I.E.S. Pius Font i Quer

La teoria de jocs

Gener 2011

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ

A l'hora d'escollir el tema del treball de recerca, ja anava amb la idea de tractar algun tema en què les matemàtiques hi juguessin un paper important. No obstant això, en principi no tenia la intenció de parlar d'un tema de matemàtiques pures com és aquest, ja que sempre havia pensat que aquesta ciència realitzava un paper secundari respecte les altres, i no em semblava que se'n pogués treure prou suc. Realment el meu desig era tocar algun tema del camp de la biologia on hi apareguessin conceptes de matemàtiques, o on aquestes ens poguessin donar una explicació de molts fenòmens naturals que passen al nostre voltant o fins i tot a l'interior del nostre organisme. Un cop vaig tenir el tutor assignat, vam començar a buscar temes dels què fos possible parlar (alguns requerien un nivell matemàtic molt alt), i finalment em va presentar la teoria de jocs com una possible aplicació de les matemàtiques a les ciències biològiques. Tanmateix, quan vaig començar a buscar informació sobre el tema i el vaig anar coneixent vaig veure que l'aplicació biològica no era el que més m'interessava; el que em va cridar especialment l'atenció va ser veure com les matemàtiques permetien resoldre moltes situacions conflictives que tenen lloc a la vida real, la qual cosa jo desconeixia.

Al llarg de la nostra existència hem de prendre constantment decisions, de major o menor importància, les quals influeixen sobre la nostra conducta i evolució. Quan aquestes decisions afecten o d'alguna manera es contraposen amb les decisions d'altres individus quan aquests també volen controlar els fets, s'origina una situació de conflicte. El conflicte és un tema central en la història de la humanitat; les persones competeixen les unes amb les altres perquè tenen llibertat d'elecció i valors diferents.

La *teoria de jocs* és una branca de les matemàtiques creada per estudiar situacions en les que es produeixen conflictes i les conseqüents decisions que els individus prenen en aquest tipus de situacions.

Quan parlem de *joc*, ens estem referint des d'una simple partida d'escacs o de pòquer, fins a un conflicte bèl·lic o una subhasta. El que tenen en comú totes aquestes situacions és l'existència de diversos individus que han de prendre decisions, cada un d'ells d'acord amb els seus propis interessos, les eleccions dels quals, considerades en conjunt, determinen l'estat del sistema. A aquests individus se'ls anomena **jugadors**, i cadascun té llibertat per actuar i per escollir entre les diverses opcions disponibles. Aquestes opcions s'anomenen **estratègies**. Com a conseqüència de les estratègies seguides s'arribarà a uns **resultats**. Els jugadors tenen preferència sobre uns resultats obtinguts més que altres, i això es representa assignant a cada resultat un **pagament** (normalment expressat amb números) per a cada un dels jugadors.

La teoria de jocs, aleshores, tracta de conceptes com la selecció de les millors estratègies, els resultats d'equilibri, les negociacions, la formació i l'estabilitat de les coalicions, el repartiment equitatiu, i la resolució dels conflictes. No obstant, aquest mètode d'anàlisi ha mostrat una gran versatilitat, ja que les seves contribucions no han aportat beneficis tan sols en el camp de l'Economia i de les Matemàtiques, sinó també en Sociologia, Política, Biologia i Psicologia. Existeixen també aplicacions jurídiques: assignació de responsabilitats, presa de decisions de conciliació, etc.

Pel que fa al contingut del treball, podem distingir-hi tres grans blocs. El primer presenta la teoria de jocs en general, amb una breu introducció històrica i l'explicació dels diferents tipus de jocs que podem trobar, juntament amb la seva classificació i els conseqüents exemples. En el segon bloc queden explicats els diferents paràmetres matemàtics que ens ofereix la teoria per tal d'analitzar els diferents jocs, cadascun dels quals es troba aplicat en algun exemple. Finalment, el treball es centra amb l'estudi d'un joc concret, "El dilema del presoner", un exemple clàssic que posa a prova part dels fonaments de la teoria de jocs i que, a més, és aplicable a moltes situacions que es donen a la vida quotidiana. El dilema del presoner és una història que planteja una decisió difícil, és com un conte que acaba amb un dilema sense resoldre's i que requereix ser desxifrat. Evidentment, però, és molt més que un relat; posseeix una estructura matemàtica concreta, a més de ser també un problema que sovint es planteja a la vida real. El treball conclou amb un experiment que posa en pràctica El dilema del presoner, en el qual és necessària la reflexió de cada jugador sobre quina seria la millor manera d'actuar.

2. BREU HISTÒRIA DE LA TEORIA DE JOCS

En el segle XVII, científics com **Christian Huygens (1629-1695)** i **Gottfried W. Leibniz (1646-1716)** ja proposaven la creació d'una disciplina que permetés estudiar el conflicte i les interaccions humanes mitjançant el mètode científic.

En el segle XIX, diversos economistes importants van crear exemples matemàtics senzills per analitzar exemples concrets de situacions competitives. El primer teorema matemàtic de caràcter general en aquest camp va ser provat per **Ernst Zermelo** al 1912. Afirma que qualsevol joc finit amb una *informació perfecta,* com els escacs o les dames, té una solució òptima amb estratègies *pures*, és a dir, posseeix estratègies que permeten obtenir el millor resultat sense necessitat que intervingui l'atzar. Es diu que un joc té una informació perfecta si es té coneixement en tot moment de les pròpies accions i de les dels altres jugadors, així com de les accions futures estudiades.

La teoria de jocs moderna apareix cap a la segona i tercera dècada del segle XX, gràcies a les investigacions de **F.E. Emile Borel** i **John von Neumann**. Posteriorment, com a conseqüència d'aquests antecedents, sorgeixen les idees i aportacions elaborades per **John F. Nash**.

- ***F.E. Emile Borel* (1871-1956):**

Emile Borel va ser un matemàtic francès dels més famosos i importants del segle XX.

És considerat el creador de la primera teoria efectiva de la mesura de conjunts de punts. Aquest treball, juntament amb el de dos altres matemàtics francesos, *René Baire* i *Henri Lebesgue*, va marcar l'inici de la moderna teoria de funcions d'una variable real, dintre de la qual s'introdueix la integral. També es va interessar en la teoria de la probabilitat.

Al voltant del 1920 va dur a terme nombroses investigacions sobre la teoria de jocs; la seva aportació en aquesta branca va ser la introducció de la idea d'una estratègia *mixta*, concepte que serà explicat més endavant.

És necessari afegir que Borel va participar en el món de la política: durant uns quants anys va ser membre del parlament francès i ministre de Marina. A més, també va formar part de la Resistència Francesa durant la Segona Guerra Mundial.

- ***John von Neumann* (1903-1957):**

John von Neumann va ser un dels més grans matemàtics del segle XX. És d'origen hongarès, però es va nacionalitzar nord-americà quan va emigrar als Estats Units.

Neumann va realitzar importants contribucions en física quàntica, anàlisi funcional, lògica matemàtica, disseny de computadores i reactors nuclears, entre d'altres. També va efectuar investigacions sobre la teoria de jocs. En aquest camp es va centrar en l'estudi de l'anomenat *teorema minimax*. Aquest estableix que en un tipus de jocs anomenats de *suma zero* existeix una estratègia que permet a ambdós jugadors minimitzar la seva màxima pèrdua. Aquest fet va ser comprovat l'any 1928.

Aquest treball va culminar en la publicació, al 1944, de *Theory of Games and Economic Behavior* (Teoria de jocs i del comportament econòmic), per part de John von Neumann amb la col·laboració de l'economista austroamericà **Oskar Morgenstern** (1902-1977). Aquests autors introdueixen el primer model general i el concepte de solució per a jocs cooperatius de vàries persones, amb conseqüències en el camp social, jurídic, polític, econòmic i militar.

Tot i les idees anticipades anteriorment per part d'altres matemàtics i economistes, no va ser fins a l'aparició d'aquest llibre que es va comprendre la importància de la teoria de jocs per estudiar les relacions humanes.

- ***John F. Nash*** **(1931-):**

John Forbes Nash va ser un matemàtic nord-americà.

Inicialment, els seus interessos estaven orientats cap a disciplines tecnològiques aplicades, com la química industrial o l'enginyeria electrònica. Posteriorment, gràcies a l'assessorament d'un dels seus professors, va decidir dedicar-se a les matemàtiques.

Nash va ampliar el resultat de Neumann. Es va dedicar a analitzar l'estructura dels jocs *no cooperatius*, els quals seran explicats més endavant, i en va exposar per primera vegada una solució, anomenada **equilibri de Nash**. El punt d'equilibri de Nash és una situació en la que cap dels jugadors sent la temptació de canviar d'estratègia, ja que qualsevol canvi implicaria una disminució en els seus resultats. Von Neumann i Oskar Morgenstern ja havien ofert una solució semblant, però vàlida només per als jocs de suma zero.

La teoria de jocs va incrementar la seva activitat durant els anys 50, quan van sorgir nous conceptes que van ser aplicats a la filosofia i a les ciències polítiques, a més de l'economia.

Posteriorment, als anys 60, **Harsany (1967)**, un economista hongarès, va desenvolupar l'anàlisi de jocs d' informació imperfecta, és a dir, aquells en que els jugadors no coneixen totes les característiques del joc.

Davant de la multiplicitat d'equilibris de Nash, molts dels quals no eren solucions raonables a jocs, **Selten**, un economista alemany, va definir el concepte d'equilibri perfecte per a jocs d'informació perfecta, i una generalització pel cas de jocs d'informació imperfecta.

Durant la dècada de 1970 la teoria de jocs va ser aplicada a la biologia com a resultat de la investigació de **John Maynard Smith** i la seva estratègia evolutiva.

L'última aportació important és la realitzada per **Thomas C. Schelling**, el qual va aplicar la teoria de jocs a les ciències socials; els seus estudis expliquen com un partit pot treure profit de l'empitjorament de les seves pròpies opcions de decisió, i **Robert J. Aumann**, que va ser el primer en analitzar els jocs amb fets repetits.

3. REPRESENTACIÓ D'UN JOC

Com he dit anteriorment, un joc engloba des d'un simple joc de taula fins a qualsevol situació de conflicte que té lloc a la vida real. A l'hora d'analitzar un joc d'aquesta magnitud, som conscients que les situacions conflictives reals són extremadament complexes, ja que existeix la influència d'una gran quantitat de factors externs, i això suposa una gran dificultat a l'hora d'analitzar-los. No obstant això, existeixen objectes matemàtics aplicables a qualsevol tipus d'esdeveniment que ens permeten analitzar aquest tipus de situacions d'una manera senzilla. Tenint en compte això, podem analitzar els jocs de dues formes diferents:

3.1 Forma normal

L'objecte matemàtic que s'utilitza s'anomena ***matriu***.

Per tal de definir què són i mostrar com són les matrius, ho faré mitjançant l'anàlisi del tipus de joc més senzill: el joc 2 x 2.

L'estructura és la següent:

1. Tenim dos jugadors: **A** i **B.**
2. Cada jugador pot escollir entre dues alternatives: C o N. Cada una d'aquestes opcions és una estratègia o *estratègia pura*.
3. El joc consisteix en que cada un dels jugadors escull simultàniament i independentment una de les dues alternatives, C o N. Això porta a quatre possibles resultats, tal com ens mostra la taula següent:

	Elecció jugador A	**Elecció jugador B**	**Resultats**
Resultat a	C	C	CC
Resultat b	C	N	CN
Resultat c	N	C	NC
Resultat d	N	N	NN

4. Cada jugador ordena els quatre possibles resultats per odre de preferència, de manera que al que és considerat millor se li assigna el número 4, al segon millor el 3, al tercer el 2, i per últim, el número 1 al que és considerat el pitjor.

   - No obstant, no sempre s'assignen aquests valors per indicar l'ordre de preferència dels diferents resultats. Hi ha l'opció d'assignar a cada un d'ells un número, anomenat **pagament**, que indiqui la magnitud de la preferència del resultat o el seu valor real per a cada jugador. Cal afegir també que en un tipus concret de jocs alguns pagaments són negatius, per exemple quan els guanys d'un jugador comporten la mateixa pèrdua de l'altre.

Per descriure un joc 2x2 és necessari especificar vuit coses: el rànquing de preferències dels quatre possibles resultats CC, CN, NC, NN per al jugador **A**, i el rànquing per al jugador **B** dels mateixos quatre possibles resultats.

Rànquing de preferències jugador A:

Jugador B

Jugador A		C	N
	C	3	1
	N	4	2

Rànquing de preferències jugador B:

Jugador B

Jugador A		C	N
	C	3	4
	N	1	2

Podem veure que el jugador **A** ordena els quatre resultats, del millor al pitjor, d'aquesta manera: NC, CC, NN, CN, i el jugador **B**, ho fa de la següent: CN, CC, NN, NC.

Les taules que he utilitzat per descriure les preferències de cada un dels jugadors corresponen al que anomenem **matrius**. Una matriu seria un agrupament rectangular de números. Les files i les columnes corresponen a les estratègies dels dos jugadors, respectivament, i els números representen l'ordre de preferència dels resultats resultants quan es seleccionen les estratègies particulars. En aquest cas, estaríem parlant d'una **matriu 2 x 2**, ja que cada taula té dues files i dues columnes.

Cada matriu ens mostra per separat les eleccions del jugador **A** i del jugador **B**. Ara bé, també podem utilitzar una sola matriu que inclogui les eleccions d'ambdós jugadors, i que ens mostrarà simultàniament els rànquings de preferència de cada un d'ells. Per exemple, si considerem l'entrada que es troba a la part de dalt a la dreta (la que es troba simultàniament a la primera fila i a la segona columna), veiem que segons la seva preferència, el jugador **A** li assigna el número 1, mentre que el jugador **B** li assigna el 4.

En la matriu que inclou les preferències d'ambdós jugadors es representa de la següent manera "(1,4)", d'acord amb que el primer número va referit a les preferències del jugador **A** i el segon a les del jugador **B**.

		Jugador B	
		C	N
Jugador A	C	(3,3)	(1,4)
	N	(4,1)	(2,2)

No obstant, no tots els jocs són com el model descrit, ja que un joc pot ser més complex i tenir més de dues estratègies. Tanmateix, l'ús i el significat de les matrius sempre és el mateix, i per tant, ens permet descriure i representar qualsevol tipus de joc.

3.2 Forma extensiva

Està basada en el que anomenem *arbre de joc*.

Consisteix en un arbre on es representa tota la informació del joc. Això permet donar una descripció detallada del seu desenvolupament, incorporant al seu estudi tant la intervenció de l'atzar com qualsevol limitació que pugui presentar la informació a l'abast dels jugadors.

Per tal de simplificar-ho, estudiarem només els jocs on només hi participen dues persones. No obstant això, és possible que també hi intervingui l'atzar. Quan sigui així, aquest serà representat com un tercer jugador, al qual anomenarem **0**.

A continuació, definiré matemàticament què és un arbre de joc.

- Un *arbre de joc* és un parell (V, A), on V és un conjunt finit de punts A, B... anomenats *vèrtex* i A és un conjunt finit de parells ordenats de vèrtex AB, AC, BD... anomenats *arcs*. L'arbre ha de complir dues condicions:
  - Existeix un únic *vèrtex inicial* **O** al qual no arriba cap arc.
  - Per a cada vèrtex **A**, existeix un únic camí que va des del vèrtex inicial **O** fins a **A**.

Per conveni, el sentit dels arcs és sempre de dalt a baix.

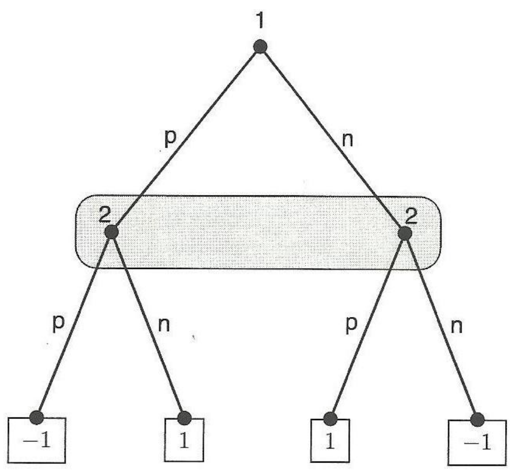
- Un joc de dos jugadors en forma extensiva τ està format pel conjunt de jugadors $N = \{1,2\}$ i un arbre de joc (V, A). Els vèrtex no finals són els *moments* del joc, i els vèrtex finals són els *resultat*. L'arbre ha de complir les següents propietats:
    - Existeix una partició del conjunt dels moments del joc en subconjunts d'igual informació, que indiquen quin jugador actua en cada moment, escollint una de les *alternatives* possibles (arcs que surten del vèrtex corresponent). Aquests subconjunts compleixen les següent condició:
        - No existeixen dos camins que, partint d'un mateix vèrtex del jugador, condueixin a dos vèrtex d'un mateix subconjunt d'igual informació.
    - Si hi ha subconjunts d'igual informació que contenen més d'un vèrtex, dibuixarem per a cada un d'ells un *núvol* que recobreixi els vèrtex corresponents.
    - El pagament dels jugadors es representarà a cada vèrtex final en forma de vector.

<u>Exemple</u>: ***parells i senars***

Es tracta d'un joc de dues persones. El primer jugador, al qual anomenarem jugador **1**, amaga una certa quantitat de petits objectes (monedes, per exemple). El segon, al qual anomenarem jugador **2**, ha d'endevinar si l'altre jugador té un número parell o imparell d'objectes. Si ho encerta, aquest guanya un objecte del primer; en cas contrari, el primer jugador rebrà una objecte del segon.

A continuació, analitzaré aquest joc de forma extensiva mitjançant un arbre de joc:

El jugador **1** té dues estratègies: preparar una quantitat parell d'objectes (p) o una quantitat imparell (n). Al mateix temps, el jugador **2** també té dues estratègies, ja que al seu moment d'actuar, el núvol li impedeix distingir en quin moment es troba (no sap l'estratègia que ha escollit el jugador **1**), de manera que només veu dues opcions: predir que és parell (p) o predir que és imparell (n). Combinant cada estratègia del jugador **1** amb cada estratègia del jugador **2** i aplicant-les a l'arbre, obtenim els pagaments corresponents.

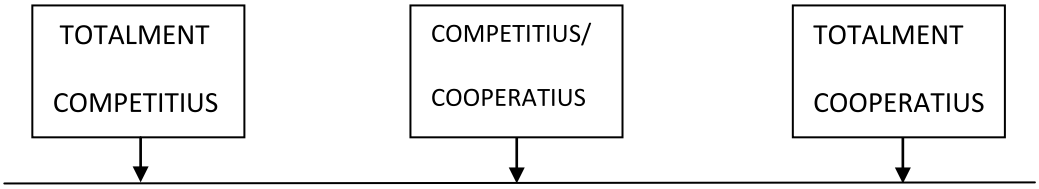


4. JOCS. CLASSIFICACIÓ

Existeixen diverses categories que ens permeten classificar els diferents jocs.

4.1 Segons els objectius finals dels jugadors

Segons els objectius finals dels jugadors, els jocs poden ser *competitius*, *cooperatius*, o poden trobar-se entremig d'ambdues categories. Els podem representar en una recta contínua de la següent manera:



- A l'extrem esquerra hi ha els jocs *totalment competitius*, és a dir, aquells en què els jugadors tenen interessos totalment oposats. Seria el cas de la situació en què es troben dos rivals en una competició esportiva, o la de dos contrincants en una guerra.

- A l'altre extrem a la dreta, trobem els jocs *totalment cooperatius*, és a dir, aquells en què els jugadors només tenen interessos comuns. Seria el cas de les interaccions en què és necessari que els individus estableixin acords vinculants, com ara els negocis.

- Entremig d'aquests dos extrems trobaríem els jocs més interessants i realistes, però també els més complicats: aquells que alhora contenen elements competitius, derivats d'un conflicte d'interessos, i elements cooperatius, que sorgeixen de les possibilitats d'arribar a un resultat que satisfaci tots els jugadors. Un exemple seria *El dilema del presoner*, el qual serà explicat més endavant.

4.2 <u>Segons la informació que posseeix cada jugador</u>

Segons la informació que posseeix cada jugador, els jocs poden ser *d'informació perfecta* o *d'informació imperfecta*.

4.2.1 - JOCS D'INFORMACIÓ PERFECTA

Un joc és d'informació perfecta si tots els jugadors coneixen els moviments que han dut a terme o les decisions que han pres prèviament tots els altres jugadors en cada punt del joc en què es troben.

En aquest tipus de jocs existeix una **estratègia òptima** per a un dels jugadors, que és aquella que permet a un d'ells obtenir el millor pagament davant de totes les possibles eleccions per part del seu adversari.

Tot seguit anem a veure un exemple d'aquest tipus de jocs:

<u>Els onze llumins</u>: *es col·loquen onze llumins sobre la taula. El primer jugador,* el qual anomenarem *jugador **A**, n'ha d'agafar 1, 2 o 3. A continuació, el segon jugador, el jugador **B**, agafa també 1, 2 o 3 dels llumins restants. Llavors, els dos jugadors van agafant alternativament els llumins que queden fins que ja no en queda cap. El jugador que perd és el que està obligat a agafar l'últim llumí.*

Aquí la qüestió és: *existeix alguna estratègia que permeti al jugador **A** obligar el seu adversari a agafar SEMPRE l'últim llumí?*

Efectivament, existeix una estratègia per al jugador **A** que li permet guanyar sempre.

Observem el següent procediment:

- *Primera jugada* → **A** agafa dos llumins.
- *Jugades subsegüents* → si **B** agafa *k* llumins ($k \leq 3$) en la seva última jugada, llavors **A** agafa $4 - k$ llumins.

Aquest mètode és complet, en el sentit que, independentment del que faci el jugador **B**, sempre queda especificada una manera en la que el jugador **A** pot guanyar. D'aquesta llista d'instruccions citada en podem dir que és una estratègia. Com que aquesta, a més, permet al jugador **A** guanyar cada vegada que la duu a terme, és una estratègia **òptima** per a ell.

Aquest fet es pot demostrar mitjançant els següents exemples:

A	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**		**A**	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**
2	2	2	1	3	1		2	3	1	1	3	1

Sense tenir en compte l'última jugada, podem comprovar com l'última estratègia del jugador **A** és tal com s'ha esmentat en el procediment descrit anteriorment.

- El jugador **B** agafa 1 llumí, de manera que k = 1. Per tant, el jugador **A** n'agafa 4-k, és a dir 4-1 = 3 llumins. D'aquesta manera, només queda un llumí, que és el que ha d'agafar per força el jugador **B**.

  No obstant, en aquest joc l'estratègia òptima existeix només per al jugador que actua en primer lloc, la qual cosa es decideix per atzar. Tanmateix, si el jugador **A** desconeix l'existència de l'estratègia òptima o simplement s'equivoca a la primera jugada agafant 1 o 3 llumins enlloc de 2, existeix una estratègia òptima per al jugador **B**.

És senzill adonar-se que en aquest joc ambdós jugadors no poden tenir simultàniament una estratègia òptima, ja que la definició del propi joc no permet empatar.

4.2.2 - JOCS D'INFORMACIÓ IMPERFECTA

Un joc és d'informació imperfecta si els individus que el protagonitzen posseeixen una quantitat limitada d'informació sobre el conflicte i les accions que duen a terme els seus rivals. Per tant, els jugadors han de mantenir les seves intencions en secret, no han de revelar quina estratègia escolliran fins que arribi l'hora d'actuar, de manera que ja sigui massa tard perquè l'adversari pugui modificar la seva elecció. En aquest tipus de jocs no existeix una estratègia òptima per a un dels jugadors, és a dir, una que sigui la millor que es pot utilitzar cada vegada que es juga.

Aquest tipus de jocs suposen un cert risc, ja que impliquen la presa de decisions per part dels jugadors a l'hora de dur a terme una estratègia determinada.

Dintre dels jocs d'informació imperfecta trobem dues categories: *jocs de suma zero* i *jocs de suma no zero*.

- JOCS
  - → Jocs d'informació perfecta
  - → Jocs d'informació imperfecta
    - → Jocs de suma zero
    - → Jocs de suma no zero

4.2.2.1 - Jocs de suma zero

Un joc és de suma zero quan els guanys d'un jugador s'originen en les pèrdues de l'altre. El pagament d'un dels jugadors és el negatiu del pagament corresponent a l'altre, de manera que la suma d'ambdós pagaments és zero. És a dir, el que un guanya, l'altre ho perd.

Exemple: **cobrament negociat d'un acompte**

*Un jugador **A** acorda la venda d'un determinat producte amb un jugador **B** (el valor del qual no interessa especificar), i negocia amb ell el valor de l'acompte.*

El jugador **B**, el deutor, analitza les seves possibilitats financeres i determina quatre estratègies diferents de formalitzar el pagament de l'acompte acordat. El jugador **A**, el creditor, estudia també els seus propis interessos financers, i determina a la vegada cinc estratègies d'efectuar el cobrament.

La situació es pot representar mitjançant una matriu de 5 x 4 (5 files per 4 columnes). Les files corresponen a les estratègies de cobrament i les columnes a les estratègies de pagament.

La situació quedaria definida de la manera següent:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	18	3	0	2
A_2	0	3	8	20
A_3	5	4	5	5
A_4	16	4	2	25
A_5	9	3	0	20

- Cada columna vertical correspon a cada una de les estratègies de pagament elaborades pel jugador **B**.

- Cada fila horitzontal constitueix cada una de les estratègies de cobrament produïdes pel jugador **A**.

Seguidament, analitzaré el joc dels del punt de vista de cada jugador, mitjançant un mètode que explicaré detalladament més endavant, el *teorema minimax*.

<u>Jugador **A**</u> → *Quina serà la millor estratègia d'acord amb els seus interessos?*

Davant de les diferents estratègies pensades pel jugador **A**, és evident que el jugador **B** escollirà aquella que suposi la menor despesa per a ell, tal com indica la taula següent:

	Estratègies proposades pel jugador A					
	A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	
Elecció de B	**0**	**0**	**4**	**2**	**0**	**Nivells de seguretat per a A**

Cada un dels valors que **B** escolliria sobre les estratègies de cobrament disponibles constitueixen els *nivells de seguretat de les estratègies de **A***, que són els valors possibles de cobrament per a totes les estratègies de pagament.

Podem observar que l'estratègia **A_3** proporciona el màxim nivell de seguretat per a **A**, ja que si l'escull assegura el valor màxim de cobrament, que en aquest cas és 4; és el valor màxim dels números mínims de les vàries files de la taula. S'anomena el *valor maximin*.

Aquest és el criteri que ofereix la teoria per suggerir al venedor **A** la seva millor elecció per a una estratègia de cobrament, que en aquest cas serà l'estratègia **A_3**.

En definitiva, el que realitza **A**, tenint en compte els valor A_{ij} de la matriu o taula del joc, és proposar el següent valor de cobrament C:

$$F = \max_{1\leq i\leq 5} \min_{1\leq j\leq 4} a_{ij} = 4 \rightarrow$$ Estratègia *maximin* per al jugador **A**

<u>Jugador **B**</u> → Si ara és el jugador **B** el que estudia les conseqüències associades amb les seves estratègies de pagament, és evident que en aquest cas el venedor **A** escollirà els màxims valors de cadascuna de les quals, tal com indica la taula següent:

	Estratègies proposades pel jugador B				
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
Elecció de A	**18**	**4**	**8**	**25**	**Nivells de seguretat per a B**

Cada una de les eleccions de **A** defineixen els *nivells de seguretat* per a **B** associats amb l'estratègia respectiva.

Dintre d'aquests valors, el jugador **B** escollirà l'estratègia que li permeti pagar la menor quantitat possible. En aquest cas és la **B_2**, que correspon al valor 4. Aquest és el valor mínim dels números màxims de les vàries columnes de la taula. S'anomena el valor *minimax.*

En definitiva, el jugador **B** proposarà el següent valor de pagament P:

$$C = \min_{j} \max_{i} a_{\mathrm{ij}} = 4$$

El mètode que hem utilitzat per tal de resoldre aquest joc és l'anomenat *teorema minimax*, el qual va ser estudiat per *John von Neumann* (1928). El teorema *minimax* estableix que en els jocs de dues persones i de suma zero, existeix una estratègia que permet a ambdós jugadors minimitzar la màxima pèrdua esperada. Quan s'analitza cada possible estratègia, un jugador ha de considerar totes les respostes possibles del seu adversari i la pèrdua màxima que es pot emportar. Aleshores, el jugador juga amb l'estratègia que comporta la minimització de la seva màxima pèrdua. Aquesta estratègia s'anomena **òptima** per a ambdós jugadors només en el cas que els seus valors *minimax* siguin iguals.

Finalment, podem observar en l'exemple que els valors C i P, és a dir, els valors *maximin* i *minimax* calculats sobre la matriu del joc coincideixen.

Quan F=C diem que les estratègies **A_3** i **B_2** formen un *punt de sella*.

No obstant, un joc de suma zero no té per què tenir necessàriament un *punt de sella*.

4.2.2.2 - <u>Jocs de suma no zero</u>

Els jocs que hem vist fins ara, els jocs de suma zero, eren jocs estrictament competitius: els guanys d'un jugador equivalien a les pèrdues de l'altre; la suma dels seus pagaments era sempre una constant. Per tant, es tractava de jocs totalment conflictius.

Els jocs de suma no zero no són del tot conflictius, ja que els objectius dels jugadors no són totalment antagònics: existeixen beneficis mutus que ambdós jugadors poden assolir si cooperen. Aquesta cooperació requereix elements com la comunicació, la confiança i l'amenaça de complir el que s'ha acordat.

Si falten aquests elements, llavors ens trobem en l'àmbit dels jocs no cooperatius, on el propi interès de cada jugador pot portar a uns resultats desfavorables.

Un exemple d'aquest tipus de jocs és el *dilema del presoner*, el qual treballaré a fons més endavant.

5.PARÀMETRES QUE PERMETEN L'ESTUDI DEL JOC

5.1 Teorema minimax

Aquest mètode és aplicable a qualsevol joc de matrius, tot i que les conclusions obtingudes només són totalment satisfactòries en el cas dels jocs estrictament determinats, és a dir, aquells en que la solució ja es coneix abans de jugar.

Donat un joc de matrius τ definit per una matriu $A = (a_{ij})$ de tamany $m\,x\,n$, es consideren els mínims $f_1, f_2, \dots, f_m$ de les files de la matriu. Cada f_i indica al jugador **A** el cobrament mínim que té assegurat en el pitjor dels casos si utilitza l'estratègia i. Se simbolitza de la següent manera:

$$f_i = \min_j a_{ij}$$

És a dir, el jugador **A** busca per a cada una de les seves estratègies el pitjor resultat que pot obtenir. Llavors, tenint en compte aquests valors, escollirà l'estratègia que li proporcioni el millor de tots ells.

De la mateixa manera es fa amb el jugador **B**: es consideren els màxims $C_1, C_2, \dots, C_n$ de les columnes de la matriu. Cada C_j indica al jugador **B** el pagament màxim al que està obligat a pagar en el pitjor dels casos si utilitza l'estratègia j. Se simbolitza de la següent manera:

$$C_j = \max_i a_{ij}$$

El jugador **B** busca per a cada una de les seves estratègies el pitjor resultat que pot obtenir. Després, tenint en compte els valors obtinguts, escollirà l'estratègia que li proporcioni el millor resultat.

Jugador 2

Jugador 1	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	n
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i	a_{i1}	a_{i2}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}

El *maximin* del joc τ és:

$$F = \max_i f_i = \max_i \quad \min_j a_{ij}$$

De la mateixa manera, el *minimax* del joc és:

$$C = \min_j C_j = \min_j \quad \max_i a_{ij}$$

En resum, el mètode de càlcul dels valors maximin i minimax es basa en els següents passos:

1. Calcular els mínims de la fila $f_1, f_2, \dots, f_m$.
2. Calcular els màxims de la columna $C_1, C_2, \dots, C_n$.
3. Seleccionar el maximin $F = max\{f_{1,} f_2, \dots, f_m\}$.
4. Seleccionar el minimax $c = min\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$.

Per a qualsevol joc de matrius es compleix que $F \leq c$.

Demostració: suposem que $F = f_p$ i que $c = C_q$. Llavors $F = f_p \leq a_{pq} \leq C_q = c$.

5.2 Concepte d'estratègia prudent

Les estratègies p i q ($f_p = F$; $C_q = c$) s'anomenen *estratègies prudents*.

Una estratègia prudent és aquella que garanteix al jugador **A** rebre com a mínim la quantitat indicada pel valor maximin, i al jugador **B** pagar com a molt la quantitat que indica el valor minimax.

En general, és millor mantenir en secret quan un jugador va a escollir la seva estratègia prudent, ja que si l'adversari ho sap pot abandonar la seva pròpia estratègia prudent i escollir-ne una altra que li aporti més benefici.

Exemple: considerem de nou el joc de l'exemple del cobrament negociat d'un acompte.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	18	3	0	2
A_2	0	3	8	20
A_3	5	4	5	5
A_4	16	4	2	25
A_5	9	3	0	20

El jugador **A** té una sola estratègia prudent, la A_3, que li garanteix rebre com a mínim la quantitat indicada pel valor maximin $F = 4$. El jugador **B** també té una sola estratègia prudent, la B_2, que li garanteix pagar com a màxim la quantitat indicada pel valor minimax $C = 4$.

Es diu que un joc de matrius és *estrictament determinat* si $F = C$. Aquest valor comú, denominat v, és el valor minimax del joc, i les estratègies prudents que permeten aconseguir-lo s'anomenen *estratègies òptimes*.

En aquest cas no hi ha marges de variació: la unió d'estratègies òptimes d'ambdós jugadors dóna com a resultat el valor minimax $v = 4$. Per tant, no és perjudicial per a cap dels dos que un descobreixi que l'altre utilitzarà la seva estratègia prudent.

Finalment, podem observar que el valor minimax del joc és alhora el valor mínim de la seva fila i el valor màxim de la seva columna. Direm que aquest joc té un *punt de sella.*

- Un *punt de sella* d'una matriu $A = (a_{ij})$ és una casella (p, q) tal que a_{pq} és mínim de la seva fila (la p) i alhora el màxim de la seva columna (la q).

També es diu que un joc és estrictament determinat si la matriu A que el defineix té algun punt de sella.

Demostració: suposem que el joc és estrictament determinat i siguin p i q les estratègies òptimes. Llavors $F = f_p \leq a_{pq} \leq C_q = c$, però com que $F = c$ les dues desigualtats anteriors es converteixen en igualtats; de manera que $f_q = a_{pq} = C_q$ i, per tant, a_{pq} és el mínim de la seva fila i alhora el màxim de la seva columna; (p, q) és un punt de sella.

Tal com ens mostra la demostració, la casella on apareix el valor minimax del joc és un punt de sella i, unilateralment, tots els punts de sella ens donen el valor minimax del joc.

5.3 Òptim de Pareto

Es diu que un parell d'estratègies (p, q) és un *òptim de Pareto* si no hi ha cap altre parell d'estratègies que permeti a ambdós jugadors aconseguir conjuntament un pagament major.

- (p, q) és un òptim de Pareto si per a qualsevol $(i, j) \neq (p, q)$ es compleix que $a_{ij} \leq a_{pq}$ o $b_{ij} \leq b_{pq}$.

Podem entendre la idea de l'òptim de Pareto amb la següent situació:

Cadascun dels membres d'una parella té una feina a la mateixa ciutat on viu; el marit a l'empresa p i l'esposa a l'empresa q. Si la parella volgués canviar de ciutat i per tant d'empresa, en les dues noves empreses i i j haurien de rebre tant un com l'altre ofertes superiors als sous que cobressin fins al moment. Si no és així, la parella no tindrà el desig de canviar de la posició (p, q) a la posició (i, j).

Tal com podem deduir amb aquesta observació, el concepte d'òptim de Pareto reflecteix certa *estabilitat* des del punt de vista *conjunt* dels dos jugadors. No obstant això, quan parlem de jocs no cooperatius no hi ha cap raó ni interès perquè els jugadors expressin opinions conjuntes; el fet d'apreciar com a positiva aquesta propietat correspon més aviat a un punt de vista extern al joc, ja que els jugadors actuen cadascun pel seu compte, i és molt possible que cap d'ells quedi satisfet amb un òptim de Pareto, ja tant un com l'altre podrien obtenir un millor resultat individual canviant d'estratègia.

5.4 Equilibri de Nash

En general, en un joc de dues persones en forma normal, es diu que dues estratègies (p, q) estan en *equilibri de Nash* si es compleixen les dues condicions següents:

- $\pi_A(p, q) \geq \pi_A(i, q)$ per a qualsevol i → (p, q) màxim de la columna
- $\pi_B(p, q) \geq \pi_B(p, j)$ per a qualsevol j → (p, q) mínim de la fila;

Tenint en compte que π és el valor dels pagaments corresponents.

La primera condició expressa que, un cop els dos jugadors han escollit les seves estratègies respectives p i q, el jugador **A** no té cap interès per canviar la seva estratègia p, ja que no n'obté cap avantatge si el jugador **B** no canvia la seva. De la mateixa manera, la segona condició expressa que el jugador **B** tampoc té interès per canviar la seva estratègia q si el jugador **A** no canvia la seva.

Es diu que un resultat es troba en equilibri de Nash si cap dels jugadors pot obtenir un resultat millor canviant la seva estratègia. Quan un resultat es troba en equilibri de Nash diem que està estable; ens trobem en una situació en la que cap dels jugadors sent la temptació d'alterar la seva estratègia, ja que cada una de les dues estratègies que formen l'equilibri és la *millor resposta a les altres,* i per tant qualsevol canvi implicaria un empitjorament dels seus pagaments.

Cal remarcar que un equilibri de Nash és un conjunt d'estratègies, i no pas un resultat.

En aquest cas, dues d'estratègies (p, q) és un equilibri de Nash si les estratègies p i q són òptimes.

Demostració: les condicions que defineixen un *punt de sella* (p, q) són:

- $a_{pq} \geq a_{iq}$ per a tota i
- $a_{pq} \leq a_{pj}$ per a tota j

Si traduïm aquestes condicions en termes de les funcions de pagament, són exactament les condicions de l'equilibri de Nash.

5.4.1 – MULTIPLICITAT D'EQUILIBRIS DE NASH

Si (p, q) i (r, s) són equilibris de Nash d'un mateix joc de matrius estrictament determinat, aleshores (p, s) i (r, q) també ho són.

Això significa que tots els equilibris de Nash d'un joc són *equivalents*, ja que tots donen el valor minimax del joc. Per tant, totes les estratègies òptimes són *intercanviables* en el sentit que qualsevol parell d'estratègies òptimes (una de cada jugador) és un equilibri de Nash.

Demostració:

$$a_{rs} \leq a_{rq} \leq a_{pq} \leq a_{ps} \leq a_{rs,}$$

El fet de saber que (p, q) i (r, s) són punts de sella, ens diu que (p, s) i (r, q) també ho són, ja que cada un d'ells és el mínim de la seva fila i el màxim de la seva columna.

5.5 Concepte d'estratègia dominant

Estratègia dominant: es diu que una estratègia és dominant per a un jugador si, faci el que faci el seu adversari, li permet obtenir sempre iguals o millor resultats.

5.6 Estratègies mixtes

Tal com he dit anteriorment, en els jocs d'informació imperfecta els participants han de ser impredictibles i variar les seves accions per tal de sorprendre el contrari. Aquest element de sorpresa es pot dur a terme mitjançant l'*estratègia mixta*.

Una *estratègia mixta* és una «aleatorització» de la llista d'estratègies pures d'un jugador; a cada una de les estratègies pures d'un jugador se li assigna una probabilitat, la qual indica la freqüència amb la que l'estratègia pura serà jugada. El valor assignat a la probabilitat de cada estratègia ha d'estar comprès entre 0 i 1, de manera que totes les probabilitats sumin 1. L'estratègia pura concreta que serà utilitzada en cada jugada pot ser seleccionada per un mecanisme probabilístic.

Quan un jugador recorre a una estratègia mixta, el resultat ja no es pot predir; se l'anomena **valor esperat** i s'ha de descriure de la següent manera:

- *Si els n pagaments $s_1, s_2, \dots, s_n$ esdevinguessin amb les probabilitats $p_1, p_2, \dots, p_n$, respectivament, llavors el valor esperat seria:*

$$E = p_1 s_1 + p_2 s_2 + \cdots + p_n s_n$$

Per tal d'il·lustrar com s'utilitzen les estratègies mixtes, analitzaré alguns exemples:

Fer parelles amb monedes:

Tenim la següent situació: dos jugadors, els quals anomenarem jugador **A** i jugador **B** respectivament, han de fer parelles amb monedes, de manera que cada un d'ells ha de decidir simultàniament si escollir cara (C) o creu (R). Les Conseqüències són les següents:

- Si les dues monedes fan parella, ja sigui amb dues cares o amb dues creus, el jugador **A** guanya ambdues monedes.
- Si no fan parella, és a dir, si una és cara i l'altra creu, aleshores el jugador **B** guanya les dues monedes.

Podem representar la següent situació amb una matriu 2 x 2:

		Jugador B	
		C (cara)	R (creu)
Jugador A	C (cara)	(1,-1)	(-1,1)
	R (creu)	(-1,1)	(1,-1)

Les dues files corresponen a les dues estratègies pures del jugador **A** i les dues columnes representen les estratègies pures del jugador **B**. Els números de la taula són els corresponents guanys i pèrdues de cada jugador: si surten dues cares o dues creus, el jugador **A** li guanya una moneda al jugador **B**; si surten una cara i una creu, el jugador **B** li guanya una moneda al jugador **A**.

En aquest joc, no té sentit que un jugador intenti endevinar què farà el seu adversari: per tal d'estimar els seus possibles beneficis o pèrdues ha de recórrer a les estratègies mixtes.

El millor per al jugador **A** és escollir aleatòriament C la meitat del temps i R l'altra meitat, i seguidament veurem per què.

Aquesta estratègia mixta es pot expressar de la següent manera:

$$(p_C, p_R) = (p_1, p_2) = (1-p, p) = ({}^1\!/_2, {}^1\!/_2)$$

Quan el jugador **B** escull C, el valor esperat resultant del jugador **A** és:

$$E = E(p, C) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

Quan el jugador **B** escull R, el valor esperat resultat del jugador **A** és:

$$E = E(p, R) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

El símbol $E(p, C)$ indica que el jugador **A** està utilitzant una estratègia mixta determinada per p i el jugador **B** escull l'estratègia pura C. De la mateixa manera, $E(p, R)$ indica que el jugador **B** escull l'estratègia pura R.

El resultat obtingut 0 és el valor mitjà del joc si s'utilitza aquesta estratègia mixta, però cal entendre'l en aquest sentit: en qualsevol jugada, el jugador **A** guanyarà o perdrà una moneda. No obstant, després de moltes jugades la seva expectativa és quedar-se sense cap moneda.

Quan en un joc de suma zero el *valor esperat* és 0 se l'anomena joc **just**. De la mateixa manera, aquesta és la millor estratègia mixta per al jugador **B**.

El jugador **B** no guanya res sabent que el jugador **A** està utilitzant aquesta estratègia mixta, ja que és l'òptima. Per altra banda, si el jugador **B** sabés que el jugador **A** està utilitzant una estratègia mixta no òptima concreta $(1-p, p)$ on $p \neq {}^{1}\!/_{2}$, podria aprofitar-se'n per incrementar la mitjana dels seus guanys al llarg del temps per tal d'aconseguir un resultat superior a 0.

<u>Fer parelles amb monedes de forma no simètrica</u>:

Tenim la següent situació: dos jugadors, jugador **A** i jugador **B**, han de fer parelles amb monedes, de manera que cada un d'ells ha de decidir simultàniament si escollir cara (C) o creu (R). D'acord amb l'elecció de cada jugador, les conseqüències són les següents:

- Si surten dues cares, el jugador **B** ha de pagar-li cinc monedes al jugador **A**.
- Si surten dues creus, el jugador **B** li ha de pagar una moneda al jugador **A**.
- Si surten una cara i una creu, el jugador **A** ha de pagar-li tres monedes al jugador **B**.

Podem representar la següent situació mitjançant una matriu 2 x 2:

		Jugador B	
		C (cara)	R (creu)
Jugador A	C (cara)	(5,-5)	(-3,3)
	R (creu)	(-3,3)	(1,-1)

En aquest cas, tampoc té sentit fer un anàlisi del pitjor dels casos:

- El jugador **A** pot perdre tres monedes tan si escull treure cara com creu. El valor màxim-mínim del jugador **A** és 3.
- El jugador **B** pot mantenir les seves pèrdues a un màxim d'una moneda si sempre treu creu (evitant la pèrdua de cinc monedes si escull treure cara). El valor mínim-màxim del jugador **B** és 1.
- No obstant, si el jugador **B** decideix treure sempre creu i el jugador **A** ho sap, aleshores aquest també traurà sempre creu i aconseguirà guanyar una moneda a cada jugada.

La qüestió és: és possible per al jugador **B** millorar la pèrdua d'una moneda a cada jugada?

Considerem la situació en que el jugador **A** utilitza una estratègia mixta $(p_C, p_R) = (1-p, p)$, que diu que s'ha de treure cara amb probabilitat $1-p$ i creu amb probabilitat p, on

$0 \leq p \leq 1$.

Quan el jugador **B** escull C, el valor esperat del jugador **A** és:

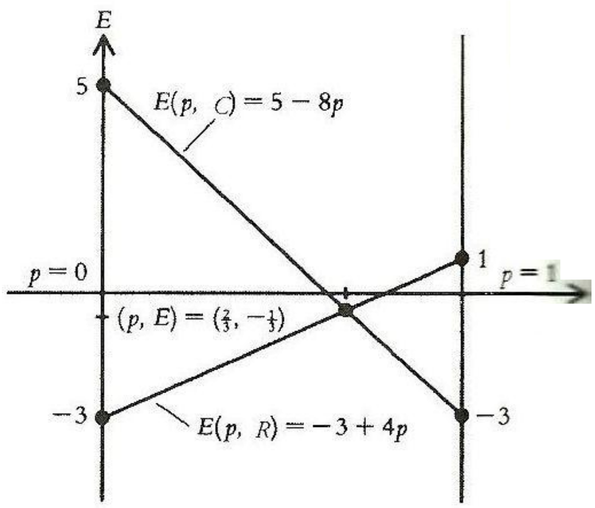
$$E = E(p, C) = (5)(1-p) + (-3p) = 5 - 8p$$

Quan el jugador **B** escull R, el valor esperat del jugador **A** és:

$$E = E(p, R) = (-3)(1-p) + 1p = -3 + 4p$$

L'objectiu del jugador **A** és escollir p per obtenir el valor més alt de E, contra les estratègies C i R del jugador **B** simultàniament. El millor valor de p, que permetrà al jugador **A** obtenir els màxims beneficis en els dos casos, el podem trobar resolent un sistema format per les dues equacions lineals, el corresponent a la intersecció de les dues rectes. D'aquesta manera obtindrem que $p = 2/3$ i $E = -1/3$. L'estratègia mixta òptima $(1-p, p) = (1/3, 2/3)$ per al jugador **A** és escollir cara i creu amb probabilitats $1/3$ i $2/3$, respectivament. El valor esperat per al jugador **A** és $-1/3$.

Els mateixos càlculs són els que ens permeten trobar l'estratègia mixta per al jugador **B**, que és la mateixa $\left(1/3, 2/3\right)$, i el valor esperat $(-1/3)$. No obstant, cal recordar que el que són guanys per al jugador **A**, són pèrdues pel jugador **B**, de manera que aquest $-1/3$ significa que guanya $1/3$. Per tant, aquest joc és injust, ja que afavoreix el jugador **B**, que guanyarà una mitjana d'$1/3$ de monedes cada vegada que es jugui.



Problema d'aparcament:

Tenim la següent situació: un senyor, el qual anomenarem jugador **A**, pot escollir entre aparcar de forma il·legal al carrer o aparcar al garatge i pagar 16$. L'aparcament il·legal és gratis si no hi ha l'agent vigilant (jugador **B**), però si hi és, rep una multa de 40$. Tanmateix, a l'home li fa ràbia haver de pagar el garatge tots els dies que l'agent no vigila, i està disposat a avaluar aquest resultat com un cost de 32$ (16$ de l'aparcament més 16$ del temps, incomoditat i ràbia).

Tenint en compte la situació, el senyor ordena per ordre de preferència les conseqüències a les quals s'exposa de la manera següent:

1. Si aparca de manera il·legal i l'agent no vigila, l'aparcament li resulta gratis.
2. Si aparca al garatge i l'agent vigila, l'aparcament li costa 16$.
3. Si aparca al garatge i l'agent no vigila, ha de pagar 32$ (16$ de l'aparcament més 16$ del temps, incomoditat i ràbia).
4. Si aparca de manera il·legal i l'agent vigila, ha de pagar una multa de 40$.

Podem representar la següent situació mitjançant una matriu 2 x 2:

		Agent (jugador B)	
		G (no vigila)	C (vigila)
Senyor (jugador A)	G (garatge)	-32	-16
	C (carrer)	0	-40

Els números de la taula corresponen a les pèrdues per al jugador **A**.

En aquest joc, tampoc té sentit fer un anàlisi del pitjor dels casos:

- El jugador **A** pot perdre diners tan si escull l'estratègia C com la G.
  - Pot intentar arriscar-se a aparcar gratis escollint l'estratègia C. Ara bé, s'exposa al pitjor resultat si el jugador **B** també decideix jugar l'estratègia C.
  - L'altra opció seria escollir l'estratègia G, ja que d'aquesta manera evitaria pagar el màxim, que són 40$, però li tocaria pagar com a mínim 16$ cada vegada.
  - El jugador **A** pot assegurar les seves pèrdues a un màxim de 32$ si sempre aparca al garatge (estratègia G). El seu valor minimax és -32$.

- El jugador **B** pot assegurar els seus guanys si sempre escull l'estratègia C, evitant no obtenir beneficis en el cas que els dos jugadors escullin l'estratègia G. D'aquesta manera, si sempre escull l'estratègia C assegura un valor de 16$ a cada jugada. El valor maximín del jugador **B** és -16$.

Ara bé: és possible per al jugador **A** millorar la pèrdua de 32$ a cada jugada?

Considerem la situació en que el jugador **B** utilitza una estratègia mixta $(p_G, p_C) = (1-p, p)$, que diu que vigilarà amb probabilitat $(1-p)$ i no vigilarà amb probabilitat p, on $0 \leq p \leq 1$.

Quan el jugador **B** escull G, el valor esperat del jugador **A** és:

$$E = E(p, G) = (-32)(1-p) + 0p = -32 + 32p$$

Quan el jugador **B** escull C, el valor esperat del jugador **A** és:

$$E = E(p, C) = (-16)(1-p) + (-40)p = -16 - 24p$$

El millor valor que permetrà al jugador **A** obtenir els màxims beneficis en els dos casos el podem trobar resolent un sistema format per les dues equacions lineals. D'aquesta manera obtindrem que $p = {}^{2}/_{7}$ i $E = -22{,}85$. L'estratègia mixta òptima $(1-p, p) = ({}^{5}/_{7}, {}^{2}/_{7})$ per al jugador **A** és aparcar al garatge i al carrer amb probabilitats ${}^{5}/_{7}$ i ${}^{2}/_{7}$, respectivament. El valor esperat per al jugador **A** és -22,85.

De la mateixa manera, seria possible per al jugador **B** obtenir un benefici major de 22,85$?

Considerem la situació en que el jugador **A** també utilitza una estratègia mixta $(p_G, p_C) = (1-p, p)$, que diu que aparcarà al garatge amb probabilitat $(1-p)$ i al carrer amb probabilitat p, on $0 \leq p \leq 1$.

Quan el jugador **A** escull G, el valor esperat del jugador **B** és:

$$E = E(p, G) = (-32)(1-p) + (-16)p = -32 + 16p$$

Quan el jugador **A** escull C, el valor esperat del jugador **B** és:

$$E = E(p, C) = (0)(1-p) + (-40)p = -40p$$

El millor valor que permetrà al jugador **B** obtenir els màxims beneficis en els dos casos el podem trobar resolent el sistema format per les dues equacions lineals.

D'aquesta manera obtindrem que $p = {}^{4}/_{7}$ i $E = -22{,}85$. L'estratègia mixta òptima $(1-p, p) = ({}^{3}/_{7}, {}^{4}/_{7})$ per al jugador **B** és vigilar amb una probabilitat de ${}^{3}/_{7}$ i no vigilar amb una probabilitat de ${}^{4}/_{7}$. El valor esperat pel al jugador **B** és -22,85.

6. EL DILEMA DEL PRESONER

El joc del dilema del presoner es considera com la major influència en la teoria de jocs. Va ser descobert l'any 1950 per dos investigadors anomenats Merrill Flood i Melvin Dresher. Es tracta d'un joc simple i desconcertant que va posar a prova part dels fonaments de la teoria de jocs, i ben aviat va adquirir la fama de ser el conflicte més quimèric possible.

Com el seu nom indica, el dilema del presoner és una història que planteja una decisió difícil, és com un conte que acaba amb un dilema sense resoldre's i que requereix ser desxifrat.

Tot i no ser publicat fins uns anys després de la seva creació, el dilema es va propagar per tota la comunitat científica des dels anys cinquanta per transmissió oral.

Evidentment, el dilema del presoner és molt més que un relat; posseeix una estructura matemàtica concreta, a més de ser també un problema que sovint es planteja a la vida real. Va ser descobert casualment quan el creixement d'armes i la cursa armamentista van començar a ser preocupants. Per aquest motiu, es considera que els conflictes de l'era nuclear en són exemples clàssics. Tanmateix, el concepte del dilema del presoner no es veu reflectit tan sols a estratègies militars, sinó que té aplicació universal: es pot observar també en àmbits com el de la biologia, la psicologia, la sociologia, l'economia i el dret. Sorgeix on hi ha conflictes amb interessos.

6.1 Orígens

Les persones, en moltes situacions de la vida, actuem de manera irracional. Merrill Flood va ser el primer en analitzar aquesta irracionalitat des del punt de vista de la teoria de jocs.

Des de 1949, Flood buscava jocs i dilemes presents en la vida quotidiana per intentar donar una explicació del per què davant d'aquests les persones decidien actuar d'una manera determinada. Així doncs, va realitzar diversos experiments utilitzant la teoria matemàtica del repartiment just, la major part dels quals es basaven en el repartiment d'uns beneficis.

El seu objectiu era investigar com la gent es reparteix aquests beneficis quan és permès cooperar per tal d'obtenir guanys addicionals.

Un dels experiments que va realitzar va ser el d'oferir a dues secretàries el negoci següent:

- Donar a la primera una recompensa de 100$.
- Donar una quantitat de 150$ a ambdues secretàries amb l'objectiu que aquestes es posin d'acord a l'hora de repartir-se la quantitat.

En aquest cas, la primera secretària té avantatge respecte la segona, ja que té l'opció de quedar-se amb els 100$ que se li han ofert primerament sense la necessitat que l'altra l'ajudi. Per altra banda, a la segona secretària no se li garanteixen beneficis, a no ser que l'altra decideixi cooperar.

Segons Flood, es tractava de repartir els 50$ addicionals, per la qual cosa va suposar que es repartirien la diferència, quedant-se la primera amb 125$ i la segona amb 25$. No obstant això, el punt de vista de les secretàries no responia a les expectatives de Flood, ja que aquestes van estar d'acord en repartir-se els 150$ a parts iguals.

La conclusió que en va extreure Flood va ser que la relació social que hi ha entre les persones té una gran influència en la seva manera d'actuar.

Flood també va estudiar dilemes de caràcter pràctic. El més important és l'anomenat "dos persones que no cooperen". Va ser el primer estudi científic del dilema del presoner; descriu un experiment realitzat el gener de 1950 juntament amb Melvin Dresher. No obstant, aquest experiment no permet comprendre de la millor manera el dilema del presoner, de manera que n'explicaré una versió diferent.

6.1.1 – L'HONOR DELS LLADRES

La situació consta de dos personatges. Un d'ells ha robat el diamant més gran del món i es disposa a vendre'l. Sap que hi ha un possible comprador, un personatge anomenat Sr. Malo, el qual té la fama de ser molt avariciós. Ambdós personatges s'han posat d'acord per intercanviar el diamant per una maleta amb molts diners. El Sr. Malo suggereix que el punt de reunió sigui un camp de blat en una zona despoblada; d'aquesta manera no hi haurà testimonis.

No obstant això, el posseïdor del diamant sap que aquesta és l'estratègia que sempre utilitza el Sr. Malo, de la qual l'adversari sempre en surt perjudicat. Per evitar-ho, li proposa un altre pla: el Sr. Malo amagarà la maleta amb els diners en un camp situat a

Dakota del Nord, i el posseïdor del diamant amagarà el diamant en un camp de Dakota del Sud.

A continuació, cada un d'ells informarà a l'altre de com trobar el seu objectiu. El Sr. Malo accepta el nou pla.

L'amo del diamant arriba al camp de Dakota del Sud disposat a amagar la maleta amb el diamant. En aquell moment, però, se li acudeix una idea: *per què no quedar-se amb el diamant?* D'aquesta manera el Sr. Malo no podrà saber que l'ha traït, ja que aquest el trucarà donant-li les instruccions, i podrà marxar cap a Dakota del Nord a buscar els diners. Poc després, però, se li acudeix una altra idea: *el Sr. Malo deu estar pensant exactament el mateix!*

El plantejament del dilema és el següent:

	El Sr. Malo respecta l'acord	**El Sr. Malo traeix l'amo del diamant**
L'amo del diamant respecta l'acord	El negoci surt bé. L'amo del diamant obté els diners i el Sr. Malo obté el diamant.	L'amo del diamant no s'emporta res, i el Sr. Malo se'n va amb els diners i el diamant.
L'amo del diamant traeix el Sr. Malo	L'amo del diamant se'n va amb els diners i el diamant. El Sr. Malo no s'emporta res.	Es queden igual; l'amo del diamant es queda amb el diamant i el Sr. Malo amb els diners.

La qüestió és que el posseïdor del diamant ha de prendre una decisió sense saber què farà el Sr. Malo. Està clar que l'amo del diamant preferiria obtenir els diners sense haver de desfer-se del diamant, tal com el Sr. Malo aconseguir el diamant sense donar res a canvi. No obstant, tant un com l'altre quedarien satisfets si el canvi tingués lloc tal com s'havia acordat al principi, ja que al Sr. Malo l'interessa realment aconseguir el diamant, igual com a l'altre els diners.

El millor resultats per a tots dos és el que correspon a la casella superior esquerra, és a dir, com a conseqüència de complir el canvi acordat. Tanmateix, el millor resultat per a cada un d'ells per separat és ser l'únic que enganya l'altre. Ara bé, amb aquest s'arrisquen a trobar-se a la pitjor situació.

Tenint en compte això, es pot veure la situació des de dos punts de vista diferents:

- Faci el que faci el Sr. Malo, el millor és que l'amo del diamant es quedi amb ell. Si el Sr. Malo ha deixat els diners, es podrà quedar amb els diners i el diamant; si no ha deixat res, almenys podrà vendre el diamant a una altra persona.
- El Sr. Malo pot arribar a la mateixa conclusió sobre la irracionalitat de jugar brut. Si és així, els dos s'enganyarien mútuament i no obtindrien res. Per tant, arriba a la conclusió que el millor és respectar l'acord.

6.1.2 – L'EXPERIMENT DE FLOOD I DRESHER

Flood i Dresher es preguntaven si les solucions que eren punts d'equilibri de Nash podrien no ser un desenllaç del tot favorable. Per tal de comprovar-ho, van dissenyar un joc senzill en què això passava.

El seu objectiu era veure si les persones reals, especialment aquelles que no tinguessin la més mínima idea de què era un punt d'equilibri, arribarien sense saber-ho a les estratègies d'equilibri. Tant un com l'altre ho posaven en dubte.

Per tal de realitzar l'experiment, van escollir a dos amics, representats en la taula com AA i JW. El joc se'ls hi va presentar com una taula de resultats ja donada:

	Estratègia 1 de JW (no cooperar)	**Estratègia 2 de JW (cooperar)**
Estratègia 1 de AA (cooperar)	-1c, 2c.	½ c, 1c.
Estratègia 2 de AA (no cooperar)	**0, ½ c.**	1c, -1c.

Cada jugador havia d'escollir la seva estratègia sense conèixer la de l'adversari.

Com en el joc del diamant, els dos jugadors s'adonen que hi ha una estratègia que és la més favorable, independentment del que faci l'altre jugador. No obstant això, si els dos es decideixen per escollir-la, els resultats que obtindran tant un com l'altre no seran els millors que poden obtenir. De fet, obtindrien més benefici escollint les seves pitjors estratègies amb la condició que els dos les seleccionessin a la vegada.

La teoria de Nash proposa com a resultat racional el de la casella inferior esquerra, ja que cap dels dos pot obtenir un resultat millor si canvia d'estratègia unilateralment. No obstant això, la casella superior dreta ofereix els millors resultats tant per un jugador com per l'altre; aquests, però, només es poden aconseguir si ambdós jugadors *cooperen*.

En l'experiment, Alchian i Williams (així és com es deien els dos jugadors) van jugar una seqüència de cent partides. En cap moment es va observar amb evidència que hi hagués preferència per la solució d'equilibri de Nash, sinó al contrari; Alchian va escollir l'estratègia de cooperar en un 68% de les vegades, i Williams en un 78%.

Durant el joc s'intentava que hi hagués una cooperació mútua. Williams va reconèixer que els dos havíem de cooperar per maximitzar els beneficis. Quan Alchian no cooperava, Williams el “castigava” no cooperant a la següent partida. Llavors Williams tornava a cooperar. No obstant això, el desenllaç va ser la cooperació mútua (un 60%).

Flood i Dresher es preguntaven com es prendria aquests resultats Nash, ja que la *no cooperació*, que era la solució d’equilibri, s’havia dut a terme tan sols en catorze ocasions. Segons Nash, però, això va passar perquè en realitat era com si els jugadors participessin en una gran partida composta per moltes jugades i, per tant, no es pot considerar com si es tractés d’una seqüència de jocs independents. Hi ha massa interacció, cosa que es reflecteix en els resultats.

6.1.3 – L’ANÈCDOTA DE TUCKER

L’experiment de Flood i Dresher va tenir molt de ressò a la comunitat científica. Tot i que pensaven que les conclusions que havien obtingut eren importants, els dos personatges afirmen que no s’esperaven l’enorme impacte que va tenir aquesta idea en l’àmbit de la ciència i la societat.

Segons Flood, Von Neumann va considerar que el joc era estimulant, ja que qüestionava la teoria d’equilibri de Nash; no obstant, no es va prendre seriosament l’experiment.

Dresher va ensenyar el joc a un altre conseller de la comunitat científica, Albert Tucker, un distingit matemàtic conegut de Von Neumann i Nash.

El maig de 1950, el departament de psicologia de la Universitat de Stanford va demanar a Tucker que fes una conferència sobre la teoria de jocs. A Tucker li havia cridat l’atenció el joc que li va mostrar Dresher des d’un punt de vista més ampli que la teoria de jocs. Com que el públic, format per psicòlegs, no tenia gaires coneixements sobre la teoria de jocs, Tucker va presentar el joc immers en una història. Podem dir que ell és qui va inventar la història del dilema del presoner tal com s’explica avui en dia, i ell mateix en va donar el nom de *dilema del presoner*.

6.2 Forma actual i anàlisi matemàtica del joc

La situació és la següent: dos sospitosos són acusats d’haver comès un crim. Estan separats l’un de l’altre, de manera que no es poden comunicar, i se’ls ha ofert dues opcions: guardar silenci o confessar.

Segons l'opció que triïn, estaran exposats a les següents conseqüències:

1. Si els dos jugadors guarden silenci, seran condemnats a un any de presó cada un.
2. Si els dos confessen, la sentència serà de cinc anys per a cada jugador.
3. Si un es manté en silenci però l'altre confessa, l'individu que confessi quedarà lliure. Mentrestant, l'altre, declarat testimoni del primer, se'l condemnarà a 10 anys de presó.

Tenint en compte que l'objectiu de cada jugador és passar el mínim de temps possible tancat a la presó, la qüestió és: *és millor guardar silenci o confessar?* Considerant el pitjor dels casos el millor és confessar, i seguidament veurem per què.

Analitzaré el joc des del punt de vista d'un dels jugadors, el qual anomenarem jugador **A**, mentre que l'adversari serà el jugador **B**.

Hi ha dos casos a considerar: el jugador **B** pot mantenir-se en silenci o confessar.

- Si es manté en silenci, el jugador **A** es pot lliurar de ser tancat a la presó si confessa, mentre que s'exposa a una condemna d'un any si també es manté en silenci.
- Si confessa, el millor que pot fer el jugador **A** és també confessar, ja que d'aquesta manera s'exposa a cinc anys de presó, mentre que si guarda silenci se'l condemna a deu anys de presó, i mentrestant el jugador **B** quedaria en llibertat.

Tanmateix, el que és paradoxal és que si ambdós presoners guarden silenci, és a dir, **cooperen**, s'exposen tan sols a un any de presó cada un, la qual globalment és la millor opció.

Podem plantejar aquesta situació com un joc 2 x 2, on la "*C*" de *cooperació* correspon a guardar silenci, i la "*N*" de *no cooperació* correspon a confessar.

Tenim els dos jugadors, els quals anomenem jugador **A** i jugador **B**, com ja hem esmentat anteriorment. El jugador **A**, per exemple, numera els resultats del millor (4) al pitjor (1) de la següent manera:

4. **NC** → El jugador **A** confessa, mentre que el jugador **B** es manté en silenci. Per tant, el jugador **A** queda en llibertat.
3. **CC** → Ambdós jugadors guarden silenci. Per tant, el jugador **A** tan sols és condemnat a un any de presó (també el jugador **B**).

2. **NN** → Els dos jugadors confessen, de manera que el jugador **A** s'exposa a cinc anys de presó (també el jugador **B**).
1. **CN** → El jugador **A** guarda silenci, mentre que el jugador **B** confessa. Per tant, el jugador **A** és condemnat a deu anys de presó.

Les preferències per al jugador **B** són les mateixes, però intercanviant la 1 i la 4.

Anteriorment he descrit la hipotètica situació, i hem arribat a la conclusió que el millor que pot fer cada jugador és confessar, malgrat el possible millor resultat que s'obtindria en el cas que ambdós jugadors guardessin silenci.

		Jugador B	
		C (silenci)	N (confessió)
Jugador A	C (silenci)	(3,3)	(1,4)
	N(confessió)	(4,1)	(2,2)

*En el Dilema dels Presoner, N (confessar) és una estratègia dominant tant pel jugador **A** com pel jugador **B**.*

Anem a demostrar-ho pel jugador **A**:

Posem el cas que el jugador **A** esculli N. Llavors el jugador **B** pot fer dues coses:

- Escollir C. En aquest cas, l'elecció de **B** ofereix el millor resultat possible al jugador **A** "4", davant del "3" que hagués aconseguit si ell mateix hagués escollit C.
- Escollir N. En aquest cas, l'elecció de **B** porta a un resultat de "2" per al jugador **A**, al contrari que el pitjor resultat de "1" que hagués obtingut si prèviament hagués escollit l'estratègia C.

Això ens demostra que N és una estratègia dominant, ja que faci el que faci el jugador **B**, el jugador **A** obté iguals o millors resultats que el seu adversari escollint-la.

La paradoxa que ens mostra aquest joc és la següent: si ambdós jugadors escullen la que individualment és la seva millor estratègia (estratègia dominant), N, s'exposen a un resultat de (2,2), el qual és pitjor que el resultat de (3,3) que aconseguirien si cooperessin.

Si ambdós jugadors cooperen, és a dir, guarden silenci, s'exposen al millor resultat si analitzem la situació des d'un punt de vista <u>conjunt</u>: qualsevol altre parell d'estratègies perjudicaria almenys un dels dos jugadors. Aquest fet ens mostra clarament que l'estratègia (3,3) correspon a un *òptim de Pareto*, ja que donada aquesta situació, qualsevol dels dos jugadors pot canviar d'estratègia i millorar la seva pròpia situació (perjudicant l'altre).

No obstant això, si ens fixem amb el resultat aconseguit a partir de l'ús d'estratègies dominants (no cooperació per part dels dos jugadors), aquest és increïblement estable. Això s'explica perquè aquest resultat es troba en *Equilibri de Nash*: si el jugador **A** canvia l'estratègia N per la C, el resultat canviaria de (2,2) a (1,4), i evidentment seria pitjor per al jugador **A** (hauria passat del "2" a l'"1"). De la mateixa manera, el resultat també canviaria per al jugador **B** si aquest tingués la temptació de canviar la seva estratègia N per la C (li passaria exactament com al jugador **A)**.

En el cas del dilema del presoner, l'òptim de Pareto del joc i l'equilibri de Nash no coincideixen.

Tot seguit, faré una explicació del mateix joc aplicat a un esdeveniment polític històric; la *carrera d'armes* que va tenir lloc entre els Estats Units i Rússia els anys 60, 70 i 80.

Representaré la cursa d'armes com un simple joc de matrius 2 x 2. El model serà una simplificació de la situació real, ja que ignorarem molts factors importants.

Cada una d'aquestes superpotències pot optar independentment per una d'aquestes dues polítiques:

A) La no cooperació: armar-se, preparant-se per a una possibilitat de guerra.
D) La cooperació: desarmar-se, o almenys estar d'acord amb una prohibició parcial de les armes.

Existeixen quatre resultats possibles, els quals ordenats per ordre de preferència per a cada país, són:

4. Superioritat militar (mitjançant el desarmament del país contrari).
3. Desarmament mutu: els dos països opten per desarmar-se, la qual cosa, vista en un conjunt, és el millor resultat social per a ells.
2. Carrera d'armes: ambdós països decideixen armar-se, la qual cosa és la pitjor possibilitat des d'una perspectiva global.
1. Inferioritat militar (mitjançant el propi desarmament).

		Jugador B	
		D (desarmar-se)	A (armar-se)
Jugador A	D (desarmar-se)	(3,3)	(1,4)
	A (armar-se)	(4,1)	(2,2)

Si assignem a Rússia el paper de jugador **A** i als Estats Units el paper de jugador **B**, i substituïm la "A" per una "N" de no cooperació i la "D" per una "C" de cooperació, la situació passa a ser una versió del Dilema del presoner, amb la qual cosa veiem novament la paradoxa: els dos països prefereixen el desarmament mutu –el qual porta a un resultat de (3,3)- que una carrera d'armes – la qual cosa porta a un resultat de (2,2).

Tanmateix, casa país té una millor estratègia per a ell mateix (estratègia dominant) d'acord amb els seus propis interessos, que és armar-se, la qual si ambdós potències la duen a terme s'exposen a un pitjor resultat.

En la vida real la gent aconsegueix freqüentment evitar el resultat no cooperatiu en situacions com el Dilema del presoner. El joc normalment es duu a terme dins d'un context més gran, on actuen altres incentius. A més, s'acostuma a jugar de forma repetitiva: no és un esdeveniment únic. Elements com la confiança desenvolupen un paper important, així com recórrer a millors canals de comunicació, procediments d'inspecció més fiables, acords vinculants, etc.

El Dilema del presoner senyala la dinàmica davant d'una paradoxa social que té lloc amb freqüència, on el resultat cooperatiu o un que no té en compte el propi interès, és la millor solució a llarg termini.

6.3 <u>Altres aplicacions reals</u>

Crear un dilema del presoner no és difícil; només cal generar la temptació de millorar els propis interessos de manera que si *tothom* ho fes s'arribaria al desastre absolut. Això és fàcil d'aconseguir, per això alguns interpreten el dilema del presoner com el problema fonamental de la societat: el problema del $\ll mal \gg$. Les desgràcies que han tingut lloc al llarg de la història són les causades per l'home, és a dir, aquelles que són conseqüència de les accions dels individus contràries al bé comú. Podem trobar diferents dilemes o situacions de la vida quotidiana que reflecteixen el dilema del presoner. Es tracta, però, de dilemes amb molt jugadors, enlloc de tenir-ne només dos.

Un exemple seria el dilema en què es troba un passatger a l'hora de pujar al Metro. *Per què no salta simplement per sobre de la barrera i així s'estalvia pagar el viatge?* Les possibilitats que el Metro faci fallida per no haver pagat són pràcticament nul·les. Els vagons funcionen independentment de si estan ocupats de passatgers o no. Un viatger més no influeix en absolut en les despeses generals del Metro. Tanmateix, cal tenir en compte que si *tothom* pensés igual el Metro acabaria fent fallida i ningú el podria utilitzar per anar enlloc.

Un altre exemple seria el funcionament dels dispensadors de diaris a Nova Zelanda, que està basat en el sistema de codi moral. Els lectors han de deixar els diners cada vegada que s'emporten el diari, tot i que ningú els impedeix emportar-se'l sense pagar. És evident que hi ha poca gent que els roba, ja que d'aquesta manera s'acabaria canviant el sistema.

Per altra banda, la televisió estatal dels Estats Units també funciona d'aquesta manera; qualsevol pot connectar-se i veure la PBS (corresponent a les sigles de la cadena estatal) sense pagar, però si tothom ho fes no hi hauria televisió estatal.

Una altra modalitat del dilema del presoner és la situació en què ens trobem a l'hora d'acceptar les exigències de terroristes o segrestadors. El més normal és que es prefereixi pagar el rescat per tal que la víctima segrestada sigui alliberada. D'aquesta manera, però, s'anima a altres possibles segrestadors a seguir en l'ofici, i així a la llarga hi haurà possiblement més segrestos; si ningú pagués rescats, segurament no n'hi hauria.

Al contrari dels exemples esmentats anteriorment, no es pot resoldre aquest dilema seguint les normes convencionals de la moral. Colar-se al Metro està mal fet, però hi haurà pocs que considerin immoral pagar el rescat en un cas de segrest per alliberar a una persona innocent.

6.4 <u>Experiment</u>

Tal com van fer Flood i Dresher, he decidit comprovar els resultats de l'experiment de primera mà, de manera que l'he fet dues vegades; primer entre dues dones i després entre dos homes. L'única diferència, però, és que enlloc de fer una seqüència de cent partides n'he fet dues de vint-i-cinc.

El que he volgut comprovar amb aquest experiment és el següent:

- Si els jugadors arribarien a l'estratègia d'equilibri de Nash sense haver sentit mai a parlar de què és.

- Si, malgrat s'adonessin que hi ha una estratègia dominant (opció *no cooperar*), la qual porta a aconseguir l'equilibri de Nash, s'adonarien que la millor opció des d'un punt de vista conjunt és l'altra (*cooperar*) i l'acabarien portant a terme.
- Si el sexe influïa en la manera d'actuar.

Els resultats que he obtingut són els següents:

Jugada	Teresa	Carla
1	C	NC
2	C	NC
3	NC	NC
4	NC	C
5	C	C
6	NC	C
7	NC	C
8	NC	C
9	C	C
10	C	C
11	C	C
12	NC	C
13	NC	NC
14	C	NC
15	C	C
16	NC	C
17	C	C
18	C	C
19	C	C
20	NC	C
21	C	C
22	C	C
23	C	C
24	C	C
25	C	C

Jugada	Josep A.	Josep S.
1	C	C
2	C	NC
3	C	NC
4	NC	NC
5	C	C
6	C	NC
7	NC	NC
8	NC	C
9	NC	NC
10	NC	NC
11	C	NC
12	C	NC
13	NC	C
14	NC	NC
15	NC	NC
16	C	C
17	NC	NC
18	C	NC
19	NC	NC
20	NC	NC
21	C	NC
22	NC	NC
23	NC	NC
24	NC	NC
25	NC	NC

Els resultats obtinguts en el primer experiment són els següents:

Tal com va passar a l'experiment realitzat per Flood i Dresher, en cap moment es veu que les jugadores tinguin interès per arribar a l'equilibri, sinó al contrari; hi ha una clara tendència a cooperar. Aquesta intenció es veu sobretot amb la Carla, que intenta constantment fer cooperar la Teresa, i ho fa en un 80 % de les vegades. Finalment, les dues s'adonen que vista en conjunt aquesta és la millor estratègia, i així acaben el joc: cooperant en les cinc últimes partides.

Els resultats obtinguts en el segon experiment són els següents:

A diferència del que passa amb les dones, en els homes es veu una clara tendència a arribar a l'equilibri de Nash. Al principi, s'adonen que la millor estratègia des del punt de vista conjunt és cooperar (així m'ho van comentar), però veuen que amb aquesta també tenen la possibilitat de perdre-ho tot.

A diferència de les dones, descobreixen que hi ha una estratègia dominant, la de no cooperar, la qual els permet obtenir el possible millor resultat o bé el segon pitjor (depenent de l'elecció de l'altre jugador), però mai el pitjor. Per aquest motiu, el dos jugadors acaben el joc no cooperant en les últimes quatre partides.

	Dones	**Homes**
C	72 %	30 %
NC	28 %	70 %

Si analitzem els resultats en conjunt, la taula ens mostra una clara diferència en la manera d'actuar segons el sexe.

- Les dones han optat pràcticament sempre per cooperar; han valorat més el resultat en què les dues poguessin sortir beneficiades, de manera que aquesta estratègia s'ha donat en un 78 % de les partides. Aquest resultat correspon a l'**òptim de Pareto** del joc, ja que vista en conjunt aquesta és la millor estratègia.

- Els homes, tot i adonar-se de l'existència d'una estratègia que els permetia maximitzar els beneficis en conjunt, han preferit no arriscar-se i han optat per l'elecció de l'estratègia dominant, la qual els ha conduït a la situació d'equilibri de Nash corresponent a l'estratègia de no cooperar, la qual s'ha donat en un 70 % de les partides. Per tant, els homes han tendit a l'**equilibri de Nash**.

7. CONCLUSIONS

Amb la realització d'aquest treball he pogut conèixer a grans trets què és la teoria de jocs en general, tema que desconeixia totalment, i la seva utilitat; com, mitjançant una sèrie de mètodes matemàtics, podem analitzar i resoldre els diferents jocs i/o situacions que tenen lloc a la vida real.

En primer lloc he tractat exemples de jocs més simples, jocs en què no intervenen factors externs que puguin influir en la decisió dels individus a l'hora d'actuar; eren jocs totalment competitius, un jugador guanyava el que l'altre perdia i, per tant, com que no hi havia la possibilitat de cooperar existia o bé una estratègia òptima que permetés a un dels jugadors guanyar (en el cas dels jocs purs com *parells i senars*), o bé un mètode que permetés obtenir el màxim benefici possible als jugadors (en el cas dels negocis).

Finalment, però, he tocat un tipus de joc molt més complex, El dilema del presoner, que pertany a l'àmbit dels jocs competitius/cooperatius, en el qual els mètodes matemàtics no són una condició suficient per resoldre'l. El dilema del presoner és una situació amb què ens trobem constantment a la vida quotidiana que encara no s'ha resolt i es creu que no se'n podrà determinar una solució. El cas és que hi ha una gran quantitat de factors externs que poden influir en la decisió dels jugadors, com ara el tipus de situació on tingui lloc el dilema, la relació dels individus entre els quals es produeixi, el codi moral de cadascun, etc. Aquest mateix fet he pogut comprovar amb l'experiment que he realitzat sobre el mateix dilema del presoner, primer entre dues dones i després entre dos homes; els diferents sexes han arribat a resultats totalment contraris.

La teoria de jocs és un tema que dóna molt de sí. Amb aquest treball de recerca he arribat fins aquí, però aquest podria continuar amb un nou treball basat en un estudi estadístic (caldria aprofundir en conceptes estadístics que no posseeixo) sobre la relació entre l'elecció d'estratègies del dilema del presoner i el sexe dels jugadors.

En general, el que més m'ha sorprès és veure la quantitat de conflictes i situacions de la vida quotidiana, com ara els negocis o qualsevol altre tipus d'acord entre individus, que amaguen una estructura matemàtica i que, per tant, es poden resoldre mitjançant algun mètode. Ara bé, segons la situació de què parlem no sempre hi haurà una única solució correcta, ja que sempre existiran altres punts de vista raonables i vàlids que ens permetran obtenir igualment bons resultats.

8. BIBLIOGRAFIA

BINMORE, Ken. *La teoría de juegos.* Madrid; Alianza Editorial, 2009.

CARRERAS, Francesc; MAGAÑA, Antonio. *Teoría de juegos*. Barcelona; Edicions UPC, 2001.

DAVIS, M.D. *Teoría de juegos.* Madrid; Ed. Alianza Universidad, 1979.

DORAN, Jody L.; HERNÁNDEZ, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Madrid; Addison-Wesley / Universidad Autónoma de Madrid, 2006.

FERRERO, L. *El juego y la matemática.* Madrid; Ed. La muralla S.A., 1991.

GIBBONS, R. *Un primer curso de teoría de juegos*. Barcelona; Antoni Bosch, editor, S.A., 1993.

POUNDSTONE, William. *El dilema del prisionero.* Madrid; Alianza Editorial, 2008.

TAYLOR, Alan D. *Mathematics and Politic: strategy, voting, power and proof.* New York; Springer-Verlag, 1995.

http://www.biografiasyvidas.com/biografia/b/borel_emile.htm

http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%89mile_Borel

www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/.../Borel.html

http://es.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann

http://www.dma.eui.upm.es/historia_informatica/Doc/Personajes/JohnvonNeumann.htm

http://rinconmatematico.com/miro/juegos1/mirojuegosI.htm