Treball de recerca

El nombre auri: origen, demostració i recerca

2n de Batxillerat

Institut de Tona

Tona, 29 d'octubre de 2010

"Mai em deixarà de meravellar que les matemàtiques, un producte de la lliure imaginació humana, es corresponguin tan exactament amb la realitat."

Albert Einstein

0.1. Índex

0.2. Introducció

El nombre auri, a simple vista, pot semblar només un nombre matemàtic poc comú dins la societat, però, entrant a fons en el tema, ens adonem que està present en molts elements, no només creats per l'home, sinó també fruit de la naturalesa.

Des de l'antiguitat clàssica, es creu que aquesta proporció, també anomenada proporció d'or, és la relació més atraient i perfecte per a la vista. En aquest treball em vaig plantejar demostrar-ho formulant la pregunta següent:

La proporció àuria és, a l'actualitat, la preferida visualment en les figures geomètriques, l'arquitectura i l'art?

Per tal d'analitzar objectivament aquesta hipòtesi, vaig realitzar una enquesta a nivell de l'Institut de Tona i a persones properes al meu entorn, per tal d'esbrinar si preferien els elements auris o els elements corrents. He obtingut un total de 247 resultats, els quals porten a unes conclusions interessants.

Per confeccionar l'enquesta, necessitava prèviament uns coneixements teòrics sobre el nombre auri: el seu origen, les formes que tenen la proporció àuria i elements arquitectònics, naturals i quotidians amb aquesta relació. Per això, vaig realitzar una recerca bibliogràfica i electrònica que constitueix la part teòrica d'aquest treball.

A més, el nombre d'or no es limita només a elements visuals, sinó també és present en elements auditius, com la música. És per això que aquest aspecte també està present dins el treball.

També, hi ha un conjunt d'enigmes matemàtics que contenen el nombre d'or a la seva resolució, per tant, vaig decidir que s'havien d'incloure com a complement del treball. Així doncs, l'annex II els explica detalladament.

Un dels objectius del treball era, per tal d'aprofitar el conjunt de dades que necessitava per a l'enquesta, realitzar un vídeo explicatiu sobre el nombre auri i la seva demostració. Per sort, vaig poder realitzar l'estada a l'empresa *Gen-lock Vídeo* durant l'estiu del 2010 i vaig aprendre molts aspectes importants de l'edició d'un vídeo i de la realització d'un DVD.

Un altre objectiu que em vaig plantejar va ser que, si la proporció àuria es podia demostrar visualment en format audiovisual, també s'hauria de poder demostrar amb elements reals, no virtuals. D'aquesta manera, em vaig plantejar dissenyar i construir un trencaclosques, que he anomenat *tangram auri*, que permetés, de forma manual i sense necessitat d'eines de dibuix tècnic, poder comprovar com és i d'on surt la proporció àuria.

El conjunt del treball està enfocat, no només a les matemàtiques i continguts específics, sinó també a altres matèries com la història, la música, l'arquitectura o l'art. No obstant, s'ha de tenir present que el principal objectiu d'aquest treball és fer entenedor el nombre auri per a qualsevol persona, sense necessitat de tenir-ne coneixements previs, i és per això que he cregut convenient afegir notes al peu de pàgina amb definicions i explicacions de tecnicismes matemàtics.

1. ORIGEN DEL NOMBRE AURI

1.1. Pitàgores

Pitàgores va néixer a mitjan segle VI a. C. a l'illa grega de Samos. De la seva mare, Pitia, no se'n conserva informació, però del seu pare, Menesarc, es creu que podia ser un ric comerciant, fet que podia afavorir que Pitàgores rebés una bona educació, fins i tot per part de Tales de Milet.

Va viatjar a Egipte, Babilònia (l'actual Iraq) i Fenícia (l'actual Líban). És possible que durant els seus viatges aprengués matemàtiques i astronomia, ja que les seves teories mostren influència d'aquests països.

Segons es diu, Pitàgores, en tornar a Samos després dels seus viatges, era molt admirat pels coneixements adquirits i l'oportunitat que havia tingut per viatjar. Se li va demanar que ensenyés al poble el que havia après i ell així ho va fer. El problema va sorgir quan la gent creia que tot el que explicava era massa abstracte i Pitàgores, desanimat per aquesta reacció i per l'opressió que rebia per part del dictador Polícrates, va decidir traslladar-se a Crotona, Itàlia.

Allà, i també per demanda del poble, Pitàgores va iniciar la que es coneix com a *escola pitagòrica*. Gràcies a l'allotjament i finançament de Miló, un home adinerat de Crotona, aquesta vegada la iniciativa va tenir èxit.

Tot i així, conflictes interns entre maneres de pensar de la mateixa societat pitagòrica van provocar assassinats per traïció i per incompliment de les normes. Això va donar molt mala fama a l'escola. No obstant, després de la mort de Pitàgores, matemàtics i filòsofs van fer perdurar i evolucionar durant quatre generacions més els estudis pitagòrics, fins que altres personatges com Aristòtil, Plató o Euclides van tenir més protagonisme.

1.2. L'escola pitagòrica

1.2.1. La història

Al segle VI a. C., Pitàgores, sota la demanda dels ciutadans de Crotona i amb l'ajuda de Miló, inicia l'*escola pitagòrica*, una societat de caràcter místic i religiós amb la intenció d'explicar numèricament tot el conjunt de l'univers.

A l'inici de la comunitat pitagòrica van sorgir dues classes de membres. Per una banda, els *matemàtics* ('*mathematikoi*', coneixedors), que rebien el coneixement de Pitàgores de forma completa i, per altra banda, els *acusmàtics* ('*akousmatikoi*', oients), que creien i seguien tots els principis de la comunitat encara que no sabessin ben bé d'on provenien.

Aquesta divisió, amb el temps, va comportar molts conflictes dins l'escola pitagòrica. Per una banda, els *matemàtics* creien que el coneixement pitagòric havia d'evolucionar i ser perfeccionat amb nous descobriments. Per altra banda, els *acusmàtics* pensaven que les idees pitagòriques havien de perdurar tal i com les havia explicat Pitàgores i ningú tenia dret a modificar-les.

Quan els *matemàtics* van fer públic el secret de l'*esfera dels dotze pentàgons* (un dodecaedre regular [figura I]), segons explica Iàmblic (un *acusmàtic*) en la seva obra *Vita Pyth* (Vida Pitagòrica), els *acusmàtics* van fer naufragar el traïdor per haver saltat una de les principals normes dels pitagòrics: la del secret dels seus descobriments.

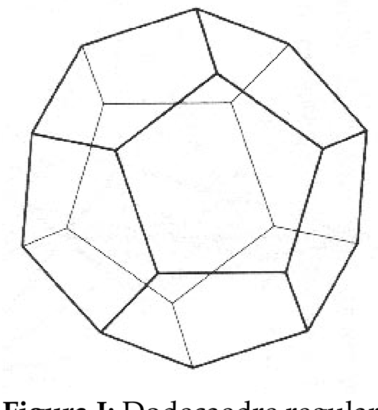


Figura I: Dodecaedre regular

Es van realitzar diverses accions de càstig cap a traïdors que explicaven coneixements pitagòrics en públic, generalment castigats amb la mort i, fins i tot, algun va ser enterrat viu.

Després de la mort de Pitàgores, quatre generacions més de pitagòrics van continuar estudiant i fent descobriments a partir de les bases pitagòriques. Cal dir que, tot i la desigualtat entre membres de la mateixa societat, tots els descobriments realitzats dins l'escola pitagòrica van ser atribuïts al seu fundador, Pitàgores, que era el seu ésser superior i la base del seu coneixement.

1.2.2. La mentalitat pitagòrica

La societat pitagòrica estava regida per una sèrie de normes de comportament i de pensament recollides en un poema titulat *Versos auris* escrit pel mateix Pitàgores. Aquesta obra reflecteix exactament la mentalitat que seguien els pitagòrics i mostra tots els aspectes que tractava aquesta societat.

L'escola pitagòrica, des dels inicis, pot ser considerada una comunitat religiosa. De fet, es demostra clarament que la primera prioritat de Pitàgores dins la seva comunitat era el culte als déus i la vida religiosa, ja que els primers versos de la seva obra *Versos auris* ens ho mostren d'aquesta manera.

> *Honra, en primer lloc,*
> *i venera els déus immortals,*
> *cadascun d'acord amb la seva categoria.*

Pitàgores. *Versos auris* (vv. 1-3) [1]

Un altre aspecte molt important a la comunitat pitagòrica era el secret de tots els descobriments i coneixements. Actualment, es creu que els descobriments científics importants s'han de fer públics per tal d'augmentar progressivament el coneixement global. Tot i així, el fet que la societat pitagòrica fos una societat aïllada de la resta els va permetre guardar tot el seu coneixement només per a ells i, segons deien, evitar que fos perjudicat per altres formes de pensament. Com ja he esmentat abans, els pitagòrics tenien una forma de pensament pròpia, i no permetien que cap altra els influís. D'aquesta manera, la comunitat pitagòrica

1 Pitàgores. *Versos auris* [en línia]. Accessible a <http://www.nueva-acropolis.es/filiales/libros/Pitagoras-Versos_Aureos.pdf> [consulta: 14.II.2010].

va avançar en moltes matèries com per exemple l'astronomia, la música o les matemàtiques. Aquesta última matèria, per als pitagòrics, era la considerada la base de totes les altres tal i com mostra Aristòtil a la seva obra *Metafísica.*

> *Els pitagòrics es van dedicar a la matemàtica i van creure que els principis matemàtics eren els principis de tots els éssers. […] Els semblava que tot estava format amb semblança als nombres i, essent els nombres anteriors a totes les coses, van creure que el cel en conjunt era una harmonia i un nombre. Totes les concordances que trobaven als nombres i la música, juntament amb els fenòmens del cel i amb l'ordre de l'univers, les ajuntaven i, d'aquesta manera, formaven un sistema.*

ARISTÒTIL. *Metafísica*, Capítol 5, Llibre I [2]

Tot i que, fora de context, aquest fragment pot semblar un elogi als pitagòrics, Aristòtil pretenia totalment el contrari. Ell volia criticar les pràctiques que Pitàgores i els pitagòrics havien dut a terme, esmentant que era absurd veure les matemàtiques a tot arreu. Tot i així, gràcies a la visió pitagòrica de les matemàtiques, van realitzar descobriments sobre elements que actualment són bàsics en aquesta matèria com, per exemple: els nombres parells i imparells, els nombres primers, geometria, incloent-hi el teorema de Pitàgores, aritmètica i d'altres.

En qualsevol cas, és clar que sense els avenços pitagòrics, les matemàtiques actuals no serien tal i com les coneixem.

2 ARISTÒTIL. *Metafísica*, Capítol 5, Llibre I; dins ANATONIA CARON, Gilberta. *La Maga Ilustrada*, 25 de Set. de 2009 [en línia]. Accessible a <http://lamagailustrada.blogspot.com/2009/09/cintas-del-libre-albedrio.html> [consulta: 14.II.2010].

1.3. El nombre auri

Un segle abans que l'escola pitagòrica, al segle VII a. C., matemàtics indis ja afirmaven l'existència de nombres amb infinits decimals no periòdics. Tot i així, no és fins a l'època pitagòrica que hi ha la primera prova d'un nombre irracional[3].

Un dels descobriments mes importants fet pels pitagòrics és la proporció d'or. Aquest descobriment va causar molts problemes ja que, fins llavors, els pitagòrics pensaven que tot es podia expressar amb nombres naturals[4], ignorant les teories anteriors sobre els nombres irracionals. Va ser, segurament, el secret més important que van haver d'amagar, ja que no es podia saber que fins llavors havien estat seguint una teoria falsa.

Els pitagòrics van obtenir aquest nombre a partir de calcular proporcions entre segments del seu propi símbol, l'estrella de cinc puntes continguda dins un pentàgon regular [figura II].

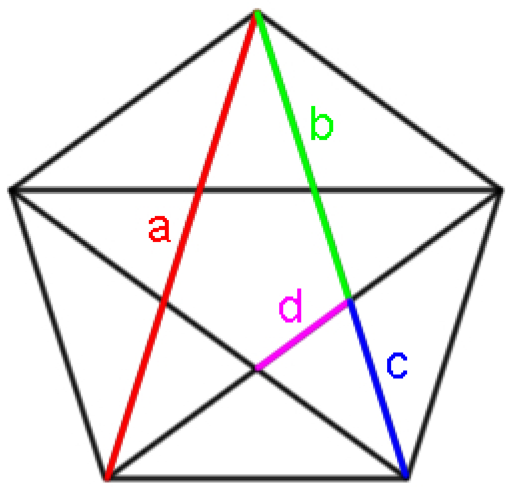


Figura II: Relació de segments de l'estrella de cinc puntes

3 **Nombre irracional:** nombre amb infinits decimals no periòdics.

4 **Nombre natural:** nombre que apareix en la successió 1, 2, 3...

Si calculem la relació entre els segments *a* i *b*, observem que és la mateixa que entre *b* i *c*, i que és la mateixa entre *c* i *d*.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

El resultat d'aquestes relacions és sempre el mateix nombre, el nombre auri.

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Observant la figura es pot veure que el segment *a* equival a la suma dels dos segments *b* i *c* ($a=b+c$). De la mateixa manera, el segment *b* equival a la suma dels dos segments *c* i *d* ($b=c+d$). Com que sabem que la relació entre els segments *a* i *b* equival a la relació entre els segments *b* i *c* i que també equival a la relació entre els segments *c* i *d*, podem concloure la següent definició de la proporció àuria.

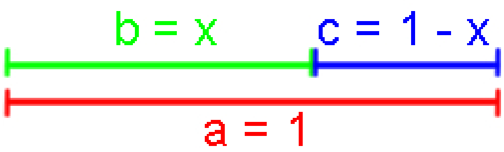
> *El nombre auri és el resultat de la proporció entre segments, que compleix que un segment major equival a la suma de dos segments menors desiguals, tals que la proporció entre els dos segments menors és la mateixa que entre el segment major i el segment més gran dels dos menors.*

1.3.1. Demostració matemàtica del nombre auri

Partint de la definició de la proporció àuria, es pot demostrar que, realment, el nombre auri és el resultant de la relació entre segments que segueixen aquestes condicions.

Per començar, necessitem tres segments *a*, *b* i *c*, que compleixin que el segment gran (*a*) sigui igual a la suma dels altres dos (*b* i *c*). Podem agafar els segments *a*, *b* i *c* de l'estrella de cinc puntes continguda dins el pentàgon regular anterior [figura II].

Per realitzar la demostració, considerarem que el segment *a* amida el valor 1 i que el segment *b* amida el valor de la incògnita *x*. Així doncs, el valor del segment *c* és la resta entre el segment *a* i el segment *b*, que resulta $c=1-x$.



A continuació, recuperem la fórmula que afirma que la relació entre *a* i *b* és la mateixa que entre *b* i *c* i substituïm les lletres pels valors de cada segment.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$$

Aïllant la igualtat, de manera que quedi igualada a zero, obtenim l'equació de segon grau següent.

$$x^2+x-1=0$$

Si la resolem, obtenim dos resultats, un dels quals es rebutja ja que és negatiu i una longitud no pot ser negativa, i l'altre que aporta el valor de la incògnita *x*, que equival al valor del segment *b*.

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0{,}61803...$$

Com que ja coneixem el valor de *x*, ara podem calcular la longitud del segment *c*.

$$c=1-x=1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=0{,}38197...$$

Si calculem les relacions entre els segments *a* i *b* i entre els segments *b* i *c*, efectivament, totes dues relacions tenen el mateix valor i el nombre auri n'és el resultat.

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

$$\frac{b}{c}=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

Aquesta demostració es basa en els costats *a*, *b* i *c* de l'estrella de cinc puntes de la figura II, però hi ha moltes altres figures que també són àuries, i estan explicades a l'apartat següent.

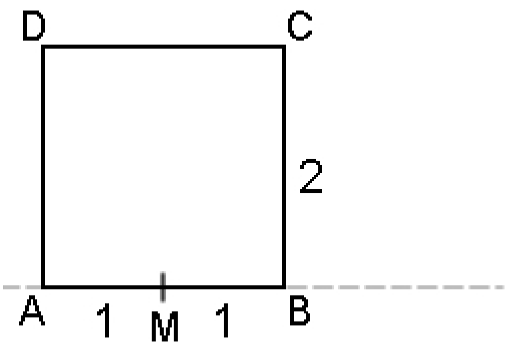
1.3.2. Representacions gràfiques del nombre auri

El nombre auri es pot representar de moltes maneres ja que, qualsevol forma que mantingui, en algun aspecte, la proporció d'or és considerada figura àuria. La figura més representativa és l'estrella de cinc puntes dins un pentàgon, però, tot i així, hi ha altres formes que també segueixen aquesta proporció com són el rectangle d'Euclides, el triangle auri o l'espiral logarítmica.

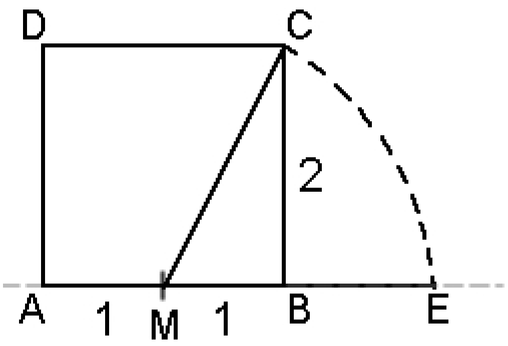
1.3.2.1. El rectangle auri d'Euclides

El rectangle auri d'Euclides és un rectangle els costats del qual mantenen una relació de mides àuria. Matemàticament es poden fer càlculs d'infinites relacions de costats que mantinguin aquesta proporció, però a l'hora de dibuixar un rectangle no es poden representar exactament mides amb infinits decimals.

Així doncs, s'ha d'utilitzar un mètode gràfic específic per poder dibuixar de forma exacta aquest rectangle. El mètode es pot utilitzar prenent com a base qualsevol mida però, per a l'exemple següent, començarem dibuixant un quadrat de costat 2, i marcant el punt mig del costat inferior.



Si calculem la longitud de la diagonal del rectangle de costats 2 i 1, aquesta amida $\sqrt{5}$, de manera que si la traslladem mitjançant un arc fins a la línia horitzontal de la base, la suma d'aquest segment (ME) amb el segment AM fa que $AE = 1 + \sqrt{5}$.



Llavors només falta traslladar el costat BC sobre el punt E i allargar DC fins al nou punt F. Així obtenim el rectangle AEFD que segueix la proporció àuria [figura III].

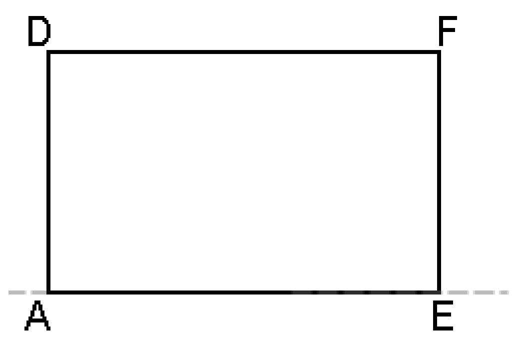


Figura III: Rectangle auri

Per demostrar que és un rectangle auri només cal trobar la relació entre els seus costats. El costat AE amida $1+\sqrt{5}$ i el costat AD amida 2, per tant, la relació entre el costat gran i el costat petit és el nombre d'or.

$$\frac{AE}{AD}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

1.3.2.2. El triangle auri

El triangle auri és un triangle isòsceles[5] que manté la proporció àuria entre el costat major i el menor. En aquest cas, no hi ha cap mètode per construir exactament aquest triangle, però es poden transportar les mides d'altres figures àuries com el rectangle d'Euclides o l'estrella de cinc puntes.

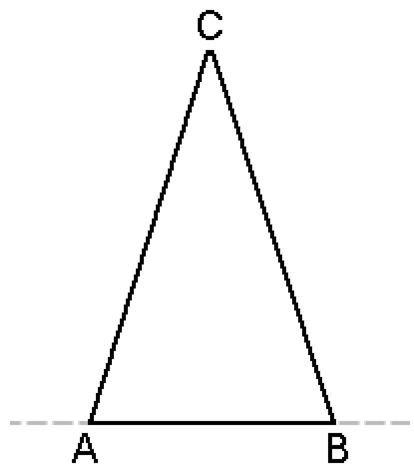


Figura IV: Triangle auri acutangle

A la figura IV observem l'exemple del triangle auri acutangle[6]. Els costats CA i CB del triangle són iguals, i la relació entre un d'aquests i la base AB resulta el nombre auri. A efectes del dibuix, AB equival al costat AD del rectangle de la figura III, i AC equival al costat AE del mateix rectangle.

Així doncs, $AC=1+\sqrt{5}$ i $AB=2$, per tant, la relació entre els costats del triangle és de la següent manera.

$$\frac{AC}{AB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

5 **Triangle isòsceles:** triangle que té dos costats iguals i un de diferent.

6 **Triangle acutangle:** triangle que només està compost per angles aguts.

A més, els angles d'aquest triangle també mantenen una relació àuria entre ells. Si calculem el valor dels angles d'aquest triangle obtenim que $\hat{C}=36º$ i que $\hat{A}=\hat{B}=72º$. El sorprenent d'aquest valors és que en dividir el sinus de 72º entre en sinus de 36º s'obté el nombre auri.

$$\frac{\sin(\hat{A})}{\sin(\hat{C})}=\frac{\sin(\hat{B})}{\sin(\hat{C})}=\frac{\sin(72º)}{\sin(36º)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

Podem observar que l'angle de 72º és el doble que l'angle de 36º. De fet, aquest dos angles també són presents a l'estrella de cinc puntes juntament amb l'angle de 108º, també proporcional a l'angle de 36º.

Dins la mateixa definició de triangle auri, hi ha un altre triangle que la compleix. És un triangle que, enlloc dels angles de 72º, en té un d'obtús[7] de 108º. És, doncs, el triangle auri obtusangle[8] de la figura V.

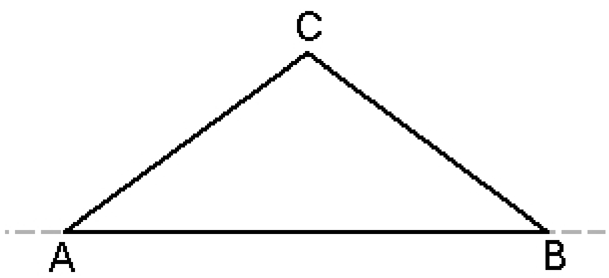


Figura V: Triangle auri obtusangle

Si comprovem matemàticament la relació entre el sinus de 108º i els sinus de 36º obtindrem altre vegada el nombre auri.

$$\frac{\sin(\hat{C})}{\sin(\hat{A})}=\frac{\sin(108º)}{\sin(36º)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

7 **Angle obtús:** angle que amida més de 90º.

8 **Triangle obtusangle:** triangle que té un angle obtús.

Aquests dos triangles són els únics que poden mantenir la proporció àuria. En primer lloc, si intentéssim trobar la proporció àuria en algun altre tipus de triangle no seria possible. En un triangle equilàter, buscant la relació entre costats o entre angles, sempre obtindríem 1 ja que tots els seus costats i tots els seus angles són iguals entre ells.

En segon lloc, si ho intentéssim amb un triangle escalè[9], podríem obtenir una proporció àuria entre dos dels seus costats, però no hi ha tres segments de diferent mida i proporcionalment auris que permetin construir un triangle. Només cal recordar la definició del nombre auri, i és que els dos costats menors equivalen al major. Si la suma dels dos costats petits equival al costat gran, llavors no es pot construir un triangle ja que hi hauria dos angles de 0º, en contacte amb el segment llarg, i un angle de 180º, unint els dos segment petits entre ells. El resultat seria una línia perfectament plana.

Aquestes dues figures geomètriques, juntament amb el rectangle auri d'Euclides, són la base geomètrica del nombre auri.

9 **Triangle escalè:** triangle sense cap costat i cap angle igual.

1.3.2.3. El pentagrama

L'estrella de cinc puntes dins un pentàgon regular també es pot anomenar pentagrama, ja que aquesta paraula prové del grec *penta* (cinc) i *gramma* (línia). A part de la relació entre segments que va permetre descobrir el nombre auri (explicat anteriorment), el pentagrama també amaga, de la mateixa manera que el triangle auri, una curiositat entre la proporció dels seus angles.

Concedirem els triangles ABE, BCH i DJI de la figura VI per a la demostració. Aquests tres no són els únics triangles utilitzables ja que cadascun d'aquests tres triangles és present cinc vegades dins la figura i es podria utilitzar qualsevol dels altres obtenint el mateix resultat. Seleccionant aquests evitem que quedin sobreposats a l'esquema següent.

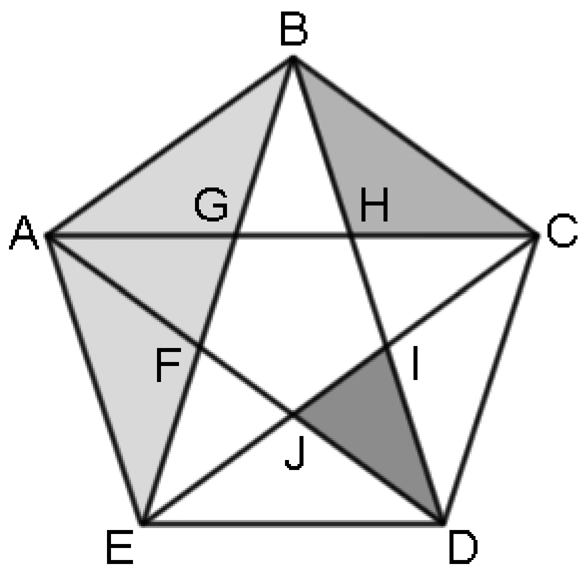


Figura VI: Relació de segments de l'estrella de cinc puntes

El triangle DJI correspon al triangle auri acutangle i els altres dos corresponen al triangle obtusangle auri. Si tornéssim a calcular la relació entre els sinus dels seus angles, com ja hem fet a l'apartat anterior, tornaria a sortir el nombre auri.

S'aprecia que la figura del pentagrama està composta per triangles auris de forma infinita. La figura que formen les diagonals d'un pentàgon és una estrella de cinc puntes amb un altre pentàgon al centre. Si dibuixéssim les diagonals d'aquest segon pentàgon obtindríem una altra estrella de cinc puntes amb un altre pentàgon a l'interior i podríem anar dibuixant diagonals fins a l'infinit, obtenint triangles amb proporcions àuries de forma infinita.

1.3.2.4. L'espiral àuria

L'espiral àuria es pot construir a partir del rectangle o del triangle auri, però el resultat en cada cas és una espiral diferent. Tot i així, el procediment en ambdós casos consisteix en, a partir d'una de les dues figures base, anar-les dibuixant una dins l'altra prenent sempre el costat menor de la figura gran com a costat major de la nova figura. Aquest procés es pot repetir fins a l'infinit.

Una vegada ja hi ha una base, només falta unir els vèrtexs de les figures i s'obté una espiral àuria [figures VII i VIII].

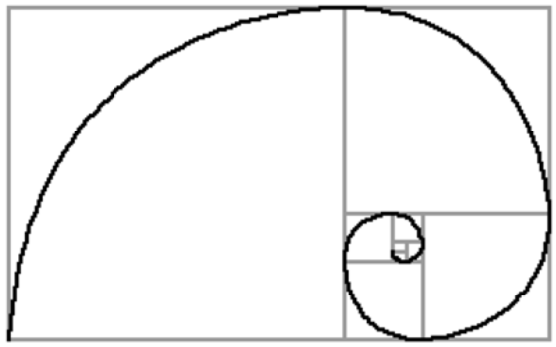


Figura VII: Espiral àuria a partir del rectangle

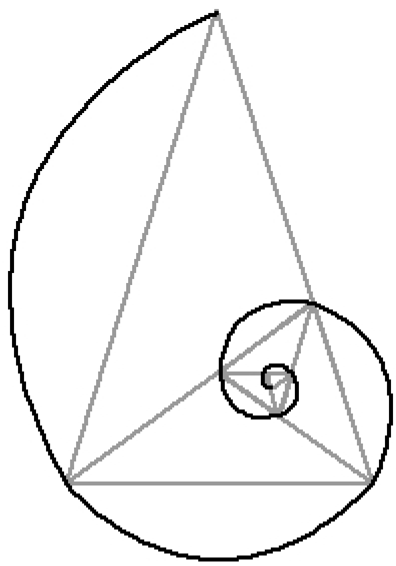


Figura VIII: Espiral àuria a partir del triangle

Aquesta és, segurament, la representació més sorprenent del nombre auri ja que, tenint en compte la complexitat que comporta, és la figura més present a la naturalesa.

1.3.3. La progressió de Fibonacci

Abans de començar, cal saber que una progressió és una successió de nombres que, cada un d'ells, sorgeix d'alguna operació matemàtica amb nombres anteriors de la mateixa progressió. La progressió de Fibonacci manté la condició que el nombre següent és la suma dels dos anteriors. Començant amb el nombre 1 dues vegades, la progressió es desenvolupa de la manera següent.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987...

Els nombres de l'exemple són els nombres de la progressió inferiors a 4 xifres.

Hi ha certes regularitats numèriques entre els nombres de la progressió. Una de les més sorprenents és que, sumant el quadrat de dos nombres consecutius, el resultat és el nombre que ocupa la posició de la suma de les posicions dels nombres inicials. Per exemple, si calculem la suma dels quadrats dels valors 8 i 13, que ocupen les posicions 6 i 7 respectivament, obtindrem el nombre de la posició $6+7=13$.

$$8^2+13^2=64+169=233$$

Si ho comprovem observant la successió, efectivament, el nombre de la tretzena posició és el 233.

La curiositat per excel·lència d'aquesta progressió és la que la relaciona amb el nombre auri. Dividint dos nombres consecutius, sempre el més gran dividit entre més petit, a mesura que es va avançant en la progressió es va obtenint una aproximació més exacta del nombre d'or.

$$\frac{1}{1}=1 \;\; ; \;\; \frac{2}{1}=2 \;\; ; \;\; \frac{3}{2}=1{,}5 \;\; ; \;\; \frac{5}{3}=1{,}666... \;\; ; \;\; \frac{8}{5}=1{,}6 \;\; ; \;\; \frac{13}{8}=1{,}625 \;\; ;$$

$$\frac{21}{13}=1{,}615... \; ; \; \frac{34}{21}=1{,}619 \; ; \; \frac{55}{34}=1{,}617... \; ; \; \frac{89}{55}=1{,}618...$$

En aquest exemple només hi ha les 10 primeres divisions arrodonint a les mil·lèsimes, però es pot comprovar fàcilment que dividint nombres consecutius més elevats, el resultat cada vegada s'aproxima més al seu valor real de 1,618033...

Aquesta successió pot passar desapercebuda a la naturalesa i els objectes quotidianitats, però a l'apartat *1.5. Relació del nombre auri amb els éssers vius* es comprova que, tant aquesta progressió, com totes les altres figures àuries, estan presents a més llocs dels que podem imaginar.

1.4. La proporció àuria i la música

El nombre auri no només està present a objectes visuals, sinó que també ho està a elements auditius com és la música. Pitàgores va ser el descobridor de les matemàtiques dins la música comprovant que, amb dues cordes, dividint-ne una amb una certa proporció respecte l'altre, s'obtenien sons harmoniosos entre ells. Tot i així, no és aquí on el nombre auri hi intervé, sinó que és important en el conjunt d'una composició musical.

Considerem la duració total d'una peca musical com la recta major utilitzada anteriorment per fer la demostració del nombre auri. Està comprovat que el punt que correspon al final del segment *b* de la figura IX és el punt on es mostra la màxima atenció per la cançó i on es desperten tots els sentits. Així doncs, perquè una peça musical sigui considerada àuria, aquest punt ha de ser el clímax de la peça i ha continuar de manera diferent, en molts casos, començant a plantejar el final de la peça.

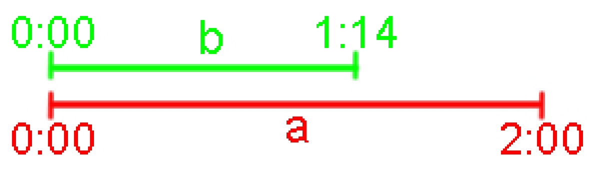


Figura IX: Esquema d'una composició àuria

A la figura anterior es mostra un exemple de composició àuria de dos minuts de duració total, que fa que el seu punt auri sigui el minut 1:14.

1.5. Relació del nombre auri amb els éssers vius

Una de les meravelles del nombre auri és que, tot i ser un nombre matemàtic, està present en molts elements creats íntegrament per la natura, especialment en éssers vius. El podem trobar a les plantes, als animals i a l'ésser humà, aplicat de moltes maneres diferents, ja sigui utilitzant formes geomètriques, nombres de la progressió de Fibonacci o relacions entre longituds.

En qualsevol cas, és veritat que trobem el nombre auri en molts més llocs dels que podem imaginar.

1.5.1. El nombre auri a les plantes

Per trobar la proporció àuria a les plantes no és necessari ni calcular ni comptar. Les flors poden tenir formes de figures geomètriques àuries, de manera que, només observar-les, s'hi pot trobar una relació amb el nombre d'or. Si busquem una mica més a fons, quan comptem el nombre de pètals d'una flor podem observem que aquest nombre pertany a la progressió de Fibonacci i, per tant, es pot afirmar que la planta té el nombre auri.

En l'àmbit de les fulles, la forma també té una relació important amb la proporció d'or, però la forma com creixen al llarg de la tija és un fet encara més curiós on també hi intervé aquesta relació.

1.5.1.1. La flor

1.5.1.1.1. La forma de la flor

Contemplant bé el nostre entorn, podem trobar moltes flors amb formes àuries, ja sigui amb una figura simple o un conjunt de figures.

La forma més freqüent i més senzilla en una flor és la del pentàgon [figura X]. D'aquest tipus, en són un exemple la vinca major, la petúnia, el gessamí estrella i la flor de cera.

Figura X: *Vinca major* amb forma de pentàgon

El gira-sol és una mica més complicat, ja que no utilitza una figura àuria simple, sinó que conté la progressió de Fibonacci en la disposició de les llavors de l'interior de la flor. Si, començant des del centre, es van traçant línies corbes unint les llavors situades de costat, obtenim línies en dos sentits [figura XI]. Comptant el nombre de línies que hi ha en cada sentit, s'obtenen dos nombres consecutius de la successió de Fibonacci.

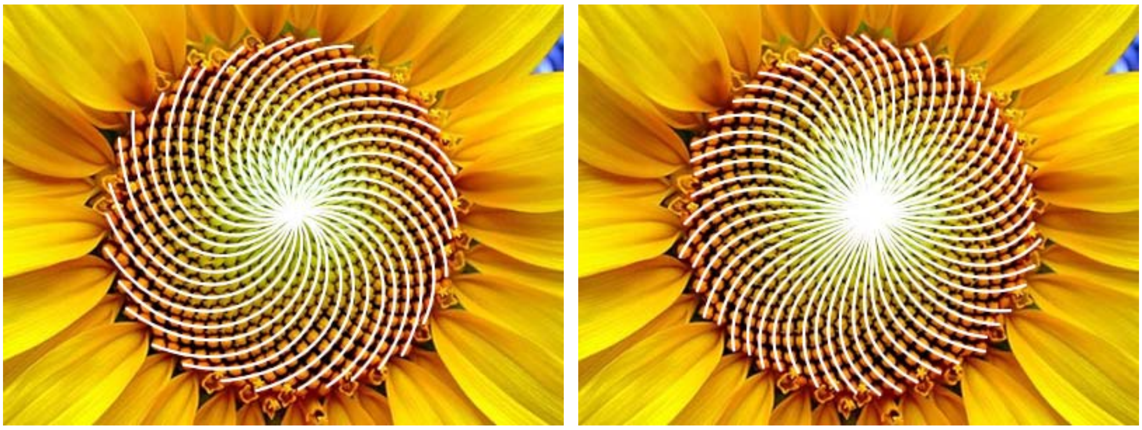


Figura XI: Línies d'unió entre llavors d'un gira-sol en ambdós sentits

A la figura XI, la fotografia de l'esquerra té dibuixades 34 línies, mentre que a la dreta n'hi ha 55. Si consultem l'apartat *1.3.3. La progressió de Fibonacci* d'aquest treball, observem que, efectivament, són dos nombres consecutius d'aquesta progressió. També es pot comprovar dividint els dos nombres i observant que el seu resultat s'aproxima al nombre d'or.

$$\frac{55}{34}=1{,}61765...\approx\Phi$$

1.5.1.1.2. El nombre de pètals de la flor

Continuant amb la progressió de Fibonacci, també és freqüent trobar flors amb un número de fulles pertanyent a aquesta progressió. Són molt freqüents els primers nombres d'aquesta progressió, sobretot el 3, el 5 i el 8. Els nombres més grans ja formen flors més complexes que no són gaire quotidianes.

Primerament, si observem la flor de l'ametller [figura XII] podem veure que hi ha cinc pètals a totes les flors d'aquest arbre.

Figura XII: Flor d'ametller

Un altre cas molt habitual és el dels trèvols [figura XIII]. En quasi tots els trèvols hi ha només tres fulles, fet que va donar nom a aquesta planta.

Figura XIII: Trèvols de tres fulles

1.5.1.2. Les fulles

Les plantes també poden tenir fulles amb el nombre auri independentment de si les seves flors ho són o no. Hi ha dos aspectes molt diferents que poden determinar si les fulles d'una planta contenen el nombre d'or: la forma de les fulles i la seva manera de créixer.

1.5.1.2.1. La forma de les fulles

En el cas de la forma de les fulles, ja no es tracta de la forma general, sinó de la relació entre mides de diferents parts.

Hi ha moltes fulles amb aquestes proporcions, per tant, a continuació només se'n presenten dos exemples.

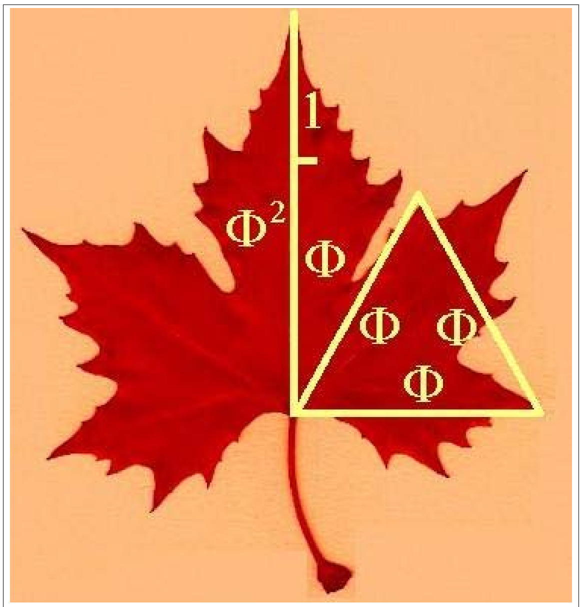


Figura XIV: Fulla de plàtan occidental

Com a primer exemple podem prendre la fulla del plàtan occidental (*platanus occidentalis*) [figura XIV]. Conté una línia vertical amb valor Φ^2, que equival a $\Phi+1$, i un triangle equilàter[10] de costat Φ a cada banda d'aquesta línia central.

També hi ha proporcions àuries en les fulles de la mèlia (*melia azedarach*) [figura XV]. Aquesta vegada són els punts d'origen dels subgrups de fulles els que segueixen la proporció. Des de l'inici de la fulla fins a la primera bifurcació hi ha la distància de 2Φ. La següent bifurcació es troba a $2\Phi-1$ de l'anterior, la següent a una distància de Φ i la última a 1.

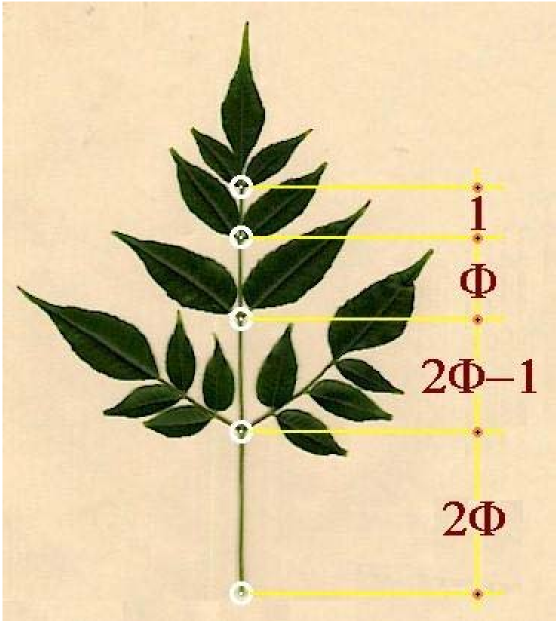


Figura XV: Fulla de mèlia

Altres exemples de fulles que també segueixen d'alguna manera similar aquesta proporció són la fulla de l'om de muntanya, del faig, de la magnòlia o del roure pènol.

1.5.1.2.2. El creixement de les fulles

En el món de les plantes hi ha moltes maneres diferents de disposar les fulles al voltant de la tija. Tot i així, n'hi ha una que aprofita millor la llum del sol que els altres: la que té la proporció àuria com a base.

Si dividim els graus d'una circumferència completa (360º) entre el nombre auri, obtenim un angle de 222,49º aproximadament (angle α a la figura XVI).

$$360º \div \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 222{,}49º$$

10 **Triangle equilàter:** triangle que té tots els costats i angles iguals.

A partir d'aquest angle, calculem el seu conjugat[11] i obtenim que és 137,51º (angle β a la figura XVI).

$$360º - 222{,}49º = 137{,}51º$$

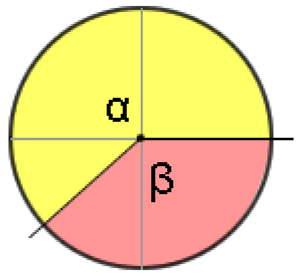


Figura XVI: Esquema dels angles α = 222,49º i β = 137,51º

És aquest últim angle el que utilitzen les plantes per fer créixer les seves fulles al llarg de la tija. A partir d'un punt qualsevol, les fulles van creixent i ascendint en la tija formant un angle de 137,5º amb l'anterior, de manera que s'han de donar moltes voltes a la tija perquè una fulla quedi superposada sobre una altra i, quan això passi, les fulles estaran tant separades que tampoc es taparan el sol entre elles.

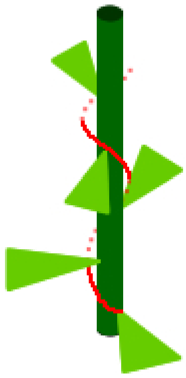


Figura XVII: Esquema de creixement de les fulles

A la figura XVII, es pot observar un esquema sobre aquest creixement. Les fulles creixen formant una espiral imaginaria al voltant de la tija, de manera que cada 137,5º creix una fulla. De les cinc fulles dibuixades, no n'hi ha cap que quedi superposada amb una altra.

11 **Angles conjugats:** parell d'angles que, sumats, resulten 360º.

1.5.2. El nombre auri als animals

Els animals, tot i que amb menys freqüència que les plantes, també disposen del nombre auri. Com que no hi ha gaire varietat, només es poden classificar segons la seva manera de mostrar el nombre d'or. Hi ha els animals que el mostren en forma d'espiral àuria, com són els cargols, els nàutils i els muflons, i n'hi ha que el mostren amb un nombre de la progressió de Fibonacci, com l'estrella de mar.

1.5.2.1. Animals amb l'espiral àuria

Aquesta forma d'expressió del nombre d'or es mostra en tres animals: els cargols de terra, els nàutils i els muflons.

El cargol de terra és un animal molt corrent i és fàcil veure aquesta espiral a la seva closca. A la figura XVIII n'hi ha una fotografia.

Figura XVIII: Cargol de terra

El nàutil, un animal marí, té gairebé la mateixa closca que els cargols de terra i, per això, mostra l'espiral àuria de la mateixa manera. A la figura XIX es mostra una closca de nàutil oberta per la meitat.

Figura XIX: Closca de nàutil

Per últim, el mufló [figura XX], un animal de la família de les ovelles, té unes banyes amb forma d'espiral. Aquesta forma coincideix exactament amb l'espiral àuria.

Figura XX: Mufló

1.5.2.2. Les estrelles de mar

Igualment com els pètals de les flors de les plantes, els animals també poden tenir un nombre de la progressió de Fibonacci. És, de fet, l'estrella de mar l'única que la conté ja que és l'única amb cinc braços. La següent figura en mostra una fotografia.

Figura XXI: Estrella de mar

1.5.3. El nombre auri a l'ésser humà

Segurament per la complexitat de l'ésser humà, no hi ha cap ésser que tingui tantes vegades la proporció àuria dins el seu cos. Només observant l'esquelet, les proporcions entre mides dels ossos de la mà ja segueixen aquesta proporció, però segurament l'aspecte més important del cos humà és la quantitat de vegades que conté el rectangle auri. Aquest últim fenomen també el coneixien els artistes clàssics ja que es troba en moltes escultures com la titulada *David* de Miquel Àngel.

Un altre aspecte molt important de l'ésser humà on trobem la proporció àuria és a la cara. Tot i la quantitat de rostres diferents que existeixen, hi ha una màscara anomenada *màscara de la bellesa*, formada a partir del nombre auri, que estableix el rostre perfecte. Està comprovat que aquesta màscara concorda perfectament amb totes les cares de gent considerada bella tant de l'actualitat com d'èpoques antigues.

1.5.3.1. El cos humà

Dins el cos humà trobem diverses vegades el nombre auri, ja sigui mantenint una proporció entre mides o com a progressió de Fibonacci.

Centrant-nos amb l'esquelet, observem primerament les mans. Aquesta part està composta per molts ossos, però els que ens interessen són els dels dits de la mà. Si considerem que el primer os (el més petit) té el valor de 1, podem dir que el segon té el valor de 2, el següent, de 3 i l'últim, de 5.

Figura XXII: Ossos de la mà

Aquests quatre nombres pertanyen a la progressió de Fibonacci i, dividint-ne dos de consecutius, s'obté una aproximació del nombre d'or.

Un altre aspecte on es veu la proporció àuria és en la relació entre l'altura del melic i l'altura total del cos d'una persona. Si la divisió entre l'altura total i l'altura del melic resulta aproximadament el nombre auri es pot dir que tenim el melic al lloc correcte.

El dibuix de Leonardo da Vinci titulat *Home de Vitruvi* [figura XXIII] segueix perfectament aquesta relació d'altures.

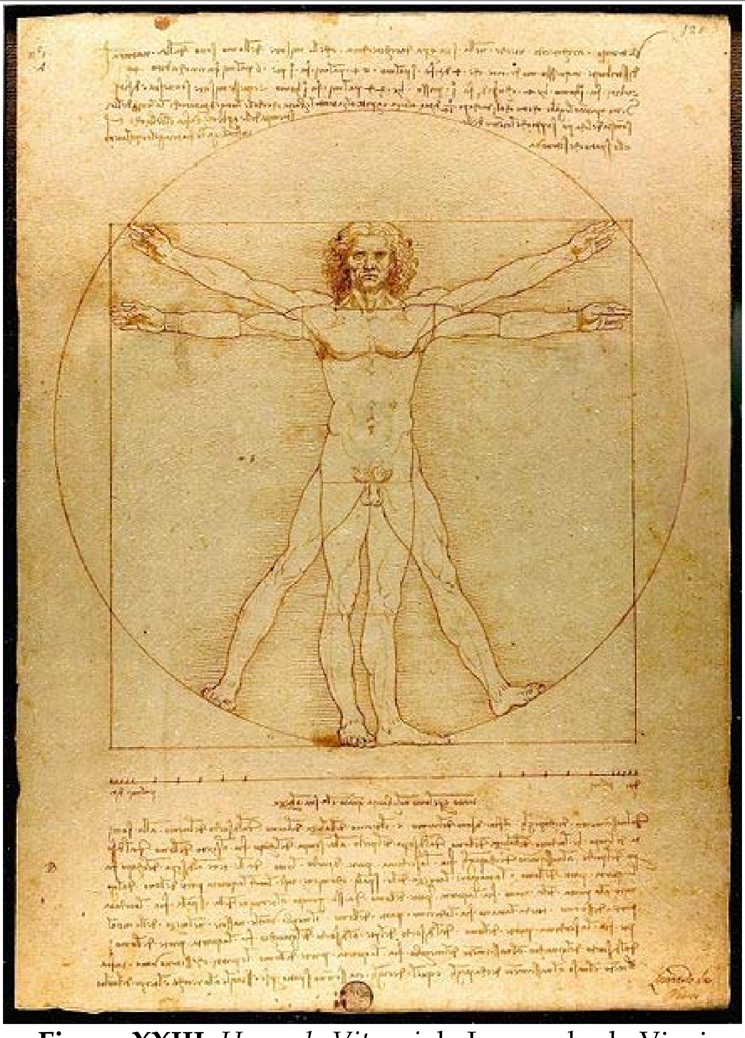


Figura XXIII: *Home de Vitruvi* de Leonardo da Vinci

Un altre dels aspectes de l'ésser humà que manté la proporció d'or és el fet que la figura humana està construïda per una gran quantitat de rectangles auris. Si s'observen les obres artístiques més conegudes per la seva bellesa es veu que tots aquests rectangles hi són presents.

A la figura XXIV es mostra l'estàtua titulada *Venus*, esculpida per Miló, que és considerada la perfecció de la bellesa femenina. Hi ha dibuixats els quatre rectangles auris del cos humà en diferents colors. Aquests rectangles consten d'un rectangle vertical i un altre horitzontal prenent el costat menor del rectangle vertical com a costat major del rectangle horitzontal.

El rectangle vermell mostra la relació de l'altura total de la dona amb l'altura del melic; el blau mostra la relació entre els genolls i els pits; el groc, la relació entre la posició de la cintura amb la de les espatlles; i el verd, la relació entre el melic i la barbeta.

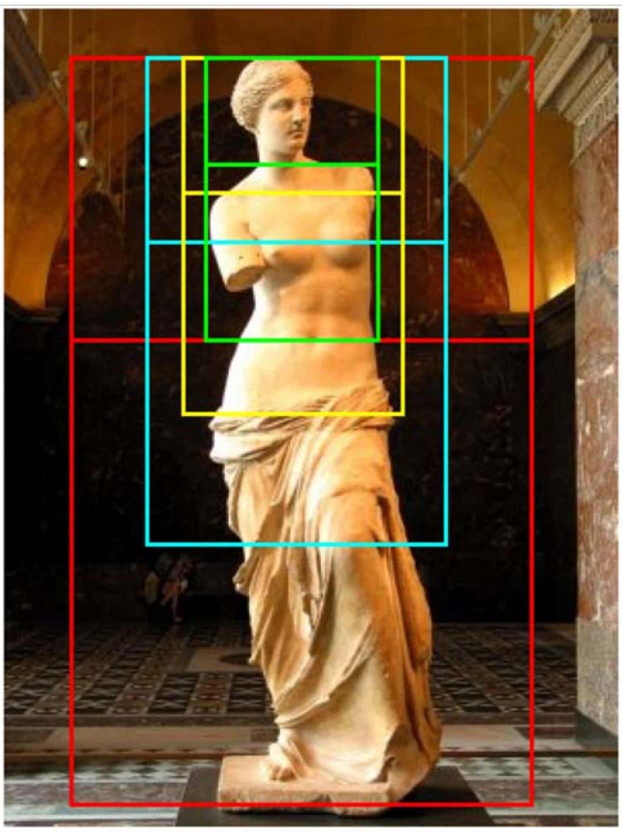


Figura XXIV: *Venus* de Miló

Són aquests, doncs, tots els aspectes relacionats amb el nombre d'or que tenim al cos. Tot i així, la cara amaga moltes més curiositats també relacionades amb aquest nombre.

1.5.3.2. El rostre: la màscara de la bellesa

El rostre humà pot ser molt més perfecte del que imaginem. Si busquem, hi podem trobar línies i figures geomètriques que sorgeixen de la proporció d'or.

La persona que més s'ha dedicat a estudiar aquesta característica del nostre rostre és el cirurgià plàstic Stephen Marquardt, de Califòrnia. Per tal de poder oferir als seus clients la cara perfecta, es va dedicar a estudiar arreu del món quina era la cara que més agradava a tothom. Per fer-ho, va utilitzar divuit fotografies de cares de dones reals i va demanar a gent de diferents cultures i diferents edats que les ordenés per ordre de bellesa segons la seva opinió personal. El sorprenent va ser que el 97% de les persones enquestades les van ordenar en el mateix ordre. A la figura XXV hi ha cinc fotografies, escollides a l'atzar, de les cares utilitzades a l'estudi de Stephen Marquardt disposades segons l'ordre de preferència general.

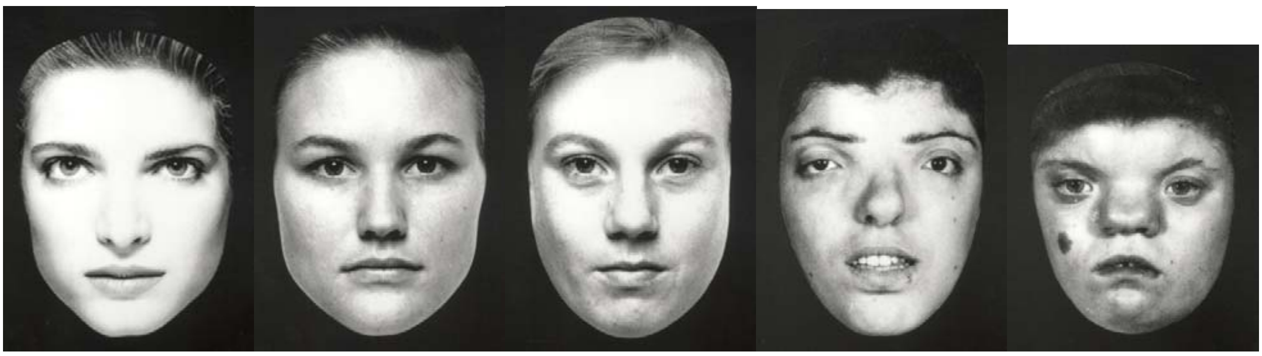


Figura XXV: Fotografies utilitzades per Stephen Marquardt

Així doncs, aquest cirurgià va buscar la manera de construir una màscara que es correspongués al màxim amb la cara escollida com a preferida a la seva enquesta.

A partir de les figures geomètriques àuries i la proporció d'or, va dissenyar el que s'ha convertit en la màscara de la bellesa [figura XXVI] que pot deternimar el grau de bellesa de cada persona. Segons diu Stephen Marquardt, com més s'aproximi una cara a la seva màscara, més perfecta és.

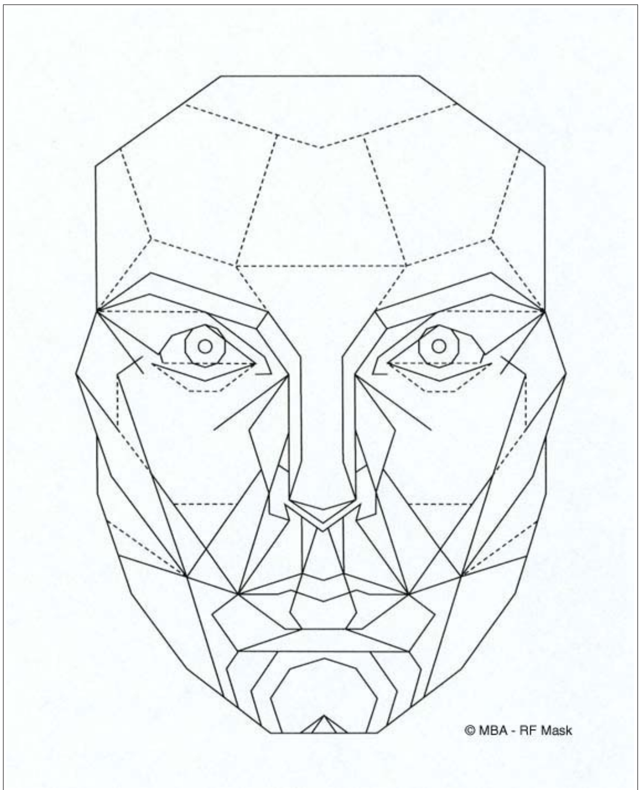


Figura XXVI: Màscara de la bellesa

En un principi s'havia dissenyat la màscara pensant en les dones, però, de seguida, Marquardt es va adonar que també era vàlida pels homes. De fet, si s'aplica la màscara a cares de persones famoses arreu del món s'observa que coincideixen a la perfecció.

A més, la màscara no és només vàlida per a homes i dones, sinó que també és aplicable a cares de diferents cultures, de diferents edats i, fins i tot, de diferents èpoques. Si apliquem la màscara a l'estàtua de la reina Nefertiti d'Egipte (1400 a. C.) o l'apliquem a Marylin Monroe és igual de vàlida i es correspon de la mateixa manera.

A continuació hi ha tres exemples de cares que coincideixen amb la màscara de la bellesa.

Figura XXVII: Reina Nefertiti (Egipte, 1400 a. C.)

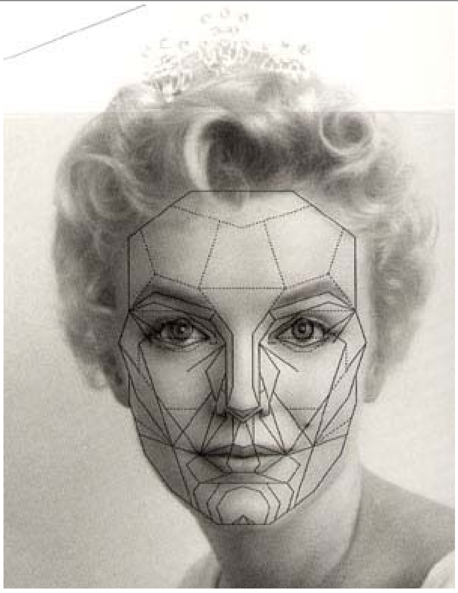


Figura XXVIII: Marylin Monroe (1926 - 1962)

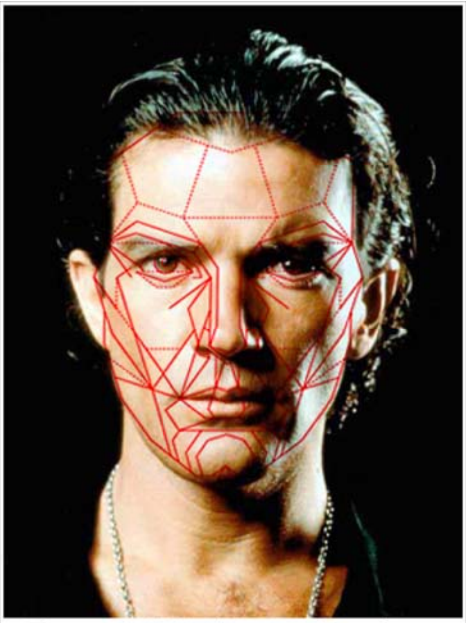


Figura XXIX: Antonio Banderas

2. DEMOSTRACIÓ DEL NOMBRE AURI

2.1. Vídeo demostratiu del nombre auri

Una de les meves prioritats en aquest treball és fer que el nombre auri sigui entenedor per a tothom, sense necessitat de tenir uns coneixements matemàtics previs, i una manera d'arribar fàcilment a qualsevol persona és mitjançant un format audiovisual.

Així doncs, vaig decidir que, dins el marc d'aquest treball de recerca, confeccionaria un vídeo de demostració matemàtica que parlés sobre el nombre d'or. Vaig tenir la sort de poder cursar l'assignatura d'*estada a l'empresa* durant l'estiu i vaig anar a a productora audiovisual *Gen-lock Vídeo*, de Vic, on vaig aprendre els conceptes més bàsics del procés de creació d'un vídeo i que, posteriorment, he pogut utilitzar per crear aquest vídeo demostratiu.

Primerament, vaig confeccionar un guió que marqués l'ordre de tot el vídeo i vaig buscar les imatges necessàries per confeccionar-lo. Després, vaig planificar tota l'edició, des de la gravació de la veu en off fins a la confecció del DVD, i vaig anar-ne a fer les còpies i a imprimir-lo a *Gen-lock Vídeo* per tal de presentar-lo de la manera més correcte possible.

L'explicació completa del procés de creació del vídeo es troba explicada en detall a l'annex IV i el resultat final del DVD es troba enganxat a la carpeta que conté tot el conjunt del treball.

2.2. El *tangram auri*

A part de la confecció del vídeo, vaig pensar que, ja que el nombre auri es pot demostrar de forma virtual mitjançant un vídeo, també s'hauria de poder demostrar de forma real. És per això que vaig buscar la manera de confeccionar un conjunt de peces que permetessin construir totes les figures àuries.

Després de redactar la part teòrica del treball, vaig observar que el pentàgon amb la seva corresponent estrella a l'interior contenia els dos tipus de triangles auris de diverses mides. Per això vaig decidir dissenyar i elaborar un trencaclosques amb forma de pentàgon amb un total de set peces, tal i com es mostra a la figura XXX.

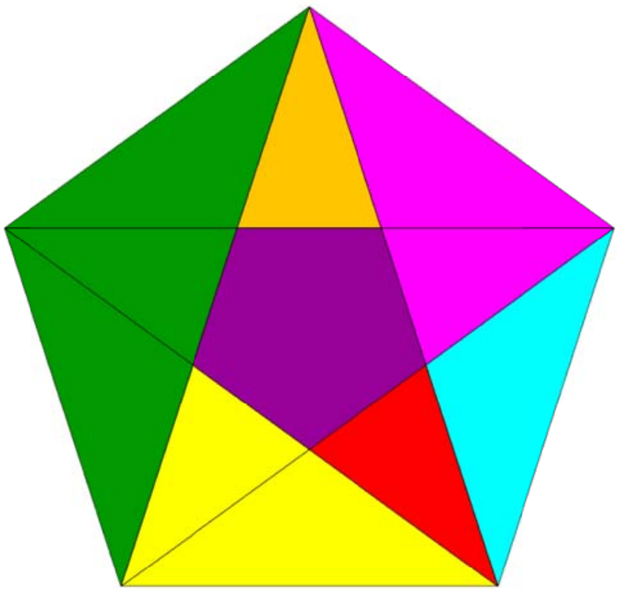


Figura XXX: Peces del *tangram auri*

A més, vaig observar que aquest trencaclosques tenia certes semblances amb el *tangram* convencional, de manera que vaig decidir anomenar-lo *tangram auri.*

A l'annex III del treball es detalla el disseny del tangram, així com totes les possibles figures que es poden construir.

3. Recerca del nombre auri

3.1. Recerca qualitativa: aplicacions del nombre auri fetes per l'ésser humà

Ja que el nombre auri es pot veure a molts elements del nostre entorn creats de forma natural, és interessant conèixer com apliquem aquesta proporció als elements creats per part de l'ésser humà. Bàsicament l'apliquem a l'arquitectura i l'art, però també el trobem en elements quotidians que potser no identifiquem com a auris.

3.1.1. Arquitectura

3.1.1.1. La piràmide de Keops

Ja des dels inicis de l'arquitectura que s'utilitza la proporció d'or en la construcció d'edificis. Segurament l'edificació més antiga on hi trobem aquesta proporció és a les piràmides d'Egipte, un fet curiós ja que sembla que a l'antic Egipte no es coneixia aquesta proporció matemàtica. Es pot pensar que les piràmides es van construir per ser agradables a la vista i, casualment, es va mantenir la proporció d'or.

Tot i així, aquesta proporció no hi apareix representada amb cap figura geomètrica explicada a la part teòrica d'aquest treball, sinó que és una proporció més complexa que es troba a les arestes i l'altura de la piràmide.

La figura XXXI mostra una representació de la piràmide més gran d'Egipte, la piràmide de Keops, on hi ha dibuixats els diferents triangles que es poden trobar en aquesta figura geomètrica juntament amb les lletres amb les quals anomenarem cada línia.

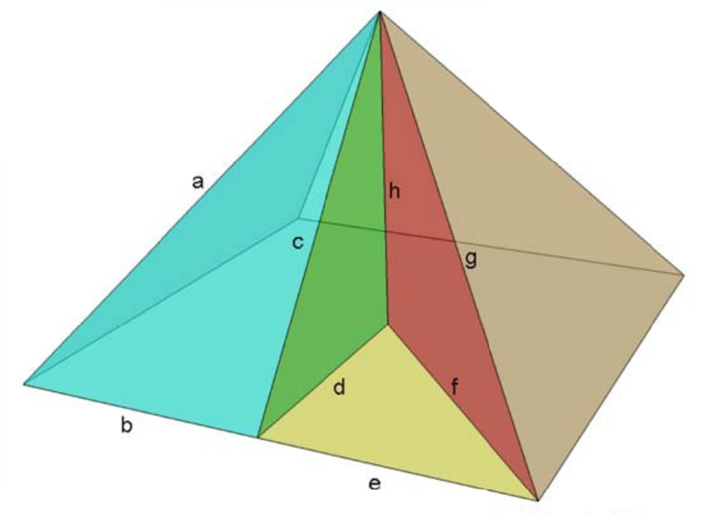


Figura XXXI: Representació de la piràmide de Keops

Observem que hi ha quatre triangles representats de quatre colors diferents que són una mostra de tots els triangles rectangles que trobem a la figura. Per tal de trobar el nombre d'or, primerament hem de considerar que el costat del quadrat de la base amida 2, és a dir, que $b=e=d=1$. A partir d'aquí, tenint en compte que coneixem les mides reals de la piràmide, observem que apareix el nombre d'or en moltes mides de les línies assenyalades. A continuació es mostren totes.

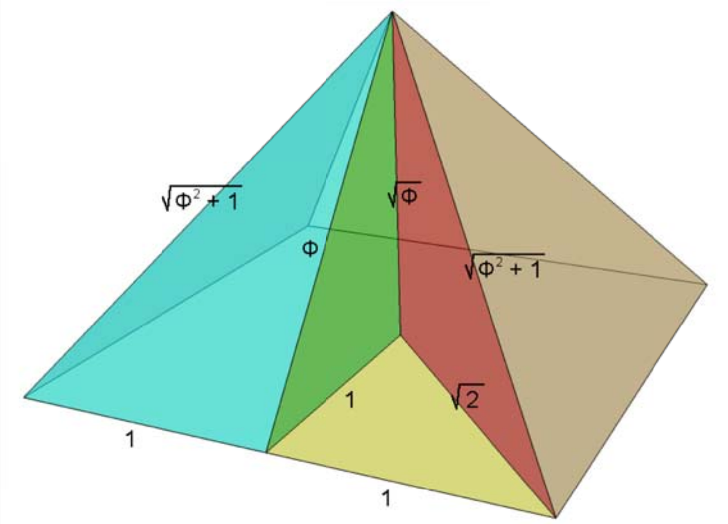


Figura XXXII: Piràmide de Keops amb les mides àuries

A la piràmide real, les mides són diferents però proporcionals a les de la representació, per tant, el nombre auri hi és igualment present.

3.1.1.2. Partenó

El Partenó, d'època grega, és un dels edificis que més bé simbolitzen la proporció d'or ja que la conté en molts aspectes. A la figura XXXIII es veuen representats els diferents elements auris que conté.

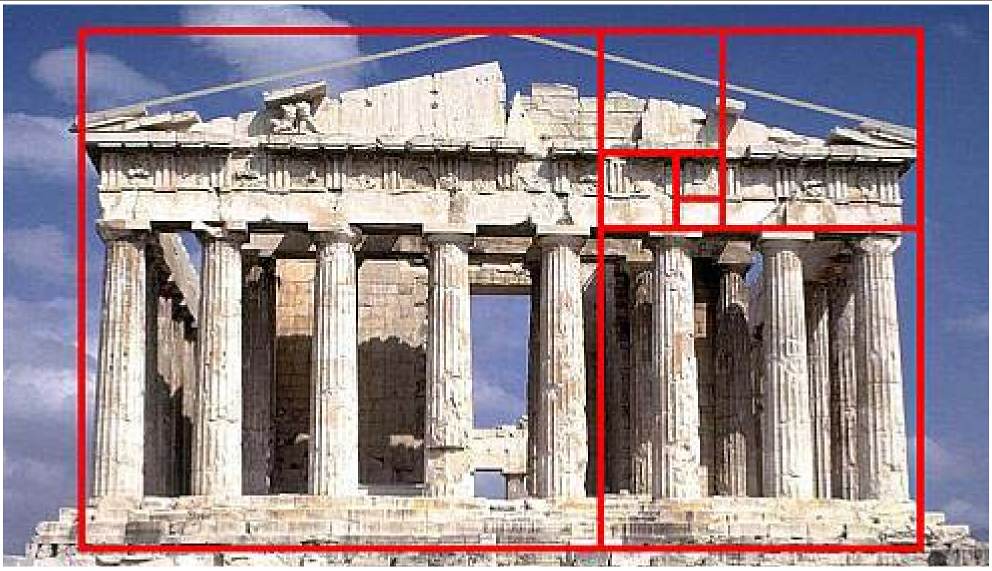


Figura XXXIII: Partenó amb els rectangles auris

L'element més destacat és el dels rectangles auris, que estan remarcats en vermell. S'observa que l'estructura en sí de l'edifici ja manté aquesta proporció, però cada element que hi trobem també està situat mantenint la proporció àuria.

A més, la façana està composta per vuit columnes, un nombre pertanyent a la progressió de Fibonacci que representa un altre element que segueix la proporció d'or.

3.1.1.3. Notre Dame

La catedral de Notre Dame, a París, també és un edifici que mostra la proporció d'or en el seu disseny. En aquest cas, trobem la presència de diversos rectangles auris a la façana de la catedral [figura XXXIV] col·locats com una quadrícula.

Figura XXXIV: Catedral de Notre Dame de París

Aquesta distribució pot semblar senzilla d'entrada, però queda demostrat que és força atractiva per a la vista.

3.1.1.4. Edifici de l'ONU

Un altre edifici que segueix la proporció d'or, de construcció més moderna, és la seu de l'Organització de les Nacions Unides (ONU) a Nova York. Aquest edifici també es basa en la utilització dels rectangles auris per estructurar la seva forma.

A la figura següent s'observa aquest edifici que està format per tres rectangles auris en posició horitzontal, un sobre l'altre, que formen l'estructura principal de l'edifici. Tot i que la imatge es mostra en perspectiva i no es pot apreciar amb detall la proporció àuria, està demostrat que aquest edifici la manté.

Figura XXXV: Edifici de l'ONU

3.1.2. Art

A l'àmbit de l'art, el nombre auri també hi és molt present, especialment en representacions de l'ésser humà.

3.1.2.1. *La Gioconda* de Leonardo da Vinci

El quadre més característic on hi trobem la proporció d'or és a l'obra titulada *La Gioconda* de Leonardo da Vinci. Aquest retrat femení conté gran quantitat de vegades la proporció d'or en diferents formes, però la més destacada és la del rectangle auri.

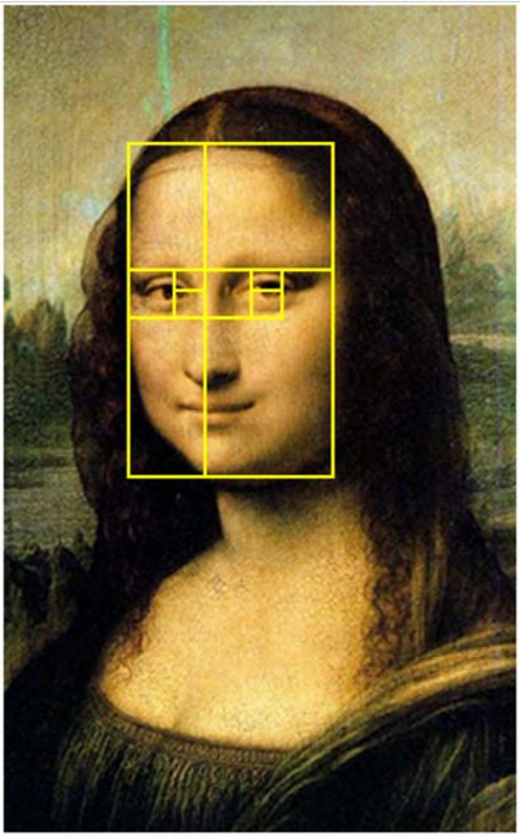


Figura XXXVI: *La Gioconda* de Leonardo da Vinci

A part de trobar rectangles auris a aquest quadre, també s'hi pot trobar una espiral àuria i se li pot aplicar la màscara de la bellesa.

3.1.2.2. *Home de Vitruvi* de Leonardo da Vinci

L'obra titulada *Home de Vitruvi,* realitzada per Leonardo da Vinci, és una representació de la proporció perfecte del cos humà. En aquest cas hi trobem la proporció àuria calculant les relacions de mides del cos humà, un fet que ens permet comprovar la seva perfecció.

A la figura següent s'aprecia que les línies que delimiten les parts del cos humà, marcades pel propi autor de l'obra, segueixen la proporció d'or.

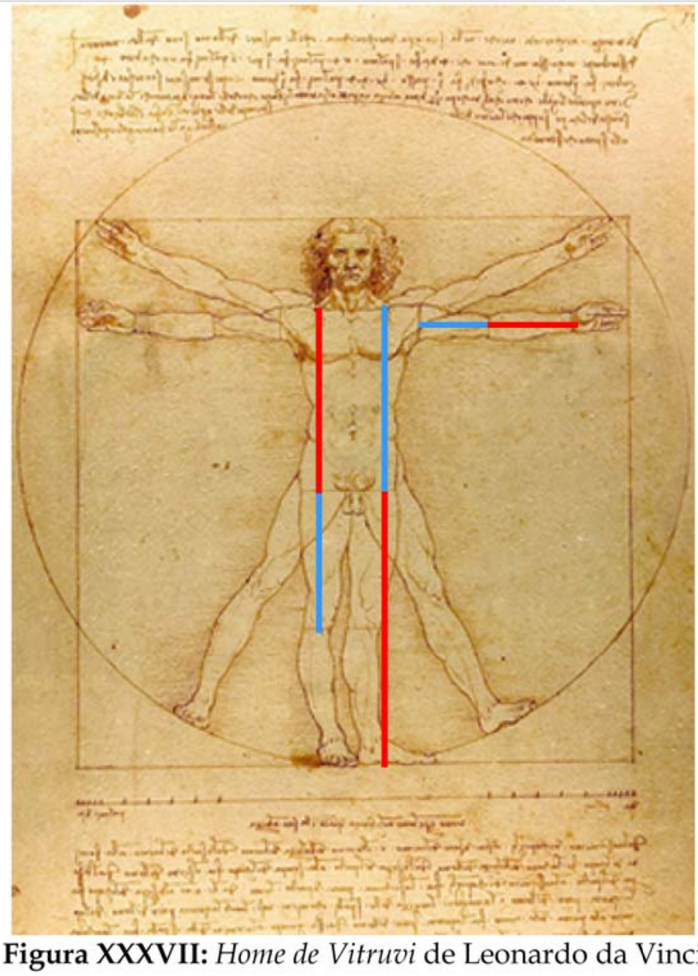


Figura XXXVII: *Home de Vitruvi* de Leonardo da Vinci

3.1.2.3. *David* de Miquel Àngel

L'escultura confeccionada per Miquel Àngel anomenada *David*, és una altra representació de la perfecció del cos humà. L'estàtua en sí és una persona dreta i nua, fet que comporta que compleixi totes les proporcions àuries aplicables al cos humà que ja s'han esmentat anteriorment.

Així doncs, no és necessari tornar a remarcar tots els aspectes del cos humà que compleixen la proporció àuria, però a la figura XXXVIII es pot observar la bellesa d'aquesta escultura.

Figura XXXVIII: *David* de Miquel Àngel

3.1.2.4. *Leda atòmica* de Salvador Dalí

Salvador Dalí era un pintor surrealista, fet que es veu reflectit a la seva obra titulada *Leda atòmica*. Tot i així, també s'hi veu reflectit un altre aspecte de Dalí, que era coneixedor de la proporció àuria.

A diferència de les altres obres explicades anteriorment, el nombre d'or no es troba al cos de la dona, sinó a la seva posició. Si observem el quadre, apreciem que la posició de la dona és poc natural però bella i harmoniosa. Això passa perquè la dona està compresa dins una estrella de cinc puntes, una figura que conté el nombre auri. A la figura XXXIX s'observa la representació d'aquesta estrella.

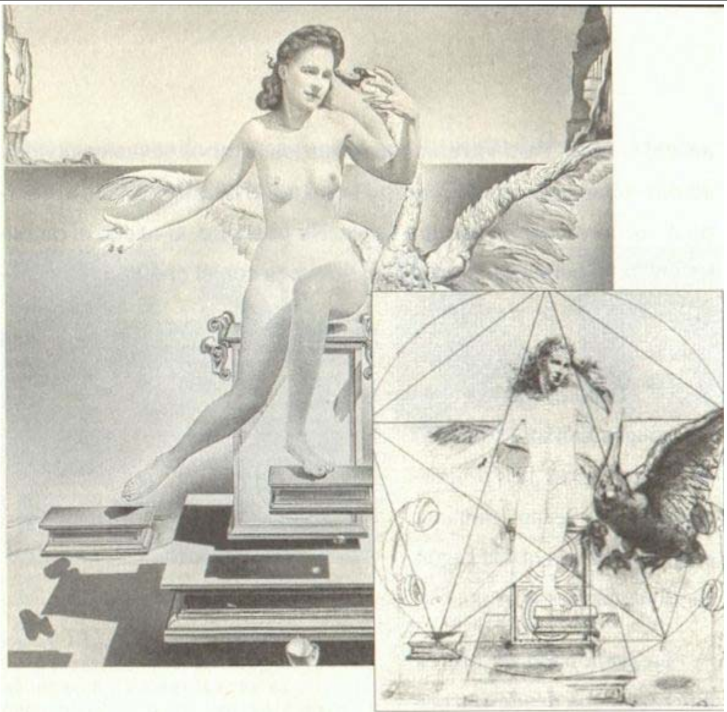


Figura XXXIX: *Leda atòmica* de Dalí

3.1.3. Objectes quotidians

Hi ha alguns objectes quotidians on podem trobar el nombre d'or. És el cas del DNI i de les targetes de crèdit, que tenen la forma del rectangle auri [figura XL].

Figura XL: DNI i targeta de crèdit

També hi ha un altre element molt freqüent que s'aproxima bastant al nombre auri. És el cas de la televisió. Actualment les televisions solen mantenir la relació 16:9, que és equivalent a una relació de $1,77...$. Comparant aquest valor amb el nombre d'or ($1,61803...$) s'observa que s'aproximen molt. De fet, si comparem aquests dos rectangles observem que gairebé es confonen [figura XLI].

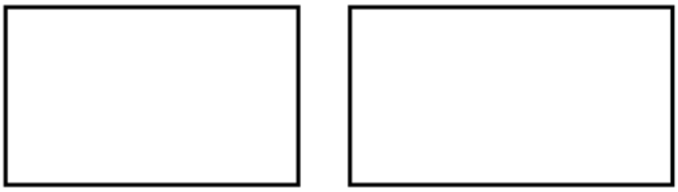


Figura XLI: Rectangle auri (esquerra) i rectangle de relació 16:9 (dreta)

3.2. Recerca quantitativa: enquesta sobre l'efecte de la proporció àuria en les preferències visuals

Per tal de demostrar la hipòtesi inicial del treball, vaig pensar que la manera més pràctica i fiable seria a través d'una enquesta que, un cop analitzats els resultats, mostrés si els enquestats preferien les imatges amb la proporció d'or o no.

En total, l'enquesta constava de dotze preguntes, amb dues imatges a cada pregunta, una amb la proporció àuria i una altra sense, i un element auri diferent a cada pregunta. A part d'això, també hi havia un espai on es demanava l'edat i el sexe de l'enquestat per tal de comparar els resultats posteriorment. A les pàgines 10 i 11 de l'annex I es mostra un exemple del disseny final de l'enquesta.

La recollida de dades va tenir lloc durant els dies 26 de maig i 8 de juny de 2010 i es va aplicar a l'alumnat i el professorat de l'Institut de Tona, així com a persones properes al meu entorn social i familiar. En total vaig obtenir 249 respostes, però en vaig haver d'anul·lar dues ja que no havien omplert la part de dades sociològiques i no podia comparar els seus resultats amb la resta d'enquestes.

Així doncs, hi havia 247 enquestes vàlides, amb un 46,56% d'homes i un 53,44% de dones. El volum més important de respostes es troba entre els 13 i els 16 anys d'edat, tot i que hi havia enquestats entre els 6 i els 59 anys d'edat.

Pel que fa el resultat de l'enquesta, en general hi ha més preferència cap a les figures àuries ja que, en total, el 58,0% de les respostes eren per les figures àuries. Sobretot, les figures més escollides han estat el *Partenó* d'Atenes, l'edifici de l'ONU a Nova York, *La Gioconda* de Leonardo da Vinci i el *David* de Miquel Àngel, juntament amb les figures geomètriques del rectangle auri i l'estrella de cinc puntes dins un pentàgon regular.

Per altra banda, les figures menys escollides han estat els dos triangles auris i l'espiral àuria. El homes mostren més preferència per l'espiral àuria a les banyes del mufló que les dones i, en canvi, les dones tenen més preferència cap a les flors amb un nombre de pètals pertanyent a la progressió de Fibonacci.

L'annex I mostra una anàlisi detallada tant de les dades sociològiques com dels resultats de cada pregunta i estan il·lustrats amb els seus gràfics corresponents.

Aquesta enquesta demostra que la proporció àuria té una clara influència sobre la nostra percepció de les imatges, tot i que no totes les figures àuries ens influeixen de la mateixa manera a homes i dones. Així doncs, es pot afirmar perfectament la hipòtesi del treball.

4. Conclusions

Quan vaig decidir fer el treball de recerca sobre el nombre auri, vaig pensar que era un tema interessant, amb disponibilitat d'informació i que, a més, no era només teòric, sinó que permetia realitzar-ne diverses activitats pràctiques.

En un principi, quan em vaig plantejar la hipòtesi del treball, vaig veure que la millor manera de demostrar-la seria utilitzant una enquesta a base d'imatges. Així doncs, l'estructura completa del treball tindria una part teòrica, amb la informació sobre el nombre auri, els seus orígens, les figures àuries i la seva relació amb l'entorn, i una part pràctica, amb el disseny, l'aplicació i l'anàlisi dels resultats de l'enquesta.

Tot i així, a mesura que aprenia nous conceptes sobre el nombre auri, anava veient que era un tema molt extens i amb moltes possibilitats. Quan ja tenia certs coneixements sobre la proporció d'or, vaig observar que hi havia pocs vídeos que expliquessin tots els aspectes d'aquesta proporció, i vaig pensar que podia realitzar-ne un per tal de complementar el treball de recerca.

A més, observant les demostracions matemàtiques sobre el nombre d'or vídeos, vaig creure possible dissenyar i construir un tipus de trencaclosques, que he anomenat *tangram auri*, que permetés construir les diferents figures àuries sense necessitat de cap eina de dibuix tècnic.

Ara que ja he acabat, puc dir que l'elaboració del treball ha estat molt llarga, ja que és força extens i té tres elements que impliquen molta dedicació, com és l'enquesta, el *tangram auri* i el vídeo.

Tot i així, estic molt content del resultat ja que, després de molt esforç, he obtingut un treball tal i com em plantejava a les meves expectatives inicials i, a més, amb una hipòtesi inicial afirmada. Així doncs, es pot dir que, efectivament, la proporció àuria és la preferida, a l'actualitat, en les figures geomètriques, l'arquitectura i l'art.

5. Bibliografia

Llibres i obres de referència

AA. DD. (2008). *Matemàtiques 4 · ESO*. Barcelona: Cruïlla (Projecte 3.16). ISBN: 978-84-661-1955-9.

CANIFF, Patricia. *Pitágoras*. Madrid: Edimat (Grandes bibliografías; 4). ISBN: 84-8403-766-5.

CORBALÁN, Fernando. (2010). *La proporción áurea: el lenguaje matemático de la belleza*. Madrid: RBA (El mundo es matemático). ISBN: 978-84-473-6623-1.

COROMINA, Eusebi; CASACUBERTA, Xavier; QUINTANA, Dolors. (2006). *El treball de recerca : procés d'elaboració, memòria escrita, exposició oral i recursos* (1ª ed.). Vic: Eumo. ISBN: 84-7602-596-3.

GUITERAS, Josep Mª; JANÉ, Àngela; BESORA, Jordi. (2008). *Matemàtiques 1 · Batxillerat* (1ª ed.). Madrid: McGraw-Hill (Sèrie Fluvià). ISBN: 978-84-481-6774-5.

Fonts electròniques

AA. DD. *Número Áureo : La Divina Proporción y sus características* [en línia]. Accessible a <http://aureo.webgarden.es> [consulta: 25.IV.2010].

ANATONIA CARON, Gilberta. *Cintas del libre albedrío/Numerología/La escuela pitagórica según Aristóteles/Primeros filósofos del Cosmos*, 25 de Set. de 2009 dins *La Maga Ilustrada* [en línia]. Accessible a <http://lamagailustrada.blogspot.com/2009/09/cintas-del-libre-albedrio.html> [consulta: 18.II.2010].

Calvimontes Rojas, Carlos. *Geometría de hojas según el número de oro* [en línia]. Accessible a <http://exapenta.zxq.net/HOJAS.html> [consulta: 17.III.2010].

Cathédrale Notre Dame de Paris [en línia]. Accessible a <http://www.notredamedeparis.fr> [consulta: 11.VII.2010].

Com citar documents [en línia]. Accessible a <http://www.udg.edu/LaBibliotecaforma/Comcitardocuments/tabid/11962/language/ca-ES/Default.aspx> [consulta: 12.XII.2009].

De Guzman Ozamiz, Miguel. (2002). *Los Pitagóricos* [en línia]. Accessible a <http://nonio.mat.uc.pt/PENSAS_EN02/pitagoricos/pitagoricos.htm> [consulta: 13.II.2010].

Diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans [en línia]. Accessible a <http://dlc.iec.cat> [consulta: 12.XII.2009].

El Hombre de Vitruvio : La Divina Proporción [en línia]. Accessible a <http://www.portalplanetasedna.com.ar/divina_proporcion.htm> [consulta: 21.IV.2010].

El número de Oro - La Razón Áurea, 6 de Jul. de 2008 [en línia]. Accessible a <http://asusta2.com.ar/2008/07/06/el-numero-de-oro-la-razon-aurea> [consulta: 14.III.2010].

El número de oro [en línia]. Accessible a <http://centros.edu.xunta.es/iespedrasrubias/files/el%20n%C3%BAmero%20de%20oro.doc> [consulta: 17.III.2010].

El Partenón : Un monumento a la belleza de la belleza arquitectónica griega [en línia]. Accessible a <http://www.portalplanetasedna.com.ar/partenon.htm> [consulta: 24.IV.2010].

GALAVIZ, José. *El problema de las hormigas enamoradas y mal correspondidas* [en línia]. Accessible a <http://www.interactiva.matem.unam.mx/aurea/html/hormigas.html> [consulta: 05.VI.2010].

– . *Crece y se tuerce : la espiral logarítmica* [en línia]. Accessible a <http://interactiva.matem.unam.mx/aurea/html/espiral.html> [consulta: 08.III.2010].

Great Pyramid - Interesting Facts [en línia]. Accessible a <http://www.fourwinds10.com/siterun_data/environment/exploration/news.php?q=1267566465> [consulta: 25.VI.2010].

LANGARITA FELIPE, Ignacio. *El número de oro* [en línia]. Accessible a <http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm> [consulta: 14.I.2010].

LÓPEZ VERGARA LUZ ORENDAIN, Tsayam; CALVILLO HERNÁNDEZ, Metzli; LEYVA GARÍA, Mayte. (2009). *El Número Áureo : La Fórmula Divina de Fibonacci* [en línia]. Accessible a <http://www.acmor.org.mx/cuam/2009/Fisico-Mate/108-CUAM%20Mor-Numero%20aureo.pdf> [consulta: 16.III.2010].

Marquardt Beauty Analysi, California [en línia]. Accessible a <http://www.beautyanalysis.com> [consulta: 20.IV.2010].

MARTÍN SÁEZ, Daniel. *Pitágoras de Samos y la música como perfección. El universo explicado como armonía*, Abr. de 2007 [en línia]. Accessible a <http://www.sinfoniavirtual.com/revista/003/pitagoras_musica_matematicas.php> [consulta: 10.III.2010].

MEDIAVILLA GRADOLPH, Teresa. *Pitágoras y los Pitagóricos* [en línia]. Accessible a <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/12-1-b-pitagoras.html> [consulta: 12.I.2010].

MIYARA, Federico. *La música de las esferas: de Pitágoras a Xenakis... y más acá : Apuntes para el coloquio del Departamento de Matemática* [en línia]. Accessible a <http://www.sectormatematica.cl/musica/esferas.pdf> [consulta: 10.III.2010].

Phi, el número de oro [en línia]. Accessible a <http://www.ite.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/secundaria/matematicas/phi/marcoprincipal.htm> [consulta: 13.II.2010].

RODRÍGUEZ SANTOS, Alberto. *Curvas y superficies* [en línia]. Accessible a <http://www.epsilones.com/paginas/i-curvas.html> [consulta: 08.III.2010].

The Beauty Of The Golden Ratio [en línia]. Accessible a <http://library.thinkquest.org/trio/TTQ05063/index.html> [consulta: 07.IV.2010].

Produccions audiovisuals

El Número de Oro; Phi; la Divina Proporción [vídeo en línia]. Televisió Espanyola; TVE 2 (2007). 06:19 mín. Accessible a <http://www.youtube.com/watch?v=j9e0auhmxnc> [consulta: 16.III.2010].

Kopèrnik (nº 3) [programa televisiu]. Comunicàlia (2009). 30:00 mín.

Las proporciones de la belleza [vídeo en línia]. 05:25 mín. Accessible a <http://www.youtube.com/watch?v=JcoJHxBKOys> [consulta: 17.III.2010].

MENENDEZ, Fernando. *Formacion de la mascara de Stephen Marquardt* (2010) [vídeo en línia]. 00:13 mín. Accessible a <http://www.youtube.com/watch?v=8Ha0L7J-hr4> [consulta: 21.IV.2010].