LES MATEMÀTIQUES DE LA MÚSICA

ELS NOMBRES OCULTS DARRERE EL PENTAGRAMA

Fet per

Narcís Coll Follia

alumne de 2n de Batxillerat del col·legi

Maristes Girona

el

10 de desembre de 2013

ÍNDEX

0. INTRODUCCIÓ

"La música és l'aritmètica dels sons, com la òptica és la geometria de la llum"

Claude Debussy (compositor francès)

He escollit el tema de les matemàtiques de la música ja que relaciona dues de les matèries que més m'agraden i que se'm donen bastant bé. La música és una cosa que m'apassiona i la porto estudiant des de que tinc cinc anys i des de fa cinc any que estic estudiant al Conservatori de música de Girona. La meva especialitat és la trompeta i, darrerament també el baix elèctric.

La veritat és que ara, abans de començar el treball, no sé massa quina relació hi ha entre aquestes dues matèries. Ara bé, ja de ben petit havia sentit de professors o alumnes més grans que parlaven de una relació existent, cosa que ja des de fa temps havia despertat la meva curiositat. Així doncs crec que aquest treball de recerca és la oportunitat perfecte per mi per descobrir els misteris que s'amaguen darrere cada nota i cada nombre.

Així doncs m'he plantejat tot una sèrie d'objectius. En primer lloc vull establir la relació que hi ha entre les matemàtiques i la música i així descobrir des de quan van juntes. També vull fer un estudi del so: saber el produeix i perquè. Relacionat amb aquest, m'agradaria saber quines són les condicions "ambientals que afavoreixen el so i quines les perjudiquen. Finalment vull acabar de trobar tots els aspectes de la música on hi trobem característiques matemàtiques.

Un cop tingui tots aquests coneixements vull analitzar obres i cançons de diferents èpoques que continguin aquests aspectes matemàtics i finalment utilitzar tots els aspectes matemàtics apresos per compondre la meva pròpia peça musical.

Per fer aquest treball tinc pensat buscar informació a través de diferents fonts (llibres, Internet, etc.), parlar amb entesos de música als quals tinc accés (professors del Conservatori de Girona), analitzar peces musicals i compondre la meva pròpia peça utilitzant els coneixements adquirits i la meva experiència com a músic.

1. LA MÚSICA I ELS SEUS ORÍGENS

"Des de que l'home existeix hi ha hagut música. Però també els animals, els àtoms i les estrelles fan música"

Karlheinz Stockhausen (compositor alemany)

1.1 El concepte de música

Segons la segona edició del diccionari de la llengua catalana de l'Institut d'Estudis Catalans, la música (del grec *mousikē* "l'art de les muses") és l'art que s'expressa mitjançant la combinació de sons, d'acord amb les lleis de la melodia, l'harmonia i el ritme.

Però en tot cas hem de distingir el que és pròpiament música d'un simple so. Dit d'una manera simple fer música és utilitzar els sons de manera organitzada perquè "sonin bé". Tot i que sembla una definició molt relativa no ho és tant perquè si per exemple utilitzes un acord de segona (més endavant s'explicarà el que és) obtindràs un so molt dissonant en canvi si utilitzes un acord tríada major serà molt més agradable.

1.2 Teories sobre l'origen de la música

Parlar d'un origen concret de la música és una cosa impossible ja que tot i que s'han trobat poques restes materials d'antics instruments, la música prehistòrica es va originar simplement utilitzant la pròpia veu humana (amb gran importància del xiular) i en alguns casos la percussió corporal. Tot i això hi han moltes hipòtesis (que no necessàriament són contradictòries) sobre els orígens de la música.

Algunes hipòtesis afirmen que la música va sorgir simplement com a mètode d'entreteniment i que possiblement intentava imitar sons de la natura. Però la majoria de les hipòtesis veuen l'origen de la música com una cosa pràctica: com per exemple un mètode de comunicació abans de l'existència del llenguatge en si mitjançant una tonalitat i ritme que es repeteix seguint uns patrons.

Altres hipòtesis com la de Charles Darwin diuen que la música està directament relacionada amb la sexualitat dels éssers humans, com a mètode d'aparellament amb el sexe oposat.

Finalment cal destacar la hipòtesi que marca com a motiu de l'aparició de la música el fet religiós. La utilització de la música com a mitjà de comunicació amb els déus. Aquesta última hipòtesi la veiem aplicada sobre tot a l'antiga Grècia que fins i tot tenien una divinitat de la música (Hermes).

En el que coincideixen a grans trets la majoria de hipòtesis és que la música té un origen prehistòric i que el ritme va aparèixer al Paleolític i posteriorment la melodia al Neolític i que es va anar desenvolupant fins a esdevenir el que nosaltres coneixem com l'actual cançó.

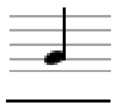
2. GLOSSARI DE CONCEPTES MUSICALS

"La música comença allà on s'acaba el llenguatge"

Amadeus Hoffman (escriptor, pintor i músic alemany)

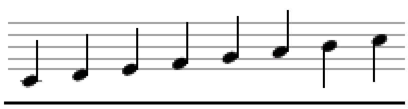
Aquest apartat ha estat confeccionat a fi que el lector pugui entendre diverses paraules específiques del llenguatge musical que podrà trobar mes endavant al treball. Per cada definició si escau hi haurà una exemplificació gràfica de la paraula.

Nota: Signe de la notació musical que representa un so indicant-ne, amb la seva posició en el pentagrama, el to i, amb la seva forma, la durada.



To: Qualitat física d'un so que indica el seu grau d'elevació i que depèn de la freqüència de les vibracions del cos sonor.

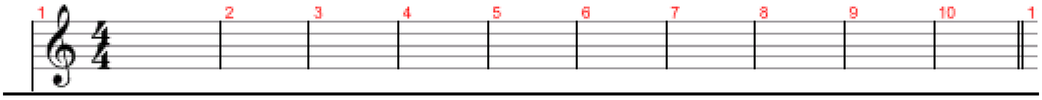
Escala: successió de sons o notes disposats segons un sistema o mode determinat. Aquestes notes se succeeixen regularment per graus conjunts, és a dir per tons i semitons, en sentit ascendent o descendent dins l'extensió d'una octava (8 notes: do – re – mi – fa – sol – la – si – do).



Acord: conjunt de diferents sons simultanis que es regeix per les regles de l'harmonia i l'acústica. L'arpegi és una variant que consisteix a fer aquests mateixos sons però sense ser simultanis.

Pentagrama: Conjunt de les cinc ratlles paral·leles i equidistants sobre les quals s'escriu la música.

Compàs: unitat de mesura del temps nascuda de l'ocurrència regular dels accents, la posició dels quals és marcada en el pentagrama per ratlles verticals posades immediatament davant d'ells. El valor de cada compàs és marcat pels dos números del principi del pentagrama.



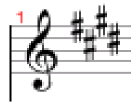
Clau: signe col·locat al començament d'un fragment que ens indica quina ratlla del pentagrama correspon a una nota determinada, i per conseqüent les ratlles i els espais en què cal escriure les altres notes de l'escala musical. Hi ha tres tipus de claus musicals: la clau de Sol, la clau de Fa i la clau de Do.

Tempo: és la velocitat a la qual cal interpretar o a la que veritablement s'interpreta una composició musical. És una paraula italiana que literalment significa 'temps'. Es mesura en pulsacions per minut (ppm), abreviat actualment més sovint com a bpm ('beats per minute' en anglès). En funció del tempo, una mateixa obra musical té una durada més o menys llarga; semblantment, cada figura musical (una negra o una blanca) no té una durada especifica i fixa en segons, sinó que depèn del tempo.

Alteració: Signe de l'escriptura musical que indica la modificació de l'altura del so d'una o més notes. Poden ser sostinguts (que pugen mig to a la nota), bemolls (que baixen mig to a la nota) o becaires (que s'utilitzen després de haver utilitzat una de les anteriors alteracions per retornar la nota a la seva altura original).

Sostingut	Bemoll	Becaire

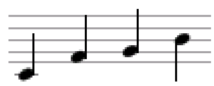
Tonalitat: Conjunt de relacions melòdiques i harmòniques organitzades respecte a una nota anomenada tònica. Per representar-la a una partitura s'utilitza un codi de sostinguts o bemolls que es situen darrere la clau.



Cadència: caiguda o terminació d'una frase musical. N'hi ha de diversos tipus segons les intencions del compositor.

Mode: Disposició dels tons i dels semitons dins una escala. Pot ser mode major (que crea una sensació de alegria) o menor (que crea una sensació de tristesa). Per estudiar el mode d'una peça s'ha d'estudiar la tonalitat d'aquesta, les alteracions que hi ha i la cadència.

Graus de la escala: Són els noms que reben les notes més importants dins una escala musical. Són: la tònica (primera nota de l'escala), la subdominant (quarta nota de l'escala), la dominant (quinta nota de la escala) i la sensible (sèptima nota de la escala). En el cas de l'escala de do major:



Coda: Conjunt dels compassos afegits al final formal d'una composició musical per a reforçar-ne el caràcter conclusiu.

Cànon: composició polifònica que utilitza una tècnica contrapuntística consistent a fer que les diferents veus o parts que van entrant successivament, interpretin la mateixa melodia que la primera veu que ha iniciat la composició, o -en alguns tipus més complexos de cànons- una modificació d'aquesta melodia. D'aquesta manera les diferents parts que integren aquesta polifonia interpreten la mateixa melodia però començant en moments diferents.

<u>Moviments (o espai) entre notes:</u> Per determinar l'espai que hi ha entre una nota i altre direm el nombre de notes que les separen contant també elles mateixes. Per exemple entre Do i Re com que van seguides direm que es un moviment de segona, o entre Do i Sol com que hi ha tres notes més entre mig (Re, Mi, Fa) direm que és un moviment de quinta.

3. INTRODUCCIÓ A LA NOTACIÓ MUSICAL

"La música és una cosa àmplia, sense límits, sense fronteres, sense banderes"

León Gieco (cantautor argentí)

Com diu al títol en aquest capítol explicaré uns conceptes musicals bàsics per entendre correctament el treball: veurem els noms de les notes i els valors dels ritmes més bàsics de la música.

3.1 Notes de l'escala

Les notes de l'escala musical són les següents: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si depèn de quina escala estiguem parlant es començarà per una o altra nota, alguna d'aquestes notes estarà alterada o alguna fins i tot potser no hi serà. En tot cas sempre seguiran l'ordre vist a dalt.

Com que s'organitzen per octaves, la següent nota després de la sèptima (en aquest cas la nota Si) tornaria ha ser la primera però una octava amunt (Do a una octava amunt).

Utilitzant la clau de sol (la que sempre s'utilitzarà en aquest treball) quedaria així (ara no ens fixarem amb el ritme, nomes les notes):

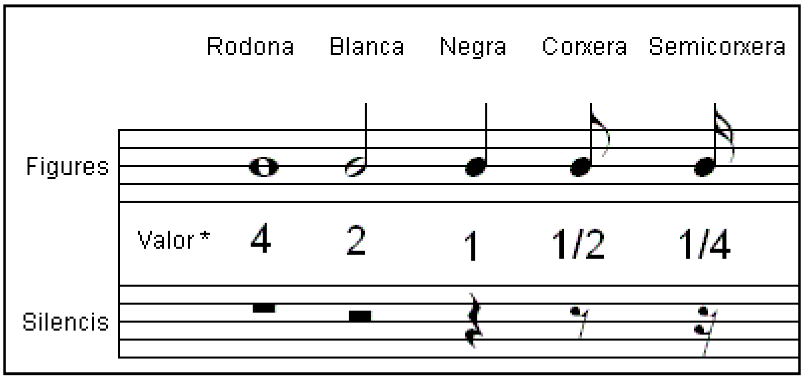
Per ordre les notes serien: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si i ara una octava amunt: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si i encara una octava més amunt: Do.

Hi ha més octaves per sobre i per sota aquesta, però per aquest treball només utilitzarem notes dins aquest registre.

3.2 Valors rítmics

Cada nota de una partitura té un valor rítmic, o sigui una durada. Ara veurem una imatge on s'expliquen aquests valors.

Cada figura té un equivalent amb silenci, o sigui, un silenci que dura igual que aquesta figura però que evidentment on no sona cap nota.

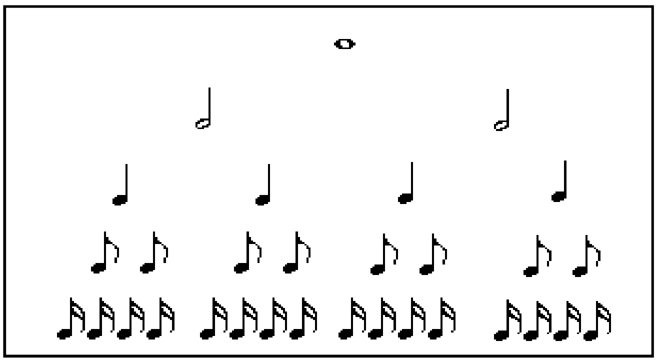


Il·lustració 3.1 – Representació dels valors de les figures i els seus respectius silencis

Tot i que hi ha figures amb valor més petit que la semicorxera, en aquest treball no els utilitzarem i tampoc són massa habituals a les peces musicals.

El número a on posa “valor” són els temps que dura la figura, i cada temps serà més ràpid o més lent segons el tempo de la peça que com hem explicat a l’apartat anterior se’ns indica al principi de la peça, amb un nom (largo, adagio, andante, moderato, allegro, presto...) o també amb un número que ens indica quants de temps (pulsacions) hi ha a cada minut.

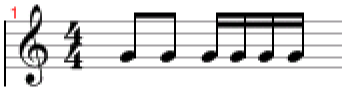
Per fer un petit resum dels ritmes, a la imatge següent veurem les equivalències de cada figura:



Il·lustració 3.2- Equivalencies de les figures

Cada fila de figures diferents, si sumes els valors de totes les figures valdrà quatre. Per exemple una rodona equivaldrà a setze semicorxeres.

Tot i que ara les veiem així, les corxeres solen agrupar-se en grups de dos i les semicorxeres en grups de o quatre de la següent forma:



4. **PITÀGORES I LA MÚSICA**

"Escolta, seràs savi; el començament de la saviesa és el silenci."

Pitàgores (filòsof i matemàtic grec)

Dedico un dels primers capítols d'aquest treball per parlar de la primera persona que va relacionar la música amb les matemàtiques i explicaré com ho va fer.

4.1 Pitàgores de Samos

Il·lustració 4.1 – Pitàgores de Samos

Pitàgores de Samos (ca. 580 a. C. - ca. 495 a. C.) va ser un filòsof i matemàtic grec considerat el primer matemàtic pur. Va contribuir de manera significativa en l'avanç de la matemàtica hel·lènica, la geometria i l'aritmètica, derivades particularment de les relacions numèriques, i aplicades per exemple a la teoria de pesos i mesures, a la teoria de la música o l'astronomia.

És el fundador de la Germandat Pitagòrica, una societat que, si bé era de naturalesa predominantment religiosa, s'interessava també en medicina, cosmologia, filosofia, ètica i política, entre d'altres disciplines. El pitagorisme formular principis que van influir tant en Plató com en Aristòtil i, de manera més general, en el posterior desenvolupament de la matemàtica i en la filosofia racional a Occident.

4.2 La música Pitagòrica

Pitàgores estudià, segurament per primera vegada a la història, les lleis quantitatives de l'acústica i fou el primer en trobar una correlació entre els sons consonants o harmònics (és a dir, aquells la manifestació simultània dels quals origina una sensació agradable per a l'oïda: el to, l'octava, la quinta i la quarta) i els números, inaugurant una teoria matemàtica de la música. Bàsicament, Pitàgores posà de manifest de forma experimental dos fets:

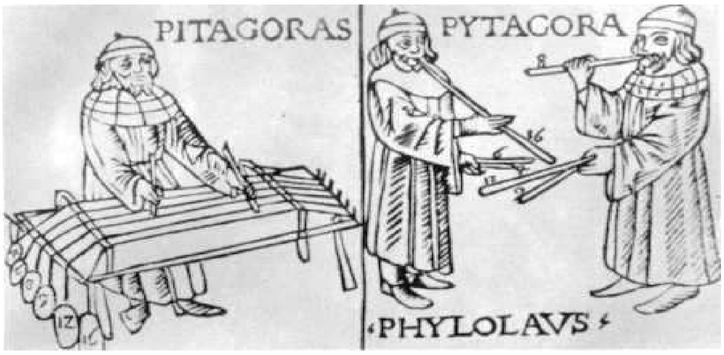
• El so produït per la pulsació d'una corda depèn de la longitud de la mateixa.

• Els sons harmònics s'originen per cordes igualment tenses les longituds de les quals es disposen segons certes raons entre nombres enters.

4.3 Les proporcions de l'escala musical

Tot i que no se sap si es certa o no, per explicar com Pitàgores va trobar les proporcions dins l'escala musical, s'explica la següent història que es pot trobar, entre altres llocs, a el llibre *El último catón* de Matlide Asensi:

D'acord amb la tradició, Pitàgores passà un dia, per qüestió d'atzar, davant d'una ferreteria on uns ferrers colpejaven l'enclusa. Restà immòbil escoltant el so cadenciós dels martells, observant que el to melodiós de tres d'ells era alterat per la dissonància d'un quart. Sorprès davant aquest fenomen, demanà els martells en préstec per a realitzar una experiència científica, la primera de la que se'n te constància. Pesà cuidadosament els martells i els penjà de quatre cordes de manera que en quedar tirants tinguessin la mateixa longitud. Fent vibrar les cordes aprecià que els sons que emetien eren els mateixos que els dels martells en colpejar l'enclusa. Afegint un tros de fang al martell que produïa la dissonància, posà la nota emesa per la corda corresponent en harmonia amb les altres. Com coneixia els pesos dels martells (que eren proporcionals a 12, 9, 8 i 6) va deduir la llei aritmètica que regeix els intervals musicals: el martell el pes del qual era 12 produïa el to, el de pes 9 la quarta, el de pes 8 la quinta, i el de pes 6 l'octava, establint la proporció 12/9=8/6.



Il·lustració 4.2 – Pitàgores i la historia dels martells i les cordes

Com a bon científic experimental, Pitàgores va repetir l'experiència emprant, en comptes de cordes d'igual longitud i peses diferents, peses iguals per a tensar cordes de diferent longitud, i observà que les que donaven el to, la quarta, la quinta i la octava, tenien longituds proporcionals a 12, 9, 8 i 6. I, donat que les raons entre els números 12, 9, 8 i 6, són iguals a les que existeixen entre 1, 3/4,2/3 i 1/2, que són les més senzilles que es poden formar amb els números de la *tetractys*[1] (1, 2, 3 i 4), Pitàgores deduí que aquesta es "font de la naturalesa eterna". Com en tants altres aspectes pitagòrics, els números de la *tetractys* eren la pedra angular de l'harmonia musical. Així doncs, hem de veure a Pitàgores com al descobridor de l'escala musical. De fet, en tota combinació harmònica les longituds relatives de les cordes polsades es troben en una raó de nombres enters, que es sintetitza en l'esquema següent, anomenat sistema de Pitàgores:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

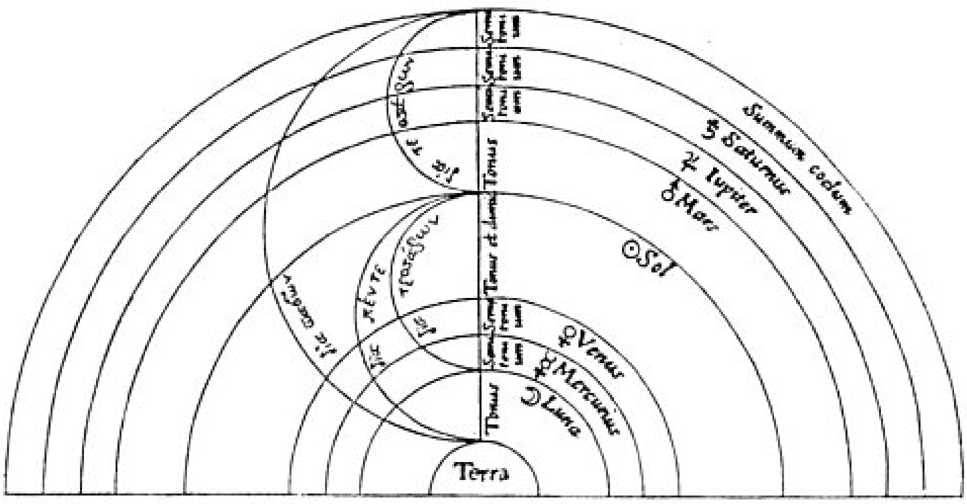
Taula 4.1 – Raons proporcionals de les cordes i les notes

4.4 La música de les esferes

Desprès d'haver presentat els intervals al seus companys, aquests van pensar que les distancies entre planeta i planeta tenien les mateixes proporcions que hi havia en els sons de l'escala musical: cada planeta

[1] La Tetraktys és una figura triangular que consisteix en deu punts ordenats en quatre files, amb un, dos, tres i quatre punts en cada fila. Com a símbol místic, va ser molt important per als seguidors dels pitagòrics.

corresponia a una esfera que al fer el seu moviment produïa un so similar al que fa un projectil en l'aire. Van establir la relació de que el so de les esferes més llunyanes era agut, mentre que les més properes, greu. Tot aquest conjunt de sons formen la música de les esferes.



Il·lustració 1.3 – Diagrama de la música de les esferes

4.4.1 Comprovació de la teoria

La música de les esferes ha apassionat sempre als estudiosos de l'Univers. Des dels pitagòrics, passant per Kepler, Einstein o Newton (que es llançaren a la cerca d'un principi harmònic del cosmos) fins als nostres dies.

Tant és així que, en aquesta línia d'investigació i cerca de l'harmonia universal, el 1998 la NASA envià un satèl·lit a l'espai, el Transition Region and Coronal Explorer (TRACE), l'objectiu del qual era estudiar la turbulenta atmosfera superior del Sol (o corona solar), en la que es desencadenen diverses tempestes i protuberàncies.

Gràcies a aquesta eina cosmològica, els científics del Southwest Research Institute (SwRI) de San Antonio (Texas), van descobrir (segons un comunicat de desembre de 2004 adjunt a l'Annex I pàgina i-1) que l'atmosfera del Sol realment "sona", tal i com havien anticipat els pitagòrics i la tradició científica posterior, degut a que està plena d'ultrasons en forma d'ones.

Tal i com s'explica en el comunicat, sembla ser que la tradicional música de les esferes consisteix en realitat en un ultrasò solar que interpreta una partitura formada, segons el satèl·lit de la NASA, per ones 300 vegades més profundes que el so de les més profundes vibracions audibles per a l'oïda humana, amb una freqüència de 100.000 Hz en períodes de 10 segons.

Aquestes ones ultrasòniques es produeixen o bé pel xoc sobtat de fluxos electromagnèticament induïts en la superfície solar, o bé pel xoc de determinades ones de baixa freqüència sonora, quan aquestes s'aixequen com les ones del mar des de la superfície solar.

Ambdues raons podrien explicar, a més del so de la música de les esferes, un altre misteri del nostre Sol: la font de calor extra amb què conta aquesta estrella en la seva superfície.

5. Matemàtiques en el so. ONES I ACÚSTICA

"La música és la voluptuositat de la imaginació."

Eugène Delacroix (Pintor francès)

En aquest apartat veurem una relació molt directe entre les matemàtiques i la física amb el so musical.

5.1 La ona sonora

Una ona sonora és una ona longitudinal que transmet el que s'associa amb so. Si es propaga en un medi elàstic i continu genera una variació local de pressió o densitat, que es transmet en forma d'ona esfèrica periòdica. Mecànicament les ones sonores són un tipus d'ona elàstica.

Les variacions de pressió, humitat o temperatura del medi, produeixen el desplaçament de les molècules que el formen. Cada molècula transmet la vibració a les que es trobin en el seu voltant, provocant un moviment en cadena. Aquesta propagació del moviment de les molècules del medi, produeixen en l'oïda humà una sensació descrita com so.

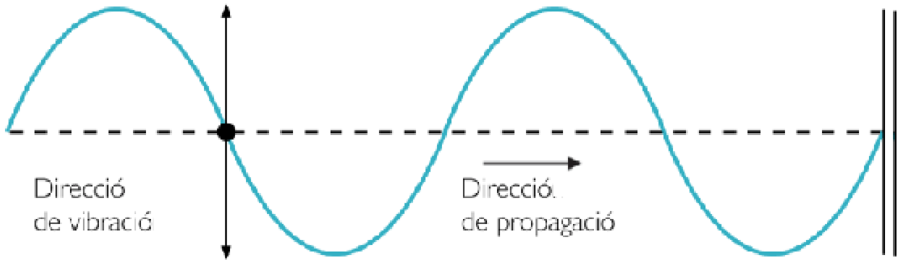
5.1.1 Mode de propagació

Per propagar necessiten un medi material (aire, aigua, cos sòlid) que transmeti la pertorbació (viatja molt ràpid en els sòlids, més lent en els líquids, encara més lent en l'aire i en el buit no es propaga). És el propi mitjà el que produeix i propicia la propagació d'aquestes ones amb la seva compressió i expansió. Perquè pugui comprimir-se i expandir-se és imprescindible que aquest sigui un mitjà elàstic, ja que un cos totalment rígid no permet que les vibracions es transmetin. Així doncs, sense mitjà elàstic no hi hauria so, ja que com s'ha esmentat abans les ones sonores no es propaguen en el buit.

La equació de propagació de una ona és la següent:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

On **p** és la pressió en Pascals, **x** el desplaçament de la ona en metres, **c** la velocitat del so en metres/segon i **t** el temps en segons



Il·lustració 5.1 – Direcció de propagació de una ona

5.1.2 La freqüència

La freqüència és el número d'oscil·lacions que una ona efectua en determinat interval de temps. El nombre de cicles per segon s'anomena Hertz (Hz), i és la unitat amb la qual es mesura la freqüència.

Des del punt de vista musical, la freqüència es relaciona amb l'altura o to de la nota musical a què correspon. Com més gran és la freqüència, més alt és el to d'una nota musical. El so és més agut.

Els humans som sensibles a les vibracions amb freqüència compresa entre 16 Hz i 20.000 Hz. Per sota de 16 Hz s'anomenen infrasons i per sobre, ultrasons. El marge auditiu de les persones varia segons l'edat i d'altres factors. Els animals tenen un marge auditiu diferent, així, és ben conegut el fet que els gossos poden sentir freqüències molt més altes, dins del marge dels ultrasons.

Les notes produïdes pel teclat d'un piano tenen un rang de freqüència de 27 a 3.840 Hz, distribuïts en 7 octaves.

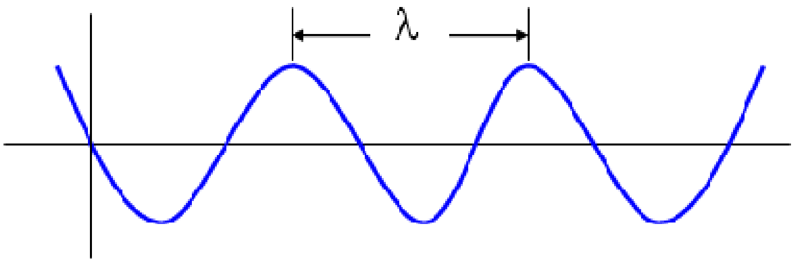
A cada nota musical, li correspon una freqüència determinada. L'afinació actual dels instruments es fa a partir de la nota base LA4, a la qual correspon una freqüència de 440.00 Hz.

Ara, en el següent quadre es veuen reflectits els resultats d'una petita prova mitjançant un teclat connectat a un afinador estàndard on es calcula la freqüència de les notes de la quarta octava de un teclat.

Nota	C4	D4	E4	F4	G4	A4	B4
Freqüència (Hz)	261.63	293.66	329.63	349.23	392.00	440.00	493.88

Taula 5.1 – Freqüències de la quarta octava

Així dons com hem comentat abans podem comprovar que com més aguda és la nota, més alta és la freqüència i a més a més augmenta de forma exponencial, es a dir, com mes agudes son les notes, més alta és la freqüència que les separa.

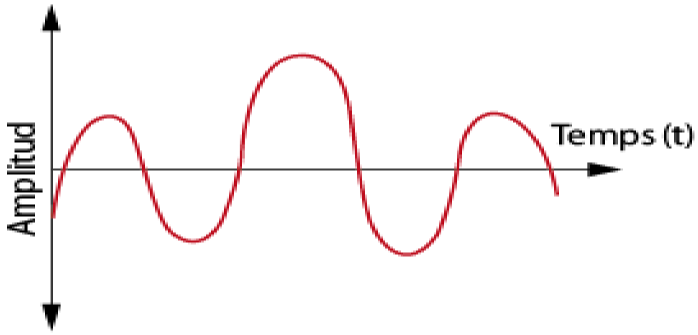


Il·lustració 5.2 – Freqüència d'una ona

5.1.3 L'amplitud

L'amplitud és el grau de moviment de les molècules d'aire en una ona. Aquesta correspon, en termes musicals, a allò que anomenem intensitat. Com més gran és l'amplitud de l'ona, més intensament colpegen les molècules al timpà i més fort és el so percebut.

L'amplitud mínima perquè un so sigui percebut per una persona s'anomena llindar d'audició. Quan l'amplitud augmenta, arriba un moment que produeix molèsties al timpà, a això se l'anomena llindar del dolor.

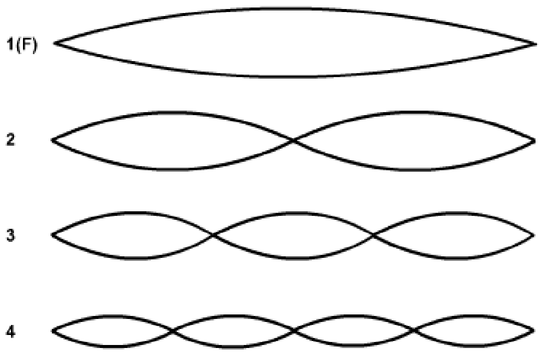


Il·lustració 5.3 – Amplitud d'una ona

5.1.4 La forma d'ona

La forma d'ona és la característica que ens permetrà distingir una nota de la mateixa freqüència i intensitat produïda per instruments diferents. La forma d'ona ve determinada pels harmònics (En el cas dels instruments de corda, cada corda produeix harmònics diferents).

Normalment, en fer vibrar un cos, no obtenim un so pur, sinó un so compost de sons de diferents freqüències. A això s'anomenen harmònics. La freqüència dels harmònics, sempre és un múltiple de la freqüència més baixa anomenada freqüència fonamental o primer harmònic. A mesura que les freqüències són més altes, els segments en vibració son més curts i els tons musicals estan més pròxims els uns dels altres. Els harmònics dons, fan que els diferents sons siguin més rics per la orella.



Il·lustració 5.4 – Harmònics de les quatre cordes d'un baix

En conclusió, només observant el gràfic d'una ona sonora podem saber: de quina nota es tracta i en quina octava es situa (observant la freqüència), la intensitat de aquesta nota (observant la amplitud) i quin instrument es tracta (observant els harmònics reflectits a la forma de la ona)

5.2 Acústica

És la branca física que estudia la producció, la transmissió i la recepcions dels sons. Amb aquesta ciència podem quantificar l'energia, la variació en el temps, la freqüència del so i la seva localització.

Afirmem que tot el que vibra sona, ja que tot allò que vibra provoca una oscil·lació de pressió en l'aire. Quan aquestes vibracions es troben viatjant per l'espai afecten a les molècules de l'aire i generen petites regions d'aire on la pressió és menor;aquestes zones s'anomenen rarefaccions. Les zones on és major la pressió reben el nom de compressions. Quan el so troba un obstacle, com ara un timpà, aquest vibra garantint les mateixes característiques del patró d'ona emès en un principi per la font que va emetre el so. Un cop el so és percebut per l'oïda el sistema auditiu s'encarrega de processar-lo. Aquest s'estén des de l'orella al còrtex cerebral i la seva funció principal és la de convertir l'energia de les vibracions en impulsos neuronals.

6. **MATEMÀTIQUES A LA PARTITURA**

"No n'hi ha prou en escoltar la música; s'ha de veure"

Igor Stravinsky (compositor i director d'orquestra rus)

Ja hem analitzat la part matemàtica que trobem a la música al sentir-la. Ara observarem la relació matemàtica sobre el paper, més concretament la de la melodia de les composicions musicals.

6.1 Estructures matemàtiques de les obres

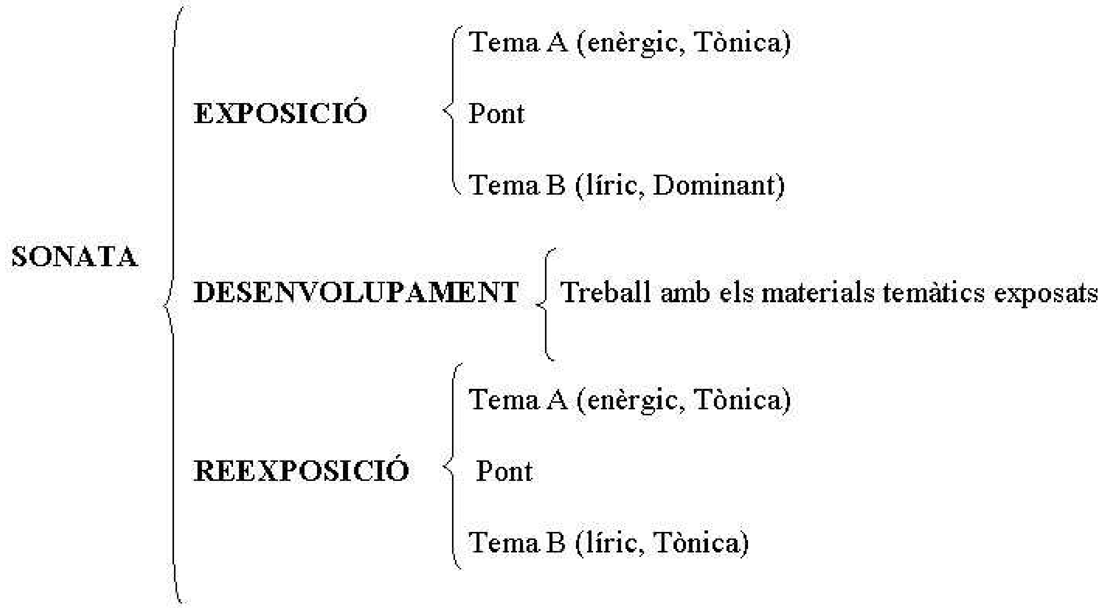
Totes les grans obres musicals al llarg de la historia presenten una estructura definida (sense tenir en compte la música contemporània) que li permet a l'orella que a l'escoltar-ho sigui agradable. Depèn de les èpoques musicals (edat mitjana, renaixement, barroc, classicisme i romanticisme) veiem diferents estructures a la melodia. En tot cas totes aquestes estructures solen tenir les mateixes característiques: Un tema principal (de un determinat nombre de compassos que solen ser múltiples de 4), repeticions, variacions d'aquest tema o un desenvolupament i altres temes secundaris.

Per exemplificar-ho mirarem l'estructura d'una de les formes més importants de la música clàssica i de la música en general: la sonata. Com que és una forma molt gran la analitzaré amb dues parts primer a l'engròs i després més detalladament.

A grans trets la sonata esta composta per tres parts una exposició que es repeteix un desenvolupament i una reexposició final (que és molt semblant a la exposició).

Més concretament a l'exposició hi trobem un tema principal (de llargada de un nombre de compassos múltiple de 4), un pont i un tema secundari. El desenvolupament és com diu el nom el tema principal però desenvolupat (aquesta es la part menys estructurada). I la reexposició és igual que l'exposició però amb una coda final.

Així dons veiem que una de les formes més prestigioses de la música clàssica està totalment estructurada.



Il·lustració 6.1 – Estructura d'una sonata

6.2 Transformacions geomètriques de la melodia

Són donades quan una part de la melodia es repeteix però canviant de posició o de forma. Són molt i molt utilitzades ja que crea melodies repetitives per tant fàcils d'escoltar i agradables per la nostra orella, però a més a més les canvia lo suficient perquè les trobem interessants i no massa repetitives.

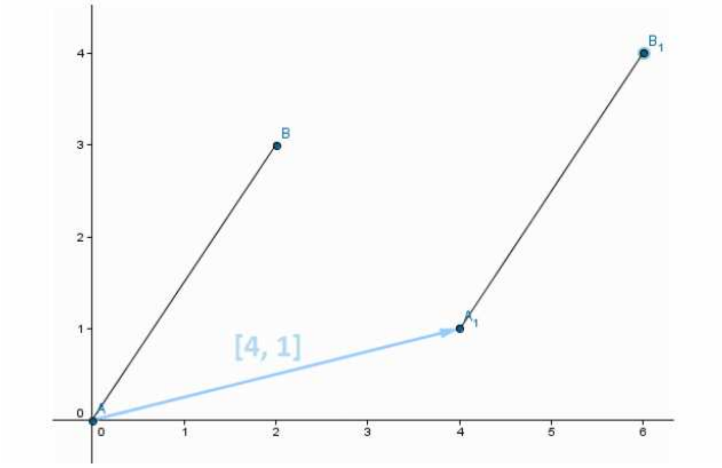
N'hi ha de dos tipus: Isometries o moviments i homotècies.

<u>6.2.1 Isometries</u>

La seva funció és desplaçar la melodia, segons el tipus de isometria la desplaçarà de una manera o altre. N'hi ha 3 tipus:

- <u>Translacions:</u>
  Matemàticament parlant, una translació de vector *v* és un moviment que transforma qualsevol punt P en un altre punt P', de manera que el vector [P,P'] té el mateix mòdul, direcció i sentit que el vector *v*.

Per exemple:

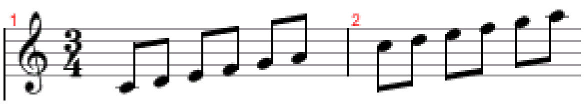


Il·lustració 6.2 - Translació

Com veiem en el gràfic, els dos vectors representats tenen el mateix mòdul, la mateix direcció i el mateix sentit. La diferència està en que el primer vector comença en el punt (0,0) i el segon vector en el punt (4,1).

Ara per aplicar-ho a la musica és fer exactament el mateix: un tros de la melodia serà traslladat a un altre lloc del pentagrama però sense rebre modificacions melòdiques.

Per exemple:

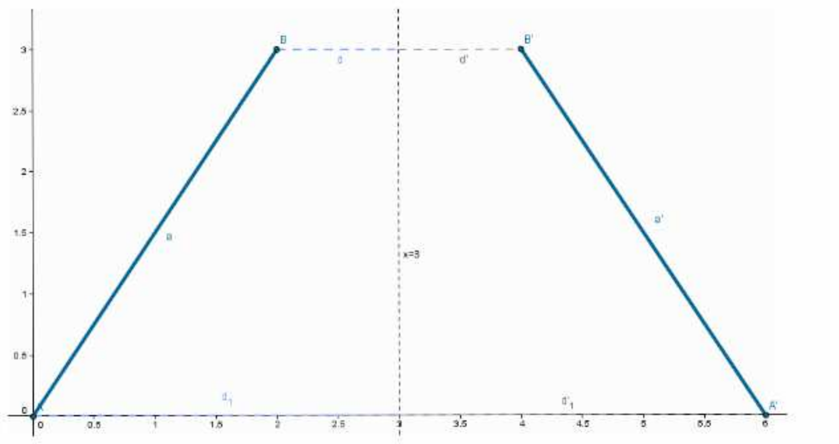


Com podem observar, la part de melodia del primer compàs ha estat traslladada una octava per amunt en el segon compàs, però tot i així segueixen havent-hi els mateixos tons entre notes.

- <u>Simetries axials o reflexions:</u>

  Matemàticament una simetria axial o reflexió és una transformació geomètrica que, donada una recta *r*, anomenada eix de simetria, transforma cada punt P en un altre punt P' de manera que l'eix de simetria és la mediatriu del segment PP'. Correspon a un gir de α=180º de cadascun dels punts que formen la figura.

Per exemple:



Il·lustració 6.3 – Simetria axial o reflexió

Com podem veure en el gràfic, el primer vector ha patit una reflexió així que la y inicial del primer vector passa a ser al y final del segon i la y final del primer vector passa a ser la y inicial del segon vector.

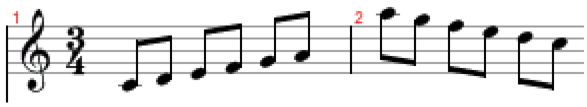
Per aplicar-ho a la música també serà exactament el mateix, una manera molt fàcil de veure-ho és en una part de melodia que és en forma ascendent i després es repeteix exactament igual però de forma descendent.

Per exemple:

En aquest cas, la línea divisòria del compàs seria l'eix de simetria i veiem que la primera part de la melodia del primer compàs és repetida exactament igual però de forma descendent al següent compàs.

A més algunes vegades trobem una translació i una reflexió a la vegada tot i que és menys habitual.

Per exemple:

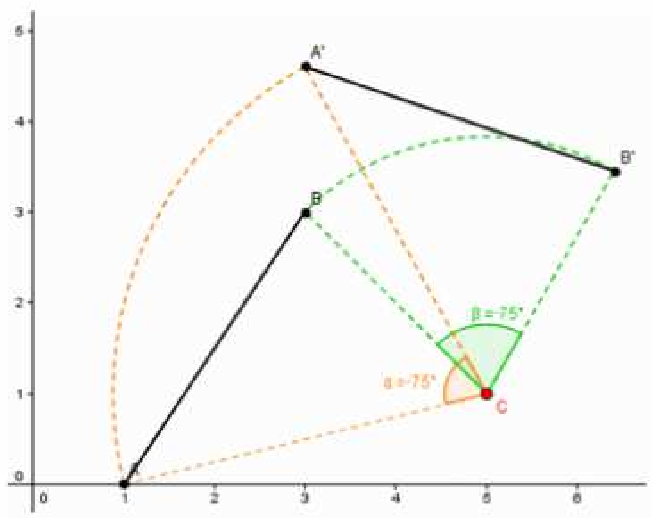


Com podem veure al segon compàs s'ha fet una reflexió i una translació, ja que la melodia fa exactament el mateix però de forma descendent i a més ha estat traslladada una octava amunt.

- Girs:

Matemàticament un gir de centre O i d'angle α és una transformació geomètrica que fa correspondre a cada punt P un altre punt P' situat a la mateixa distància de O (OP=OP') i de manera que l'angle (POP')=α

Per exemple:



Il·lustració 6.4 - Gir

Com podem veure en aquest gràfic, el vector [A,B] ha patit un gir de 75 graus respecte el punt C.

En música seria exactament el mateix: la primera part de la melodia faria un gir sobre un centre imaginari per formar una segona part. Aquesta isometria és la que provoca un canvi més gran a la melodia.

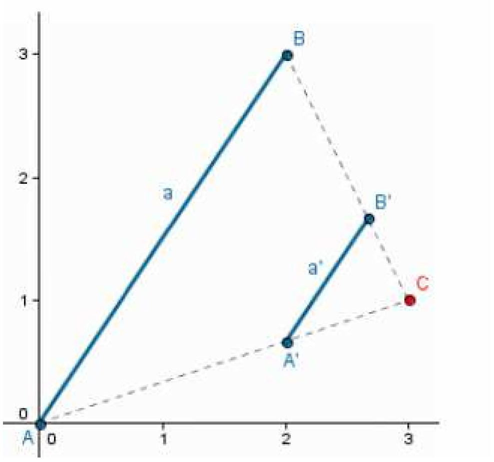
Per exemple:

El centre de gir seria el puntet vermell que hi ha a la tercera línea del pentagrama entre la primera part de la melodia (primeres tres notes) i la segona (següents tres notes). Està col·locat d'aquesta manera perquè és la meitat de la distància entre la primera nota de la primera part de la melodia i la primera nota de la segona part de la melodia. Com podem observar la melodia ha fet un gir i per tant a la segona part, on a la primera les notes estaven situades de forma creixent ara ho estant en forma decreixent i viceversa.

6.2.2 Homotècies

Són transformacions que conserven la forma però no les dimensions. Es necessita una raó per tal de fer l'homotècia, i un punt des del qual es fa.

Per exemple:

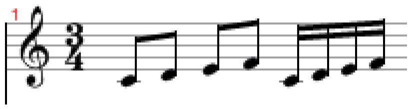


Il·lustració 6.5 - Homotècia

Com podem veure en el gràfic, el segon vector conserva la forma respecte el primer vector respecte el punt C però el segon vector és més petit que el primer.

Traduint-ho a la musica seria que la forma (en aquest cas les notes) es mantindrien igual però en canvi les dimensions (ritme) variaria, o sigui podria augmentar el valor rítmic de la nota o disminuir.

Per exemple:



Com podem veure fàcilment la primera part de la melodia (primeres quatre notes) és repeteix a la segona (quatre següents) però el doble de ràpid perquè les corxeres passen a ser semicorxeres.

7. ANÀLISI D'EXEMPLES HISTÒRICS DE OBRES AMB CONTINGUT MATEMÀTIC

"Els músics són totalment irracionals. Sempre volen que un sigui totalment mut en el precís moment que un desitja ser completament sord"

Oscar Wilde (dramaturg i novel·lista irlandès)

7.1 Mozart i el Joc de Daus

Wolfgang Amadeus Mozart (Salzburg, actual Àustria; 27 gener 1756 - Viena, 5 desembre 1791), és considerat com un dels més grans compositors de música clàssica del món occidental. Tot i que va morir molt jove (tot just als 35 anys), ens ha llegat una obra tan important que abasta tots els gèneres musicals de la seva època. Era, tant al piano com al violí i la viola, un virtuós.

7.1.1 El Joc de Daus

Mozart, al 1777, als escassos 21 anys d'edat, va escriure un "Joc de Daus" Musical per escriure valsos simples de 16 compassos amb l'ajuda de dos daus sense ser músic ni saber res de composició". Va escriure 176 compassos adequadament (que podreu trobar a l'Annex II pàgina i-4) i va posar el seu número en dues taules de 88 elements cadascuna:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Il·lustració 7.1 – Taules del *Joc de Daus*

El joc comença llançant dos daus, de manera que tenim 11 números possibles (del 2 al 12). Les xifres romanes sobre les columnes indiquen els compassos del vals que com que tindrà dos parts va de 1 a 8 dues vegades. Per cada tirada s'avança una columna.

Per exemple si estic per la columna número 5 de la primera part i el resultat dels daus és un 9, el compàs número cinc del meu vals haurà de ser el número 140 dels compassos que va escriure Mozart.

Per mostrar l'efectivitat d'aquest mètode jo mateix composaré una peça utilitzant el mètode del joc de daus de Mozart.

A la següent taula hi figuren els resultats de les meves tirades:

Primera part (compassos 1-8)

Número de compàs (llançament)	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Número dels daus	5	10	8	7	11	6	10	2
Compàs de Mozart a utilitzar	40	142	171	167	135	97	62	30

Taula 7.1 – Primeres vuit tirades

Segona part (compassos 9-16)

Número de compàs (llançament)	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Número dels daus	10	6	5	8	2	5	8	4
Compàs de Mozart a utilitzar	65	143	7	175	112	160	89	79

Taula 7.2 – Segones vuit tirades

Així dons utilitzant els compassos que va escriure Mozart que ens han tocat al llançar els daus he escrit el vals de 16 compassos que en resultarien.

Aquesta obra de Mozart permet compondre un total de 11^{16} valsos diferents que si tenen una mitjana de durada de 30 segons dons es tardarien uns 700 anys per escoltar-los tots.

Il·lustració 7.2 – Composició pròpia a partir de les tirades

* La reproducció d'aquesta peça es troba al directori annex\mp3 del cd adjunt.

7.2 Pachelbel i el cànon en Re Major

Johann Christoph Pachelbel (Nuremberg, Sacre Imperi, 1 de setembre 1653 - Ibídem, 3 març 1706), va ser un destacat compositor, clavecinista i organista alemany del període barroc. Es compta entre els més importants músics de la generació anterior a Johann Sebastian Bach. A més de compondre una gran quantitat d'obres sacres i seculars, va contribuir al desenvolupament del preludi de coral i fuga, el que li va guanyar un lloc entre els compositors més importants de l'era barroca.

7.2.1 Cànon en Re Major

És la peça més coneguda de Pachelbel i una de les més famoses de la música barroca. Escrita al 1680, des de la seva composició se n'han fet una gran varietat d'arranjaments per a tot tipus d'instruments i agrupacions musicals tot i que la seva forma original és per a tres violins (que interpreten la melodia) i un violoncel (que interpreta el baix continu).

Podeu trobar la partitura en qüestió a l'Annex III, pàgina i-11 i també la reproducció d'aquesta al directori Annex\mp3 del cd adjunt.

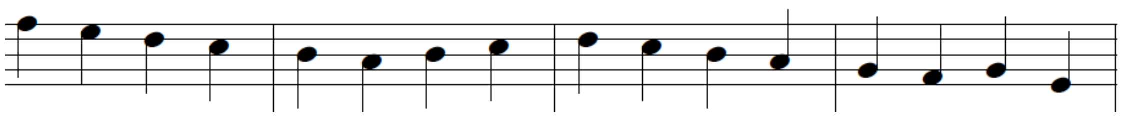
7.2.2 Anàlisi de la peça

La peça la analitzarem en dues parts: la primera serà la melodia del primer violí (que al ser un cànon és la mateixa dels altres dos violins) on hi buscarem exemples de geometria en la partitura explicats en el punt anterior. La segona, que es la raó principal d'haver escollit aquesta peça, serà analitzar el baix continu que interpreta el violoncel on veurem la gran particularitat que té.

Melodia:

Com he dit abans exemplificaré les transformacions geomètriques

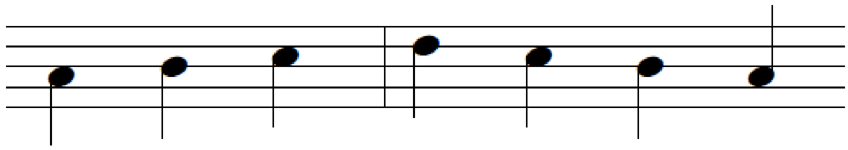
- Isometria:



Il·lustració 7.3 – Fragment del cànon de Pachelbel

Aquests quatre compassos són el 3r, 4t, 5è i 6è del primer violí. Com podem veure clarament la melodia fa exactament el mateix entre els primers dos compassos i els dos següents (amb la diferència de la última nota que canvia per ajudar la continuïtat de la melodia) però amb una segona descendent de diferència.

- Simetria axial o reflexió:



Il·lustració 7.4 - Fragment del cànon de Pachelbel

Aquests dos compassos són 8è i 9è del tercer violí. Com podem veure les tres primeres notes fan el mateix que la cinquena, sisena i setena. Amb la particularitat que la nota més alta (Re) no es repeteix i fa d'enllaç entre la primera i la segona part.

- Gir:

Il·lustració 7.5 - Fragment del cànon de Pachelbel

Aquestes figures fan referència al 2n i 3r temps del compàs núm. 29. El centre de gir estaria situat entre les primeres quatre notes i les quatre següents.

Com podem observar en el següent quadre:

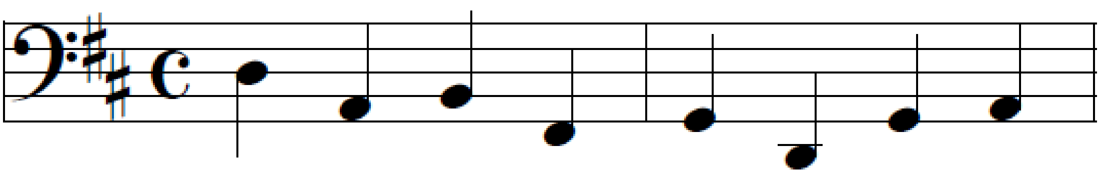
PRIMERES 4 NOTES	MOVIMENTS	SEGONES 4 NOTES	MOVIMENTS
1a(Do)-2a(Do)	Octava descendent	1a(Si)-2a(Si)	Octava ascendent
2a(Do)-3a(Re)	Segona ascendent	2a(Si)-3a(La)	Segona descendent
3a(Re)-4a(Do)	Segona descendent	3a(La)-4a(Si)	Segona ascendent

Taula 7.3 – Moviments efectuats en el gir

Les 4 primeres notes abans del centre de gir presenten els mateixos moviments entre elles que les 4 segones entre elles, amb la única diferència que si a les primeres 4 el moviment entre elles és ascendent, a les segones 4 serà descendent i quan és descendent a les segones 4 es ascendent.

Baix continu:

Com he dit abans aquesta és la raó d'haver escollit aquesta peça. El baix continu interpretat per el violoncel és el següent:



Il·lustració 7.6 - Fragment del cànon de Pachelbel

Una sèrie de vuit notes (Com que és en clau de fa són: Re-La-Si-Fa#-Sol-Re-Sol-La) que es va repetint un total de 28 vegades durant tota la peça.

Com que aquesta peça utilitza l'escala de Re Major les notes d'aquest baix representen els següents graus: **I-V-VI-III-IV-I-IV-V**.

Aquesta simple fórmula musical sobre la qual va ser composada aquesta peça musical ha servit de motlle per crear moltes i moltes cançons dels últims anys que utilitzen el mateix baix i per tant la mateixa estructura harmònica o una estructura molt similar que deriva d'aquesta mateixa.

Aquesta és una llista d'alguns dels exemples de cançons actuals de grups i cantants molt coneguts internacionalment que fan servir aquesta estructura o una de molt similar (per fer-ho jo mateix he analitzat la harmonia de les següents cançons que podeu trobar a l'arxiu digitalitzat de l'annex):

- **Green Day – Basket Case (1995)**
  Aquesta cançó del grup americà de punk-rock més famós del món és una de les seves cançons més representatives i presenta una estructura molt similar al cànon: I-V-VI-III-IV-I-V. Com veiem es salta un acord però tot i així la funció harmònica és la mateixa perquè acaba en el mateix grau que el cànon (V).

- **Aerosmith – Cryin' (1993)**
  El grup també americà de rock clàssic utilitza una estructura exactament igual que l'anterior que em vist: I-V-VI-III-IV-I-V.

- **Rosana – Soñaré (2005)**
  Aquesta cançó presenta una estructura idèntica en el cànon a la tornada i la harmonia també és exactament igual i en el mateix to.

- **The Beatles – I want to hold your hand (1963)**
  Un dels grups de rock pop-rock més importants de la història de la música també contribueix a la llista amb aquesta cançó. En aquest cas la seva estructura és de I-V-VI-III-IV-I-II-V. Com veiem l'únic que canvia és el penúltim acord que passa de ser un IV a un II que harmònicament parlant són acords molt similars.

- **Bob Marley – No woman, no cry (1974); U2 – With or without you (1987); Blink 182 – Dammit (1997).**
  Aquestes tres cançons del cantant de reggae jamaicà més conegut de la historia, un dels grups britànics de rock més coneguts i un grup de

pop-punk emergent molt important, tenen en comú la seva estructura. De totes les cançons d'aquesta llista són les que menys s'assemblen al cànon, tot i així la seva estructura està format pels quatre primers acords d'aquest: I-V-VI-III.

- **I-V-VI-IV**
  Aquesta estructura derivada de la del cànon (utilitza els acords de més pes harmònicament parlant) és la "la fórmula mare" de més d'un 25% de les cançons electròniques i pop llançades aquest últim any segons un estudi fet per el compositor, psicòleg i cantautor cordovès Aldo Narejos. Cinc exemples de cançons que utilitzen aquesta estructura són: Passanger – Let her go; Inna – More than friends; Avicii – Wake me up; P!nk – Try; The Script – Hall of Fame.

Els exemples que he escollit per fer l'anàlisi no són els que més coincideixen amb la estructura del cànon però sí que són els més coneguts, per tant he decidit posar aquests per demostrar la gran repercussió que ha tingut aquesta estructura o fórmula sobre la música actual en grups i cantants molt coneguts.

7.3 El nombre d'or i la successió de Fibonacci

7.3.1 El nombre d'or

El nombre d'or, la proporció Àurea o la divina proporció és un nombre representat per la lletra grega phi ϕ que posseeix moltes propietats interessants en el camp de la natura, la arquitectura, la biologia, la geometria, l'art i la música. Va ser descobert per Fidias que el va donar un valor de relació o proporció i no d'unitat. La trobem quan la proporció entre una part i el conjunt és igual a la relació entre la resta i el conjunt.

$\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1'618033988$

La proporció Àurea la trobem amb molta freqüència en música, però serà difícil trobar la proporció exacta en una peça ja que condicionants com el compàs ho fan impossible. Tot i que en diverses peces trobem aquesta proporció (com a la 5a simfonia de Beethoven, en la Inversió nº1 de Bach o en moltes de Mozart) no vol dir que el compositor tingui coneixement de la seva existència, si no que arribar a ella o acostar-se significa transmetre a l'auditori un so agradable mitjançant procediments intuïtius, pràctics o místics.

7.3.2 Leonardo Pisano i la successió de Fibonacci

Més conegut com Leonardo Fibonacci (1170 – 1250), fou un matemàtic italià, potser un dels matemàtics amb més talent de l'edat mitjana. va introduir i difondre per tot Europa el sistema de numeració aràbiga que actualment utilitzem, la notació posicional i el número 0; però sens dubte és conegut per ser l'autor i pensador de la successió de Fibonacci.

La successió de Fibonacci:

Va sorgir de la pregunta ''Quantes parelles de conills haurà desprès d'un temps X?'', la resposta es basà en l'observació en veure que el nombre de conills en una generació era igual a la suma de les parelles de conills que hi havia en les dos generacions anteriors. D'aquesta peculiar manera neix la seqüència de Fibonacci, que s'inicia amb el número 0 i 1 i a partir d'aquí els demés s'obtenen per la suma del dos anteriors:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

F(n) = F(n-1) + F(n-2)

0+1 = **1**; 1+1 = **2**; 2+1 = **3**; 3+2 = **5**; 5+3 = **8**; 5+8 = **13**; 13+8 = **21**

La seqüència presenta algunes propietats:

• Cada tres números hi ha un nombre parell: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

• Cada cinc números hi ha un múltiple de 5: 1, 1, 2, 3, 5, 13, 21, 34, 55...

• La divisió de dos nombres consecutius de la successió donen com a

límit el nombre d'or:1/1 = 1; 2/1 = 2; 3/2 = 1'5; 5/3 = 1'666666; 8/5 = 1'6; 13/8 = 1'625

Aquesta successió ha tingut gran repercussió sobre la música, sobretot a les estructures musicals de la música pop actual. Per veure-ho exemplificat ara analitzaré la cançó *Just Give Me a Reason* de Pink (Podeu trobar la partitura de la cançó a l'Annex IV, pàgina i-19).

7.3.3 Just Give Me a Reason – P!nk

Just Give Em a Reason és una cançó escrita i gravada per la cantant i compositora nord-americana P!nk en la qual col·labora el cantant i líder de la grup Fun, Nate Ruess. La cançó és el tercer senzill del sisè àlbum Pink que va llançar l'any 2012. Abans del llançament oficial d'aquest senzill. El vídeo oficial es va estrenar el 5 de febrer del 2013 al compte oficial de Youtube de la cantant, i compta amb més de 200.000.000 de visites.

He escollit aquesta cançó perquè estructuralment parlant utilitza abastament la successió de Fibonacci com veurem en els següents punts:

- La lletra comença en el compàs número 5 de la cançó (un nombre de la successió de Fibonacci).
- La pre-tornada comença en el compàs número 13 de la cançó (un altre nombre de la successió).
- La tornada comença en el compàs número 21 de la cançó (un altre nombre de la successió).
- El moment àlgic de la cançó (el clímax) comença en el compàs número 55 que és un altre nombre de la successió. (A la partitura que trobem a l'annex veiem que comença al compàs 42 però això és perquè no es tracta de la partitura original, i l'autor de la de l'annex anteriorment ha utilitzat una repetició per estalviar-se d'escriure 13 compassos, així que en veritat comença al compàs 55).
- El clímax de la cançó es troba just en el moment de la cançó corresponent al número auri respecte el temps. Segueix la següent fórmula: **Moment del Clímax= n · 0,618.** On **n** són els segons que dura la peça i **0.618 (o nombre phi)** són els decimals que obtenim quan dividim un nombre de la successió de Fibonacci per el nombre anterior de la successió i, com hem vist abans, coincideixen amb els decimals del nombre auri. Així dons el Moment del Clímax d'aquesta cançó hauria de ser al min 243 (4.03 minuts que dura la cançó en

segons) multiplicat per 0,618 = 150,174 segons, passat a minuts són 2,5 minuts. Si busquem el clímax de la cançó trobem que comença als 2′ 22′′ per tant als 2′ 30′′ (2,5 minuts) ja hi esta completament. Aquesta fórmula es pot aplicar també a moltes altres cançons actuals.

* Les reproduccions de totes les cançons analitzades es troben al directori annex\mp3 del cd adjunt.

7.4 Béla Bartók i les Obres d'Or

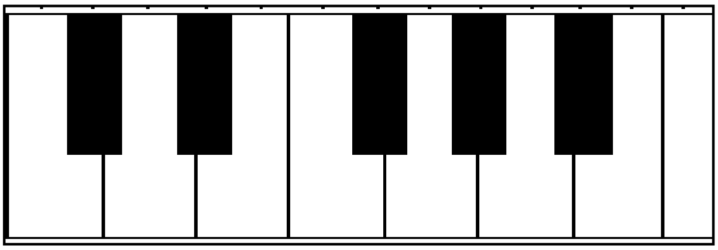
Béla Bartók (Hongria 1881 - Nova York, 1945) va ser un compositor, pianista i investigador de música folklòrica d'Europa de l'Est. Bartók va ser un dels fundadors del camp de l'etnomusicologia, l'estudi de la música folklòrica i la música de cultures no occidentals.

Abans hem parlat de compositors (Beethoven, Mozart, Bach, etc.) que havien utilitzat la proporció Àurea en les diverses de les seves peces, però sens dubte cap no ho va fer amb tanta consciència ni amb tan aprofundiment com Bartók. Evidentment s'ha d'observar que Bartók és molt més contemporani cosa que li dona molta avantatge respecte els altres compositors esmentats que van ser molt anteriors a ell.

Com he dit abans moltes obres de l'hongarès tenen amagades relacions amb la divina proporció i amb Fibonacci, per aquesta raó m'ha semblat oportú dedicar-li un apartat. A continuació veurem alguns fragments de les seves obres, ja que es tracten de grans composicions, i els coneixements que podem extreure d'elles.

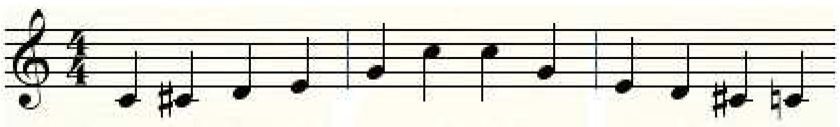
7.4.1 L'escala de Fibonacci

Béla Bartók coneixia bé el descobriment de Fibonacci; per aquesta raó Bartók va desenvolupar una escala musical que tenia com a base la successió de Fibonacci, i la va anomenar: Escala de Fibonacci. Va descobrir-la partint de l'escala cromàtica (és la que passa per tots els tons i semitons o sigui totes les tecles del piano); Per explicar-ho millor faré servir un teclat per veure-hi l'escala cromàtica representada:



Il·lustració 7.7 – Octava d'un piano/teclat

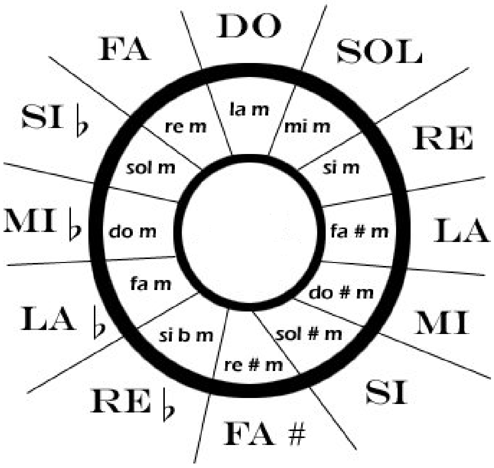
Com podem observar, en una octava, hi ha 8 tecles blanques (que és un nombre de Fibonacci): **Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do**. I 5 tecles negres (un altre nombre de Fibonacci): **Do#, Re#, Fa#, Sol#, La#**. Per tant això forma un total de 13 tecles (un altre nombre de Fibonacci): **Do, Do#, Re, Re#, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La#, Si, Do** que formen l'escala cromàtica (en aquest cas de do). Per tant si numerem totes les tecles de l'1 al 13, i agafem nomes els nombres de Fibonacci dins aquest rang (1, 2, 3 , 5, 8, 13) traduït en notes: **Do, Do#, Re, Mi, Sol, Do** obtenim la escala de Fibonacci.



Il·lustració 7.8 – Escala de Fibonacci

És una escala molt rica i interessant harmònicament parlant ja que comença amb un cromatisme que ens provoca un sentiment de misteri i estranyesa, però alhora com que conté totes les notes de l'arpegi major (en el cas de Do: Do, Mi, Sol, Do) ens dóna també una sensació molt agradable.

7.4.2 Cercle tonal de Bartók



Il·lustració 7.9 – Cercle tonal de Bartók

Bartók va crear un simple cercle que permetia al compositor saber en tot moment quina era la tònica (1a nota de l'escala), la dominant (5a nota de l'escala) i la subdominant (4a nota de l'escala). Per fer-ho va fer un cercle on hi sortien les 12 tonalitats majors de una octava a l'exterior del cercle i les 12 menors al centre.

Començant per Do Major va situar les altres tonalitats de quinta en quinta de manera que pots agafar qualsevol tonalitat i, aquella nota serà la tònica, la de una posició en sentit anti-horari la subdominant i la de una posició en sentit horari la dominant. Per exemple: si agafem la tonalitat de **Do Major** ella mateixa serà la tònica, **Sol** serà la dominant i **Fa** serà la subdominant. O per exemple si agafem la tonalitat de **sol# menor** ella mateixa serà la tònica, **re#** serà la dominant i **do#** la subdominant.

8. COMPOSICIÓ

"Compondre no és difícil, el que és complicat és deixar caure sota la taula les notes supèrflues"

Johannes Brahms (compositor alemany)

Arribats a aquest punt del treball, és la hora de intentar plasmar tots els coneixements apresos durant la realització d'aquest a una composició pròpia.

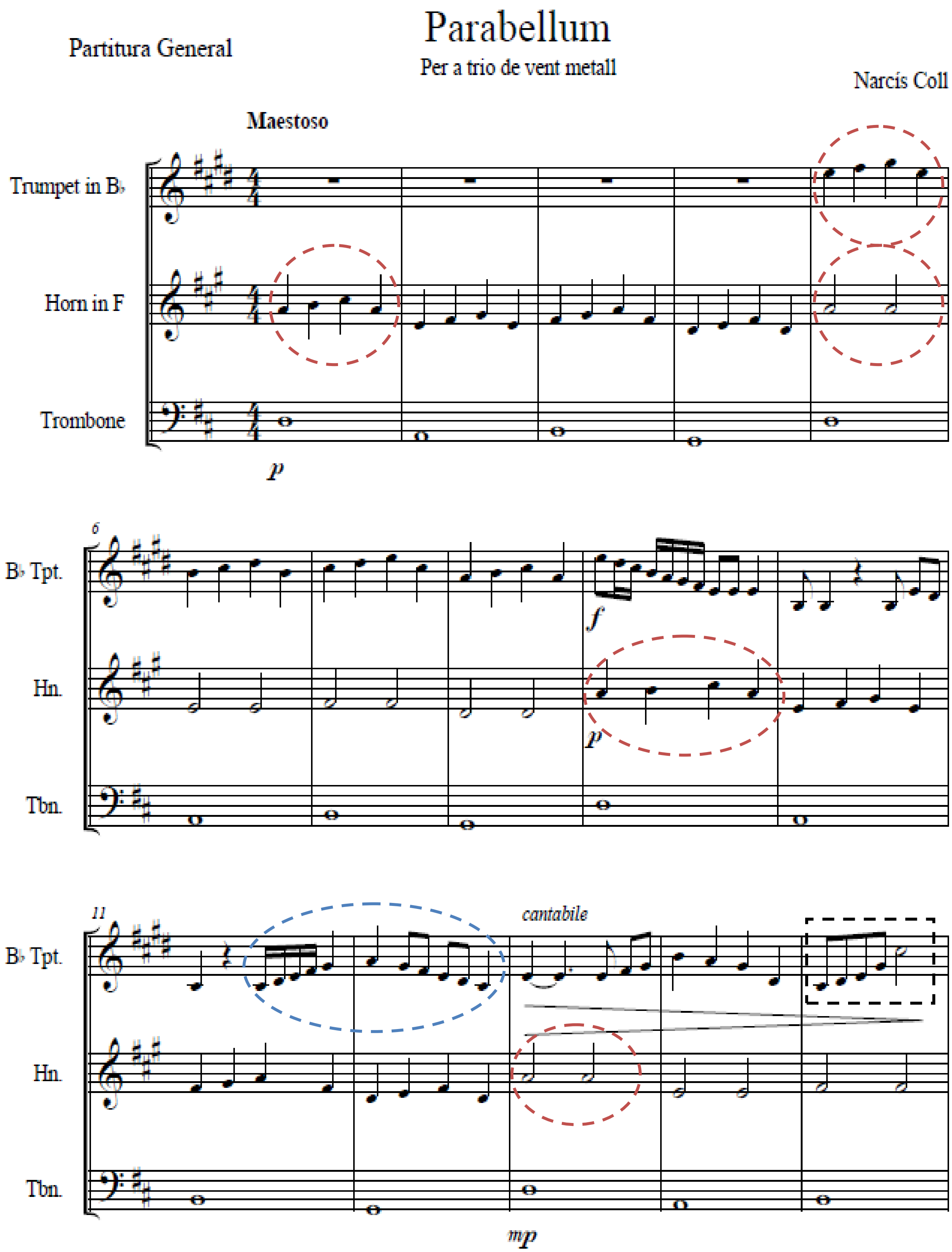
Degut a la meva experiència com a trompetista i les nombroses vegades que he tocat en conjunts de vent metall (els instruments bàsics de vent metall són: trompeta, trompa, trombó, bombardí i tuba.), he decidit fer una petita obra per a un trio de vent metall compost per una trompeta en Si bemoll, una trompa en Fa i un trombó en Do (Si bemoll Fa i Do són els tons en que estan afinats per defecte la trompeta la trompa i el trombó).

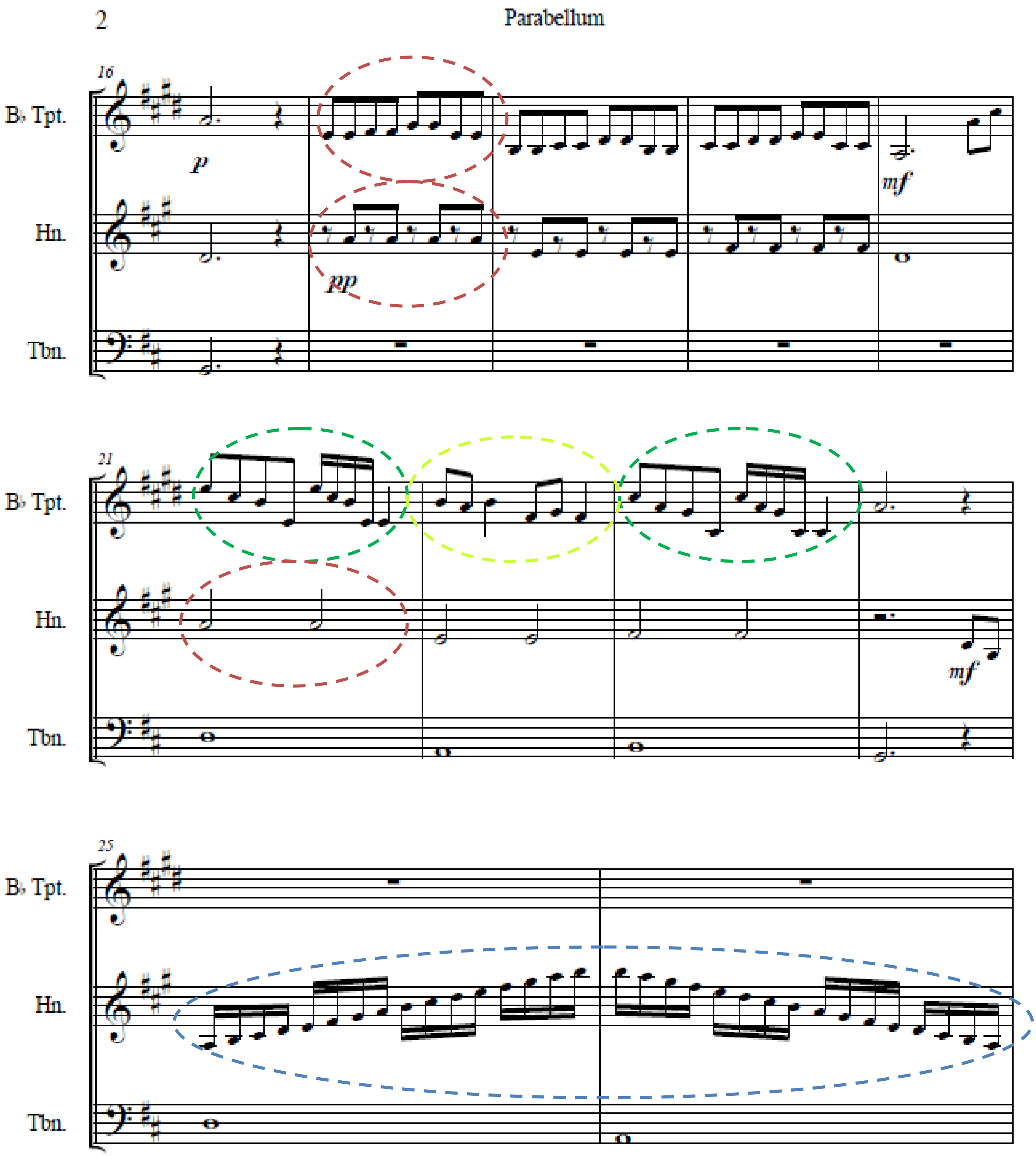
La obra interpretada en el seu tempo original té una duració de dos minuts i vint segons i aquest tempo és de negra=96 (o sigui 96 pulsacions cada minut). La suma de el tempo de l'obra amb la distribució harmònica d'aquesta donen una sensació de majestuositat. És per això que li he donat a la peça el nom de ***Parabellum***. Fruit de l'expressió llatina *Si vis pacem, para bellum* que significa "Si vols la pau, prepara la guerra".

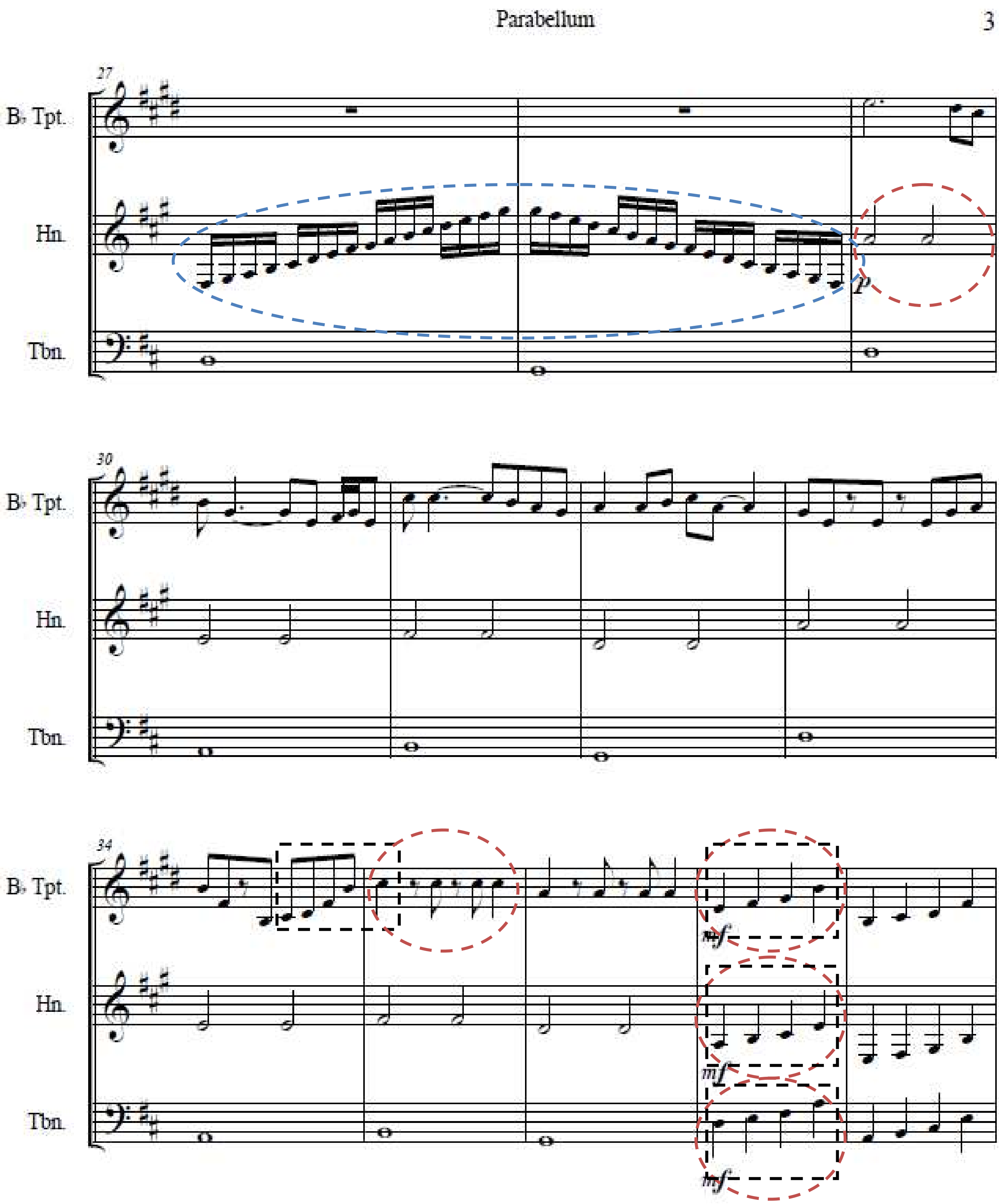
Els conceptes matemàtics (explicats detalladament més endavant) que hi he representat són:

- Transformacions geomètriques (marcades amb cercles de diferents colors segons els tipus) → Translacions (vermell), reflexions (blau), girs (groc) i homotècies (verd).
- Escales de Fibonacci (marcades amb rectangles de color negre).
- Una estructura seguint els nombres de Fibonacci.
- Un baix i estructura harmònica seguint les estructures harmòniques que deriven del cànon de Pachelbel.

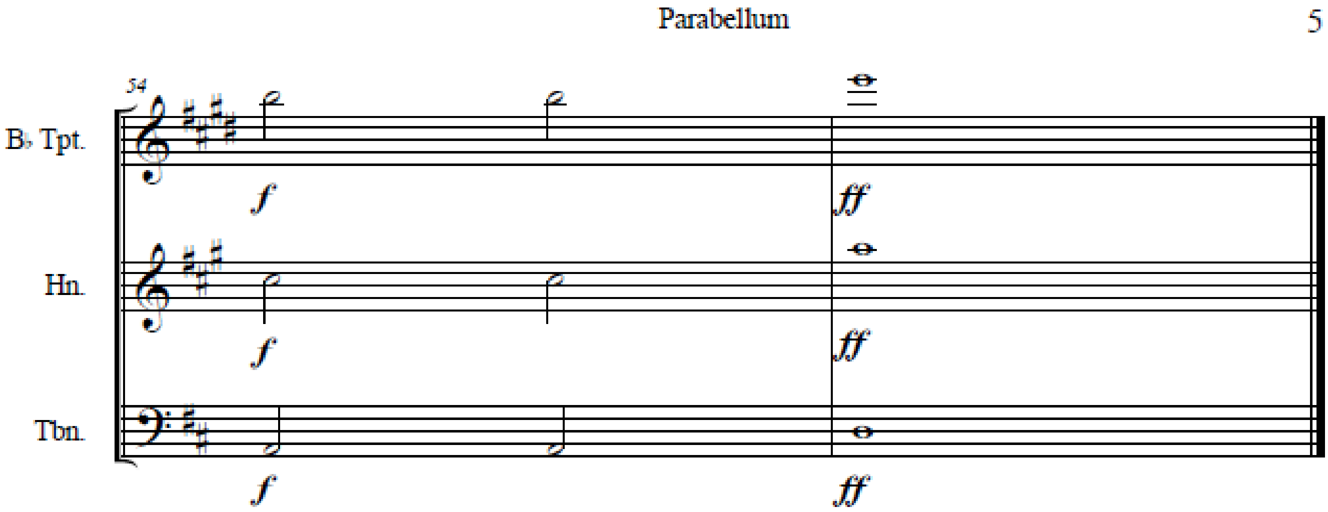
Així dons les següents cinc pàgines estan dedicades a la obra en si i les marques esmentades anteriorment.


Partitura General
Parabellum
Per a trio de vent metall
Narcís Coll
Maestoso
Trumpet in B♭
Horn in F
Trombone
p
6
B♭ Tpt.
Hn.
Tbn.
f
p
11
B♭ Tpt.
Hn.
Tbn.
cantabile
mp


2
Parabellum
16
B♭ Tpt.
Hn.
Tbn.
p
pp
mf
21
B♭ Tpt.
Hn.
Tbn.
mf
25
B♭ Tpt.
Hn.
Tbn.


Parabellum
3
27
B♭ Tpt.
Hn.
Tbn.
p
30
B♭ Tpt.
Hn.
Tbn.
34
B♭ Tpt.
Hn.
Tbn.
mf
mf
mf


4
Parabellum
39
B♭ Tpt.
Hn.
Tbn.
mp
44
f
49
mf
mf
rit.
mf

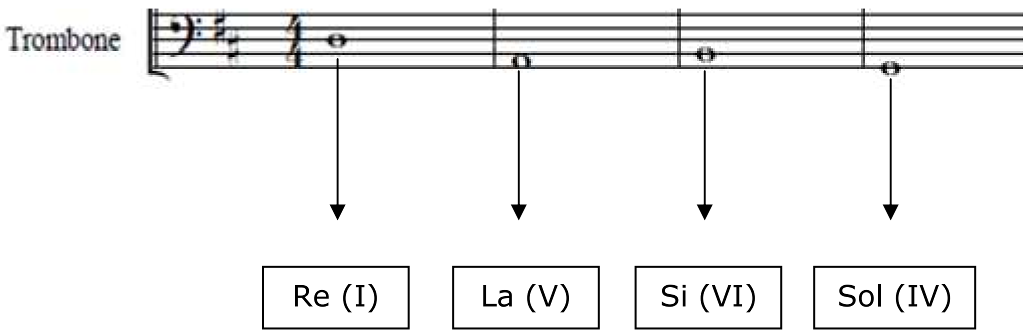


* La reproducció d'aquesta peça es troba al directori annex\mp3 del cd adjunt.

8.1 Anàlisi de la composició

Així doncs, analitzaré detalladament els aspectes esmentats anteriorment. Per tant, en primer lloc començaré per estudiar el primer que he fet a l'hora de composar la peça: el baix i l'estructura harmònica.

Com que volia escollir una **estructura harmònica** no massa complicada i agradable per la oïda, he optat per agafar una de les estructures que deriven de l'estructura del cànon de Pachelbel. La estructura és la següent I-V-VI-IV, que en la tonalitat de Re Major (en que està escrita la meva composició) les notes són Re-La-Si-Fa. Així doncs, a cada compàs li atribueixo un d'aquests graus i per això surten petites frases de quatre compassos. A més, **el baix** (trombó) a cada compàs fa una rodona que dura tot el compàs amb la nota corresponent de cada grau com podem veure a continuació:



El trombó com que fa de baix continu, anirà repetint aquestes quatre notes de manera seguida al llarg de la peça excepte en algun lloc puntual que no ho farà perquè passa a tenir una altra funció.

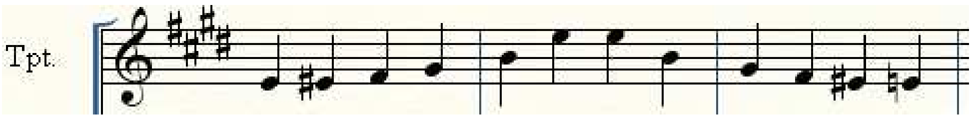
Un cop he tingut el baix i la estructura harmònica, he pensat en fer una **estructura de la peça** en que passin coses importants en el els nombres de compàs de la sèrie de Fibonacci que com havíem vist anteriorment, molts artistes com Pink a la cançó de *Just give me a reason* (analitzada en el punt 7.3.3) utilitzen perquè crea estructures còmodes i que no ens semblen gents entranyes a l'hora d'escoltar-les.

Així dons, a simple vista podem veure que en el compàs 5 (nombre de Fibonacci) comença a tocar la trompeta que és la melodia principal. Una altra cosa que es veu a simple vista és que la peça dura un total de 55 compassos (un altre nombre de Fibonacci). Però a més hi ha altres llocs on els nombres de Fibonacci tenen importància com és el cas del compàs 13 i 21 que els dos són inici de frases importants de la peça. Però el lloc on tenen més importància els nombres de Fibonacci és al clímax de l'obra (lloc on la peça té més força que, en aquest cas, consta de tres compassos introductoris seguits del clímax en si) ja que comença al compàs 34 (nombre de Fibonacci). A més, com hem vist en el punt 7.3.3, el lloc més adequat per el clímax és el resultat de multiplicar el nombre total de compassos per el nombre phi (0.618). Per tant si fem 55 x 0.618 ens dóna un resultat de 34 així que podem dir que el clímax comença al lloc més adequat de la peça.

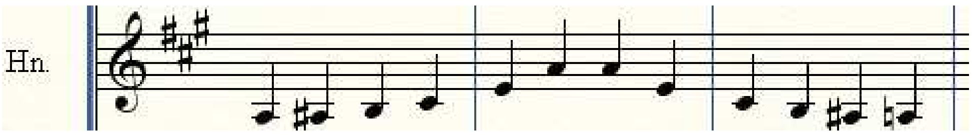
Ja tenint l'estructura de la peça, l'estructura harmònica i el baix, només queda anar completant, seguint les normes de l'harmonia i la intenció de l'autor (en aquest cas jo mateix), les dues veus més melòdiques (trompeta i trompa). Però com que el meu objectiu és introduir-hi aspectes estudiats així ho he fet.

Per una banda hi ha els fragments on s'ha utilitzat l'escala que va escriure Béla Bartok que va anomenar **escala de Fibonacci** i que ara recordaré:

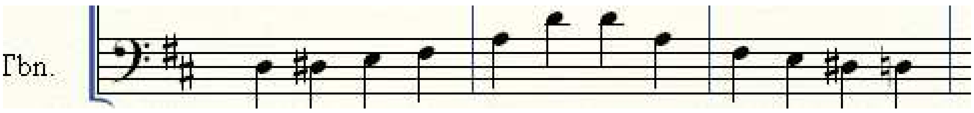
Per la trompeta que toca en to de Mi major serà:



Per la trompa que toca en to de La major serà:



I per el trombó que toca en to de Re major serà:

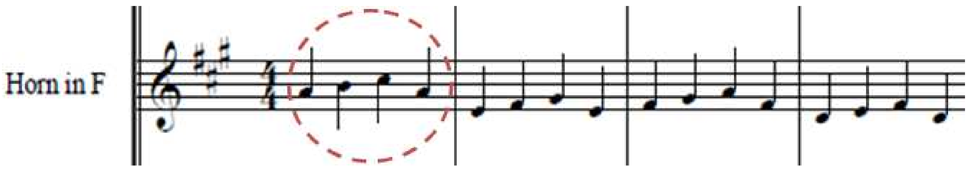


En tots els casos on he utilitzat aquesta escala l'hi he suprimit el segon grau per treure-li el toc que li dóna de misteri i donar-li un toc de majestuositat. Així, com podem veure marcat a la partitura, els compassos on hi trobem l'escala de Fibonacci són per la part de la trompeta el 15 i el 34 (inici del clímax), i finalment ja al punt màxim del clímax del compàs 37 al 40, podem veure com les tres veus realitzen aquesta escala repetidament a l'uníson portant-la pels diferents graus del seu to per donar-li el màxim toc de majestuositat possible durant aquest període de temps.

Finalment ja només queda parlar de les **figures geomètriques** que he introduït dins la partitura.

Per començar hi ha les **translacions** (marcades amb al cercle vermell), en les quals nomes he marcat el fragment o compàs al que es produeix la translació. Així que si mirem els següents compassos del que esta marcat amb el cercle, veiem com aquest fragment va patint un seguit de translacions.

Per exemple, la primera que trobem:



El primet compàs pateix una translació durant els següents tres compassos ja que la melodia fa la mateixa forma però passa per tons diferents.

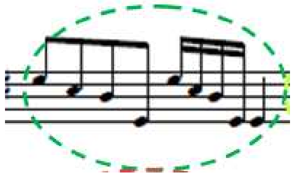
Després hi ha les **reflexions o simetries axials**, per exemple:

La melodia comença en un do, arriba al la passant per tots els tons i torna al do passant per tots els tons.

També trobem els **girs**, per exemple:

Les tres primeres notes fan el mateix moviment que les tres segones però invertit.

Finalment trobem les **homotècies**, per exemple:



Els dos grups de quatre notes fan un moviment harmònicament igual, però el valor rítmic del primer grup és el doble que el del segon, per tant si el primer grup dura dues pulsacions el segon només en dura una.

Un cop ja tinc tots els elements que volíem introduir dins la partitura i completada, seguint les normes de l’harmonia he fet una cadència final amb els graus IV-V-I de l’escala (anomenada cadència perfecte) que dona un final totalment concloent i amb molta força.

9. CONCLUSIONS

"Si no fos per la música, hi hauria raons per tornar-se boig"

Piotr Illitx Txaikovski (compositor rus)

Després de un any, quan vaig començar a realitzar tots els apartats d'aquest treball he arribat a les següents conclusions:

- Les matemàtiques sempre han estat unides a la música i els primers estudis els quals en tenim constància des del segle VI aC. Per part del filòsof, matemàtic i estudiós de la música entre altres coses Pitàgores de Samos.
- Podem trobar aspectes matemàtics a la música en molts aspectes: a la separació de les notes d'una escala, al so que rep la nostra oïda (tot i que en aquest cas també són aspectes físics), a les melodies de les peces, a les estructures definides de les peces composades al llarg de la història de la música, a algunes composicions fetes amb intenció de introduir-hi aspectes de caire matemàtic de grans compositors clàssics, a la estructura de les cançons més comercials actuals...
- Tot i que ara nosaltres sabem que darrere de cada obra musical hi ha un fonament matemàtic molts dels músics que van composar aquestes obres no ho sabien així que evidentment es pot composar sense saber matemàtiques. Jo que en aquest treball he composat per primera vegada a la vida tenint en compte aspectes matemàtics, puc assegurar que també es pot composar sabent molt poques coses de música amb la ajuda de les matemàtiques. Tot i que és més difícil i ocupa més temps, pot arribar a donar un resultat més agradable per la oïda i tot.
- Com he dit en el punt anterior, és possible crear una composició matemàtica sense tenir quasi en compte les normes de l'harmonia però que alhora en moltes ocasions les complirà. Això sí, és una composició molt més complicada en la que has de tenir en compte molts d'aspectes i fins i tot pots passar tot un dia nomes per compondre dos o tres compassos. Tot i així el resultat d'aquesta m'ha convençut i m'ha deixat amb molt bon sabor de boca ja que per mi,

que no tinc massa habilitat per composar, ha resultat un gran esforç però també una gran recompensa.

Comparant el treball ara amb com l'havia enfocat al principi amb els objectius d'aquest, podem veure que hi ha objectius com el de identificar els aspectes matemàtics que influeixen a la música, el de analitzar obres que contenen elements matemàtics o el de composar una peça pròpia, que sí que s'han mantingut de principi a fi i s'han convertit en la base d'aquest treball. Tot i així a mesura que anava avançant en el treball vaig fer petits canvis d'enfocament del treball i, per això, hi ha altres objectius com el de fer un estudi del so o analitzar les condicions "ambientals" que afavoreixen el so, que he deixat de banda. Jo crec que ha sigut la decisió correcte perquè gràcies això m'he pogut centrar en elements mes específics i amb un sol sentit global.

Tot i les dificultats que he trobat a l'hora de composar i analitzar perquè són coses que requereixen molt de temps i concentració, crec que el mes difícil del treball ha sigut un cop tenia les idees del que havia creat o analitzat, saber-ho plasmar sobre el paper de manera que sigui entenedor.

Finalment vull dir que sincerament estic molt content d'aquest treball. Personalment m'ha ajudat a entendre conceptes de música (incloent-hi aprendre a utilitzar programes de edició musical) i de matemàtiques per separat i també aquesta relació entre les dues matèries que tan m'havia intrigat anys enrere. A més, gràcies a aquest treball he estat capaç de realitzar la meva primera composició amb cara i ulls, cosa que com a aprenent de músic i amant de la música, asseguro que és molt gratificant.

10. AGRAÏMENTS

En primer lloc vull donar les gràcies a en Dani Gallostra i Montells, professor de trompeta del conservatori de Girona i a en Miquel Sunyer i Bover professor i cap de departament de llenguatge musical, harmonia i assignatures teòriques del conservatori de Girona per l'ajuda que m'han donat en alguns aspectes musicals concrets i per tots els coneixements de música que m'han proporcionat.

També vull donar les gràcies al meu tutor del treball Manel Bech primerament per ajudar-me a encarar el treball i després pels consells que m' ha donat durant la realització d'aquest.

Finalment vull agrair a totes les altres persones que m'han recolzat i donat un cop de mà per la realització del treball: família i amics.

11. BIBLIOGRAFIA

Llibres:

ASENSI, Matilde. *El último catón.* Espanya: Planeta
PONSETÍ, Ultano. *Aprendre a escriure música amb Finale.*
SUNYER, Miquel. *Anàlisi i formes 5è curs de grau professional*
SUNYER, Miquel. *Harmonia 5è curs de grau profesional.*

Webgrafia:

http://dlc.iec.cat/index.html [14/4/13]
http://en.wikipedia.org/wiki/Tempo[15/4/13]
http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras[11/5/13]
http://www.um.es/docencia/pherrero/mathis/pitagoras/Imag-pitag.htm[11/5/13]
http://www.xtec.cat/~rcapsada/matgrega/musica.htm[2/6/13]
http://www.upf.edu/pdi/dcom/xavierberenguer/recursos/fig_calc/_4_/estampes/3_13.htm [2/6/13]
http://www.swri.org/9what/releases/2004/ultrasound.htm[29/6/13]
http://blocs.mesvilaweb.cat/node/view/id/216815[29/6/13]
http://musicofthespheres.org/Whatismots.htm[30/6/13]
http://www.pensament.com/filoxarxa/filoxarxa/armonia.htm[17/7/13]
http://es.wikipedia.org/wiki/Onda_sonora[17/7/13]
http://www.xtec.cat/centres/a8019411/caixa/ones.htm#top[17/7/13]
http://www.timbre.ws/sharc/[24/7/13]
http://elclubdelautodidacta.es/wp/2012/08/calculo-de-la-frecuencia-de-nuestras-notas-musicales/[24/7/13]
http://en.wikipedia.org/wiki/Acoustics[24/7/13]
http://marionafont.blogspot.com.es/2011/09/epoques-de-la-musica.html[1/8/13]
http://prezi.com/hqmjkrqvo0hs/musica-i-matematiques/[1/8/13]
http://fresno.pntic.mec.es/mrir0002/exposiciomatematiques/web2008/cartells/17_geometria_musica.pdf[2/8/13]
http://www.pachelbelcanon.com/[2/8/13]
http://www.listology.com/lukeprog/list/songs-based-pachelbels-canon[6/8/13]
http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci[12/8/13]
http://do-mi-sol.blogspot.com.es/2010/04/fibonacci-y-la-musica.html[18/8/13]
http://www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_06_07/io5/public_html/p7.html[30/8/13]
http://magicsongs.net/made-in-your-image/the-golden-ratio-in-music/[12/9/13]
http://www.goldennumber.net/music/[16/9/13]
http://www.valenciad.com/Musicos/Bartok.pdf[14/10/13]
http://www.guitarraviva.com/el-circulo-de-quintas/[14/10/13]

ANNEXOS

ANNEX I

S O U T H W E S T R E S E A R C H I N S T I T U T E

Southwest Research Institute (SwRI) News Release

"Solar ultrasound" waves provide clues about decades-old mysteries

Boulder, Colo. -- December 10, 2004 -- The Sun's atmosphere is filled with ultrasound-like waves that may help solve decades-old mysteries about the Sun and space weather, according to Southwest Research Institute® (SwRI®) scientists who found the waves in data from NASA's TRACE spacecraft. Astrophysical Journal Letters reports on the findings in its December 10 issue.

Dubbed "solar ultrasound," the waves are approximately 300 times deeper than the deepest pitch audible to the human ear, at a frequency of 100 millihertz (10-second period).

"At 10-second period, these waves qualify as ultrasound because individual atoms on the Sun experience only a few collisions during the brief passage of each wave, just as with ultrasound here on Earth," says Dr. Craig DeForest, a senior research scientist in the SwRI® Space Science and Engineering Division. DeForest found the signature in TRACE data collected in January 2003.

The waves are most likely created by the sudden collapse of magnetically induced electric currents (magnetic reconnection) or by lower frequency sound waves that crash like ocean waves as they make their way up from the surface of the Sun. Both of the sources are likely candidates for the source of the solar atmosphere's mysterious extra heat, making the new waves a valuable tool for exploring a decades-old mystery.

At up to 100,000° C (180,000° F), the chromosphere, or middle solar atmosphere, is nearly 20 times hotter than the 6,000° C (11,000° F) surface of the Sun. The solar corona, at 1,000,000° C (1,800,000° F), is about 10 times hotter still, or 200 times hotter than the surface of the Sun. Although scientists have been studying the process for more than 50 years, the reason for this difference in temperature remains elusive.

"By examining these waves more closely, we should be able to discern the source of energy release in the solar atmosphere, just like you can tell by listening whether the car is running in a dark garage," says DeForest. "In both cases, something is releasing energy into the environment, and that release has a recognizable sonic signature."

The Sun is filled with lower-pitched waves, at about 3 mHz (5-minute period), that are used to probe the solar interior and even to make images of the far side of the Sun. The solar ultrasound is too high pitched to be directly related to these more well-known "photospheric oscillations."

Sound waves cannot travel through interplanetary space, so they are detected remotely as small fluctuations in the brightness of solar ultraviolet emissions. The TRACE spacecraft, built by Lockheed-Martin for NASA's Explorer program, is an ultraviolet telescope in orbit around Earth. The solar ultrasound is at the limit of detectability by TRACE - so faint that individual waves cannot be resolved. Instead, DeForest sleuthed for patterns in the background noise of the telescope.

"Each individual wave train has an amplitude of about one-tenth of the smallest brightness value that TRACE can see," he says. "But when we average many images together in the right way, a pattern emerges that we can recognize as the signature of trapped waves." The pattern emerges through three-dimensional Fourier analysis, a mathematical technique that isolates individual types of motion from the morass of activity above the solar surface.

Although the waves appear faint, they are quite energetic. "These ripples seem to be carrying about 1 kilowatt of power per square meter on the surface of the Sun," says DeForest. "That is similar to the sonic energy you might find coming out of the speakers at a rock concert. Very loud."

"The discovery of coherent waves at such high frequencies in the upper solar atmosphere challenges our understanding of the magnetic structures in the quiet Sun," says Dr. Joseph Gurman, TRACE mission scientist at NASA's Goddard Space Flight Center. "This work proves that we need new tools to understand the propagation of energy into and out of this part of the solar atmosphere where much of the activity that can affect life here on Earth originates."

The open data policy of the TRACE mission boosts scientific productivity by allowing researchers and the general public to download solar data collected by the spacecraft. This allows individuals to re-use the data for purposes beyond those of the original mission.

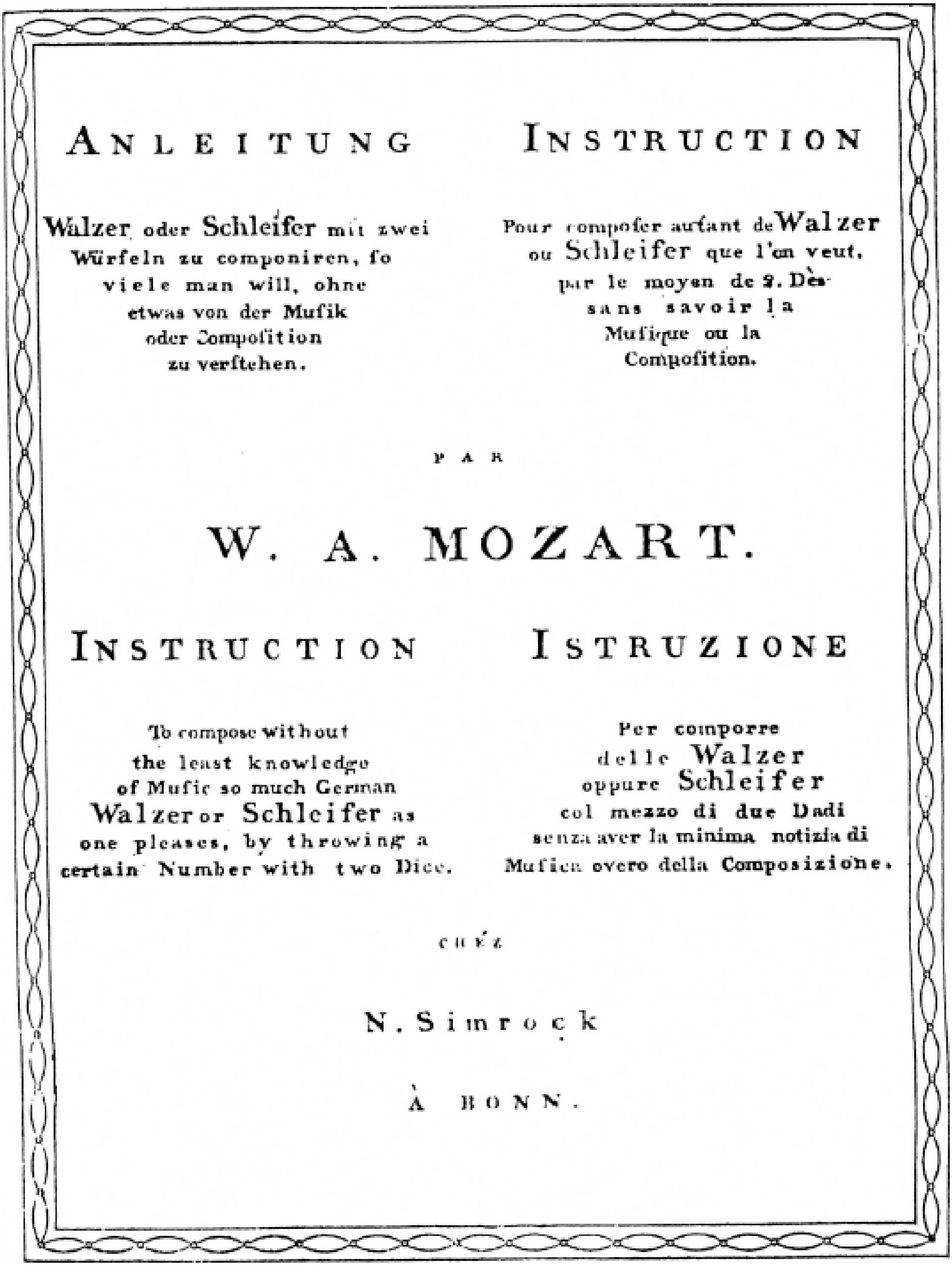
Future instruments will be able to better detect the waves. While TRACE is a simple telescope that can detect only changes in brightness, the waves are likely to have a much stronger Doppler signature. One problem remains, however; Earth's ozone layer is opaque to the ultraviolet light used to see and "hear" the solar ultrasound, making the light difficult to detect from the ground. SwRI scientists are designing rocket- and balloon-borne instruments to observe from above the bulk of Earth's atmosphere to catch a better glimpse of the wave spectrum for probing the solar atmosphere.

The NASA Sun-Earth Connection Guest Investigator Program funded the study that revealed the wave signatures.

Editors: For images to accompany this story, visit http://www.swri.org/press/ultrasound.htm. Related resources are available from the TRACE spacecraft website at http://vestige.lmsal.com/TRACE. For daily pictures of the Sun from space, visit http://sohowww.nascom.nasa.gov.

For more information contact Maria Martinez, Communications Department, at (210) 522-3305, or Dr. Craig DeForest at (303) 546-6020, PO Drawer 28510, San Antonio, TX 78228-0510.

ANNEX II



ANLEITUNG

Walzer oder Schleifer mit zwei Würfeln zu componiren, ſo viele man will, ohne etwas von der Muſik oder Compoſition zu verſtehen.

INSTRUCTION

Pour compoſer autant de Walzer ou Schleifer que l'on veut, par le moyen de 2. Dès sans savoir la Muſique ou la Compoſition.

PAR

W. A. MOZART.

INSTRUCTION

To compose without the least knowledge of Muſic so much German Walzer or Schleifer as one pleases, by throwing a certain Number with two Dice.

ISTRUZIONE

Per comporre delle Walzer oppure Schleifer col mezzo di due Dadi senza aver la minima notizia di Muſica overo della Composizione.

CHEZ

N. Simrock

À BONN.

ANLEITUNG

Walzer oder Schleifer mit 2 Würfeln zu componieren, ohne Mufikalifch zu feyn, noch von der Compofition etwas zu verftehen.

1, Die Grosfen Buchftaben A bis H, Welche über den 8. Colonnen der Zahlentafeln ftehen, zeigen die 8. Tackte eines jeden Theils des Walzers an; z.e. A den erften; B den zweiten; C den dritten u.f.w. und die Zahlen in der Colonne darunter, zeigen die Nummer des Tackts in den Noten.

2, Die Zahlen von 2 bis 12 geben die Summe der Zahl an, welche mann mit zwei Würfel werfen kann.

3, Man wirft alfo z.e. für den erften Tackt des erften Theils des Walzers mit 2 Würfeln 6, und fucht neben der Zahl 6. in der Colonne A, die Nummer des Tackts 148. in der Mufik tafel. Diefen Tackt fchreibt man aus und hat alfo den Anfang des Walzers. Nun wirft man für den zweiten Tackt z. e. 9, fucht neben 9. unter B, und findet 84, in der Mufik, tafel. Diefen Tackt fchreibt man nun zum erften, und fo fährt man fort, bis man nach 8 Würfen den erften Theil des Walzers fertig hat. Dann fetzt man das Repetitionszeichen und geht zum zweiten Theile über; will man nun einen längern Walzer haben, fo fängt man noch einmahl von vorne an, und fo gehts ins unendliche fort.

INSTRUCTION

Pour composer de Walzer ou Schleifer, par le Moyen de deux Dez, fans avoir la moindre Connoifsance de la Mufique ou de la Composition.

1, Les Lettres A — H, qui sont placées au deffus des 8 Colonnes des Tables de nombres, montrent le 8 Mefures de chaque partie du Walzer. Par Exemple: A, la premiere, B, la feconde, C, la troifieme, &c. et les nombres dans la Colonne desfous les lettres demontrent le nombre de la mefure, dans les notes.

2, Les nombres de 2 jusqu'a 12 montrent la somme du nombre qu'on peut jetter.

3, On jette donc par exemple, pour la premiere Mefure de la premiere partie du Walzer, avec deux dez, 6 & cherche près du nombre 6 dans la Colonne A. le nombre de la mefure 148 dans la Mufique. L'on met cette mefure fur le papier & voila ce qui fait le commencement du Walzer. Apres cela on jette pour la feconde Mefure, p. e. 9. on cherche près de 9 sous B, & on trouve No. 84 de la table de mufique. L'on met cette mefure a coté de la premiere & l'on continue ainsi jusqu'après avoir jetté les dez huit fois, & alors on a achevé la premiere partie du Walzer; Enfuite on fait le figne de repetition & commence la 2d. partie. Veut on avoir un Walzer plus long, on recommence de la même maniere, & ainfi cela va à l'infini

INSTRUCTION

To compofe without the least knöledge of Mufic, German Walzer or Schleifer, by throwing a certain Number with two Dice.

1, The letters A — H, placed at the head of the 8 Columns of the Number. Tables fhow the 8, times of each part of the Walzer, Viz. A, the first, B, the fecond, C, the third, &c. and the numbers in the Column under the letters, fhow the number of the time in the notes.

2, The numbers from 2 to 12 fhow the fum of the number that can be thrown.

3, For inftance, in throwing for the firft time of the firft part of the Walzer, with two dice, the number 6, one looks next to that number in the Column A, for the 148th time in the notes. This time is written down, and makes the beginning of the Walzer. — For the fecond time, for inftance, the number 9, being thrown, turn to the fame table Column B, and the number 84 fhall be found. This time is put next to the first, & one continues, in this manner, till the dice fhall be thrown all the eight times, when likewife the first part of the Walzer fhall be finish'd. The sign of repetition is further placed & the fecond part begun, & in cafe a ftill longer Walzer be defired, the beginning is again in the fame manner, & one continues as long as one pleafes.

ISTRUZIONE

Per compore delle Walzer, oppure Schleifer col mezzo di due Dadi, senza aver la minima Notizia di musica, overo della composizione.

1, Le Lettere A — H, poste sopra le otto Colonne delle tavole dei Numeri moftrano le 8. Battute di ciascheduna parte del Walzer, per esempio A, la prima, B, la seconda, C, la terza, &c. e i Numeri nella colonna sotto le Lettere moftrano il Numero della battuta nelle note.

2, I Numeri di 2. sino 12. moftrano la somma del Numero che si può gettare con due Dadi.

3, Si getta dunque per esempio per la prima battuta della prima parte del Walzer con due dadi 6: cercando prefso del numero 6. nella colonna A il numero della battuta 148. nella tavola della Musica, e mettendo quefta battuta in carta, si ha trovato il principio del Walzer. Poi si getta per la seconda battuta per esempio 9. si cerca prefso del 9. sotto B, e si trova Nº 84. della tavola della Musica. Scrivendo quefta battuta a canto della prima, e continuando in quefta guisa sino al aver gettato otto volte i Dadi, si hà finito la prima parte del Walzer. Finalmente si fà il segno del Ritornello, e si commincia la seconda parte. quando si desidera un Walzer più lungo, si ricomincia nella stefsa maniera, andando così sino all' infinito.

2.

ZAHLENTAFEL.
TABLE de CHIFFRES.

Erster Theil.
Premiere Partie.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	152	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Zweiter Theil.
Seconde Partie.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131


TABLE de MUSIQUE.
5.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16.
17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24.
25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32.
33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40.
41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48.

4.


49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56.
57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64.
65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72.
73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80.
81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88.
2.
1.


5.
89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96.
97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104.
105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112.
113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120.
121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128.


6.
129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136.
137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144.
145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152.
153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160.
161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168.
169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176.

ANNEX III

Johann Pachelbel
(1653-1706)

Kanon und Gigue
für drei Violinen
und Basso Continuo
D-Dur

Partitura

Werner Icking, Siegburg

Privatbibliothek Nr. 15

Canon per 3 Violini e Basso

Johann Pachelbel (1653-1706)

Alle Bögen sind nicht original und können auch weggelassen werden. All slurs are not original and may be omitted.


15
19
21
23


25
27
30
32

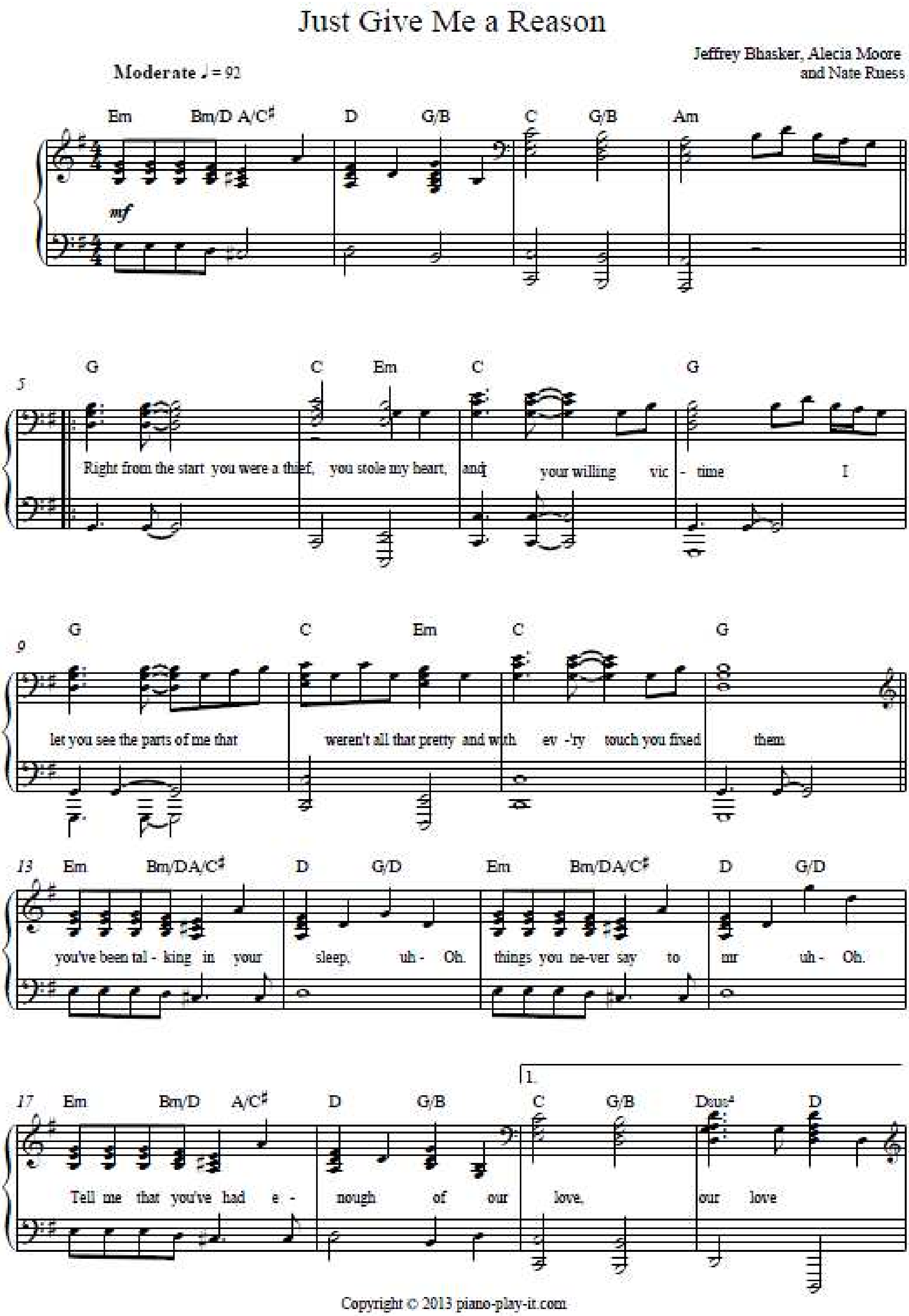

35
37
39
41


44
47
50
54

Gigue


11
14
17

ANNEX IV


Just Give Me a Reason
Jeffrey Bhasker, Alecia Moore
and Nate Ruess
Moderate ♩ = 92
Em Bm/D A/C♯ D G/B C G/B Am
mf
G C Em C G
Right from the start you were a thief, you stole my heart, and I your willing vic - time I
G C Em C G
let you see the parts of me that weren't all that pretty and with ev -'ry touch you fixed them
Em Bm/DA/C♯ D G/D Em Bm/DA/C♯ D G/D
you've been tal - king in your sleep, uh - Oh. things you ne-ver say to me uh - Oh.
Em Bm/D A/C♯ D G/B C G/B Dsus4 D
1.
Tell me that you've had e - nough of our love, our love
Copyright © 2013 piano-play-it.com


21 G D/F♯ Em Bm D7
Just give me a rea-son, just a lit - tle bit's e - nough just a sec -ond we're not bro-ken, just bent, and we can learn to love a -gain
To Coda
25 G D/F♯ Em Bm D7 G
It's in the stars; it's been writ-ten in the scars on our hearts we're not bro-ken, just bent, and we can learn to love a -gain
2.
30 C G/B Am C G/B Dsus4 D
Love our love, our Love our love,
34 G D/F♯ Em Bm D7
Just give me a rea-son, just a lit - tle bit's e - nough Just a sec -ond we're not bro-ken, just bent, and we can learn to love a -gain
38 G D/F♯ Em Bm D7
I ne -ver stopped; you're still writ-ten in the scars on my heart we're not bro-ken, just bent, and we can learn to love a -


42 Em Bm C D
Oh, tear ducts and rust. I'll fix it for us We're col - lect - ing dust. But our love's e - nough
46 Em Bm C
You're hold - ing it in You're pour - ing a drink. No noth - ing is as
49 Am Dsus4 D
bad as it seems We'll come clean
52 G D/F♯ Em Bm D7
Just give me a rea-son, just a lit - tle bit's e - nough Just a sec - ond we're not bro-ken, just bent, and we can learn to love a - gain
D.S. al Coda
56 G D/F♯ Em Bm D7
It's in the stars; it's been writ-ten in the scars on our hearts That we're not bro-ken, just bent, and we can learn to love a - gain


G
D/F♯
Em
Bm
D7
Oh,
we can learn to love a-gain
Oh,
we can learn to love a-gain
G
D/F♯
Em
Bm
D7
Oh,
we're not bro-ken, just bent, and we can learn to love a-gain
Em
Bm/D
A/C♯
D
G/B
C
G/B
Am
G5