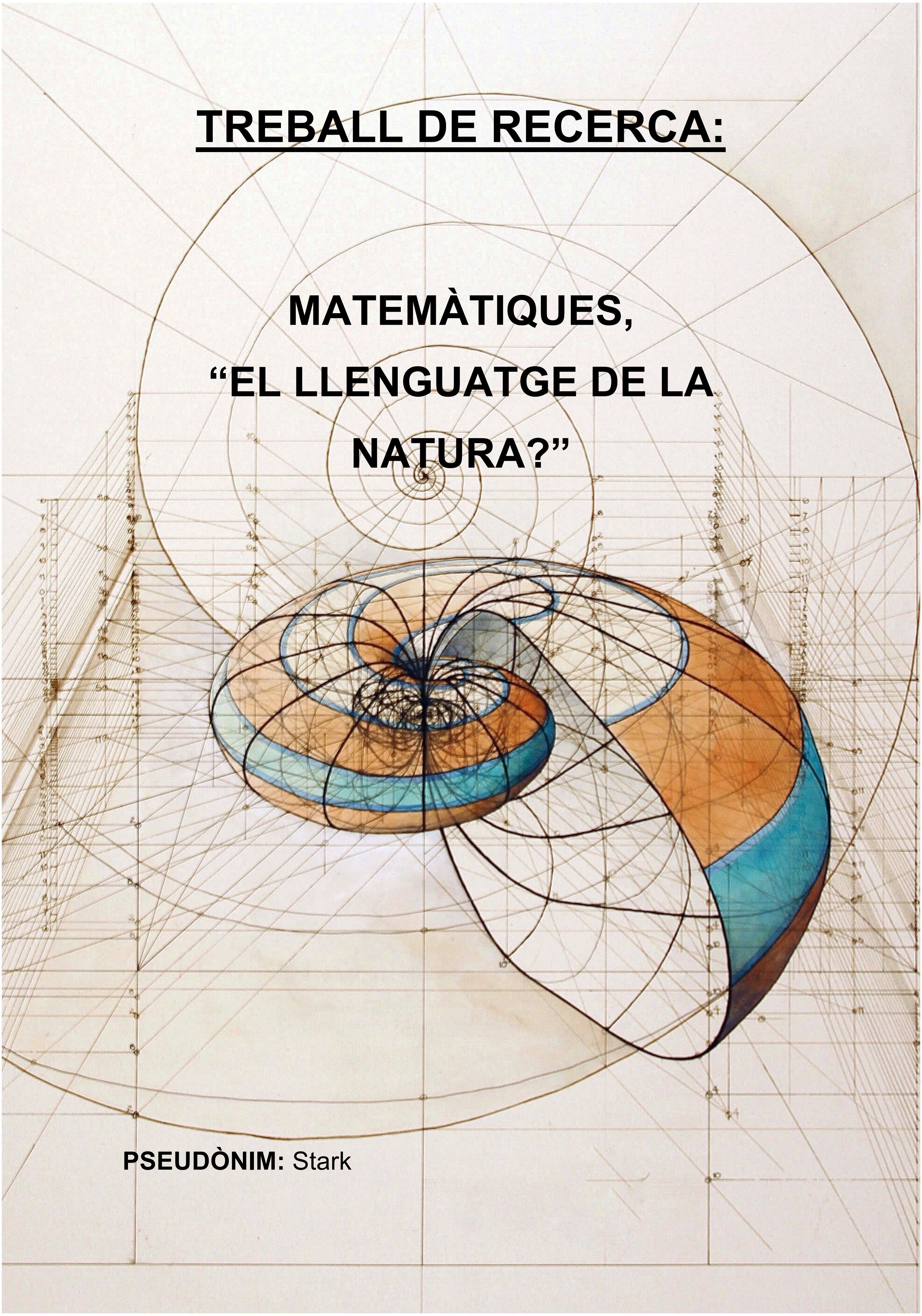
TREBALL DE RECERCA:



MATEMÀTIQUES, “EL LLENGUATGE DE LA NATURA?”

PSEUDÒNIM: Stark

Aquest treball ha estat possible gràcies a la col·laboració i l'ajuda de diverses persones. Especialment voldria donar les gràcies a la meva tutora per les seves orientacions i els seus consells en els moments de confusió. També agrair a totes les persones que desinteressadament pengen vídeos explicatius a Internet per a tots els estudiants que ho necessitem. I finalment als meus pares, que han tingut molta paciència amb mi i m'han donat constantment ànims i confiança per tirar sempre endavant i no rendir-me en cap moment.

ÍNDEX:

1. INTRODUCCIÓ

Realment les coses de la Terra es van formar a l'atzar? No hi ha cap relació que les uneixi?

Per realitzar aquest treball de recerca he decidit escollir un tema poc conegut, però que, alhora, ens envolta en el nostre dia a dia.

Les matemàtiques no són una invenció de l'ésser humà, tot al contrari, la pròpia naturalesa està plena de números, successions, proporcions... Encara que no ho sembli, totes les coses que ens envolten segueixen un criteri comú, des dels simples pètals d'una rosa, fins als forats negres que hi ha a l'espai.

Aquest treball, tracta sobre les matemàtiques a la natura.

Em vaig decidir a escollir aquest tema perquè em suposa un repte. Per una banda, sento una gran curiositat pels secrets que hi ha amagats dins l'univers, i per una altra, malgrat tots els avenços científics, sóc conscient que n'hi ha molts sense resposta i poc documentats.

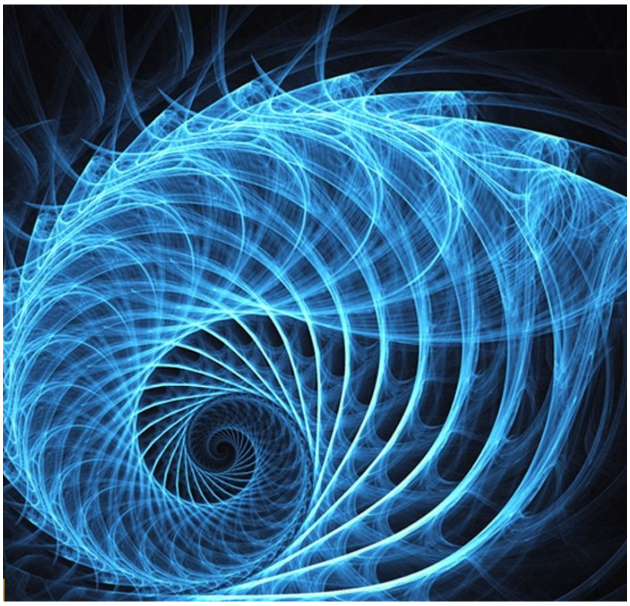
En primer lloc, el treball comença amb l'explicació del nombre d'or i la successió de Fibonacci. Seguidament, continua amb la introducció al tema de les fractals.

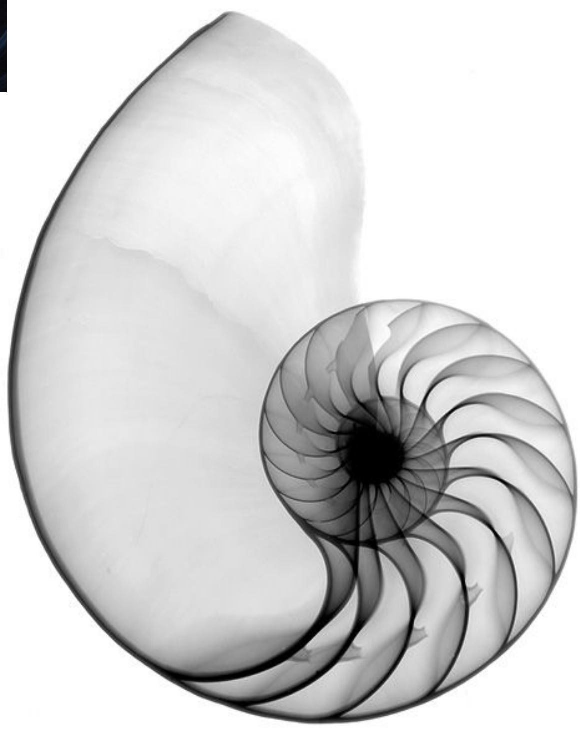
A més a més, he realitzat tres estudis pràctics. En el primer es comprova si els pètals de les flors segueixen una successió lògica i determinada. En el segon, s'estudia si en el cos humà es troben relacions amb el nombre d'or. Finalment, en el tercer estudi s'investiga si les espirals que hi ha en una pinya segueixen l'anomenada successió de Fibonacci.

Per acabar, m'agradaria comentar que la informació que hi ha a Internet sobre aquest tema de vegades no és del tot correcta ja que és una mica complicat d'entendre i és pot confondre fàcilment; per això, he buscat llibres en biblioteques o, fins i tot, els he comprat, per acabar de contrastar els diferents conceptes d'aquest treball de recerca.

Per tant, les hipòtesis que voldria respondre amb aquest treball són:

1- El propi cos humà segueix la proporció àuria?
2- Les flors segueixen l'anomenada successió de Fibonacci?
3- Les espirals de les pinyes amaguen alguna curiositat relacionada amb el món de les matemàtiques?
4- Trobem fractals a la naturalesa?





"Espiral de Dürer"

2. PRÒLEG: ELS NOMBRES

En aquest treball, utilitzaré diferents termes matemàtics els quals fan referència a les diferents classificacions que existeixen dels nombres reals. Per exemple, en el cas del nombre d'or (φ), entre altres coses, explicaré què és un nombre irracional. Ara bé, qualsevol persona és pot preguntar: "- Què és un nombre irracional?". És per això, que he decidit fer una introducció per tal d'aclarir aquests conceptes que de vegades poden causar confusions.

El nostre cervell té la capacitat de fer càlculs abstractes.

¿Com seria el món si un dia anéssim a dormir i durant la nit desapareguessin tots els números? L'endemà, ens despertaríem en un món sense ordinadors, sense radio ni televisió, sense telèfons, fins i tot sense el nostre microones per escalfar la tassa de llet que prenem per esmorzar. Actualment, la societat humana no pot existir sense els números.

Encara que no ho sembli, totes les civilitzacions han fet servir els nombres per dur a terme les seves activitats bàsiques. Cada cultura els ha representat amb el seu propi estil, però, ningú pot negar que han marcat un paper molt important en la vida dels humans.

Els primers nombres que es van fer servir (1,2,3,4...) van ser els anomenats **NATURALS (N)**. Al mateix temps, es van descobrir els nombres negatius i el zero. El conjunt de tots aquests formen els nombres **ENTERS (Z).** Aquests nombres utilitzats mitjançant coeficients entre ells, és a dir, mitjançant fraccions, formen el que s'anomenen els nombres **RACIONALS (Q)**. Però, anys més tard, Pitàgores va descobrir que el nombre π no es podia classificar en cap regne. És per això, que va decidir crear els anomenats nombres **IRRACIONALS (I).** Potser sembla un nom poc amistós, però, imaginem-nos per un moment el desconcert dels pitagòrics al enfrontar-se amb magnituds impossibles de mesurar com, per exemple, la simple diagonal d'un quadrat d'un centímetre de costat (que si és calcula dóna $\sqrt{2}$ cm i, per tant, és un nombre irracional).

Per tant, els nombres reals es poden classificar en:

- **NATURALS (N) →** Enters positius
- **ENTERS (Z) →** Enters positius i negatius
- **RACIONALS (Q) →** Enters + decimals que es poden transformar en fracció:

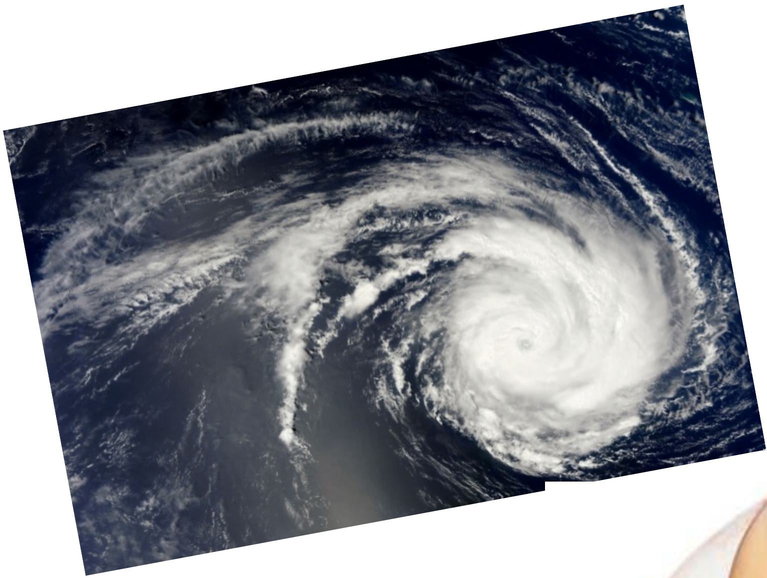
  - EXACTES: ½ = 0,5

  - PERIÒDICS: Purs = $2,\widehat{34}$... Mixts = $0,1\widehat{22}$...
- **IRRACIONALS (I) →** Decimals il·limitats que no es poden transformar en fracció. π, ϕ, $\sqrt{3}$,...

Finalment, aquest esquema que hi ha a continuació ens ajudarà per tal d'acabar d'entendre tota aquesta informació:

- Nombres reals $\mathbb{R}$
  - Racionals $\mathbb{Q}$
    - Enters $\mathbb{Z}$
      - Naturals $\mathbb{N} \rightarrow 1, 5, \frac{28}{7}$
      - Enters negatius $\rightarrow -4, -9$
    - Fraccionaris
      - Decimals exactes $\rightarrow 0{,}75 = \frac{3}{4}$
      - Decimals periòdics
        - Periòdics purs $\rightarrow 2{,}\hat{3} = \frac{21}{9}$
        - Periòdics mixtos $\rightarrow 0{,}9\hat{4} = \frac{85}{90}$
  - Irracionals: Decimals no periòdics $\rightarrow \pi, \sqrt{2}, \sqrt[3]{7}$

3. LA PROPORCIÓ ÀURIA



3.1 INTRODUCCIÓ A LA PROPORCIÓ ÀURIA

Al llarg de la història, la proporció àuria s'ha relacionat amb l'harmonia en l'art i en la naturalesa fins al punt de descriure-la com a "divina". Però, realment es pot expressar aquesta bellesa en termes matemàtics? Que té en comú l'elegant espiral que hi ha a les closques d'alguns mol·luscs amb els braços d'una galàxia com, per exemple, la Via Làctia?

Encara que sembli mentida, la resposta a aquestes preguntes és un simple nombre, conegut amb diferents noms com ara el nombre Phi, la raó àuria o la proporció divina entre d'altres. Aparentment, és un nombre qualsevol, d'aquells que a molts estudiants no ens agraden gens perquè tenen infinites xifres decimals.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749...$$

Però, de vegades, les matemàtiques semblen màgiques i fan que aquest nombre aparegui en molts cassos com en el somriure de "La Gioconda", en els pètals d'una rosa o en altres situacions quotidianes del nostre dia a dia.

De totes les successions matemàtiques que existeixen, cap és tan famosa, interessant i espectacular com la que va inventar Fibonacci. Aquesta successió ha estat utilitzada al llarg de la història, de vegades de forma voluntària, però, d'altres, de manera inconscient. En aquesta part del treball, explicaré com es va descobrir aquesta successió a partir d'un problema sobre la reproducció dels conills i com la sèrie de Fibonacci es pot trobar com a patró de molts elements de la naturalesa, per exemple, en la distribució de les fulles de les plantes, en els ossos de les mans...

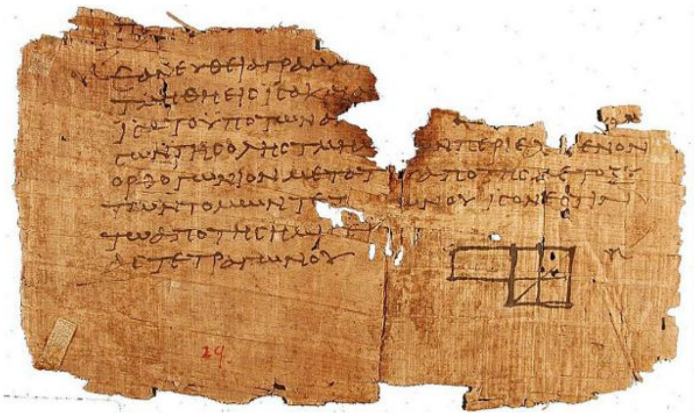
0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233....

Finalment, explicaré l'íntima relació que hi ha entre la successió de Fibonacci i el nombre d'or.

3.2 EXPLICACIÓ DEL NOMBRE D'OR

Després d'aquesta petita introducció a la proporció àuria, ja podem saber-ne una mica més sobre el nombre que la forma: el nombre d'or.

El nombre d'or va ser descobert pels grecs de l'època clàssica. Els primers documents on apareix els trobem en un dels llibres més importants i significatius de la història: "*Els Elements*" d'Euclides, escrit al voltant del 300 a.C.



Fragment del llibre "Els Elements" trobat al jaciment d'Oxirrinco, Egipte.

Portada de la primera versió anglesa dels Elements d'Euclides.

L'obra d'Euclides és el primer llibre científic de la humanitat i, a més a més, és un dels llibres fonamentals de la nostra cultura. De fet, com que les matemàtiques són una assignatura obligatòria en el sistema educatiu de tot el món, d'alguna manera, les persones que han anat a l'escola han llegit "Els Elements" sense adonar-se'n en els seus llibres de text.

El nombre d’or es representa amb la lletra grega Phi o Fi (ϕ, φ) i, com ja hem vist, va ser descobert per Euclides. A més a més, cal dir que s’han utilitzat diferents noms per fer referència a la proporció àuria. Va ser anomenada *“Divina proporció”* pel monjo i matemàtic italià Luca Pacioli, *“Secció divina”* per Johannes Kepler i, fins i tot, el gran Leonardo da Vinci li donà el nom de *“Secció Àuria”*. A partir de les diferents denominacions que s’han utilitzat al llarg de la història, ens podem fer una pregunta molt interessant: “-Per què sempre és compara aquesta proporció amb la divinitat o la bellesa?”.

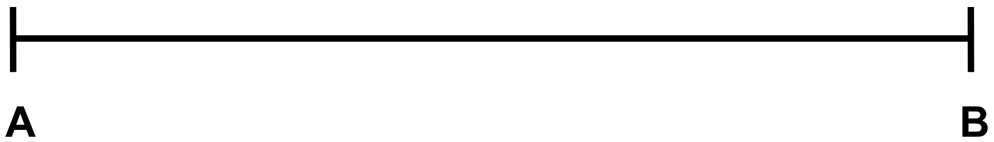
Planta que segueix la proporció àuria.

Com he dit anteriorment, molts matemàtics van quedar fascinats per la peculiaritat d’aquesta proporció, és per això que Luca Pacioli va atribuir-li l’adjectiu de “Divina” en el seu llibre anomenat “*De Divina Proportione*“. El gran matemàtic italià va fer servir aquest adjectiu ja que la proporció àuria es pot trobar en els llocs més diversos de la naturalesa, en moltes obres d’art i en objectes comuns en el nostre dia a dia. A més a més, veient la foto anterior, no és d’estranyar que els antics grecs parlessin del nombre d’or com a sinònim de bellesa i harmonia.

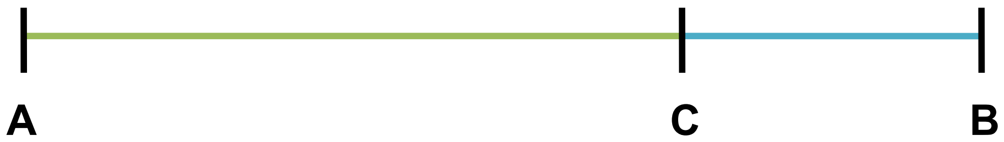
Però, si realment volem quedar fascinats amb la peculiaritat d'aquest nombre, en el següent punt d'aquest treball podrem veure molts casos curiosos i quotidians d'on es pot trobar amagada aquesta proporció tan especial.

I després d'aquesta explicació ens podem preguntar: " Però, com s'ho va fer Euclides per descobrir aquest nombre? " .

En primer lloc, Euclides va partir d'una recta imaginària:

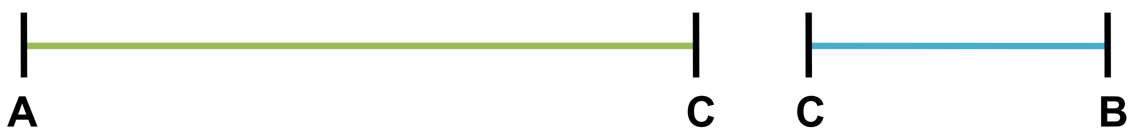


A continuació, es va imaginar un punt concret el qual dividís la recta en dos segments més petits:



Els dos segments havien de tenir una proporció concreta que es definia de la següent manera:

"La relació entre el segment més gran i el més petit, ha de ser la mateixa que la longitud total de la recta i la longitud del segment mes gran."

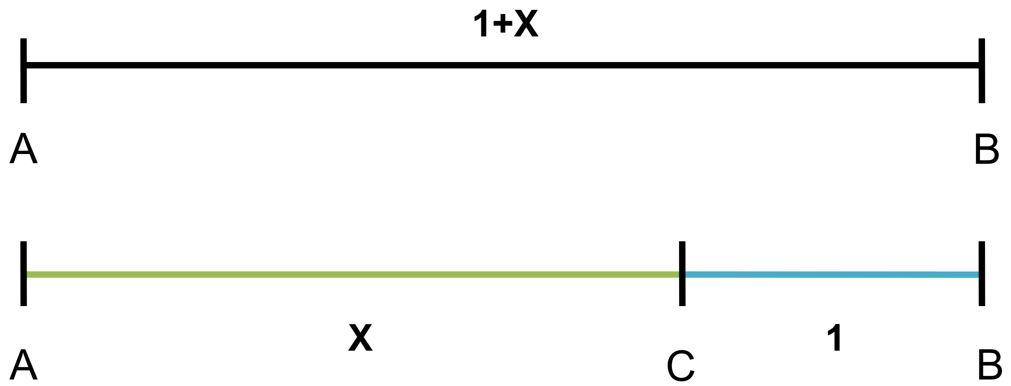


Per tant, la relació que va establir Euclides era aquesta:

$$\boxed{\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}}$$

Si es vol treballar amb equacions, aquesta proporció es pot definir de diferent manera:

En primer lloc, anomenem 1 al segment més petit i anomenem X al segment més gran. Per tant, la recta total és 1+x.



D'aquesta manera, seguint la relació que va establir Euclides (la que està enquadrada anteriorment amb un rectangle de color blau), es pot deduir que:

$$\frac{\mathbf{1+X}}{\mathbf{X}}=\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{1}}$$

Arreglant aquesta equació, trobem una equació de segon grau i resolent-la:

$$\mathbf{1+x=x^2} \qquad \mathbf{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$\mathbf{x^2-x-1=0} \qquad \boldsymbol{x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=1{,}6180\ldots=\phi}$$

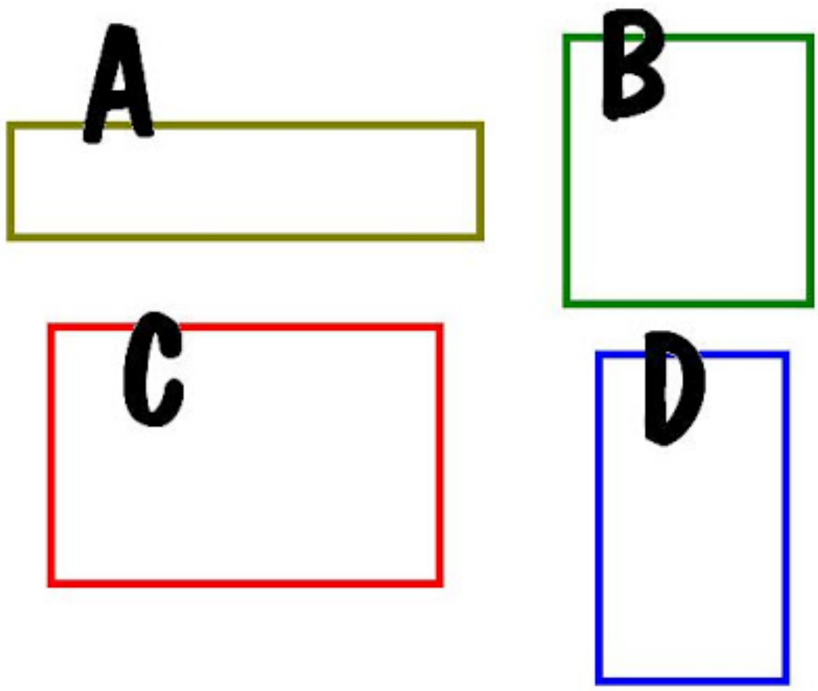
(La solució no pot ser negativa, ja que estem parlant de longituds i aquestes sempre són positives)

Per tant, aquesta és la relació que busquem i s'anomena **Φ**:

$$\boxed{\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots}$$

D'altra banda, la proporció àuria també està present en un rectangle molt especial anomenat "rectangle daurat". Aquest és tant característic, perquè té una proporcionalitat entre els seus costats igual a la raó àuria. És a dir, en aquesta classe de rectangles en dividir la longitud de la seva base entre l'altura ens dóna Phi (ϕ, φ).

Abans de seguir amb l'explicació del rectangle daurat, m'agradaria fer un petit experiment. A continuació, apareixen 4 rectangles de diferents colors. La pregunta és: "- Quin és el rectangle que us agrada més?" (sense tenir en compte el color preferit).



Aquesta mateixa pregunta l'he realitzat a diferents persones i majoritàriament, han escollit el rectangle C. Es tracta de simple casualitat? Doncs no, de fet, el rectangle C és el que més s'apropa a la proporció àuria. És a dir, si dividim la seva base entre la seva altura, ens dóna com a resultat el nombre d'or:

A $\rightarrow \dfrac{5,2}{1,3} = 4$ m

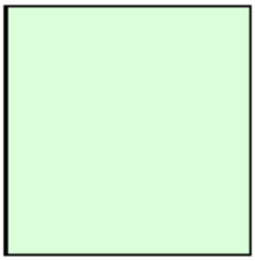
B $\rightarrow \dfrac{2,7}{3} = 0,9$ m

C $\rightarrow \dfrac{4,4}{2,9} = 1,52$ m $\sim 1,618$ m $= \varphi$

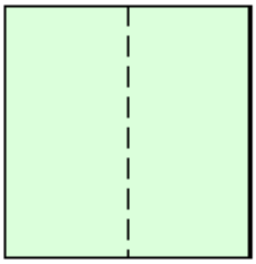
D $\rightarrow \dfrac{2,1}{3,7} = 0,57$ m

Com podem veure, involuntàriament, el nostre cervell associa aquesta idea de bellesa amb la proporció àuria. Per alguna raó, els rectangles i les altres formes geomètriques que segueixen aquesta proporció són agradables a la vista. D'altra banda, cal dir que realment l'opció C és la que està més present en el nostre dia a dia, com veurem en el següent apartat del treball.

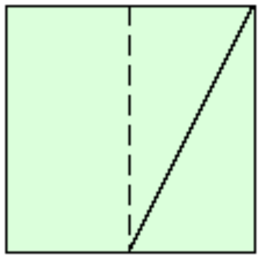
Però, com es pot construir un rectangle auri? A continuació, explicaré els passos a seguir per fer-ho:



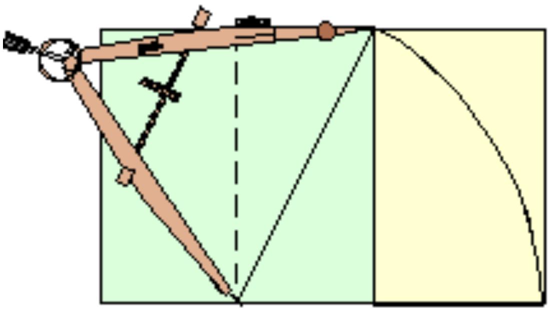
Es fa un quadrat



Es divideix per la meitat



Es traça una diagonal en una de les meitats



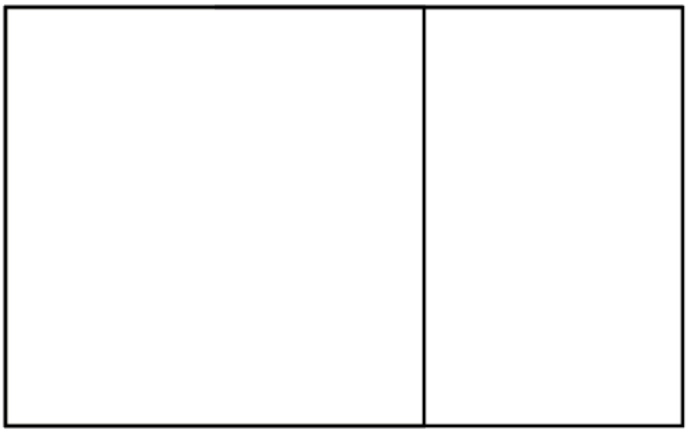
Amb l'ajuda d'un compàs, mesurem la diagonal feta en el pas anterior i tracem una corba fins a l'alçada del costat del quadrat principal. A continuació, ajuntem els altres costats formant així un rectangle auri.

Ara que ja sabem com construir un rectangle auri, direm que algunes de les manifestacions més curioses de ϕ es troben en les espirals. Segurament, que us pregunteu: " Què tenen en comú un rectangle auri i una espiral? ".

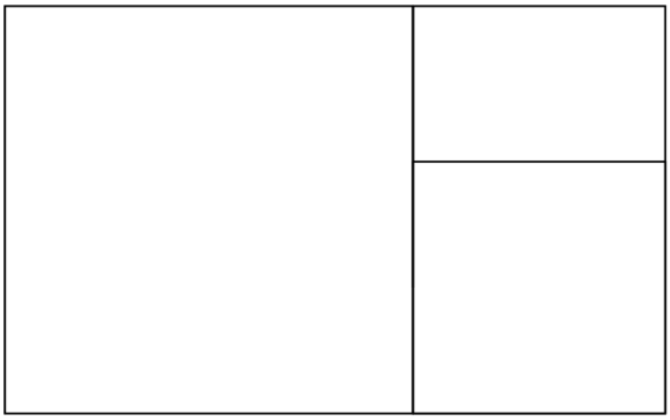
Doncs bé, la resposta és veu molt clarament en el següent dibuix que realitzarem a continuació. Per això, el que farem serà partir d'un rectangle auri com el que hem fet anteriorment i li anirem sumant quadrats per tal d'obtenir nous rectangles auris. És a dir, agafem el rectangle i restem un quadrat format pel costat més petit d'aquest.

Aquesta explicació pot semblar una mica confusa per escrit, però, gràficament s'entén millor:

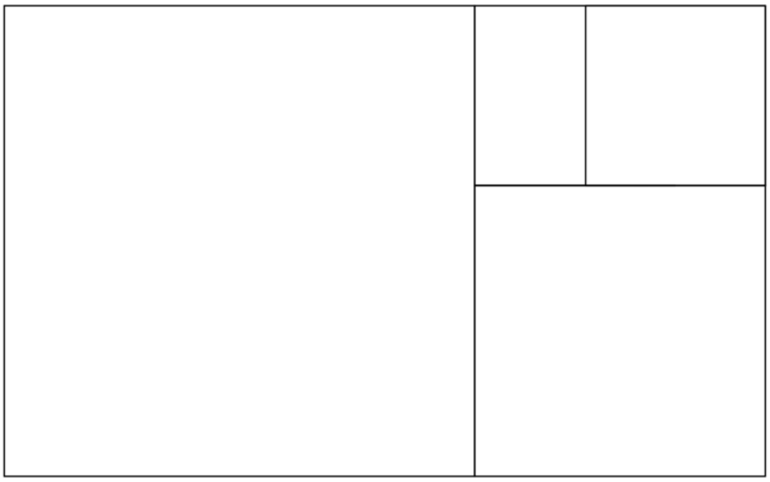
1r pas - Primer de tot, dibuixem un rectangle auri.



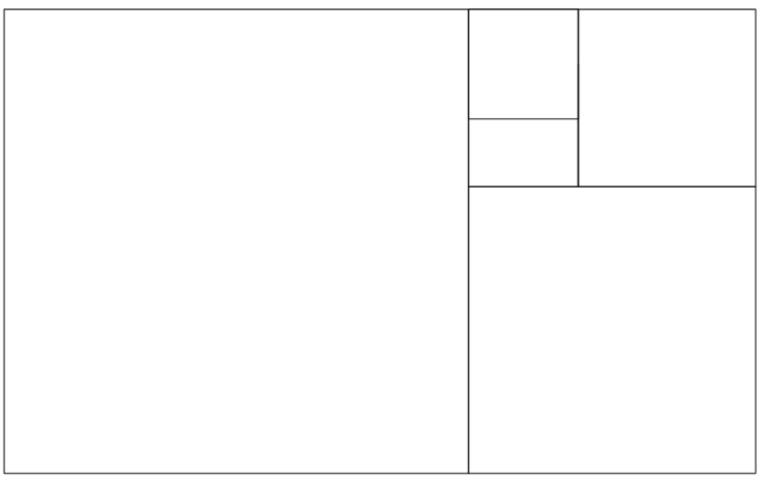
2n pas - A continuació, fem un quadrat en un dels costats més grans del rectangle anterior.



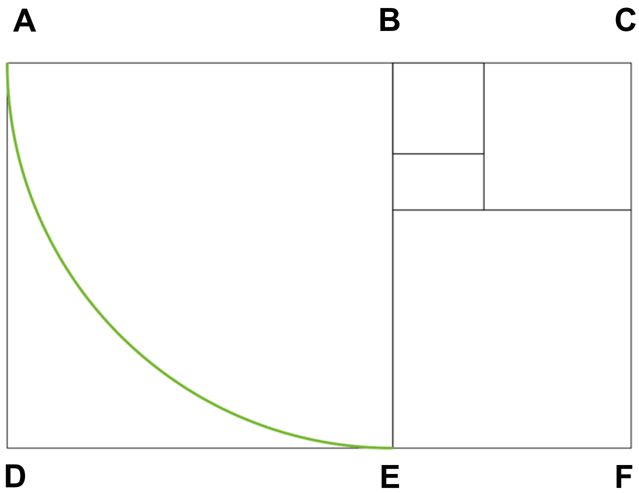
3r pas - En el tercer pas, fem el mateix que en el segon, és a dir, creem un quadrat en un dels costats més grans del rectangle anterior.



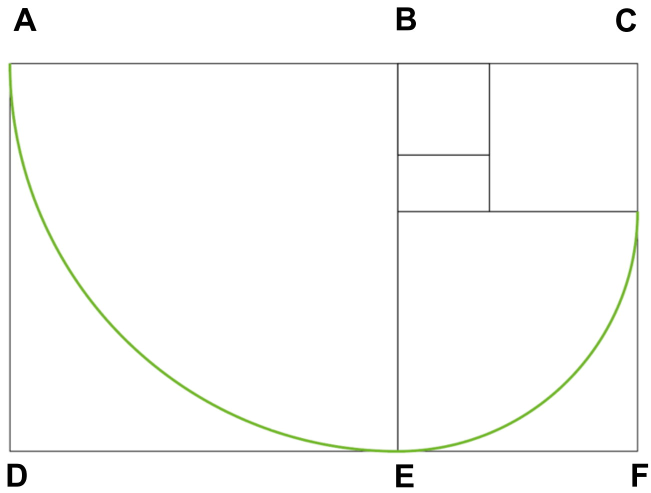
4rt pas - En aquest quart pas el que hem fet ha estat dibuixar un altre quadrat en un dels costats més grans del rectangle del pas 3 i, a més a més, també hem girat el rectangle passant d’una posició vertical a una horitzontal.



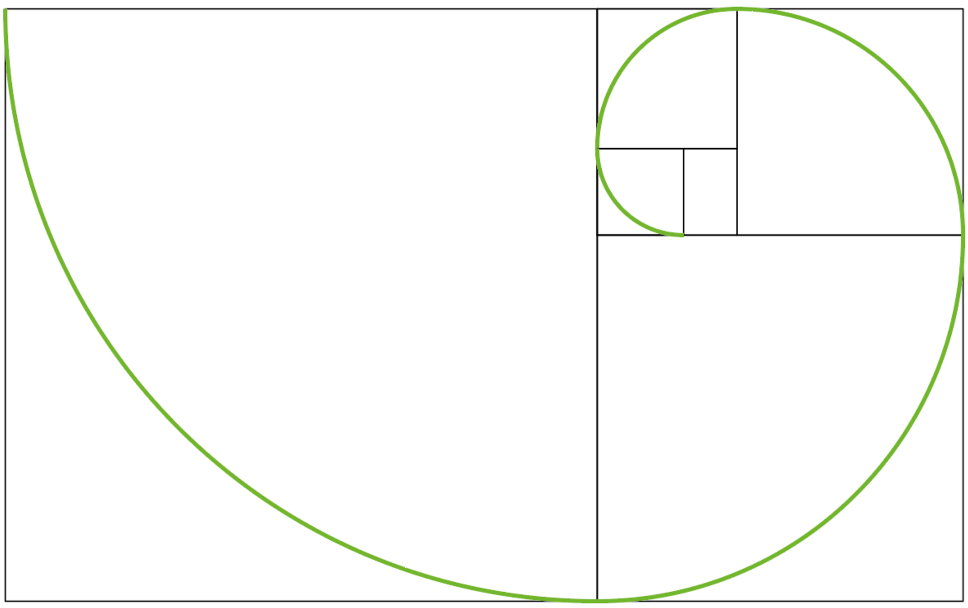
Aquests rectangles tenen una propietat interessant: si unim mitjançant arcs de circumferència els vèrtexs consecutius dels quadrats, obtindrem una corba molt especial anomenada “*Espiral de Dü*rer”. Seguidament, amb l’ajuda d’un compàs, farem aquesta espiral tan curiosa que també es pot dir “espiral àuria”:



Centrem en el vèrtex B i tracem l’arc AE, ja tenim el primer arc de l’espiral.



Dibuixem el segon arc, inscrit en el segon quadrat.



Finalment, anem fent els diferents arcs inscrits en els altres quadrats fins aconseguir aquesta espiral anomenada: “Espiral de Dürer”.

Si mirem la corba que hem creat a la pàgina anterior, pot ser que ens resulti familiar ja que ens recorda molt a les closques dels cargols, a les banyes dels cérvols, de les cabres... Aquesta espiral va ser descoberta pel pintor renaixentista alemany Albrecht Dürer i, des de llavors, molts científics i matemàtics han quedat fascinats al descobrir que està molt més present en el nostre dia a dia del que ens pensem. És per això, que un cop ja hem aprés algunes nocions bàsiques sobre el nombre d'or en el següent apartat parlarem i veurem molts exemples on es pot trobar aquesta proporció tan interessant.

Euclides, matemàtic grec conegut com "el pare de la geometria". A més a més, va descobrir el nombre d'or.

Albrecht Dürer, pintor renaixentista que va descobrir l'Espiral àuria.

3.2.1 ON TROBEM LA PROPORCIÓ ÀURIA?

La proporció àuria, com ja hem vist, és un nombre molt particular i el podem trobar en àmbits completament diferents. Els antics grecs ja sabien l'existència d'aquest nombre; de fet, està present en les seves manifestacions artístiques, sobretot en els temples i les escultures. A continuació, veurem diferents aplicacions del nombre d'or en el nostre món:

- **ARQUITECTURA:**

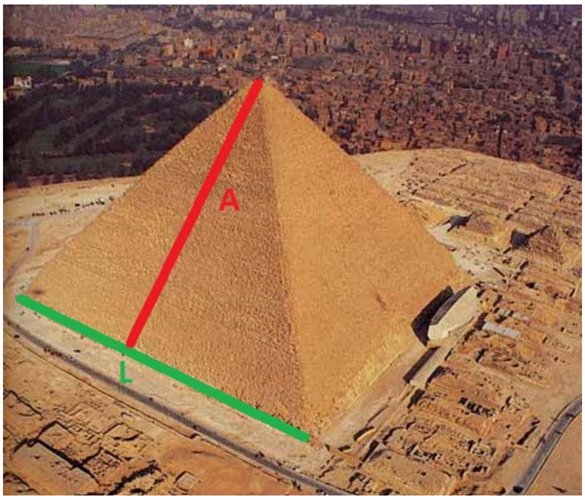
La primera manifestació del nombre d'or en l'arquitectura va ser *la "Piràmide de Keops".* Per molts autors, aquesta és sens dubte l'obra més interessant i espectacular que conté la proporció àuria.

Piràmide de Keops i L'Esfinx de Giza a El Caire, Egipte.

Aquesta piràmide va ser construïda l'any 2570 a.C. i sembla que els antics egipcis ja coneixien l'existència d'aquest nombre, ja que van aixecar aquesta faraònica construcció fent-lo aparèixer en les seves proporcions fins a tres ocasions... que nosaltres sapiguem.

En primer lloc, definirem varies mesures per realitzar els comptes amb més comoditat.

Direm que **L** és igual a la longitud de la base de cada costat de la piràmide. En aquest cas com la piràmide té una base quadrada, tots els quatre costats tindran la mateixa longitud, que és **L = 230 metres**. També definirem A com la distància que hi ha entre el punt mig de cada costat de la base del triangle fins el vèrtex superior de la piràmide, que és **A = 186,07 metres**.



Piràmide de Keops on A = 186,07 m i L= 230 m.

A partir d'aquí, ja estem preparats per veure les tres relacions que té aquesta piràmide amb la proporció àuria:

- Si dividim **A entre L/2** (és a dir, l'altura d'una cara entre la meitat del costat de la base) el resultat és:
  186,07/115 = **1,618... = Φ**
- Si dividim **l'àrea total de la piràmide entre l'àrea lateral**, el valor resultant és també el nombre d'or. Anem a fer-ho:
  <u>Àrea total de la piràmide</u>: Àrea de la base + Àrea lateral
  <u>Àrea de la base:</u>
  L·L = 230·230 = 52900 metres
  <u>Àrea lateral:</u>
  (L·A) / 2 = (230 · 186,07) / 2 = 21398,05 · 4 = 85592,2 metres
  <u>Àrea total de la piràmide:</u> 52900 + 85592,2 = 138492,2 metres
  <u>Divisió de l'àrea total entre l'àrea lateral:</u>
  138492,2 / 85592,2 = **1,618... = Φ**

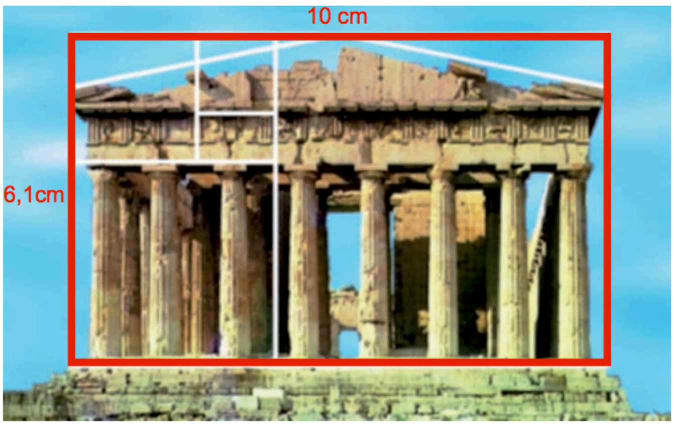
- Per últim, **si dividim l'àrea lateral entre l'àrea de la base de la piràmide** obtindrem:

  85592,2 / 52900 = **1,618 = Φ**

Aquesta aplicació arquitectònica del nombre d'or és la més antiga que es coneix fins al moment present però no és l'única. Anem a veure altres exemples:

Partenó d'Atenes construït entre els anys 447-432 a.C.

En l'anomenat Partenó d'Atenes també podem trobar el nombre auri en les seves façanes. D'altra banda, però, cal dir que en aquest cas la proporció varia una mica respecte a Phi, concretament varia 0,0213. Aquesta variació es produeix perquè com que l'autèntic Partenó va ser bombardejat i destruït diferents cops, la seva estructura va quedar destrossada. En la següent fotografia podem veure com, per buscar la proporció àuria, s'ha hagut de fer el rectangle auri pensant com era en realitat i, per tant, hi ha petites variacions que fan canviar les seves proporcions reals.

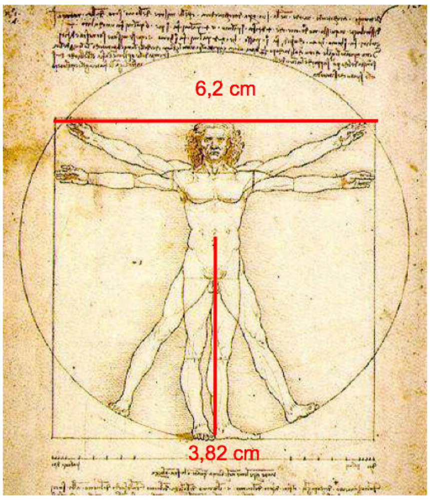


$$\frac{10}{6,1} = \mathbf{1,639...} \simeq \Phi$$

Proporcions de la façana principal del Partenó d'Atenes.

- **<u>ART:</u>**

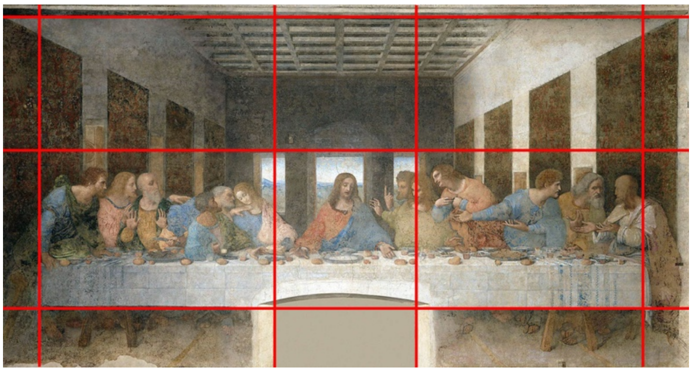
En el món de l'art, sens dubte, el màxim exponent sobre la proporció àuria és el gran Leonardo Da Vinci. Leonardo va fer moltes aportacions en aquest món i ens va deixar grans quadres on podem trobar diverses vegades la divina proporció. A més a més, també va aplicar el seu coneixement científic de les proporcions humanes als estudis de Pacioli i va crear el seu famós "*Home de Viturvi*" on es mostren les proporcions ideals del cos humà. En aquesta obra la relació entre el costat del quadrat i el radi del cercle és el nombre d'or. Més endavant en aquest treball, es mostra un estudi sobre la proporció àuria en el cos humà.



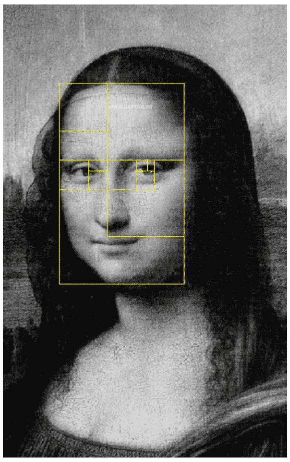
$$\frac{6{,}2}{3{,}82} = \mathbf{1{,}62\ldots} \simeq \boldsymbol{\Phi}$$

L'home ideal o l'home de Viturvi de Leonardo da Vinci.

Altres quadres de Leonardo da Vinci que contenen el nombre d'or són:

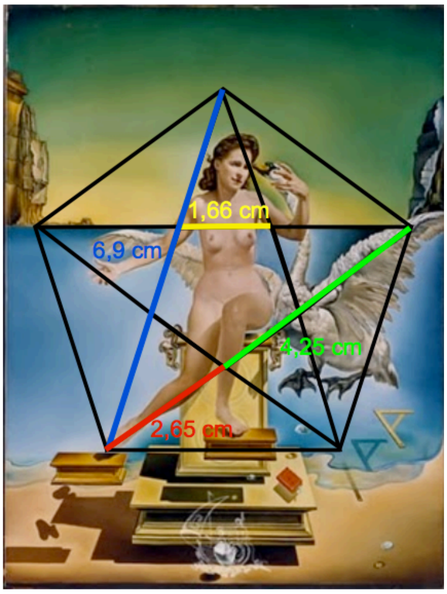


"L'últim sopar" pintat per Leonardo da Vinci.



La Mona Lisa de Leonardo da Vinci

El pintor català Salvador Dalí també coneixia perfectament la proporció àuria, ja que podem veure que en els seus quadres l'utilitza amb molta freqüència. En *"La Leda atòmica"* , Dalí va crear una estrella de cinc puntes on hi està amagat el nombre d'or. Si fem la divisió entre les longituds verd/vermell, blau/verd i vermell/groc obtenim el nombre Phi:



"La Leda atòmica" pintada per Salvador Dalí amb l'ajuda del matemàtic Matila Ghyka

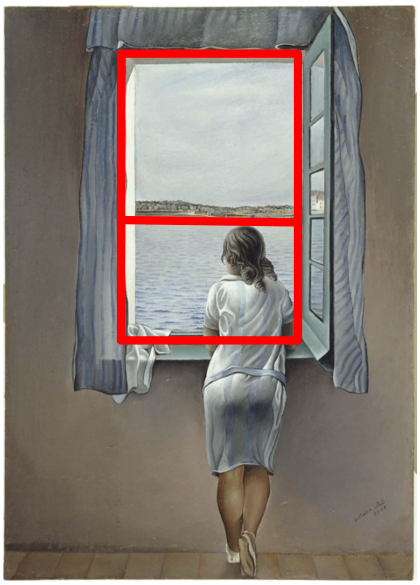
$$\frac{4{,}25}{2{,}65} = \mathbf{1{,}603...} \simeq \mathbf{\Phi}$$

$$\frac{6{,}9}{4{,}25} = \mathbf{1{,}623...} \simeq \mathbf{\Phi}$$

$$\frac{2{,}65}{1{,}66} = \mathbf{1{,}596....} \simeq \mathbf{\Phi}$$

Altres quadres molt famosos que contenen la proporció àuria són:

"Las Meninas" de Velázquez



"Noia a la finestra" de Dalí

- ## EN EL NOSTRE DIA A DIA:

Encara que sembli mentida, en el nostre dia a dia apareix moltes vegades la proporció àuria i no ens n'adonem. Per exemple, en la caixa d'un paquet de tabac, casualment, es pot veure un rectangle auri. Tècniques de màrqueting?

3,8 cm

6,1 cm

$$\frac{6{,}1}{3{,}8} = \mathbf{1{,}605\ldots} \simeq \mathbf{\Phi}$$

Fins i tot, en un simple bolígraf "Bic" de tota la vida, si dividim la distancia de l'extrem no tapat fins al tap i la longitud de tot el tap obtindrem aquest nombre tant fascinant.

6,1 cm 9,8 cm

$$\frac{9{,}8}{6{,}1} = \mathbf{1{,}606\ldots} \simeq \mathbf{\Phi}$$

Altres exemples d'objectes molt comuns, en el nostre dia a dia, que contenen la proporció àuria són les targetes com la de crèdit, el DNI...

8.55 cm

5,3 cm

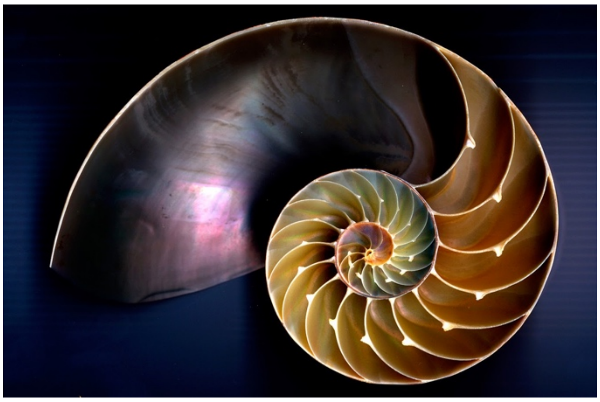
8,55 cm

5,3 cm

8,55 / 5,3 = **1,613…** ≃ **Φ**

- **<u>EN LA NATURALESA:</u>**

  També podem trobar la proporció àuria en la natura, és a dir, per trobar el nombre d'or no tot han de ser creacions artificials fetes per l'home; fins i tot la pròpia naturalesa coneix aquesta meravellosa proporció. També la podem trobar en el nostre propi cos, com veurem més endavant en un estudi d'aquest treball.

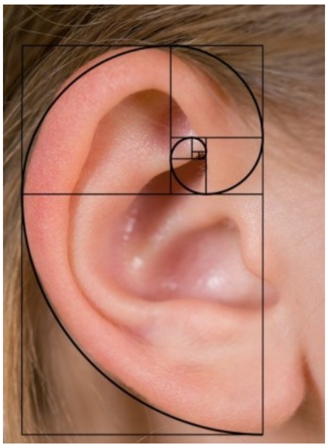


Closca d'un nàutil que segueix l'espiral de Dürer

Planta "Àloe Vera" que segueix l'espiral de Dürer

Col llombarda que segueix l'espiral àuria

Galàxia que també segueix l'espiral àuria.



Orella d'una persona que segueix l'anomenada espiral.

3.3 EXPLICACIÓ DE LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI

La successió de Fibonacci va ser descoberta per Leonardo de Pisa, més conegut com a Fibonacci. Ell va ser un matemàtic italià influent del segle XIII que va descobrir entre altres coses, una successió infinita molt curiosa de nombres enters, *"La Successió de Fibonacci":*

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233....

Però quina relació hi ha entre els nombres d'aquesta sèrie? Doncs bé, aquesta relació és molt senzilla: cada terme és la suma dels dos nombres anteriors. És a dir, els dos primers nombres de la sèrie són el 0 i l'1 i a partir d'aquí es van sumant els dos últims termes. És a dir: 0+1= 1 / 1+1= 2 / 1+2= 3 / 2+3= 5 / 3+5= 8 / 5+8= 13 / 8+13= 21... Així successivament fins a l'infinit. Per tant, es pot deduir que l'expressió de la successió de Fibonacci és:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

On:

- x_n és el terme en posició "n"
- x_{n-1} és el terme anterior (n-1)
- x_{n-2} és el terme anterior a aquest (n-2)

Per veure-ho més clar, posarem un exemple amb el sisè terme:

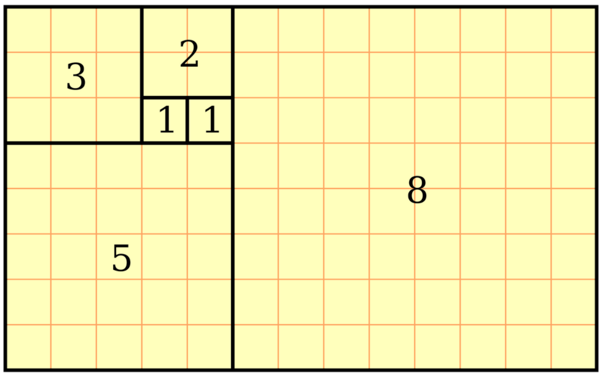
$$x_6 = x_{6-1} + x_{6-2} = x_5 + x_4 = 5 + 3 = \mathbf{8}$$

(Per tant el sisè terme en la successió és el número 8)

Leonardo de Pisa, Fibonacci.

El descobriment de Fibonacci ens permet crear aquest rectangle que tenim a continuació, on es pot veure com cada quadrat té la longitud dels diferents nombres que segueixen la successió de Fibonacci.

A més a més, també es pot observar que aquest rectangle s'assembla molt al rectangle auri. És tracta d'una simple casualitat? La historia de les matemàtiques és a vegades sorprenent i inesperada, per això, en el següent punt d'aquest treball trobarem la solució a aquesta pregunta.



Rectangle format pels nombres de la successió de Fibonacci

A més a més, Leonardo de Pisa va escriure un llibre anomenat "El Liber abaci" on va plantejar un problema que s'ha fet molt famós sobre uns conills. El seu enunciat és així:

Una parella de conills triga un mes en arribar a la seva edat fèrtil, a partir d'aquest moment cada mes tindrà una parella de conills, que després de ser fèrtils tindran a la seva vegada una parella de conills. Quants conills tindrem quan hagin passat un determinat nombre de mesos?

Encara que aquest problema sembli una mica complicat d'entendre, en veritat és molt senzill si es posen per escrit totes les dades que ens dóna l'enunciat. Per tant, anem a fer-lo.

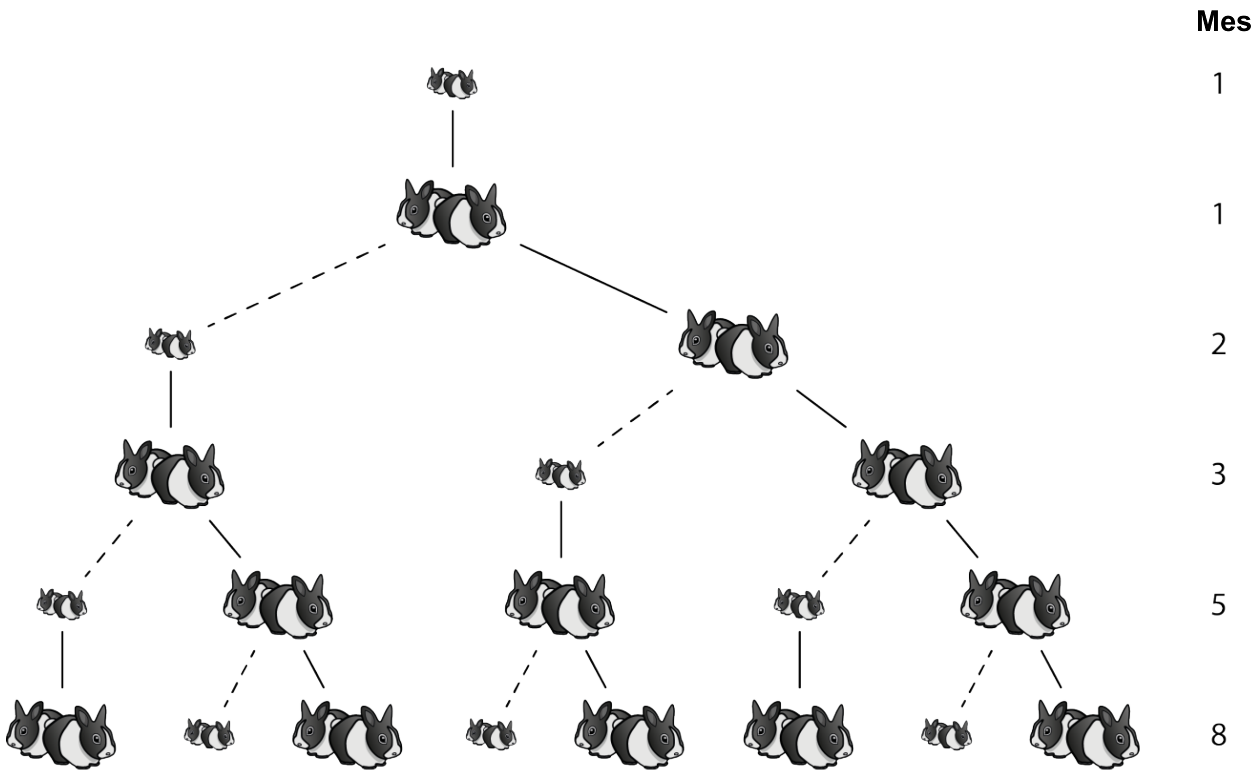
Tal i com ens diu el problema, el primer mes comencem amb una parella de conills.

El segon mes encara no són fèrtils, per tant continuem tenint una parella de conills. El tercer mes la parella ja serà fèrtil i tindrà una parella de conills, per tant tindrem dues parelles de conills.

El quart mes la primera parella tindrà una nova parella de conills però la segona encara no serà fèrtil, per tant, no en tindrà cap; aleshores tindrem les dues parelles que teníem més la nova parella engendrada per la primera: en total tres parelles.

A partir d'aquí, explicat costa una mica d'entendre, ja que el cinquè mes la primera parella i la segona ja són fèrtils, o sigui que les dos tindran una parella de conills, per tant, tindrem quatre parelles. Però li hem de sumar la parella que ha tingut el mes passat, que encara no pot tenir conills; aleshores tenim un total de cinc parelles.

Per entendre-ho millor, posarem uns esquemes on es veu tot el raonament molt clarament:



Mes \ Generación	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Total
1°	1						1
2°	1						1
3°	1	1					2
4°	1	2					3
5°	1	3	1				5
6°	1	4	3				8
7°	1	5	6	1			13
8°	1	6	10	4			21
9°	1	7	15	10	1		34
10°	1	8	21	20	5		55
11°	1	9	28	35	15	1	89
12°	1	10	36	56	35	6	144

Taula explicativa del creixement de la família de conills

Després d'entendre aquest problema, segurament que la pregunta que us estareu fent és: " I quina relació té aquest problema amb la successió de Fibonacci? ".

Si ens fixem amb el nombre de parelles de conills que obtenim cada mes, ens n'adonarem que aquest és un número de la sèrie de Fibonacci. És a dir, el primer mes tenim 1 parella, el segon també, el tercer en tenim 2, el quart mes en tenim 3, el cinquè mes en tenim 5, el sisè en tenim 8... i així successivament, fins l'infinit.

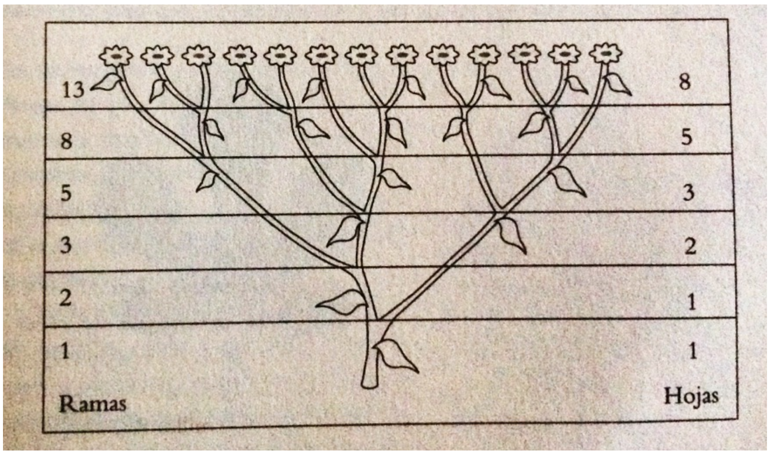
3.3.1 ON TROBEM LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI?

La història de les matemàtiques és a vegades sorprenent, i sens dubte, sempre inesperada. El nombre auri que es va descobrir molt abans que la successió de Fibonacci, va connectar-se segles més tard amb aquesta sèrie. De tal manera com ha passat amb la proporció àuria, a continuació mostrarem alguns exemples d'on podem trobar la successió de Fibonacci.

Sorprenentment, el número de pètals de les flors també segueixen la successió de Fibonacci. Tot i que en moltes pàgines web es diu que totes les flors segueixen aquesta seqüència, més endavant en aquest treball de recerca podrem trobar un estudi on coneixerem si aquesta afirmació és certa.

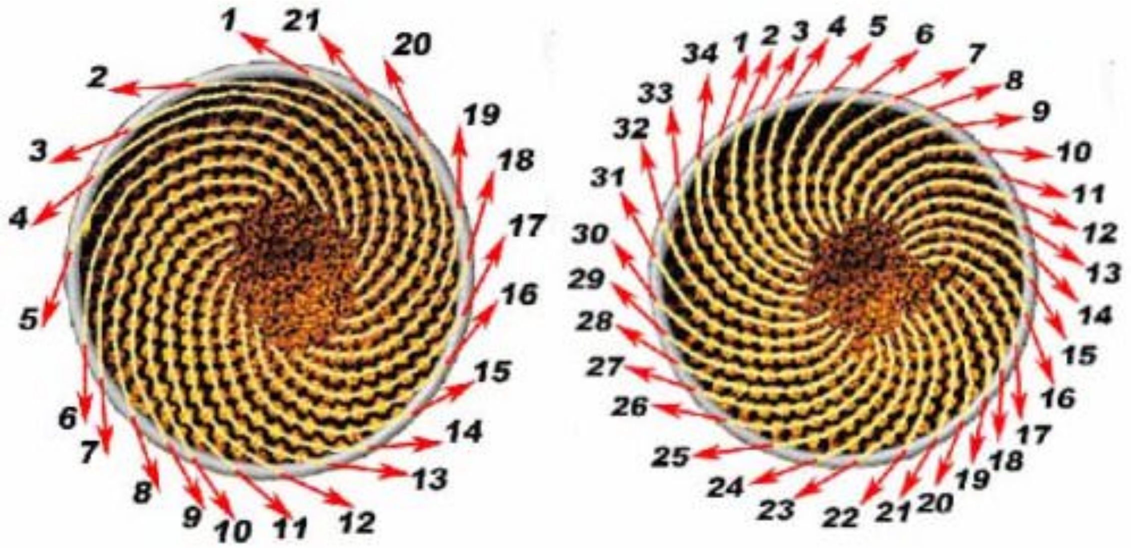
Flors que tenen cinc pètals, és a dir, segueixen la successió de Fibonacci.

També en les disposicions de les fulles de les plantes podem veure la successió de Fibonacci. Si agafem la tija d'una planta com ara *" l'Achillea Ptarmica"* podem veure com en cada nivell el nombre de rames i de branques és un nombre que pertany a la successió de Fibonacci.



Esquema de la flor "Achillea Ptamica" on és pot veure que les fulles segueixen la successió de Fibonacci.

A més a més, en aquest treball també veurem com el nombre de les espirals de les pinyes segueixen la successió de Fibonacci, tal i com passa en els gira-sols.



Girasol que té 21 espirals cap una banda i 34 per l'altre, i curiosament, els dos nombres són a la successió de Fibonacci.

Com hem vist, aquesta successió es troba en molts cassos del nostre dia a dia i és molt interessant. Però, aquesta seqüència pot ser encara més curiosa si pensem amb el nombre d'or que hem vist anteriorment. Efectivament, la successió de Fibonacci té una gran influència amb la proporció àuria. És per això, que el següent punt d'aquest treball parlarem exclusivament d'aquesta relació tan especial.

3.4 RELACIÓ ENTRE EL NOMBRE D'OR I LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI

Després d'haver vist i entès totes les explicacions sobre el nombre d'or i la successió de Fibonacci, ja podem veure quina és la relació que les uneix entre les dues. Com hem vist anteriorment, totes les coses relacionades entre aquests dos termes matemàtics són molt especials, per tant, ja ens podem esperar que la seva relació també serà molt particular i intrigant. Anem a veure-la:

Si anem dividint nombres de Fibonacci successius entre ells, ens n'adonarem que, a mesura que es van fent grans, també s'acosten més al nombre 1,618033.... que si recordem és el nombre d'or.

La divisió entre els nombres de Fibonacci s'acosta de manera asimptòtica al nombre auri. És a dir, que cada cop s'apropa més a ell, però mai arriba a tenir exactament tots els seus decimals. Per exemple, si agafem la successió de Fibonacci des de: 21, 34, 55, 89... podríem fer les divisions així:

$$\frac{34}{21} = 1{,}690476\ldots$$

$$\frac{55}{34} = 1{,}676470\ldots$$

$$\frac{89}{55} = 1{,}618181\ldots$$

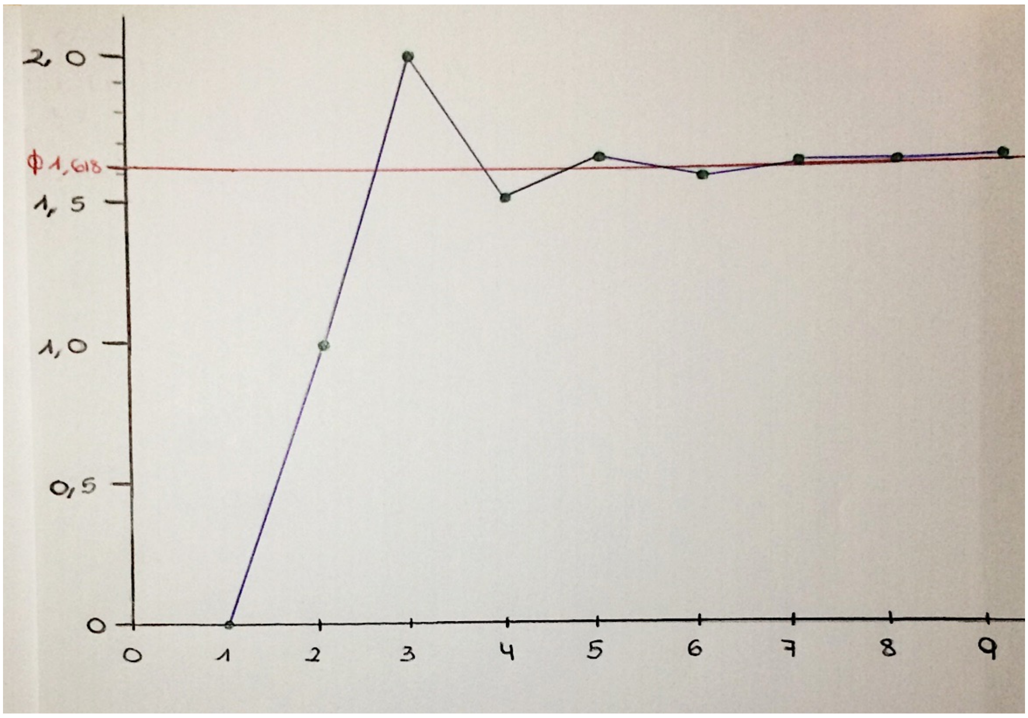
$$\frac{144}{89} = 1{,}617977\ldots$$

Secuencia Fibonacci y la razón áurea

Número inicial	+	Número siguiente		División	Razón
1	+	1		1 : 1	1,0
1	+	2	=	2 : 1	2,0
2	+	3	=	3 : 2	1,5
3	+	5	=	5 : 3	1,6666
5	+	8	=	8 : 5	1,600
8	+	13	=	13 : 8	1,628
13	+	21	=	21 : 13	1,6153846
21	+	34	=	34 : 21	1,6190476
34	+	55	=	55 : 34	1,6176470
55	+	89	=	89 : 55	1,6181818
89	+	144	=	144 : 89	1,6179775
144	+	233	=	233 : 144	1,6180555
233	+	377	=	377 : 233	1,6180257
377	+	610	=	610 : 377	1,6180371
610	+	987	=	987 : 610	1,6180327
987	+	1597	=	1597 : 987	1,6180344
1597	+	2584	=	2584 : 1597	1,6180338
2584	+	4181	=	4181 : 2584	1,6180340
4181	+	6765	=	6765 : 4181	1,6180339
6765	+	10946	=	10946 : 6765	1,6180339
10946	+	17711	=	17711 : 10946	1,6180339
17711	+	28657	=	28657 : 17711	1,6180339
28657	+	46368	=	46368 : 28657	1,6180339

A més a més, també podem fer una gràfica per indicar aquesta relació on es veu tot més clarament.

$x_n \;/\; x_{n-1}$

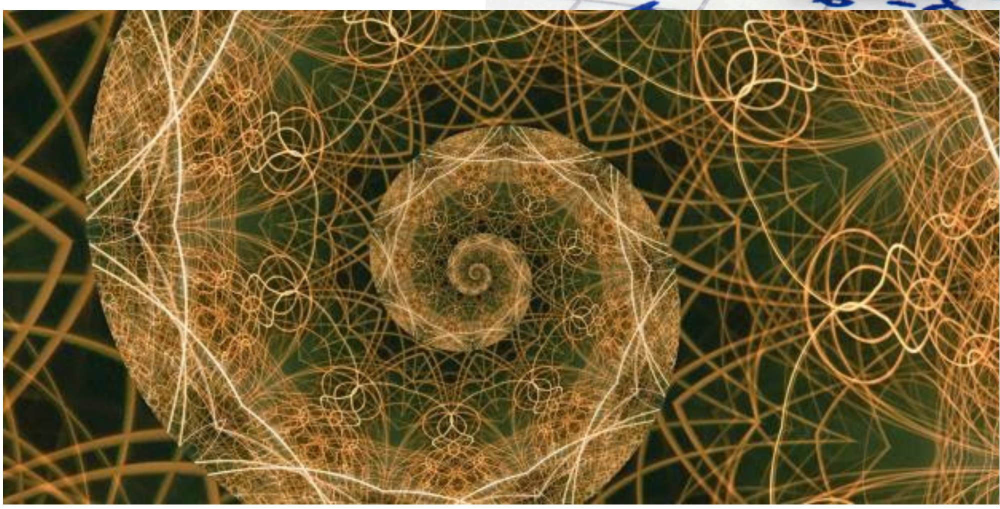


n

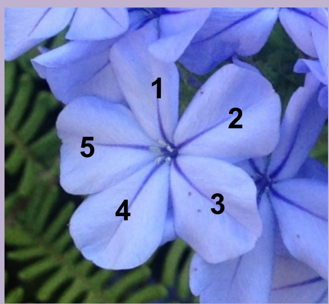
Lugar	Término	a_n/a_{n-1}	Diferencia con Φ
1	1		
2	1	1.000000000000000	-0.618033988749895
3	2	2.000000000000000	+0.381966011250105
4	3	1.500000000000000	-0.118033988749895
5	5	1.666666666666667	+0.048632677916772
6	8	1.600000000000000	-0.018033988749895
7	13	1.625000000000000	+0.006966011250105
8	21	1.615384615384615	-0.002649373365279
9	34	1.619047619047619	+0.001013630297724
10	55	1.617647058823529	-0.000386929926365
11	89	1.618181818181818	+0.000147829431923
12	144	1.617977528089888	-0.000056460660007
13	233	1.618055555555556	+0.000021566805661
14	377	1.618025751072961	-0.000008237676933
15	610	1.618037135278515	+0.000003146528620
16	987	1.618032786885246	-0.000001201864649
17	1,597	1.618034447821682	+0.000000459071787
18	2,584	1.618033813400125	-0.000000175349770
19	4,181	1.618034055727554	+0.000000066977659
20	6,765	1.618033963166707	-0.000000025583188

Gràfica i taula d'aproximació de la successió de Fibonacci al nombre d'or.

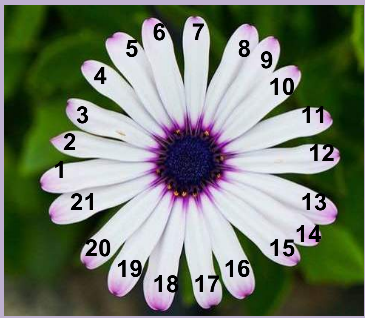
3.5 ESTUDIS



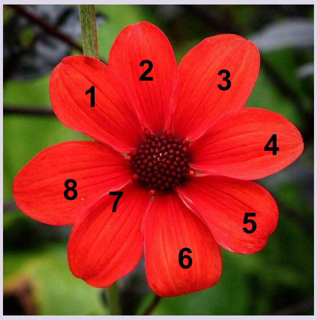
3.5.1 ESTUDI DE LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI EN LES FLORS

FLORS	SEGUEIXEN LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI?
 *Hibisc*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 *Varietat de Lilium rosa*	Número de pètals: 6 **No** segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 *Gessamí blau*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor del Jardiland
 *Petúnia lila*	Número de pètals: 1 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 *Gerani vermell*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou

FLORS	SEGUEIXEN LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI?
 *Varietat de clavell*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 *Altea*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 *Gerani blanc*	Número de pètals: 8 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 Lilium rosa	Número de pètals: 6 **No** segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 *Varietat d'Altea*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou

<table>
<tr><th>FLORS</th><th>SEGUEIXEN LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI?</th></tr>
<tr><td>

Margarida lila</td><td>Número de pètals: 21
Sí que segueix la successió de Fibonacci.

Flor del Jardiland</td></tr>
<tr><td>

“Dahlia bishop of llandaff”</td><td>Número de pètals: 8
Sí que segueix la successió de Fibonacci.

Flor del Jardiland</td></tr>
<tr><td>

Flor d’ametller</td><td>Número de pètals: 5
Sí que segueix la successió de Fibonacci.

Flor de Colldejou</td></tr>
<tr><td>
Lliri</td><td>Número de pètals: 1
Sí que segueix la successió de Fibonacci.

Flor del Jardiland</td></tr>
<tr><td>

Orquídia marró</td><td>Número de pètals: 5
Sí que segueix la successió de Fibonacci.

Flor del Jardiland</td></tr>
</table>

FLORS	SEGUEIXEN LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI?
 *Narcís blanc*	Número de pètals: 6 **No** segueix la successió de Fibonacci. Flor del Jardiland
 *Narcís groc*	Número de pètals: 6 **No** segueix la successió de Fibonacci. Flor del Jardiland
 *Flor de cirerer*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 *Lliri vermell*	Número de pètals: 1 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 *Calathea crocata*	Número de pètals: 13 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor del Jardiland

FLORS	SEGUEIXEN LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI?
 *Orquídia blanca*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor del Jardiland
 *Pensament groc*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 *Cyclamen persicum*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor del Jardiland
 *Prímula*	Número de pètals: 6 **No** segueix la successió de Fibonacci. Flor del Jardiland
 *Prímula*	Número de pètals: 6 **No** segueix la successió de Fibonacci. Flor del Jardiland

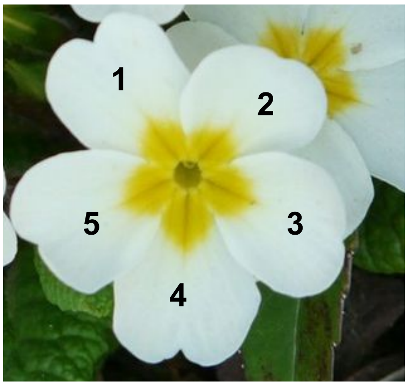
FLORS	SEGUEIXEN LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI?
 *Petúnia rosa*	Número de pètals: 1 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 *Orquídia*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor del Jardiland
 *Prímula*	Número de pètals: 6 **No** segueix la successió de Fibonacci. Flor del Jardiland
 *Hibisc groc*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor de Colldejou
 *Melastoma lila*	Número de pètals: 5 **Sí** que segueix la successió de Fibonacci. Flor del Jardiland

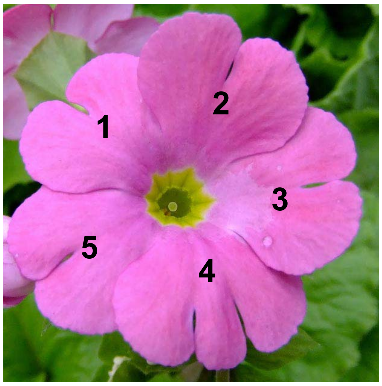
Tot seguit, m'agradaria comentar les conclusions que he pogut extreure d'aquest estudi sobre les flors i la successió de Fibonacci. Però, abans de tot, explicaré com he realitzat aquesta investigació i les diferents dificultats que he anat trobant pel camí.

En primer lloc, el que vaig fer va ser agafar la meva càmera, posar-me les botes de muntanya i sortir de casa per tal d'anar caminant per tot el terme de Colldejou a la recerca de flors. Pensava que no seria massa difícil trobar-ne unes quantes i per això, em vaig proposar triar-ne trenta per tal de fer un estudi més complert. Però, quan hi vaig ser pel mig, el que m'esperava des d'un principi no es va complir. Anava caminant i no trobava massa varietat de flors i vaig haver de buscar altres alternatives per poder acabar de completar aquest treball sense perdre els nervis. Cal dir, que he sortit a buscar flors en diferents temporades de l'any, és a dir, hi vaig anar a l'estiu, a la tardor i fins i tot a l'hivern; però, tot i així, tota l'estona trobava les mateixes espècies de flors. És per això, que vaig anar a un centre comercial de Reus anomenat "Jardiland" on, com el seu nom indica, venen coses relacionades amb el món de la jardineria. Allà vaig fer moltes de les fotos que podem veure a l'estudi anterior i, finalment, vaig poder completar la trentena de flors que volia aconseguir des d'un primer moment.

En segon lloc, una vegada passades totes les fotografies a l'ordinador, em vaig sorprendre molt, ja que me'n vaig adonar que hi havia flors que no seguien la successió de Fibonacci. A partir d'aquí, se'm van trencar tots els esquemes perquè en els llibres i en les diferents pàgines web que havia buscat, deien que totes les flors seguien aquesta successió; és a dir, que el nombre de pètals que té una flor sempre correspon a un nombre que hi ha a la successió de Fibonacci. Aleshores, vaig començar a pensar quin podia ser el motiu pel qual hi havia flors que sí que la seguien i n'hi havia que no. La resposta la vaig trobar quan vaig observar que, totes les que no seguien la successió de Fibonacci, eren de la mateixa família, concretament són la dels "Narcisos" i la dels "Liliums". Per assegurar-me'n del tot, també vaig buscar fotografies d'aquestes flors per Internet per veure si a totes els hi passava el mateix i, efectivament, era així. Aleshores ja tenia la solució: com en totes les coses d'aquest món, tot té una excepció i en aquest cas eren els "Narcisos" i els "Liliums".

Però, quan ja estava a punt d'acabar aquest estudi me'n vaig adonar que hi havia una altra família que no la seguia: la de les "Prímules". És per això que vaig fer el mateix que havia realitzat anteriorment: vaig buscar per Internet fotografies d'altres "Prímules", per tal de veure si a totes els hi passava el mateix; és a dir, que totes les flors tenien un nombre de pètals que no corresponia amb algun nombre de la successió de Fibonacci. I sorprenentment, les "Prímules" que hi havia per Internet sí que seguien aquesta successió. Aleshores, em vaig trencar el cap pensant què podia haver passat perquè, al mateix temps i en una mateixa família, hi haguessin flors que sí que la seguissin i d'altres que no.





Prímules extretes d'Internet que segueixen la successió de Fibonacci.

Finalment, vaig arribar a la conclusió que aquest resultat podia haver estat producte d'alguna manipulació per part dels floricultors que les comercialitzen. M'explico, podria ser que els diferents investigadors i bioquímics, haguessin fet variacions en les llavors de les flors per tal d'aconseguir més quantitat de pètals, o altres colors per simplement poder vendre flors més boniques. És a dir, la conclusió final a la qual he pogut arribar és que aquestes flors han estat manipulades per satisfer els interessos dels diferents centres comercials i, per tant, han sofert una mutació en el nombre de pètals aliena a la pròpia naturalesa.

Per acabar, m'agradaria dir que he trobat diferents textos que parlen sobre aquest tema i afirmen que les diferents companyies modifiquen genèticament les flors per els seus propis interessos. Per exemple, podem veure aquest fragment d'un text anomenat: "La biología y las plantas ornamentales."

Entre los mecanismos de mayor interés para la floricultura se encuentra la síntesis de los pigmentos que determinan los colores, aunque también son importantes (y también milenarios) otros usos de los pétalos, relacionados con su aroma y textura.

Biotecnología aplicada al desarrollo floral

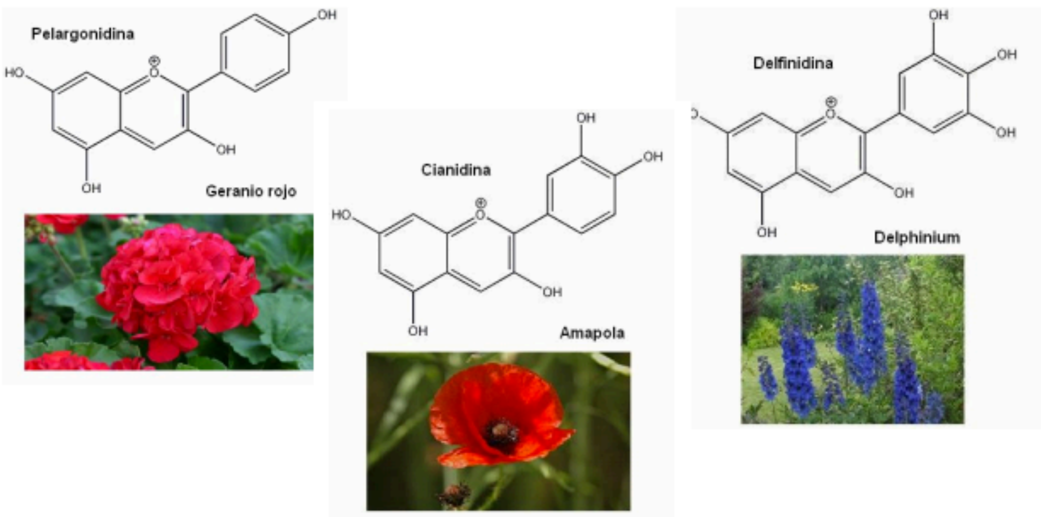
A continuación se describen algunas de las mejoras en floricultura obtenidas por ingeniería genética:

i) Cantidad de pétalos. Se conocen varios genes involucrados en el desarrollo de los pétalos (y de los otros ciclos florales). Esto se ha aprovechado para obtener por ingeniería genética flores con mayor cantidad de pétalos, como se muestra en la siguiente figura.

Petunia modificada por ingeniería genética para tener un número mayor de pétalos.

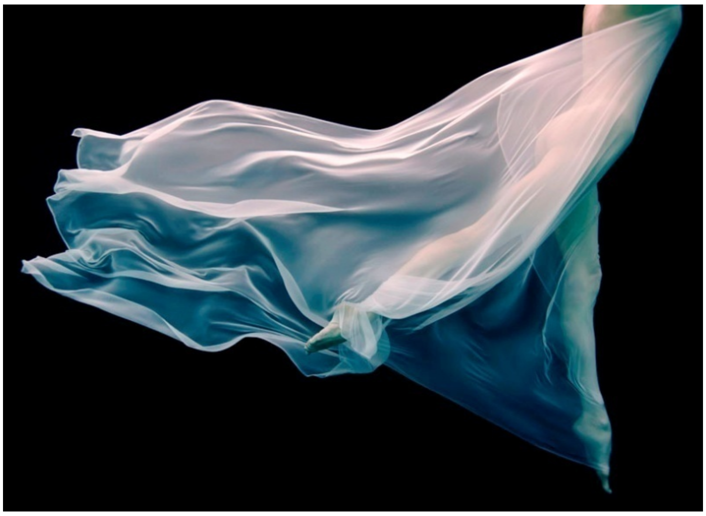
ii) Color de los pétalos. Un mismo color puede estar dado por distintos tipos de pigmentos, e incluso cambiar según las condiciones del entorno. El color de las flores se debe básicamente a tres tipos de pigmentos:

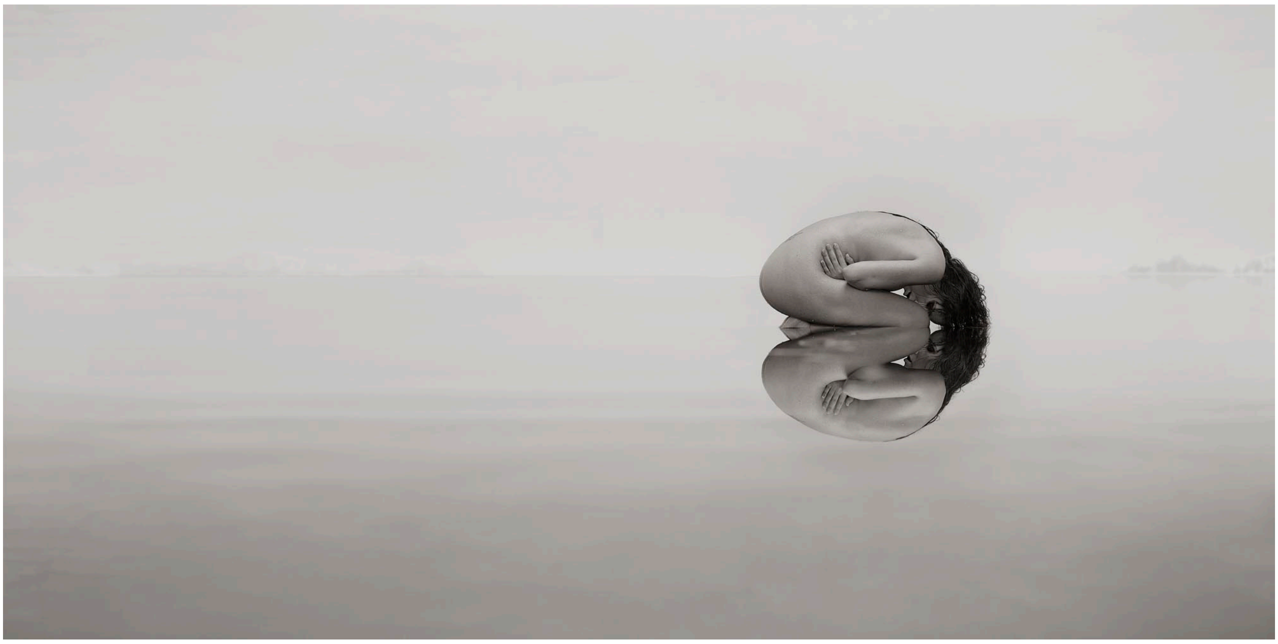
- los flavonoides, que son los pigmentos más comunes y contribuyen a un amplio rango de colores que va desde el amarillo hasta el rojo y el azul. Dentro del grupo de los flavonoides, los más importantes son las antocianinas, entre ellas la pelargonidina (color anaranjado), la cianidina (color rojo) y la delfinidina (color azul).
- los carotenoides, que contribuyen a formar los colores naranja/rojo, bronce y marrón, frecuentes en las rosas y crisantemos.
- las betalaínas, que son los pigmentos menos abundantes y contribuyen a las varias gamas de marfil, amarillo, naranja, rojo y violeta.



Estructuras de las principales antocianinas y sus colores respectivos. Adaptado de *"Biochemistry & Molecular Biology of Plants"*, Buchanan B, Gruissem W y Jones R. (Ed). American Society of Plant Biology Publisher, USA, 2000.

3.5.2 HI HA PROPORCIÓ ÀURIA EN EL COS HUMÀ?



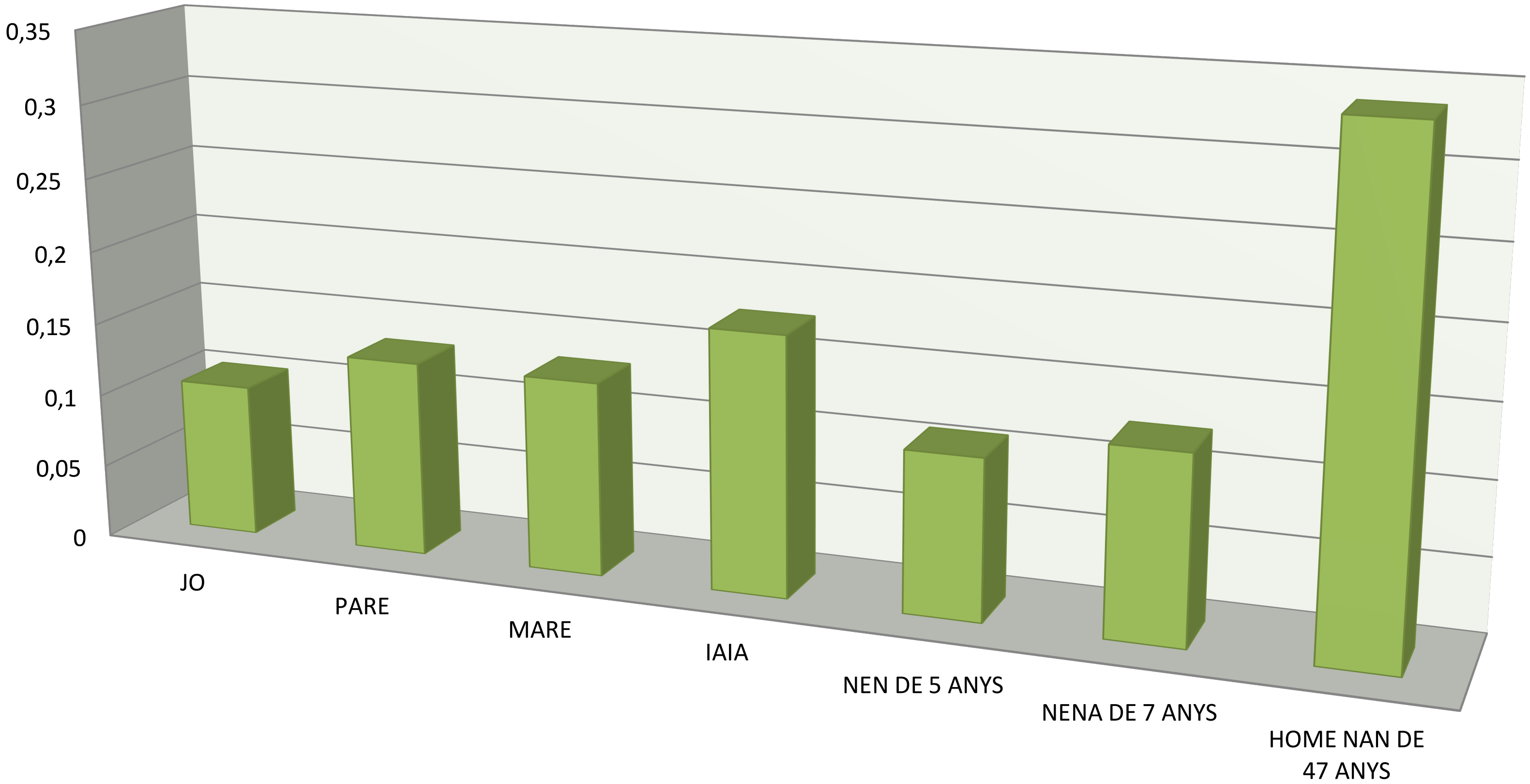


	JO	PARE	MARE	IAIA	NEN DE 5 ANYS	NENA DE 7 ANYS	HOME NAN DE 47 ANYS
Altura total	1,63	1,78	1,54	1,43	1,07	1,17	1,35
Altura fins al melic	1,00	1,05	0,93	0,84	0,64	0,70	0,713
Divisió	1,63	$1,6\widehat{95}$	$1,6\widehat{55}$	1,70	1,672	1,671	$1,8\widehat{93}$
Diferència amb ɸ	0,012	0,077	0,038	0,084	0,054	0,053	0,276
Llargada de la cara	0,22	0,24	0,20	0,20	0,14	0,18	0,234
Amplada de la cara	0,16	0,18	0,15	0,16	0,10	0,13	0,148
Divisió	1,375	$1,\hat{3}$	$1,\hat{3}$	1,25	1,4	$1,3\widehat{84}$	$1,5\widehat{84}$
Diferència amb ɸ	0,243	0,285	0,285	0,369	0,218	0,233	0,034
Distància des de l'espatlla fins als dits	0,68	0,80	0,67	0,65	0,44	0,50	0,476
Distància del colze fins als dits	0,41	0,48	0,40	0,38	0,26	0,30	0,240
Divisió	$1,6\widehat{58}$	$1,\hat{6}$	1,675	$1,7\widehat{10}$	$1,6\widehat{92}$	$1,\hat{6}$	1,98
Diferència amb ɸ	0,040	0,049	0,057	0,093	0,074	0,049	0,361

	JO	PARE	MARE	IAIA	NEN DE 5 ANYS	NENA DE 7 ANYS	HOME NAN DE 47 ANYS
Alçada fins al maluc	0,95	0,104	0,88	0,80	0,55	0,64	0,577
Alçada fins als genolls	0,50	0,55	0,45	0,42	0,31	0,36	0,277
Divisió	1,9	$1{,}8\widehat{90}$	$1{,}9\hat{5}$	$1{,}\widehat{951}$	$1{,}\widehat{774}$	$1{,}\hat{7}$	2,078
Diferència amb ϕ	0,282	0,273	0,295	0,333	0,156	0,159	0,460
Distància des del metacarp fins a la 1a falange	0,08	0,11	0,085	0,07	0,05	0,06	0,0573
Distància des de la 1a falange fins a la 2a	0,05	0,07	0,05	0,045	0,03	0,035	0,0260
Divisió	1,6	$1{,}\widehat{57}$	1,7	1,75	1,6	1,71	2,19
Diferència amb ϕ	0,018	0,047	0,082	0,062	0,048	0,096	0,581
Distància des de la 1a falange fins a la 2a	0,05	0,07	0,05	0,045	0,03	0,035	0,0260
Distància des de la 2a falange fins a la 3a	0,03	0,04	0,03	0,03	0,018	0,02	0,0208
Divisió	$1{,}\hat{6}$	1,75	$1{,}\hat{6}$	1,5	1,6	1,75	1,25
Diferència amb ϕ	0,048	0,131	0,048	0,118	0,048	0,131	0,367

	JO	PARE	MARE	IAIA	NEN DE 5 ANYS	NENA DE 7 ANYS	HOME NAN DE 47 ANYS
Distància del coll fins als genolls	0,97	1,03	0,94	0,86	0,57	0,66	0,799
Distància del melic fins als genolls	0,57	0,61	0,54	0,48	0,32	0,37	0,421
Divisió	$1,\widehat{70}2$	$1,\widehat{68}8$	$1,\widehat{74}0$	1,79	1,781	$1,\widehat{78}3$	$1,\widehat{89}7$
Diferència amb ϕ	0,084	0,070	0,122	0,174	0,163	0,165	0,279
Mitjana de totes les diferències amb ϕ	0,104	0,133	0,132	0,176	0,109	0,126	0,337

RESULTATS



Com més a prop estigui la barra verda del 0, més s'acosta la persona a la proporció àuria.

Després de veure aquest estudi sobre la proporció àuria en el cos humà, explicaré el procés que he seguit per trobar les mesures de cadascú, especialment en el cas de l'home nan.

En primer lloc, el que vaig fer va ser buscar la informació necessària per tal de poder comprovar si realment la proporció àuria està present en el cos humà. Per això, vaig llegir un llibre anomenat "*La proporción áurea:* El lenguaje matemático de la belleza" de Fernardo Corbalán, i també em van servir de molta ajuda diverses pàgines web que parlen sobre aquest tema. Així doncs, una vegada assabentada de les diferents relacions dins les proporcions del cos humà que s'apropaven o ajustaven al nombre d'or, vaig decidir fer l'estudi pràctic als meus pares, a la meva iaia i als meus nebots de cinc i set anys.

Com a resultat, preses les mides i fetes les corresponents divisions, vaig comprovar la diferència que tenien amb el nombre d'or o Phi (ϕ, φ). Aleshores, vaig veure que, tal com he explicat en diferents punts d'aquest treball, les persones seguíem amb força exactitud la proporció àuria ja que els resultats variaven mínimament respecte el nombre d'or.

En aquest punt del treball, de sobte, em vaig fer una pregunta: "- Les persones "especials", és a dir, les que tenen alguna deficiència o malaltia genètica, com ara el nanisme o el Síndrome de Down, també segueixen la proporció àuria?- ".

"Si tothom fóssim iguals, tot seria realment avorrit."

Aquesta qüestió em va semblar molt interessant per completar l'estudi, però, em va tenir uns quants dies capficada ja que al meu entorn més proper no hi ha cap persona amb aquestes característiques. A més a més, considero que aquest tema és una mica delicat i, fins i tot, podria arribar a ferir sensibilitats.

Dies més tard, em va arribar la inspiració quant estava mirant la famosa sèrie "Juego de Tronos", on un dels personatges principals és un home nan: ja tenia la solució! El repte llavors era aconseguir les seves mides. Aleshores, vaig recordar aquells temes de matemàtiques o tecnologia de l'ESO en què treballàvem escales i proporcions. És a dir, sabent l'alçada real de l'actor i amb diferents fotos on es veiés tot el seu cos, podia anar aconseguint totes les mesures.

El primer que vaig fer, va ser descarregar un programa on és pogués utilitzar una regla capaç de mesurar amb molta precisió, per tal d'obtenir uns resultats bastant propers als de la realitat. Després de buscar entre molts programes, em vaig decantar per utilitzar el "Photoshop", però tot i així, el procés va ser una mica complicat.

Aquest és Peter Dinklage, l'actor de la sèrie "Juego de Tronos" amb el qual he realitzat l'estudi prenent les seves mesures de fotos com aquestes on apareix tot el seu cos.

D'entrada, vaig mesurar l'alçada total que tenia l'actor a la foto, i seguidament vaig mesurar les parts que m'interessaven del seu cos. A continuació, com ja he dit anteriorment, vaig fer les proporcions entre les mesures reals de l'actor i les de les fotos. Per això, podem mirar les operacions que vaig fer per obtenir totes les mesures reals de l'actor:

ESCALES PETER DINKLAGE

ALTURA REAL: 1,35 m = 135 cm

ALTURA FOTOGRAFIA: Primer de tot, cal dir que he agafat diferents fotos ja que en algunes no es veien del tot bé certes mesures, com ara els metacarps, les falanges... En una fotografia fa 25 cm, en una altra 51,23 cm, en una altra 13,04 cm i en l'última 7,77 cm.

- ALTURA TOTAL

- ALTURA FINS AL MELIC:

$$\frac{25 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{13{,}20 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 13{,}20}{25} = \boxed{\textbf{71,28 cm reals}}$$

- DIVISIÓ:

$$\frac{\text{Altura total}}{\text{Altura fins al melic}} = \frac{135}{71{,}28} = \boxed{\mathbf{1{,}\widehat{893}}}$$

Diferència amb φ: 0,276

- LLARGADA DE LA CARA :

$$\frac{25 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{4{,}34 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 4{,}34}{25} = \boxed{\textbf{23,436 cm reals}}$$

- AMPLADA DE LA CARA:

$$\frac{25 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{2{,}74 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 2{,}74}{25} = \boxed{\textbf{14,796 cm reals}}$$

DIVISIÓ:

$$\frac{\text{Llargada de la cara}}{\text{Amplada de la cara}} = \frac{23{,}436}{14{,}796} = \boxed{\mathbf{1{,}\widehat{584}}}$$

Diferència amb φ: 0,034

- ESPATLLA FINS ALS DITS:

$$\frac{51{,}23 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{18{,}05 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 18{,}05}{51{,}23} = \boxed{\mathbf{47{,}56 \text{ cm reals}}}$$

- COLZE FINS ALS DITS:

$$\frac{51{,}23 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{9{,}12 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 9{,}12}{51{,}23} = \boxed{\mathbf{24{,}03 \text{ cm reals}}}$$

DIVISIÓ:

$$\frac{\text{Espatlla fins dits}}{\text{Colze fins dits}} = \frac{47{,}56}{24{,}03} = \boxed{\mathbf{1{,}98}}$$

Diferència amb φ: 0,361

- ALÇADA FINS AL MALUC:

$$\frac{13{,}\ 04 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{5{,}57 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 5{,}57}{13{,}04} = \boxed{\mathbf{57{,}665 \text{ cm reals}}}$$

- ALÇADA FINS ALS GENOLLS:

$$\frac{13{,}\ 04 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{2{,}68 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 2{,}68}{13{,}04} = \boxed{\mathbf{27{,}\ 7\widehat{454} \text{ cm reals}}}$$

DIVISIÓ:

$$\frac{\text{Alçada fins al maluc}}{\text{Alçada fins als genolls}} = \frac{57{,}665}{27{,}7\widehat{454}} = \boxed{\mathbf{2{,}078}}$$

Diferència amb φ: 0,46032

- DISTÀNCIA DEL COLL FINS ALS GENOLLS:

$$\frac{25 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{14{,}80 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 14{,}80}{25} = \boxed{\textbf{79,92 cm reals}}$$

- DISTÀNCIA DEL MELIC FINS ALS GENOLLS:

$$\frac{25 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{7{,}80 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 7{,}80}{25} = \boxed{\textbf{42,12 cm reals}}$$

DIVISIÓ:

$$\frac{\text{Coll - genolls}}{\text{Melic - genolls}} = \frac{79{,}92}{42{,}12} = \boxed{\mathbf{1{,}8\widehat{97}}}$$

Diferència amb φ: 0,279

- METACARP – 1a FALANGE:

$$\frac{7{,}77 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{0{,}33 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 0{,}33}{7{,}77} = \boxed{\mathbf{5{,}7\widehat{33}} \textbf{ cm reals}}$$

- 1a FALANGE – 2a FALANGE:

$$\frac{7{,}77 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{0{,}15 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 0{,}15}{7{,}77} = \boxed{\mathbf{2{,}6\widehat{06}} \textbf{ cm reals}}$$

DIVISIÓ:

$$\frac{\text{Metacarp – 1a falange}}{\text{1a falange – 2a falange}} = \frac{5{,}7\widehat{33}}{2{,}6\widehat{06}} = \boxed{\mathbf{2{,}19}}$$

Diferència amb φ: 0,581

- 1a FALANGE – 2a FALANGE:

$$\frac{7{,}77 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{0{,}15 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 0{,}15}{7{,}77} = \boxed{\mathbf{2{,}\widehat{606}\ cm\ reals}}$$

- 2a FALANGE – 3a FALANGE:

$$\frac{7{,}77 \text{ cm foto}}{135 \text{ cm real}} = \frac{0{,}12 \text{ cm foto}}{x} \qquad X = \frac{135 \cdot 0{,}12}{7{,}77} = \boxed{\mathbf{2{,}0\widehat{84}\ cm\ reals}}$$

DIVISIÓ:

$$\frac{\text{1a falange – 2a falange}}{\text{2a falange – 3a falange}} = \frac{2{,}\widehat{606}}{2{,}0\widehat{84}} = \boxed{\mathbf{1,\ 25}}$$

Diferència amb φ: 0,367

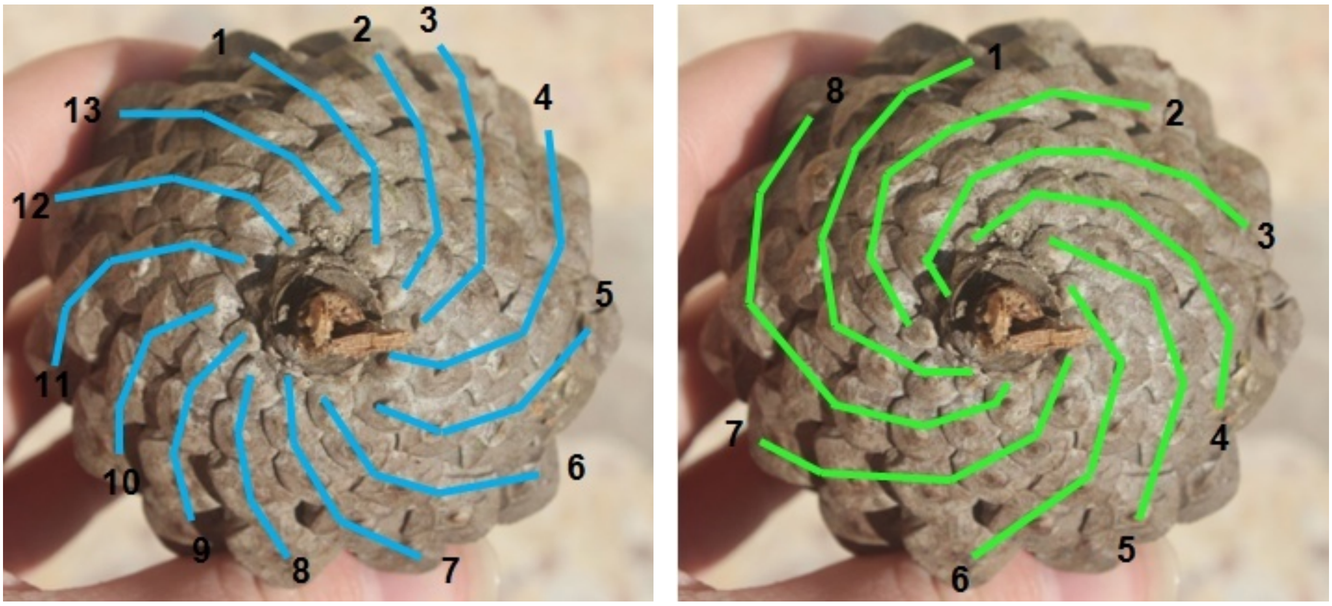
Finalment, m'agradaria comentar les conclusions que he tret d'aquesta investigació ja que m'han deixat bocabadada. Quan em vaig plantejar aquest estudi, m'imaginava obtenir uns resultats que no variarien molt respecte el nombre d'or, per exemple, només 0,7 o 0,6 en el millor dels casos. Ara bé, el que no podia arribar a imaginar mai és que sortirien unes diferències tant mínimes respecte a Phi, on fins i tot a vegades només varien 0,020. Tot i així, crec que és molt important dir que probablement hi ha petits errors ja sigui a l'hora d'agafar les mides o bé del propi instrument de mesura. Com és evident, és quasi impossible agafar les mides de tothom al mateix punt del cos i malauradament, en aquest estudi, un centímetre de més o de menys t'ho pot fer canviar tot.

Per altra banda, quan vaig decidir realitzar l'estudi amb l'home nan pensava que aquest no seguiria de cap manera la proporció àuria, ja que el seu cos té una deficiència física i això també afectaria a les seves proporcions. Però, un cop més l'anatomia humana i la ciència em van guanyar la jugada.

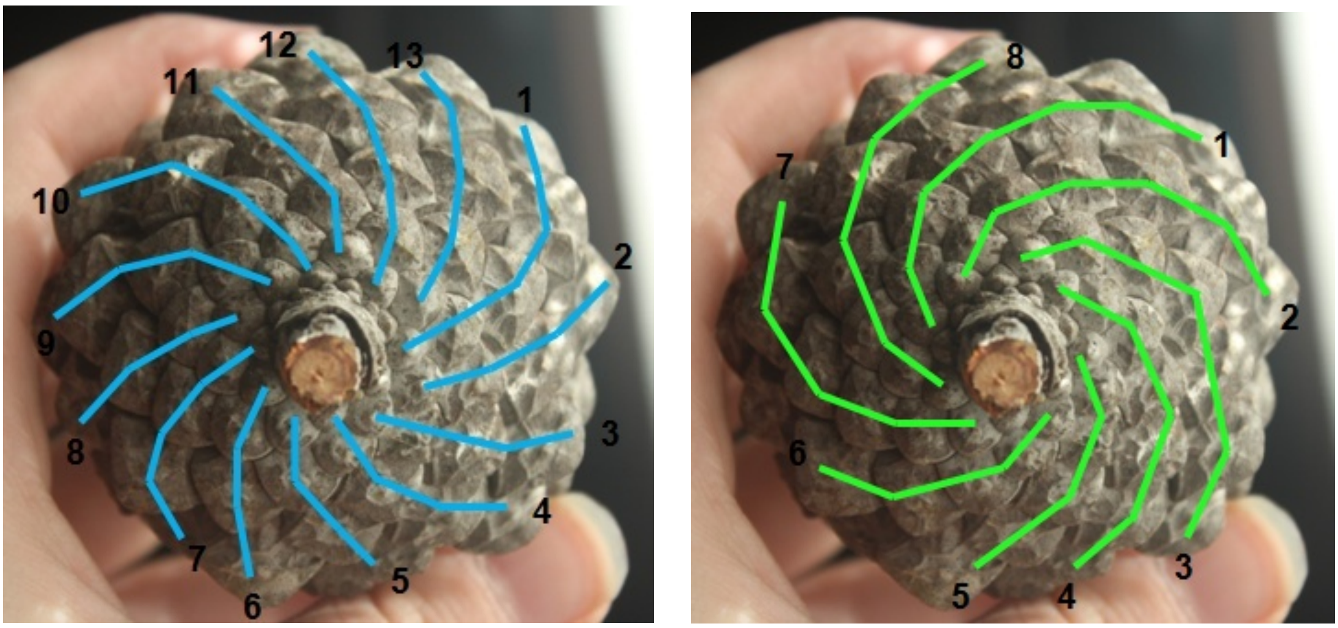
És per això, que aquests resultats em fan pensar que les persones, sense adonar-nos-en, creixem i evolucionem seguint la proporció àuria. Realment, pot ser fins i tot estrany pensar que el cos humà es desenvolupa seguint aquesta proporció, però de fet, com bé diu aquella famosa frase: *" La naturalesa és sabia i nosaltres tot just comencem a entendre-la."*

"La Terra no ens pertany, nosaltres pertanyem a la Terra."

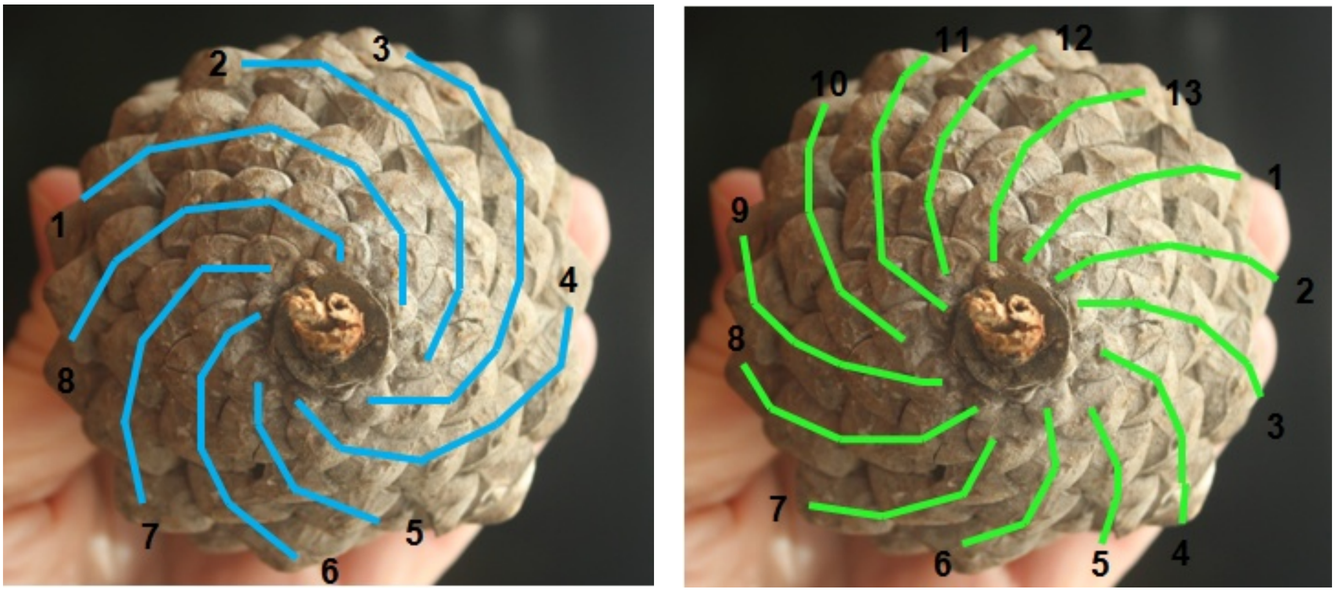
3.5.3 LES PINYES SEGUEIXEN LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI?



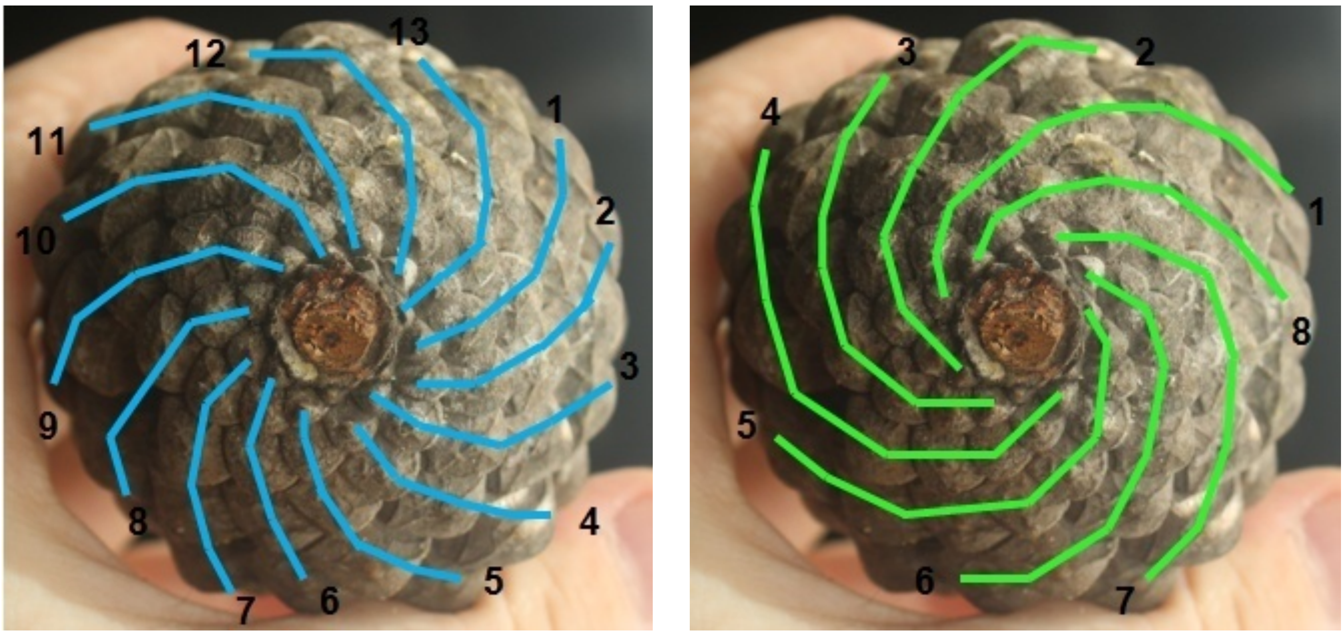
PINYA 1



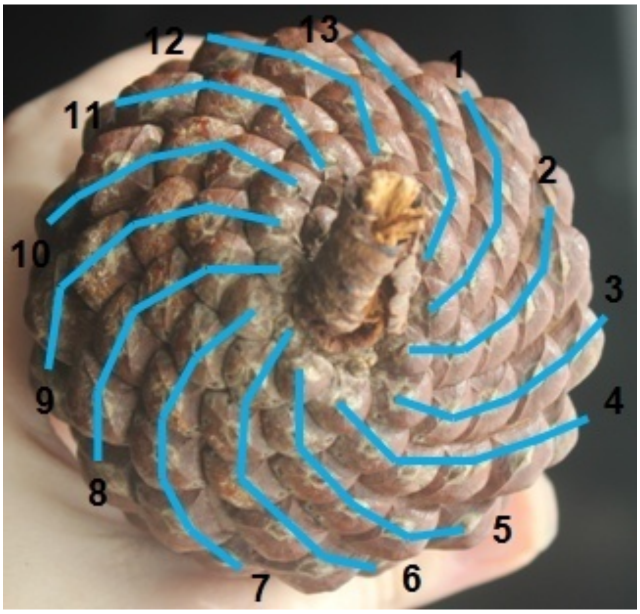
PINYA 2

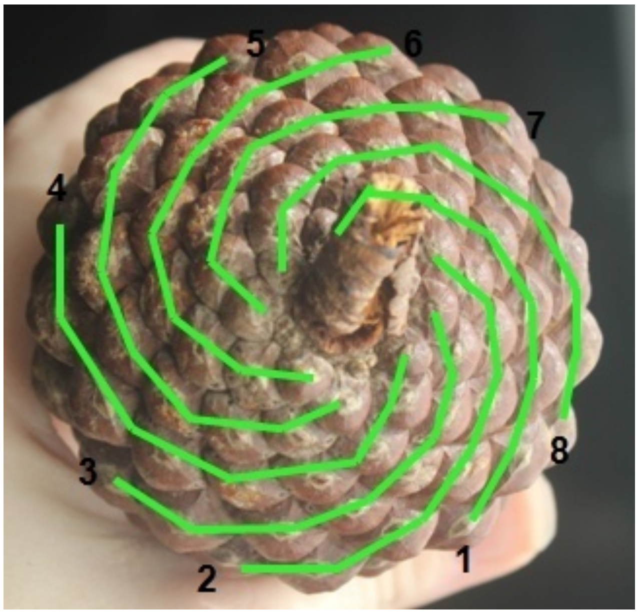


PINYA 3

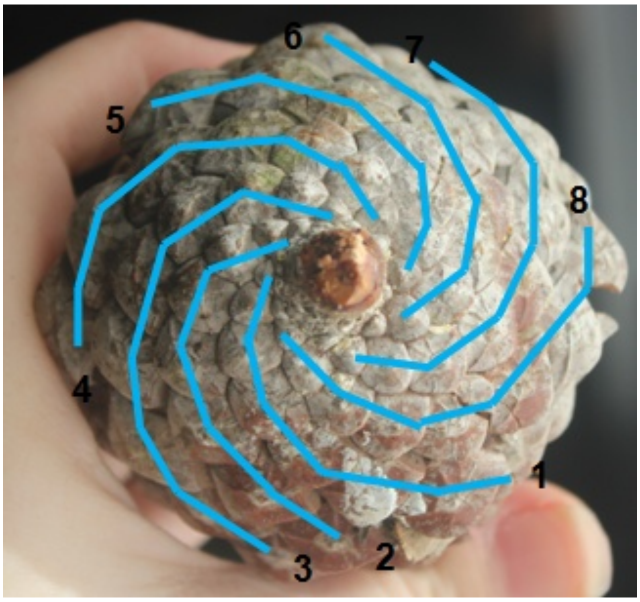


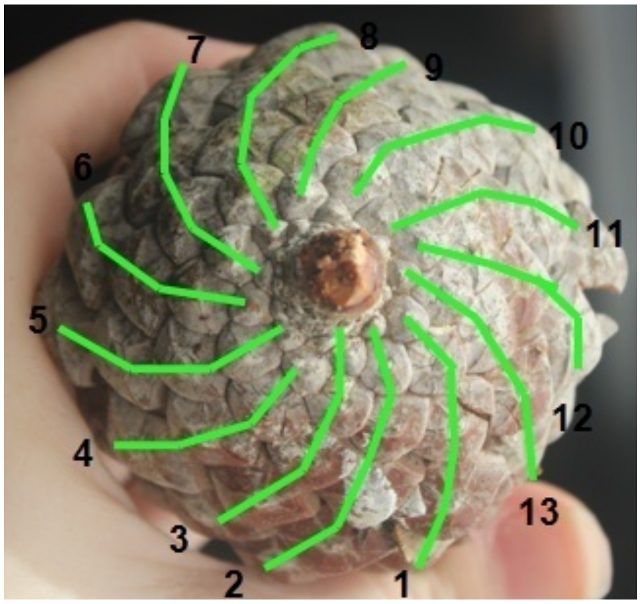
PINYA 4



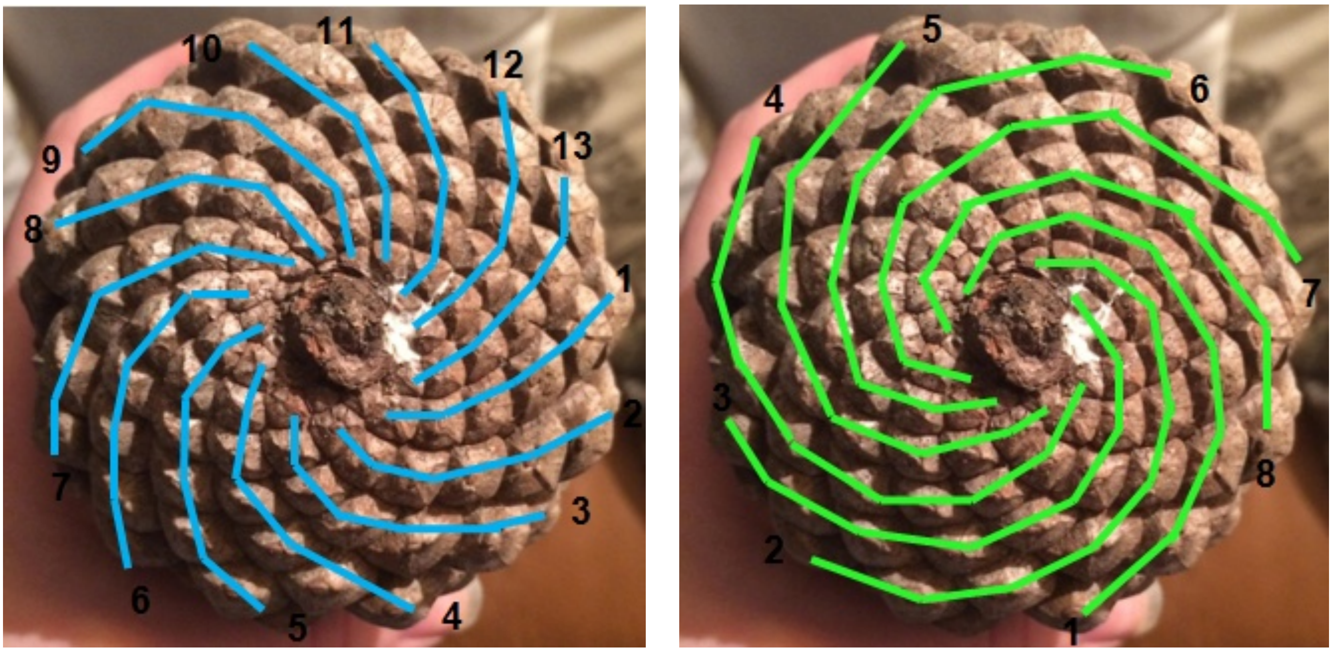


PINYA 5

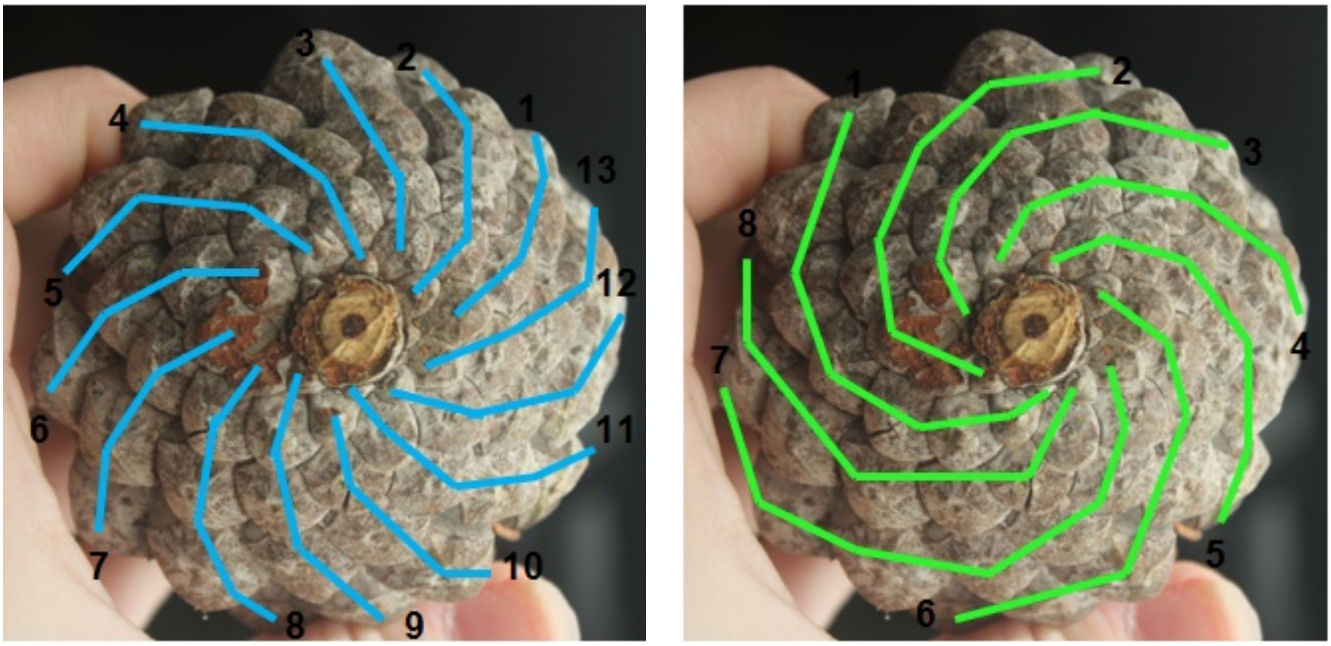




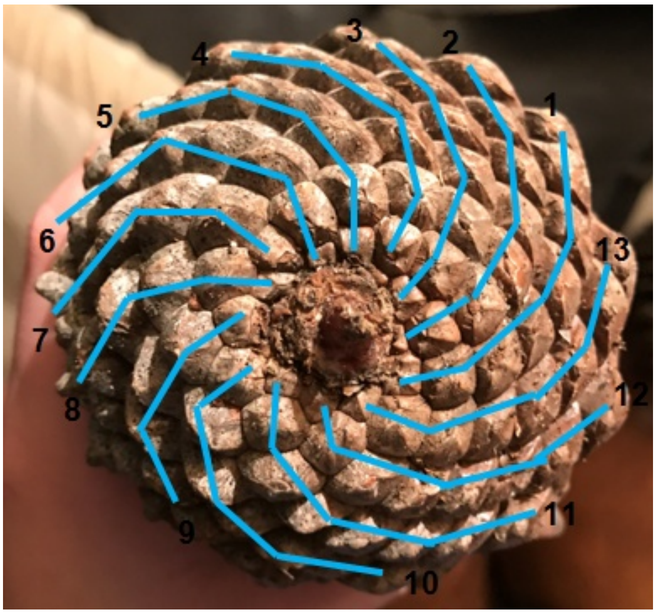
PINYA 6

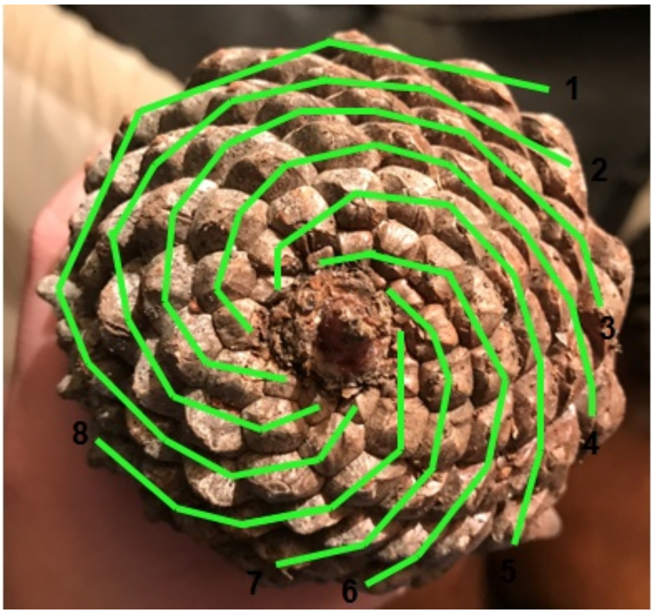


PINYA 7

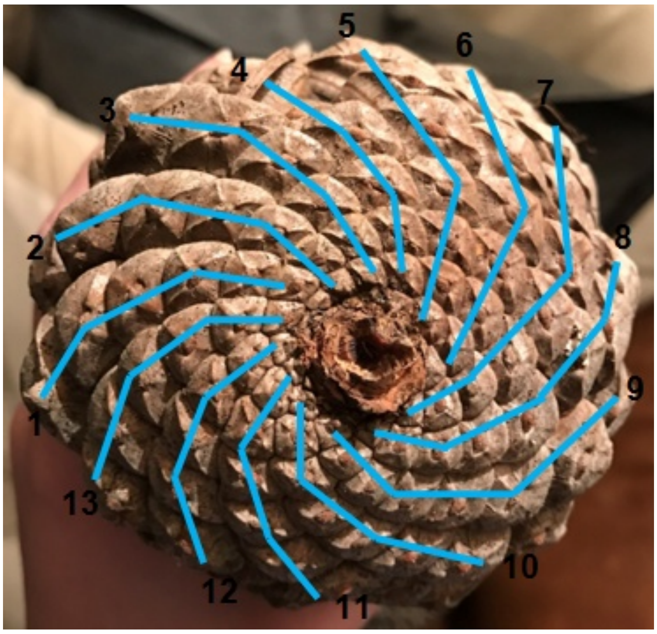


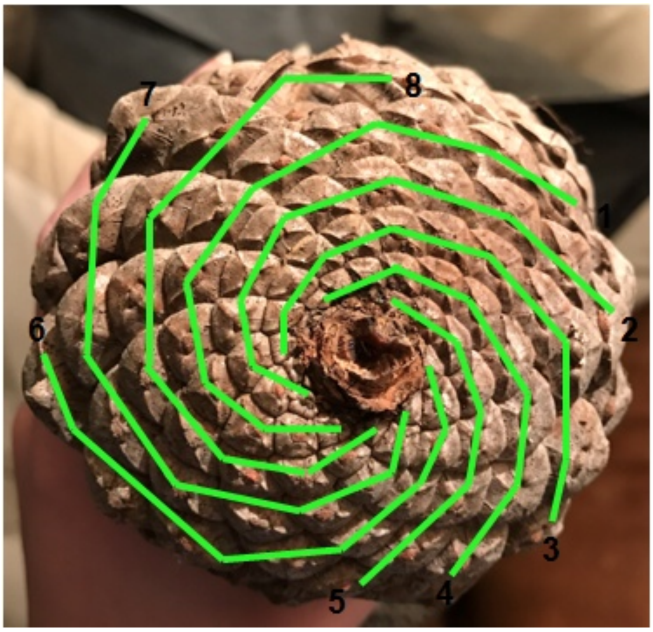
PINYA 8





PINYA 9





PINYA 10

Finalitzat l'últim estudi d'aquest treball de recerca sobre les pinyes i la successió de Fibonacci, passo a comentar el procediment que he seguit i les conclusions que n'he extret.

En primer lloc, el que vaig fer va ser agafar vint pinyes de Colldejou i fotografiar-les una per una de manera que es poguessin observar amb claredat totes les seves espirals. Un cop fetes totes les fotografies, les vaig passar al meu ordinador i vaig començar a pensar com podia fer-ho per indicar totes les espirals d'una pinya per banda i banda, és a dir, les que segueixen el sentit de les agulles del rellotge i les que no. Després de molt pensar, vaig decidir que ho havia de fer en dos fotografies separades ja que sinó quedava tot molt atapeït i no es podia entendre bé. I aquí és on va començar una de les parts d'aquest treball de recerca que m'han portat més maldecaps. En un primer moment, volia fer les línies per marcar les espirals amb algun programa capaç de dibuixar arcs o corbes, però, un cop en vaig trobar un, no es veia del tot clar i per això vaig decidir fer-ho d'una altra manera. Aleshores, vaig anar dibuixant diferents segments petits i els vaig anar unint un per un fins a completar tota una espiral. Així ho vaig anar repetint successivament fins que vaig completar tots dos sentits. Em vaig sorprendre molt ja que, en totes les pinyes, obtenia els mateixos resultats: 8 espirals per un sentit i 13 per l'altre.

És per això, que a mesura que anava contant totes les espirals de cada pinya, me'n vaig adonar que fer vint pinyes era molta feina i, com que tota l'estona hem donaven els mateixos resultats, vaig decidir fer-ne només deu. A banda, vaig contar a mà les espirals de les altres pinyes i també n'hi havia 8 i 13 respectivament.

Un cop explicat el procediment que he anat seguint per fer aquest estudi, explicaré les conclusions que he pogut extreure. Des d'un principi, quan vaig llegir el llibre "*La proporción áurea*" de Fernando Corbalán i, a més, em vaig informar per diferents pàgines web, em va semblar molt interessant el fet que totes les pinyes poguessin seguir una successió matemàtica. És per això, que vaig voler realitzar aquest estudi i un cop finalitzat, he pogut comprovar que, efectivament, totes les pinyes segueixen aquesta meravellosa successió.

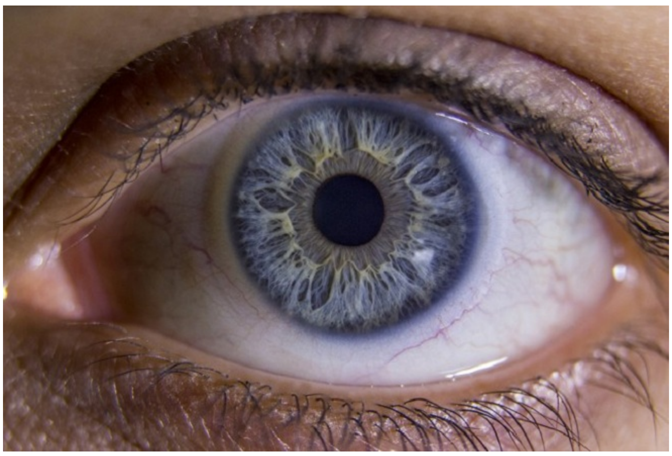
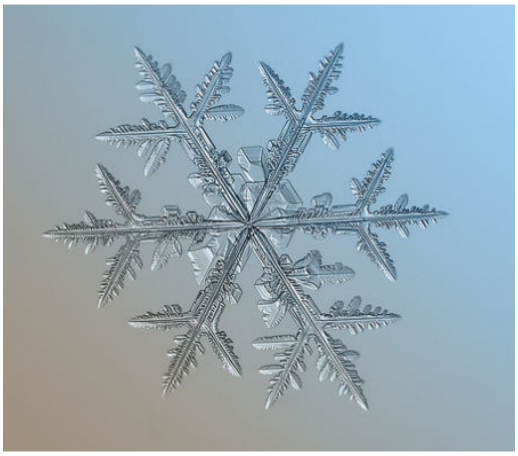
I que vol dir això? Com he dit anteriorment, en cada pinya hi ha dos sentits de les espirals, l'horari i l'antihorari; aleshores, si contem totes les espirals que hi ha cap a un sentit i cap a l'altre obtindrem dos nombres que són dins de la successió de Fibonacci. Però, a més a més, aquests dos nombres sempre són nombres correlatius en la successió, és a dir, que sempre es troben un darrere de l'altre.

Com que les pinyes que vaig utilitzar per realitzar la investigació eren totes recollides del bosc del terme de Colldejou, he buscat per Internet si les pinyes que hi apareixen també tenen 8 i 13 espirals respectivament, i efectivament, a totes les pinyes els hi passa el mateix.

Finalment, la conclusió principal que he pogut obtenir d'aquest estudi és que totes les pinyes, per alguna raó de la vida, segueixen l'anomenada successió de Fibonacci. Un cop arribat a aquest punt del treball, em pregunto com és que aquest fenomen es produeix. És a dir, em costa molt d'entendre com la naturalesa i les matemàtiques d'alguna manera o altre estan lligades, com és que les pinyes tinguin 8 i 13 espirals sempre i no 9 i 13 o alguna altra combinació. És una qüestió que em fascina molt i, malauradament, no es pot saber el perquè d'aquest fet; però, el que sí que és veritat és que la vida no deixa de sorprendre'ns mai.

4. LES FRACTALS



4.1 INTRODUCCIÓ A LES FRACTALS

" Els núvols no són esferes, les muntanyes no són cons, les costes no són cercles i les escorces d'un arbre no són llises, ni els llamps viatgen en una línia recta."

Benoît Mandelbrot (1924 - 2010)

Aquesta frase, que a primer cop de vista pot semblar que l'hagi dit una professora de pàrvuls per ensenyar les formes dels objectes als nens petits; és la base fonamental per introduir un concepte complicat d'explicar i d'entendre, fins i tot per als grans matemàtics i científics d'avui en dia: les fractals.

El concepte de fractal és relativament nou en la ciència, ja que va aparèixer tot just fa 42 anys, és a dir, és va descobrir l'any 1975 amb la publicació del llibre *"Els objectes fractals: forma atzar i dimensió"* del francès polac Benoît Mandelbrot.

Abans de tot, m'agradaria dir que aquest tema és bastant complicat de comprendre ja que, per començar, no es treballa amb la dimensió clàssica, és a dir, la plana. Per tant, no utilitzarem la dimensió que tothom coneix anomenada topològica o Euclidiana (ve d'Euclides), utilitzarem la dimensió fractal.

I què és una fractal? Per començar a introduir aquest tema, podem dir que una fractal és un objecte el qual té una estructura que es repeteix a diferents escales. És a dir, per molt que ens acostem o ens allunyem de l'objecte, observarem sempre la mateixa estructura. Difícil d'entendre, oi? Doncs bé, en el següent punt intentarem si més no, comprendre aquesta qüestió, al menys, intentar explicar-la.

Benoît Mandelbrot, matemàtic que va descobrir el concepte de fractal.

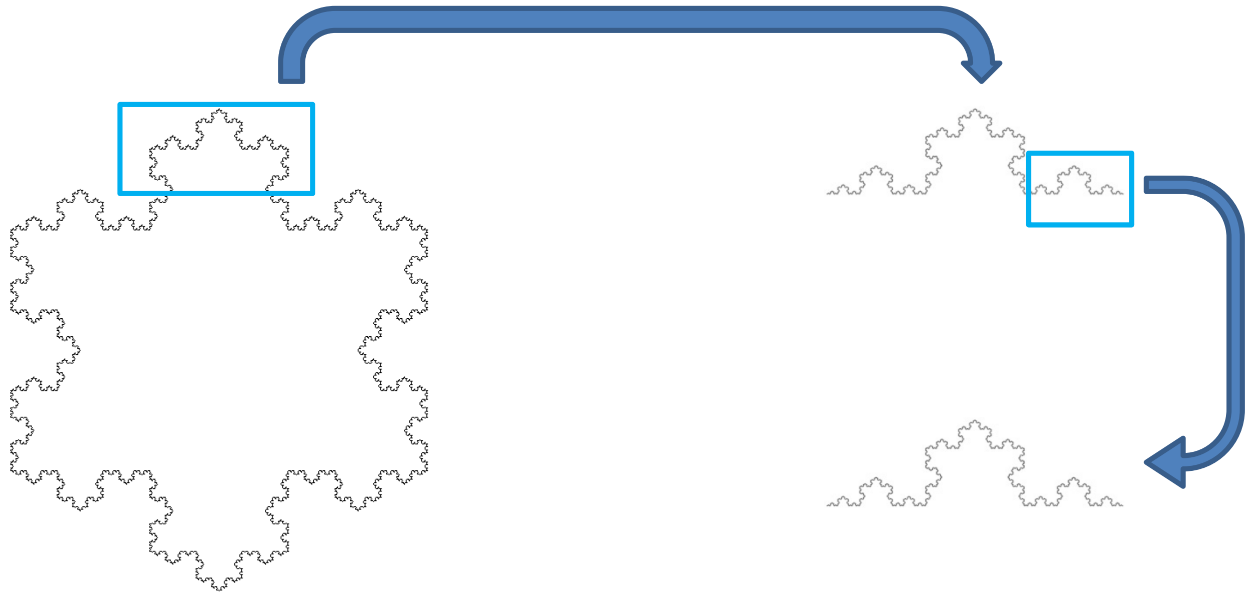
4.2 EXPLICACIÓ DE LES FRACTALS

Com hem dit anteriorment, les fractals són un conjunt d'objectes geomètrics l'estructura de la qual es repeteix a diferents escales. De fet, som incapaços d'afirmar a quina distància ens trobem d'un objecte, ja que sempre el veiem de la mateixa forma. La manera de representar fractals és amb dimensions fraccionaries, és a dir, que les fractals no són ni lineals, ni planes, ni volumètriques. Com per exemple, si un pla representa dos dimensions, un fractal pot representar 2,3 dimensions.

Les fractals no tenen una dimensió entera com les figures geomètriques conegudes per tothom, sinó que tenen un nombre entremig, és a dir, un nombre decimal.

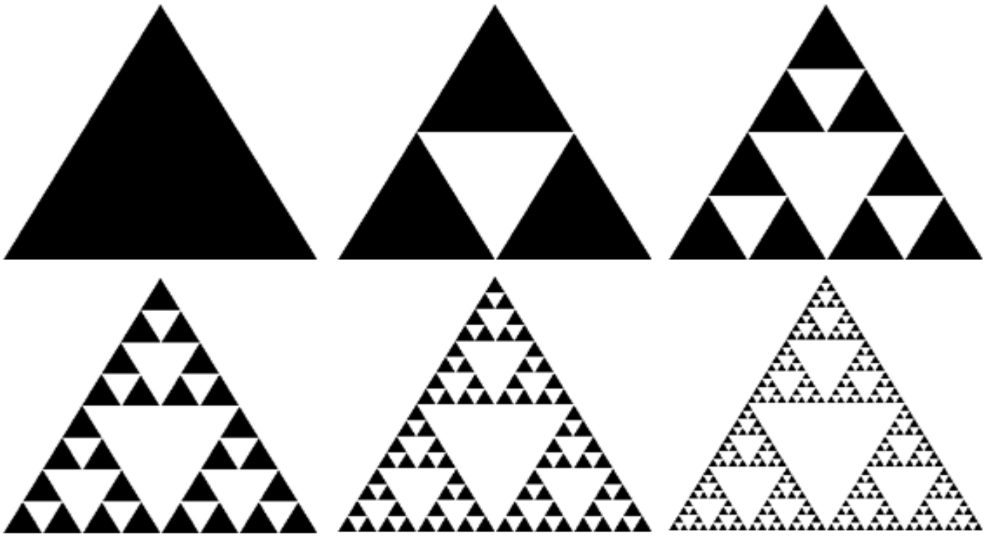
Primer de tot, anem a explicar algunes de les característiques que tenen les fractals:

- **AUTOSIMILITUD:** Aquesta propietat vol dir que si agafem una part de la fractal i la mirem amb una escala més gran, sembla que tingui igual forma que la fractal inicial. És a dir, no distingim el canvi d'escala. Això, en algunes fractals és molt fàcil de veure, però no en tots. Per exemple:



Fractal anomenada "Floc de neu de Koch", on és pot veure clarament que cada vegada es va repetint la mateixa forma.

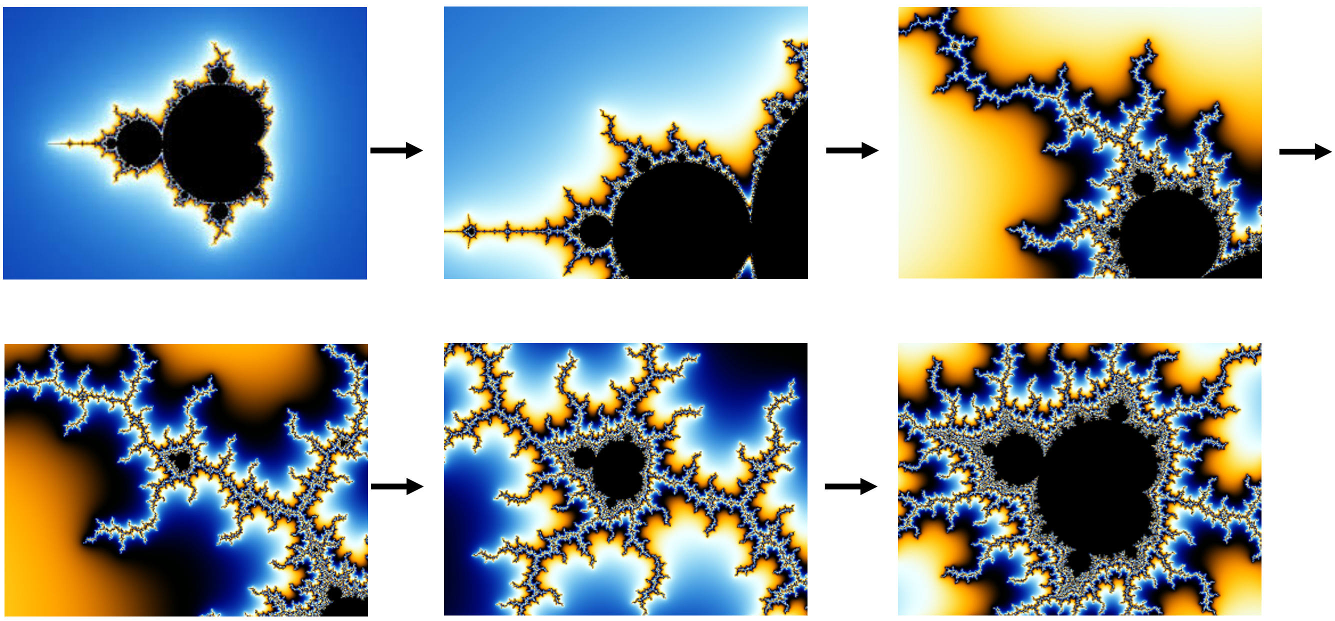
Una altra fractal molt coneguda on es pot observar aquesta característica és en l'anomenat " Triangle de Sierpinski ":



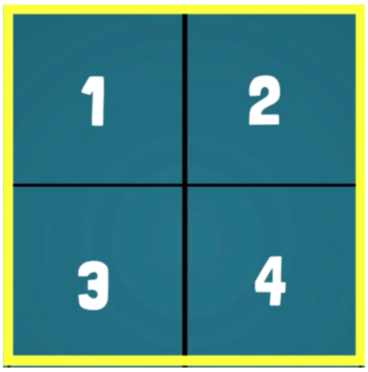
Veient aquest dibuix, es veu clarament el patró que segueix cada nou triangle:

1- A partir d'un triangle, s'uneixen els punts mitjans dels seus costats, dividint el triangle inicial en quatre triangles.
2- A continuació, s'elimina el triangle interior.
3- En cada un dels tres triangles que queden es procedeixen a fer el pas 1.

Altres fractals, no són exactament auto similars però s'assemblen molt, com " El conjunt de Mandelbrot ".

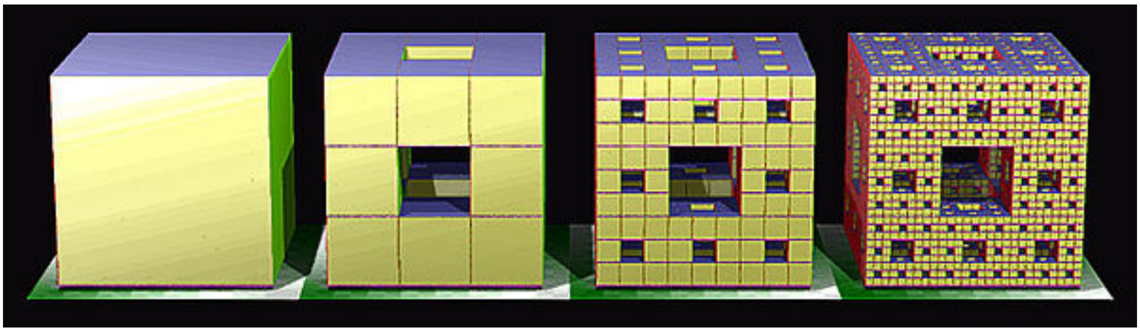


- **<u>DIMENSIÓ FRACTAL > DIMENSIÓ TOPOLÓGICA:</u>** Partim de la base que la dimensió topològica és la de tota la vida, és a dir, una línia té dimensió 1, un quadrat dimensió 2, l'esfera 3... Però en canvi, la dimensió fractal no és exactament així. Per exemple, si dibuixem un quadrat en la dimensió clàssica, podem veure que hi caben 4 quadrats; doncs en la dimensió fractal no és així. Per saber quants quadrats hi cabrien a dins, hauríem de fer divisions de logaritmes que tenen un nivell de complexitat bastant elevat i tampoc hi entrarem.



Nombre de quadrats que caben en un quadrat en la dimensió topològica.

- **<u>FORMACIÓ PER ITERACIÓ:</u>** Com hem vist anteriorment, les fractals s'obtenen mitjançant un procés repetitiu que consisteix en l'aplicació repetitiva d'una o varies transformacions geomètriques o aplicant alguns algoritmes. És a dir, bàsicament els fractals és formen gràcies a una repetició de diferents patrons.



Esponja de Menger formada a partir de repeticions de diferents patrons

4.3 ON TROBEM LES FRACTALS?

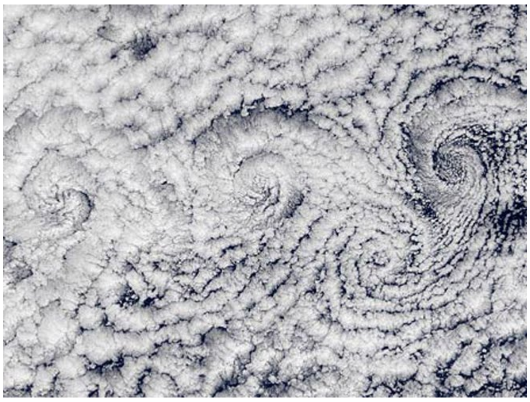
Com passa amb la proporció àuria i amb la successió de Fibonacci, les fractals també es poden trobar en la naturalesa. És fascinant pensar les relacions que hi ha entre aquests conceptes matemàtics i la pròpia natura. Anem a veure uns quants exemples:

Bròquil romanesco

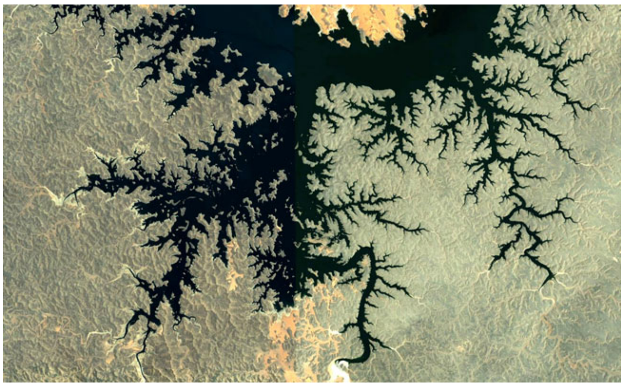
Les plomes del paó real també estan formades per fractals.

Falguera

Llamps en una tempesta

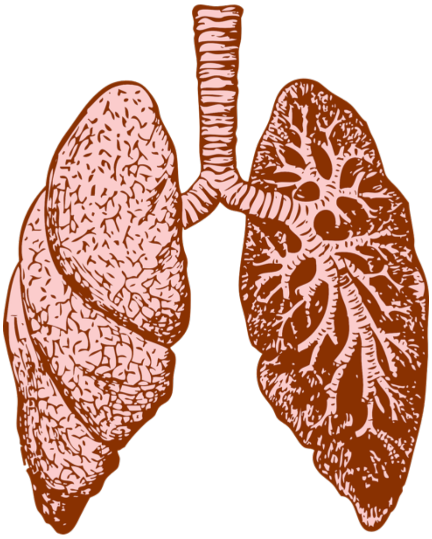


Fins i tot, de vegades, als núvols també hi ha fractals

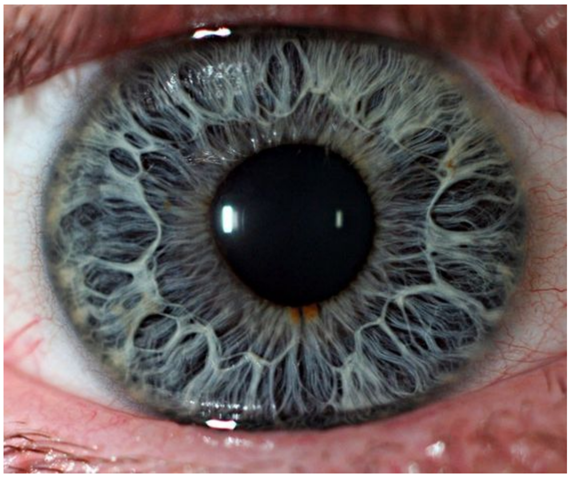


Fotografia feta des de l'espai del Llac Nàsser format per l'aigua del riu Nil a Egipte

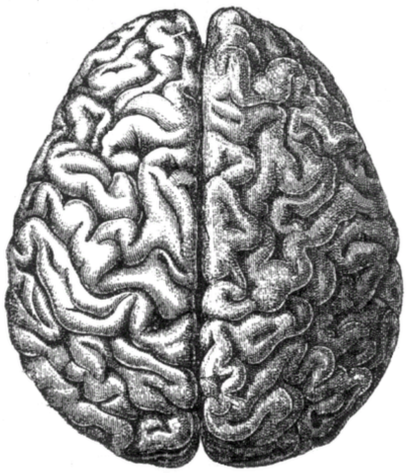
Fins i tot, podem trobar fractals en el nostre propi cos:



En les ramificacions dels pulmons



Ull humà



En el nostre propi cervell

Efectivament, hi ha molts més exemples d'on trobar fractals, però en aquest punt he preferit posar les que m'han semblat més interessants i atractives visualment.

5. CONCLUSIONS FINALS

“ Les matemàtiques són l’alfabet amb el qual Déu ha escrit l’Univers.”

Galileo Galilei (1564 – 1642)

Aquesta frase defineix perfectament el que hem pogut veure al llarg d’aquest treball. Les matemàtiques en el món són com els plànols d’una casa, o també es podrien comparar amb tot el conjunt de neurones i connexions que tenim dins el nostre cervell. Són la base de totes les coses i, sense elles, el món no seria igual o potser ni nosaltres existiríem. Aquesta és una de les principals conclusions que he extret d’aquest treball de recerca.

Però, abans d’acabar-lo, m’agradaria comentar la meva opinió sobre tot el que hem pogut veure i, a més a més, també explicaré els diferents problemes que he anat trobant pel camí.

En primer lloc, he de dir que en un principi no tenia massa clar que el tema que vaig escollir fos l’encertat, però a mesura que he anat descobrint coses tan sorprenents com la proporció àuria, la successió de Fibonacci o les fractals, he vist que la meva idea inicial estava equivocada. A banda d’entendre amb més claredat aquests conceptes, el treball de recerca també m’ha ajudat per tenir una altra idea sobre les matemàtiques, una idea que m’ha servit per entendre com les matemàtiques no són uns simples nombres, sinó que estan molt més presents en el nostre dia a dia del que ens pensem.

En segon lloc, també m’agradaria comentar que aquest treball de recerca m’ha sacsejat, creant un caos ordenat dins el meu cap. Encara que sembli que aquesta expressió és incorrecta o exagerada, defineix al 100% la relació que he tingut amb el meu TDR ja que tenia moments complicats però, alhora, em servien per tirar endavant amb més força i amb totes les idees molt més estructurades.

Un dels principals problemes que he tingut, ha estat que la majoria d'informació que he anat trobant per Internet, s'havia d'agafar amb pinces ja que en molts casos s'interpreten els conceptes malament. Com que hi ha alguns termes, com les fractals, que són més complexos, la gent no ho acaba d'entendre del tot bé i posen informació completament diferent a la realitat.

Inicialment, em vaig plantejar una sèrie d'hipòtesis que he pogut anar responent al llarg d'aquest treball ja que, per exemple, he comprovat que totes les persones tenim unes proporcions en el nostre cos que corresponen al nombre d'or, fins i tot les d'un home nan. He vist que, excepte algunes famílies de flors, totes segueixen la successió de Fibonacci, a no ser que siguin manipulades genèticament. A més a més, he pogut veure que totes les pinyes també segueixen l'anomenada successió en les seves espirals i, finalment, he descobert que les fractals estan en llocs molt més comuns del que nosaltres ens pensem.

D'altra banda, també vull afegir que en aquest treball de recerca he intentat explicar els diferents conceptes amb molta claredat, amb un llenguatge apte per a tots els públics, cosa que no sempre ha sigut fàcil.

Ara bé, una de les coses que m'he quedat amb les ganes de saber és el perquè de tots aquests fenòmens. Per què els humans creixem seguint la proporció àuria? Per què quasi totes les flors segueixen la successió de Fibonacci? Com és que un simple floc de neu es crea a partir de fractals?

Malauradament, totes aquestes preguntes no poden ser respostes per ningú. Ja sigui per una raó o per una altra, el món s'ha creat d'aquesta manera i, de moment, els científics no saben perquè la naturalesa segueix aquests patrons.

És per això, que un cop he acabat aquest treball, em quedo amb una mica de rau-rau, però, alhora estic molt contenta ja que, com he dit anteriorment, m'ha servit per aprendre moltes peculiaritats de la naturalesa que no sabia ni que existien.

6. BIBLIOGRAFIA I WEBGRAFIA

Aquestes són les diferents pàgines web que he fet servir en el meu treball de recerca. N'hi ha algunes que estan en anglès ja que hi ha més informació que en català o en castellà.

- http://themindunleashed.com/2014/10/30-beautiful-photographs-fractals-nature.html
- http://fractalfoundation.org/OFC/OFC-1-2.html
- https://www.hijos-del-atomo.com/miscelanea/la-sucesion-de-fibonacci-y-el-numero-aureo/
- http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/phi-en-el-cuerpo-humano
- http://laproporcionperfecta.blogspot.com.es/2011/06/numero-de-oro.html
- http://frasesdedios.blogspot.com.es/2015/01/el-orden-en-la-naturaleza-no-es.html
- https://elnombreauri.jimdo.com/geometria/el-rectangle-auri/
- http://navegandoentrenumeros.blogspot.com.es/2011/03/proporcion-aurea-y-belleza.html
- http://www.elconfidencial.com/tecnologia/2014-10-14/treinta-cosas-que-no-sabias-sobre-el-numero-aureo_231903/
- https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo
- https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
- https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci
- https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_sequence
- http://www.abc.es/ciencia/20130413/abci-relampagos-fractales-201304121429.html
- https://hipertextual.com/2015/08/numero-de-oro
- http://www.60fotogramas.com/la-proporcion-aurea-en-cine-y-fotografia-regla-de-los-tercios/
- https://www.xatakaciencia.com/matematicas/que-son-los-fractales-y-como-se-construyen

Aquests links, són de diferents vídeos del Youtube que m'han servit per entendre molt millor diferents conceptes:

- https://www.youtube.com/watch?v=FDXrJxYymV4&t=320s
- https://www.youtube.com/watch?v=q2KjZOIOwyQ&t=64s
- https://www.youtube.com/watch?v=Wea_1L-C9Xo
- https://www.youtube.com/watch?v=d_7I-uqz_ic&t=267s
- https://www.youtube.com/watch?v=oEPwyb65vcc

A més a més, també he utilitzat diferents llibres que he comprat o bé els he demanat a diferents biblioteques de Tarragona i de Reus:

- Fernando Corbalán, "La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza". 1a ed. Rodesa, Villatuerta (Navarra): Editorial RBA, 2012.
- Mario Livio, "La proporción áurea. La historia de Phi, el número más sorprendente del mundo. 7a ed. Barcelona: Editorial Ariel, 2006.

Finalment, he extret un document d'una pàgina web sobre les manipulacions genètiques en les flors:

- *La biologia y las plantas ornamentales [format PDF].* ArgenBio – Consejo Argentino para la Información y el Desarrollo de la Biotecnología *http://www.argenbio.org/adc/uploads/imagenes_doc/planta_stransgenicas/ornamental.pdf*