referencia a los 6 puntos del volumen por cada 2 segundos de grabación: 0, 2, 4, 6, 8 y 10 segundos. Insistimos en que la báscula mide masa, aunque interpretaremos que trabajamos en volumen debido al factor de conversión mencionado anteriormente.

Se procederá a medir ángulos pares y enteros de flujo entre 0° y 90° ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), es decir cubriendo la mitad de todos los posibles casos. Para cada uno de ellos, medidos con el inclinómetro, se realizarán tres repeticiones del cálculo del volumen para reducir el error aleatorio.

Dada la línea de mejor ajuste para cada inclinación, el gradiente de sus respectivas funciones se corresponde con el caudal, variable que se usará posteriormente para la optimización.

3. 4. Cálculo del número de Reynolds

Se utiliza la definición de Re,

$$Re = \frac{V_{media}D}{\nu}$$

para saber a partir de qué ángulo el flujo empieza a ser turbulento, introducimos un valor de 4000 para Re que, a efectos prácticos, se corresponde con el valor mínimo a partir del cual el flujo empieza a tener propiedades de turbulencias:

$$4000 = \frac{V_{media}2,5 \times 10^{-2}}{1,003 \times 10^{-6}} \Rightarrow V_{media} = \frac{4000 \cdot 1,003 \times 10^{-6}}{2,5 \times 10^{-2}} \text{ m s}^{-1}$$

La velocidad del fluido viene dada por la relación entre el flujo (ϕ) y el área de la sección transversal (A_c) (Universidad de Oslo, 2004, pág. 334):

$$V_{media} = \frac{\phi}{A_c} \Rightarrow V_{media} = \frac{\phi}{\pi r^2} \Rightarrow V_{media} = \frac{\phi}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{4000 \cdot 1,003 \times 10^{-6}}{2,5 \times 10^{-2}} = \frac{\phi}{\pi \left(\frac{2,5 \times 10^{-2}}{2}\right)^2}$$

$$\phi = 79,0 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Si contrastamos el valor obtenido con los valores de la *Tabla 1*, se puede deducir que, para flujos iguales o superiores al indicado, estaremos tratando con flujos turbulentos.

Por otro lado, se visualizará el flujo para determinar cualitativamente sus propiedades viscosas. Para ello, se recurrirá a realizar una línea de traza: “*el lugar*”

geométrico de las partículas que en instantes sucesivos pasaron por un punto dado” (White, 2008, pág. 40). Para generarla experimentalmente se recurrirá a la disposición de virutas de madera sobre la superficie, de manera que floten libremente y se vean movidas por el flujo del agua.

3. 5. Cálculo del flujo

Para explicar el proceso de obtención de datos, utilizaremos tan solo una inclinación determinada (44°). Los resultados de resto de valores para cada respectivo grado de inclinación se encuentran en el *Anexo I*:

Tiempo ±0,5s	Volumen (ml)					
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media	Error _a	Error _r
0,0	0	0	0	0	12	-
2,0	304	299	336	313	19	6%
4,0	547	568	660	592	57	9%
6,0	853	832	963	883	66	7%
8,0	1120	1115	1271	1169	78	7%
10,0	1332	1337	1498	1389	83	6%

Tabla 2. Datos brutos respecto al volumen. (Fuente: elaboración propia)

El volumen medio se realiza mediante la media aritmética de las tres muestras:

$$Volumen\ medio_{(t=2s)} = \frac{Muestra\ 1 + Muestra\ 2 + Muestra\ 3}{3} = \frac{304 + 299 + 336}{3} = 313\ ml$$

El error absoluto² correspondiente a cada valor medio se calcula de la siguiente forma:

$$Error\ abosoluto_{(t=2s)} = \frac{Muestra_{máxima} - Muestra_{mínima}}{2} = \frac{366 - 299}{2} = 19\ ml$$

Cabe decir que, como no se dispone de error para $t = 0\ s$, ya que es el momento que en la grabación se toma como $Volumen = 0$, se procede a proporcionarle la mitad del valor del corte en el eje de ordenadas:

$$Error\ absoluto_{(t=0s)} = \frac{Corte\ en\ ordenadas}{2} = \frac{23,952}{2} = 12\ ml$$

El error relativo respecto al volumen se calcula de la siguiente fórmula:

² Las barras de error que no se observan en el gráfico es debido a su reducido valor.

$$Error\ relativo_{(t=2s)} = \frac{Error\ absoluto}{valor\ obtenido} \times 100 = \frac{19}{313} \times 100 = 6\%$$

Cabe decir que, no se proporciona un error relativo para $t = 0\text{ s}$, puesto que este valor se ha obtenido como referencia y, además, no es posible dividir entre cero.

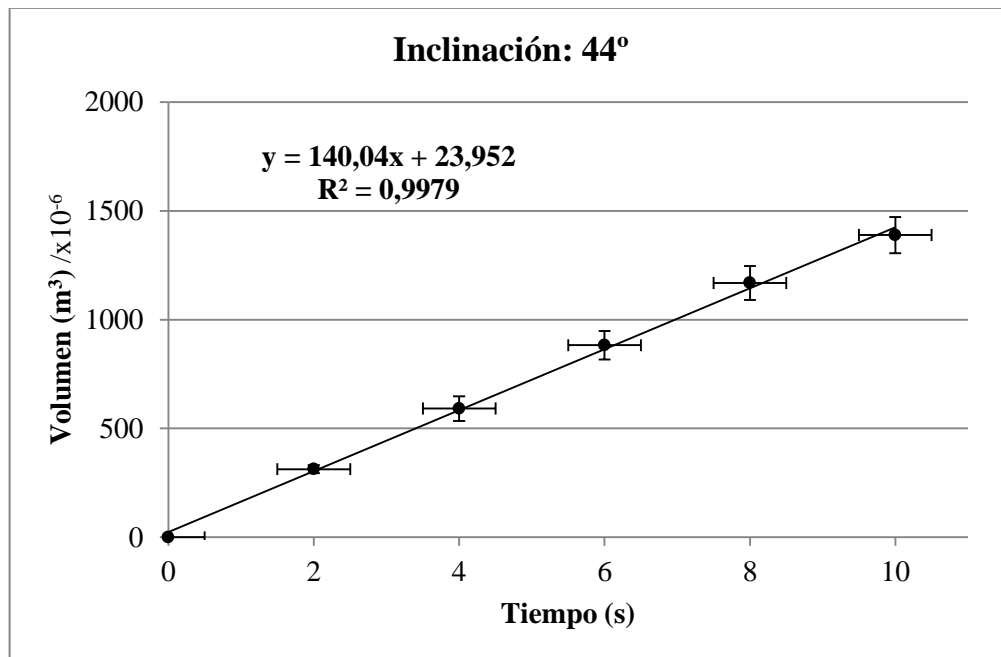


Gráfico 1. Lineación de los datos de volumen en función del tiempo.
(Fuente: elaboración propia)

La línea de mejor ajuste resulta ser una recta. Podemos considerar este modelo como adecuado, ya que el coeficiente de correlación es próximo a 1. Haciendo el cálculo a partir del coeficiente de correlación, se obtiene el error porcentual permitido:

$$(1 - R^2) \times 100 = (1 - 0,9979) \times 100 = 0,2\%$$

Así, procedemos a considerar un grupo de valores como válido cuando no supere el 10% de error, es decir, con un $R^2 \geq 0,9$.

Posteriormente, procedemos a analizar cuál es el valor mayor y menor que se podría obtener experimentalmente para dicho gráfico: para ello realizaremos las dos funciones que se corresponden con el pendiente mayor y el menor. Para obtenerlas, tan solo hace falta añadir o suprimir los errores absolutos de ambas variables por lo que respecta al menor y al mayor valor.

	Pendiente máxima		Pendiente mínima	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-12	1472	12	1306

Tabla 3. Valores para pendiente máxima y mínima. (Fuente: elaboración propia)

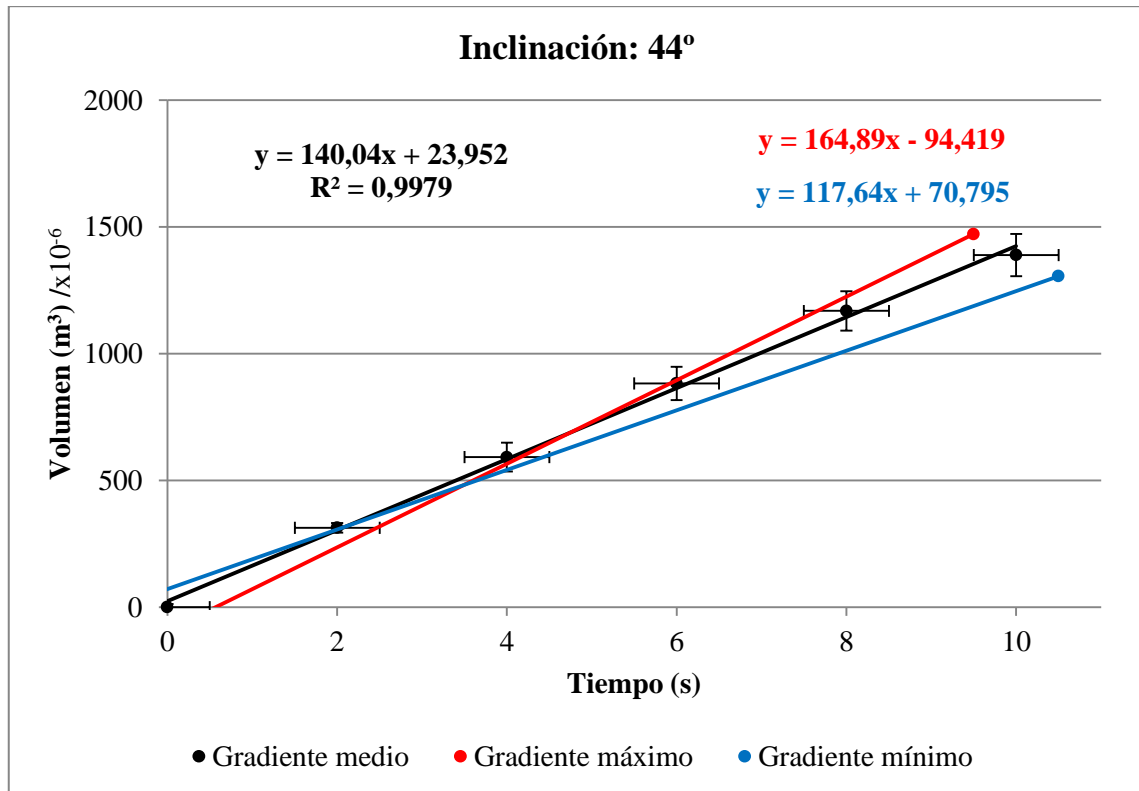


Gráfico 2. Funciones para la inclinación máxima y mínima. (Fuente: elaboración propia)

No se proporcionan los coeficientes de correlación de la pendiente máxima y mínima debido a que solo se obtienen a partir de dos puntos y, por tanto, $R^2 = 1$.

El método que se utiliza para proporcionar una incertidumbre al valor del caudal es el siguiente:

$$Error_{absoluto} = \frac{Gradiente_{mayor} - Gradiente_{menor}}{2} = \frac{164,89 - 117,64}{2} = 24 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

De esta forma obtenemos, para 44° de inclinación, que el agua fluye a un ritmo de $140 \pm 24 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Los resultados obtenidos para los demás gráficos se muestran en la tabla siguiente:

Inclinación $\pm 1^\circ$	Caudal ($m^3 s^{-1} \times 10^{-6}$)
0	94 \pm 12
2	103 \pm 12
4	102 \pm 17
6	104 \pm 17
8	107 \pm 18
10	101 \pm 13
12	110 \pm 18
14	110 \pm 13
16	110 \pm 16
18	112 \pm 17
20	111 \pm 17
22	118 \pm 17
24	114 \pm 14
26	119 \pm 18
28	118 \pm 17
30	125 \pm 18
32	128 \pm 18
34	130 \pm 16
36	126 \pm 18
38	130 \pm 17
40	135 \pm 18
42	132 \pm 18
44	140 \pm 24

Inclinación $\pm 1^\circ$	Caudal ($m^3 s^{-1} \times 10^{-6}$)
46	140 \pm 20
48	139 \pm 19
50	140 \pm 25
52	139 \pm 20
54	142 \pm 24
56	142 \pm 19
58	142 \pm 19
60	142 \pm 20
62	143 \pm 21
64	143 \pm 19
66	140 \pm 22
68	139 \pm 17
70	140 \pm 25
72	135 \pm 20
74	134 \pm 24
76	137 \pm 19
78	131 \pm 18
80	127 \pm 18
82	127 \pm 16
84	122 \pm 23
86	121 \pm 20
88	114 \pm 15
90	108 \pm 13

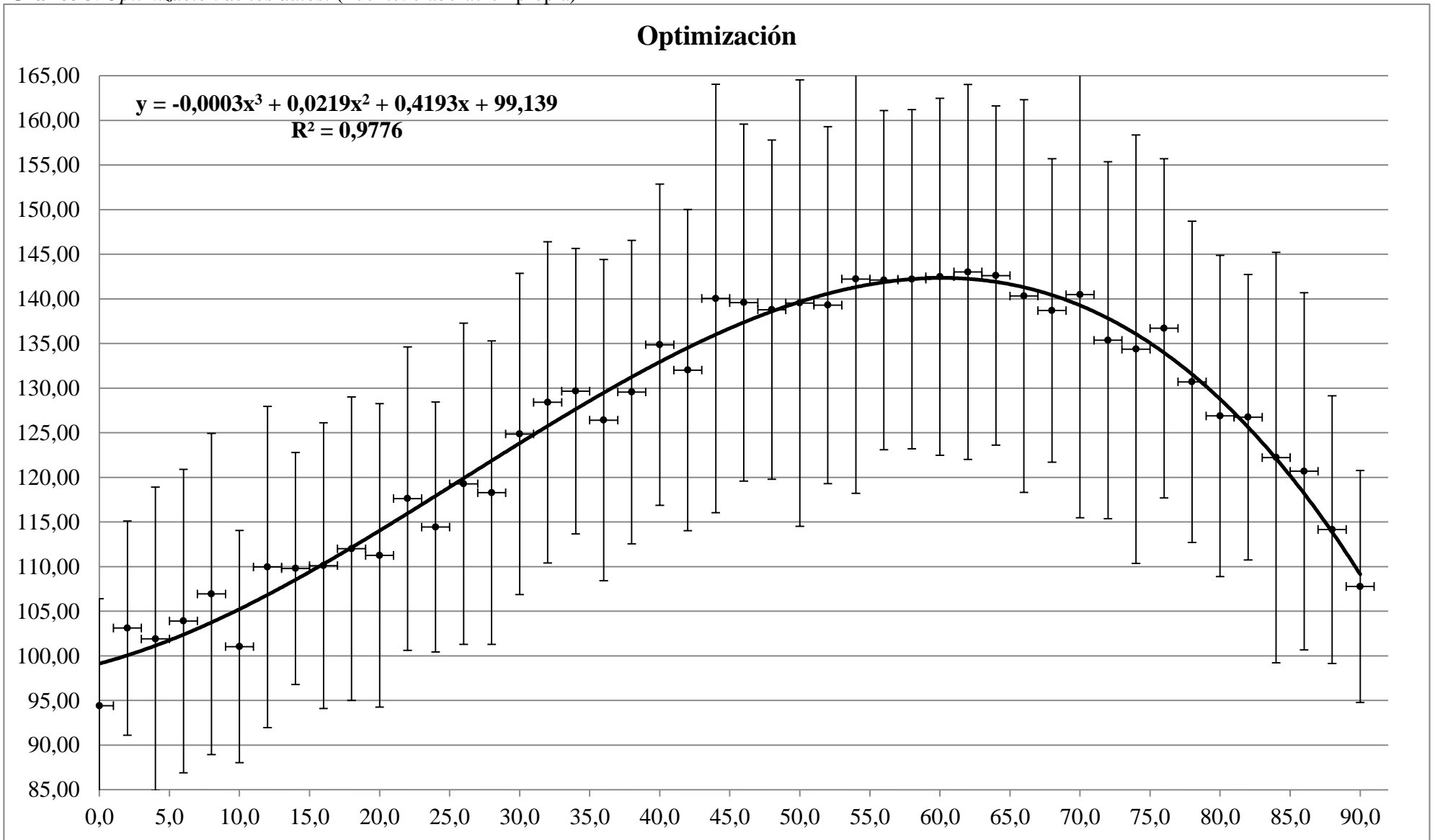
Tabla 4. Valores de flujo para cada inclinación con sus respectivos errores.
(Fuente: elaboración propia)

3. 6. Optimización de la función

Como hemos calculado inicialmente, el flujo a partir del cual el agua se vuelve turbulenta, se produce a $79,0 \times 10^{-6} m^3 s^{-1}$ y, dado que el menor caudal obtenido resulta ser superior a dicho valor, se concluye que el experimento se ha realizado con un fluido en condiciones de turbulencias.

Representando los valores del caudal en función del ángulo obtenemos:

Gráfico 3. Optimización de los datos. (Fuente: elaboración propia)



Tras haber probado con distintos modelos, obtenemos como línea de mejor ajuste una función polinómica. Generalmente, cuanto mayor sea el grado del polinomio, mayor será el coeficiente de correlación entre los datos, ya que permite tener un mayor número de máximos y mínimos. Aun así, se ha decidido elegir el modelo más simple que, como se ha dicho, permite no superar un error del 10%. En este caso, la función de tercer grado permite obtener un resultado satisfactorio:

$$(1 - R^2) \times 100 = (1 - 0,9776) \times 100 = 2,2\%$$

Ahora, se procederá a calcular el punto correspondiente al vaciado más rápido: al tratarse de un polinomio, buscamos el máximo de la función a través de la derivada, cuyo valor indica un punto de inflexión en que la función deja de crecer y empieza a decrecer. Enfocándolo hacia nuestro experimento, este proceso nos permitirá saber a partir de qué punto el flujo ha ido aumentando y, tras alcanzar su valor máximo, decrece:

$$\frac{d}{dx}(-0,0003x^3 + 0,0219x^2 + 0,4193x + 99,139) = -0,0009x^2 + 0,0438x + 0,4193$$

Como estamos buscando un máximo, cuya pendiente es nula, debemos igualar la derivada a la pendiente del punto que estamos buscando, es decir, a cero:

$$-0,0009x^2 + 0,0438x + 0,4193 = 0 \Rightarrow x = 60 \pm 1^\circ$$

Para saber cuál es el flujo equivalente a dicha inclinación, tan solo debemos sustituir la incógnita por el valor encontrado:

$$f(x) = -0,0003x^3 + 0,0219x^2 + 0,4193x + 99,139$$

$$f(60) = -0,0003(60)^3 + 0,0219(60)^2 + 0,4193(60) + 99,139$$

$$f(60) = 143 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

3. 7. Precisión del resultado

Dados los caudales obtenidos respecto a cada inclinación y sus respectivos errores absolutos, se procederá a calcular los errores relativos de cada caudal, para poder cuantificar la fiabilidad del flujo máximo:

En el caso de 44 grados de inclinación obtenemos:

$$Error\ relativo_{44^\circ} = \frac{Error\ absoluto}{Valor\ obtenido} \times 100 = \frac{24}{140} \times 100 = 17\%$$

Los errores obtenidos para la totalidad de los datos, son:

Inclinación ±1°	Error Relativo	Inclinación ±1°	Error Relativo
0	13%	46	14%
2	12%	48	14%
4	17%	50	17%
6	16%	52	14%
8	17%	54	17%
10	13%	56	13%
12	16%	58	13%
14	12%	60	14%
16	15%	62	15%
18	15%	64	13%
20	15%	66	16%
22	14%	68	12%
24	12%	70	18%
26	15%	72	15%
28	14%	74	18%
30	14%	76	14%
32	14%	78	14%
34	12%	80	14%
36	14%	82	13%
38	13%	84	19%
40	13%	86	17%
42	14%	88	13%
44	17%	90	12%

Tabla 5. Errores relativos del flujo para cada inclinación. (Fuente: elaboración propia)

Por tanto, procedemos a asignarle un error absoluto a la inclinación óptima. Para ello, se deben calcular los flujos para el grado de inclinación mínima y máxima que permite el error perteneciente a la inclinación óptima, es decir, 59° y 61°, respectivamente, es decir:

$$Error\ del\ flujo_{60^\circ} = \frac{Flujo_{61^\circ} - Flujo_{59^\circ}}{2}$$

Sin embargo, ambos valores se corresponden con el mismo flujo en referencia a las cifras significativas³. Esta información se puede extraer cualitativamente del *Gráfico 3*, debido a que la derivada a esos puntos es aproximadamente la misma y, por tanto, equivalen a valores de flujo semejantes.

Como método alternativo, se optará por asignar el mayor error relativo, que se corresponde con el 19%⁴, al flujo de 60°:

$$19\% \cdot 143 = 27 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

³ Los flujos a 59° y 61° se diferencian en las cifras decimales.

⁴ El 19% de error se corresponde con la inclinación de la botella a 84°.

4. Conclusión

En primer lugar, como afirma White (2008), existen multitudes de aplicaciones y soluciones a problemas específicos, pero no existe una teoría general y, posiblemente, jamás exista. La razón se debe a los cambios profundos y complicados que sufren los flujos para números de Reynolds moderados (pág. 341).

El primer hecho a tener en cuenta, es que la forma más rápida de vaciar una botella de agua es crear un vórtice en su interior girándola (Whitehead y Porter, 1977, pág. 1). Aun así, esta consideración no se ha tenido en cuenta puesto que el objetivo del experimento era el vaciado de manera pasiva, sin la aplicación de ninguna fuerza.

Lo que me ha permitido aprender este trabajo, es que realmente existe un ángulo óptimo para el vaciado en el menor tiempo posible, es decir, una inclinación determinada donde se alcanza el mayor flujo y, a partir de ésta, vuelve a descender. Experimentalmente se ha encontrado que, mediante el ajuste de una función polinómica de tercer grado, dicho flujo se corresponde con $143 \pm 27 \times 10^{-6} m^3 s^{-1}$, que se produce a $60 \pm 1^\circ$ de inclinación. Por otro lado, experimentalmente se ha podido determinar como el flujo de agua disminuye rápidamente cuando se sobrepasa el ángulo óptimo, es decir, cuando nos acercamos a su inclinación máxima (90°), cuyo valor es el que la gente suele asociar con el óptimo. Esto se puede deber a que, posicionando la botella a la máxima inclinación, la presión que se genera en el interior conduce a un flujo con comportamientos demasiado turbulentos, de manera que el fluido no se dirige en una trayectoria determinada, sino que experimenta distintas. Contraintuitivamente, la hipótesis no se ve confirmada, sino que el máximo se encuentra posicionando la botella a dos tercios de la inclinación máxima.

4. 1. Extrapolaciones posibles

Dicha conclusión contiene implicaciones importantes en el vertido de líquidos cuyas densidades sean próximas a la del agua. Por ejemplo, se ha observado que la inclinación de las mangueras en las gasolineras, se corresponde con una inclinación semejante a la encontrada en este trabajo. Otro ejemplo puede encontrarse en el flujo de agua de las centrales hidroeléctricas: la electricidad que se produce en dichas centrales, no puede ser almacenada, sino que debe producirse y transportarse de inmediato. De ahí, que sea necesario producir la cantidad de energía requerida, la óptima para una demanda

específica (Pérez, J. y Rivier, M., 2002, págs. 1-2). Por eso, es necesario controlar el caudal de agua que fluye a través de las turbinas, puesto que el objetivo principal es conseguir una velocidad determinada del fluido para, posteriormente, producir una cantidad óptima de energía eléctrica. Otro caso, al que se ha hecho referencia en la introducción en las aplicaciones de la mecánica de fluidos es el sistema circulatorio: al parecer, en la punción de la arteria radial, la jeringa debe introducirse en una inclinación de 30° respecto a la superficie cutánea, de manera que la sangre sale en el ángulo complementario, es decir, 60° (Universidad del País Vasco, sin año, pág. 56). Aun así, cabe tener en cuenta que las condiciones del fluido en los tres casos explicados (tanto el combustible, como las centrales hidroeléctricas y el riego sanguíneo) no son las mismas que la del agua en una botella. Como se ha dicho, hay muchos factores a tener en cuenta, pero el experimento puede demostrar que también existen ciertas semejanzas entre las distintas condiciones en que pueden fluir líquidos.

4. 2. Implicación de las limitaciones experimentales

El primer aspecto a tener en cuenta es el efecto de las barras de error en el resultado del experimento: en la *Tabla 4*, se puede observar como los errores relativos respecto a los flujos oscilan entre el 12% y el 19%. En principio, se puede dar la conclusión como válida, ya que no superan el 20%; aun así, si nos detenemos a analizar los datos, el conjunto imagen del rango de valores de la inclinación, se comprende entre $94 \times 10^{-6} m^3 s^{-1}$ y $143 \times 10^{-6} m^3 s^{-1}$. Por lo tanto, se concluye que se podrían ajustar diversas funciones que comprendan las barras de error, de manera que los valores que pueden tomar un flujo óptimo corresponden a $30^\circ \leq \alpha \leq 84^\circ$, ya que están cubiertos por las barras de error; aun así, el ajuste escogido es el que minimiza los errores (2,2%).

Dada esta falta de precisión respecto al ángulo óptimo, se analizarán cuáles han sido los distintos errores que se han cometido y que se podrían mejorar para aumentar la fiabilidad del experimento, es decir, precisar en los datos del volumen de agua obtenido:

En primer lugar, existe un error sistemático de la báscula, ya que su tiempo de reacción para mostrar la medida en la pantalla era considerablemente grande. Esto se traduce en que, a la hora de anotar un valor de volumen y trabajar con periodos de dos segundos, el valor que muestra la pantalla no es completamente fiable. Para solucionarlo, sería conveniente utilizar una báscula cuyo tiempo de reacción sea menor y cuya sensibilidad sea mayor.

En segundo lugar, existe un error aleatorio que se produce al verter el agua: para evitar salpicaduras, se depositó una esponja en el fondo del cubo; pero es inevitable que, cuando haya más agua de que la esponja pueda absorber, el agua que cae impactará sobre el mismo fluido, y se produzcan ciertas salpicaduras. Es por eso, que debe considerarse una incertidumbre mayor que la que se le proporcione al volumen, puesto que hay pequeñas cantidades de agua que salgan fuera.

4. 3. Propuestas de ampliación

Una propuesta muy ambiciosa podría ser encontrar un modelo analítico que permita estudiar el comportamiento fluidomecánico del agua en una botella y, así, obtener la inclinación óptima, atendiendo a la mayoría de variables posibles. Por ejemplo, desarrollar un método que permita obtener propiedades del flujo en cualquier punto, es decir, se hacer un enfoque semejante al euleriano, estudiando el campo de presiones $p(x, y, z)$, no el análisis de una determinada partícula (Crowe et al, 2009, pág. 246).

Por otro lado, este experimento, tan solo ha estudiado cómo cambia el flujo del agua en función de la inclinación; sin embargo, existen muchas otras posibilidades atendiendo a cuáles hubieran sido los resultados si el fluido fuese distinto: ¿qué pasaría si utilizamos aceite, cuya densidad es menor a la del fluido utilizado?, o, aún más interesante, ¿qué diferencias aparecerían si se utilizase arena? Este material es un medio granular sólido que, aunque no comparta las características distintivas que conforman un fluido, puede llegar a comportarse como tal, con una característica muy peculiar: el flujo que describe es siempre laminar.

Referencias

- Crowe, C., Elger, D., Roberson, J. y Williams, B. (2009). *Engineering Fluid Mechanics* [Mecánica de Fluidos de Ingeniería]. Estados Unidos: Wiley.
- Fernández, M. R., Fernández, N., Fidalgo, J. A. y Gutiérrez, E. R. (2003). *Mecánica*. León: Editorial Everest.
- Hewakandamby, B. (2012). *A First Course in Fluid Mechanics for Engineers* [Primer Curso de Mecánica de Fluidos para Ingenieros]. Estados Unidos: Ventus Publishing.
- Pérez, J. y Rivier, M. (2002). *Análisis y operación de sistemas de energía eléctrica*. Madrid: Mc Graw Hill.
- Universidad de Castilla-La Mancha. (2001). *Tema 1. Hidráulica. Generalidades*. Consultado en http://www.uclm.es/area/ing_rural/Hidraulica/Temas/Tema1.PDF, el 12 de Febrero de 2015.
- Universidad de Oslo (2004). *Chapter 8: Flow in pipes* [Capítulo 8: El flujo en conductos]. Consultado en http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MEK4450/h11/undervisningsmateriale/modul-5/Pipeflow_intro.pdf, el 26 de Junio de 2014.
- Universidad de Sydney. (2006). *Hydrodynamics* [Hidrodinámica]. Consultado en http://www.physics.usyd.edu.au/super/life_sciences/PM/PM3.pdf, el 26 de Junio de 2014.
- Universidad del País Vasco. *Punción arterial*. Consultado en <http://www.oc.lm.ehu.es/Fundamentos/fundamentos/TecnicasCM/PuncionArterial.PDF>, el 17 de Enero de 2015.
- White, F. (2008). *Mecánica de fluidos*. Madrid: Editorial Mc Graw Hill.
- Whitehead, J. y Porter, D. (1977). Axisymmetric critical withdrawal of a rotating fluid [Supresión aximétrica crítica de un fluido en rotación]. *Elsevier Scientific Publishing Company*, págs. 1-18.

Anexo I

Inclinación: 0°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	211	204	210	208
4	398	352	378	376
6	548	599	563	570
8	808	788	779	792
10	954	927	918	933

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-4	951	4	915

Inclinación: 2°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	184	219	216	206
4	389	417	412	406
6	672	613	601	629
8	824	836	830	830
10	1006	1039	1030	1025

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	0	1042	0	1008

Inclinación: 4°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	165	236	233	211
4	329	444	433	402
6	503	646	618	589
8	689	886	817	797
10	989	1118	1006	1038

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-2	1102	2	973

Inclinación: 6°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	219	220	233	224
4	430	420	433	428
6	685	612	616	638
8	851	812	826	830
10	1114	1005	1029	1049

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-4	1104	4	995

Inclinación: 8°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	240	260	239	246
4	439	468	470	459
6	623	663	685	657
8	844	869	922	878
10	1027	1064	1144	1078

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-9	1137	9	1020

Inclinación: 10°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	229	250	248	242
4	445	444	498	462
6	644	669	644	652
8	817	857	829	834
10	1012	1030	1022	1021

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-15	1030	15	1012

Inclinación: 12°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	266	292	293	284
4	504	489	512	502
6	728	694	711	711
8	967	899	951	939
10	1141	1040	1132	1104

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-20	1155	20	1054

Inclinación: 14°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	253	246	261	253
4	478	476	478	477
6	693	700	689	694
8	920	920	912	917
10	1104	1087	1095	1095

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-12	1104	12	1087

Inclinación: 16°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	244	283	265	264
4	484	504	490	493
6	672	716	682	690
8	993	952	874	940
10	1082	1141	1067	1097

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-15	1134	15	1060

Inclinación: 20°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	266	260	297	274
4	495	471	521	496
6	696	707	720	708
8	902	908	949	920
10	1096	1107	1181	1128

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-16	1171	16	1086

Inclinación: 18°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	275	287	268	277
4	510	496	473	493
6	726	722	669	706
8	954	979	854	929
10	1155	1180	1067	1134

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	0	1191	0	1078

Inclinación: 22°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	290	272	266	276
4	537	488	512	512
6	772	722	748	747
8	1009	906	992	969
10	1200	1144	1208	1184

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-13	1216	13	1152

Inclinación: 24°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	261	270	287	273
4	503	505	501	503
6	699	745	700	715
8	938	988	919	948
10	1145	1173	1145	1154

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-13	1168	13	1140

Inclinación: 28°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	304	383	282	323
4	515	544	499	519
6	754	808	711	758
8	989	1042	944	992
10	1204	1248	1169	1207

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-21	1247	21	1168

Inclinación: 26°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	318	279	287	295
4	541	526	528	532
6	814	769	737	773
8	999	1029	967	998
10	1224	1224	1150	1199

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-18	1236	18	1162

Inclinación: 30°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	319	319	288	309
4	558	545	526	543
6	765	781	800	782
8	1050	1050	1037	1046
10	1288	1265	1221	1258

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-16	1292	16	1225

Inclinación: 32°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	306	298	301	302
4	582	563	547	564
6	808	838	825	824
8	1067	1080	1039	1062
10	1267	1273	1329	1290

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-16	1321	16	1259

Inclinación: 36°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	324	302	296	307
4	577	565	531	558
6	816	791	803	803
8	1049	1073	1023	1048
10	1278	1304	1246	1276

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-17	1305	17	1247

Inclinación: 34°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	302	285	310	299
4	557	554	557	556
6	818	802	828	816
8	1109	1059	1095	1088
10	1314	1276	1280	1290

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-13	1309	13	1271

Inclinación: 38°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	295	313	288	299
4	515	573	556	548
6	761	841	806	803
8	1051	1081	1052	1061
10	1327	1310	1279	1305

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-11	1329	11	1281

Inclinación: 40°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	349	348	328	342
4	598	571	549	573
6	890	848	884	874
8	1149	1170	1080	1133
10	1382	1351	1326	1353

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-19	1381	19	1325

Inclinación: 42°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	334	324	337	332
4	602	559	589	583
6	868	804	820	831
8	1134	1102	1098	1111
10	1363	1311	1319	1331

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-19	1357	19	1305

Inclinación: 44°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	304	299	336	313
4	547	568	660	592
6	853	832	963	883
8	1120	1115	1271	1169
10	1332	1337	1498	1389

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-12	1472	12	1306

Inclinación: 46°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	339	348	307	331
4	585	601	581	589
6	849	835	884	856
8	1153	1149	1229	1177
10	1360	1373	1447	1393

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-13	1437	13	1350

Inclinación: 48°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	353	333	337	341
4	613	589	636	613
6	926	866	881	891
8	1173	1202	1149	1175
10	1409	1411	1341	1387

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-20	1422	20	1352

Inclinación: 52°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	335	354	352	347
4	633	630	605	623
6	884	917	867	889
8	1177	1164	1144	1162
10	1432	1423	1369	1408

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-21	1440	21	1377

Inclinación: 50°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	326	344	319	330
4	600	636	591	609
6	901	863	874	879
8	1221	1098	1142	1154
10	1482	1307	1426	1405

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-16	1493	16	1318

Inclinación: 54°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	319	373	354	349
4	616	685	650	650
6	907	964	874	915
8	1161	1241	1183	1195
10	1362	1499	1430	1430

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-23	1499	23	1362

Inclinación: 56°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	330	341	287	319
4	604	641	621	622
6	887	901	922	903
8	1127	1161	1182	1157
10	1402	1426	1464	1431

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-14	1462	14	1400

Inclinación: 60°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	346	369	364	360
4	651	638	698	662
6	931	946	874	917
8	1199	1189	1188	1192
10	1418	1443	1472	1444

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-25	1471	25	1417

Inclinación: 58°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	348	340	354	347
4	651	630	610	630
6	911	920	903	911
8	1230	1208	1155	1198
10	1457	1409	1407	1424

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-20	1449	20	1399

Inclinación: 62°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	380	360	344	361
4	689	654	651	665
6	898	924	953	925
8	1188	1202	1288	1226
10	1393	1477	1424	1431

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-26	1473	26	1389

Inclinación: 64°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	350	289	301	313
4	627	588	584	600
6	896	846	921	888
8	1198	1183	1194	1192
10	1451	1380	1405	1412

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-10	1448	10	1377

Inclinación: 68°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	347	306	356	336
4	622	648	587	619
6	892	936	904	911
8	1165	1177	1150	1164
10	1376	1383	1401	1387

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-21	1399	21	1374

Inclinación: 66°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	358	320	329	336
4	662	584	670	639
6	969	856	973	933
8	1221	1089	1182	1164
10	1479	1365	1382	1409

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-23	1466	23	1352

Inclinación: 70°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	348	350	264	321
4	657	622	527	602
6	932	930	877	913
8	1166	1200	1041	1136
10	1484	1465	1297	1415

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-14	1509	14	1322

Inclinación: 72°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	306	398	310	338
4	556	729	572	619
6	859	994	892	915
8	1077	1189	1107	1124
10	1363	1399	1330	1364

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-25	1399	25	1330

Inclinación: 76°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	355	300	345	333
4	639	560	627	609
6	900	842	911	884
8	1195	1113	1160	1156
10	1389	1320	1386	1365

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-21	1400	21	1331

Inclinación: 74°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	320	370	320	337
4	556	639	587	594
6	828	908	848	861
8	1061	1207	1100	1123
10	1275	1448	1345	1356

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-20	1443	20	1270

Inclinación: 78°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	319	228	372	306
4	579	487	596	554
6	846	800	831	826
8	1092	1054	1067	1071
10	1343	1283	1324	1317

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-13	1347	13	1287

Inclinación: 80°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	315	310	251	292
4	553	571	525	550
6	837	813	796	815
8	1025	1033	1024	1027
10	1273	1325	1248	1282

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-13	1321	13	1244

Inclinación: 84°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	304	247	241	264
4	565	528	459	517
6	829	788	674	764
8	1085	1095	863	1014
10	1297	1245	1093	1212

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-9	1314	9	1110

Inclinación: 82°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	230	270	339	280
4	533	594	591	573
6	783	842	873	833
8	1018	1099	1009	1042
10	1248	1267	1280	1265

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-16	1281	16	1249

Inclinación: 86°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	247	266	259	257
4	465	468	496	476
6	746	703	820	756
8	964	899	1098	987
10	1167	1136	1284	1196

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-4	1270	4	1122

Inclinación: 88°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	246	236	267	250
4	477	456	487	473
6	708	682	712	701
8	898	968	928	931
10	1176	1133	1122	1144

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-6	1171	6	1117

Inclinación: 90°				
Tiempo (s)	Volumen (ml)			Volumen (ml)
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Media
0	0	0	0	0
2	241	199	278	239
4	462	409	495	455
6	676	658	689	674
8	900	889	854	881
10	1095	1083	1062	1080

	P máx		P mín	
Tiempo	0,5	9,5	-0,5	10,5
Volumen	-8	1097	8	1064

