LA PROPORCIÓ ÀURIA: UNA CONSTANT OMNIPRESENT

[redacted]

Pseudònim: Espiral

2n de Batxillerat

Curs 2017-2018

Primer de tot, vull agrair a l'escola i en especial a la tutora d'aquest treball per ajudar-me a polir els detalls. També al professor d'arquitectura, per aconsellar-me en la part pràctica i fer-me entendre el món de l'arquitectura. I per últim, als meus pares, per tota la paciència que han tingut i els ànims que m'han donat per seguir treballant.

"A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro."

Rafael Alberti

ÍNDEX

0. INTRODUCCIÓ

Quina relació hi ha entre un gira-sol i la Mona Lisa? O entre el cos humà i un carnet d'identitat? Aquestes són les típiques preguntes que s'utilitzen per a introduir la proporció àuria, un fenomen que aparentment es troba per tot arreu, però alhora és relativament desconegut.

El títol del treball, La proporció àuria: una constant omnipresent", fa referència a aquesta capacitat del número d'or d'estar present a tot arreu, l'omnipresència. També juga amb el doble sentit de la paraula "constant": per una banda, el sentit matemàtic fa referència a una quantitat que sempre té el mateix valor, i per altra banda és sinònim de ferm o perseverant. Les dues accepcions defineixen la proporció àuria.

Les matemàtiques, que normalment no surten dels llibres de text i les pissarres, s'expressen a l'entorn, i el número d'or n'és un clar exemple. Per això, un dels motius de l'elecció d'aquest tema va ser veure una aplicació real d'aquesta ciència, sumant-hi a més l'emoció que genera tot el misteri que envolta la proporció divina.

Per altra banda, l'interès per l'arquitectura va ser un altre factor determinant. Combina art i ciència, bellesa i funcionalitat, una contradicció aparent que comparteix amb el número d'or i que el fa perfecte com a eina en l'arquitectura.

Els objectius del treball són:

- Indagar en el descobriment i la història del número d'or, i veure la importància que ha tingut en les diferents èpoques.
- Estudiar la seva presència en diferents àmbits, buscant exemples nous i desmentint-ne de falsos.
- Conèixer obres locals o properes que presentin el número d'or.
- Familiaritzar-se amb el llenguatge matemàtic i arquitectònic.
- Aprendre a utilitzar programes relacionats amb el disseny d'edificis.
- Realitzar el disseny i la maqueta d'un edifici basant-se en la proporció àuria.

Aquest treball, tot i tractar temes de matemàtiques, vol ser entenedor i interessant per a tothom. Per això, el bloc teòric introdueix la proporció àuria des d'un punt de vista històric, descobrint els seus orígens i la seva evolució de la mà de diferents personatges que l'han tractada. Després es canvia a un enfocament matemàtic, on es defineix el número d'or i es parla de conceptes que s'hi relacionen. Per últim, ofereix el procediment per a dibuixar figures geomètriques àuries.

El bloc pràctic queda dividit en dos subapartats: un treball de camp que recopila diferents exemples de la presència del número d'or en diferents àmbits i el disseny d'una biblioteca fent ús de la proporció àuria. També inclou una entrevista realitzada a un arquitecte que ha utilitzat la proporció àuria en la seva obra.

La informació prové de fonts molt diferents. Per al bloc teòric, la informació prové majoritàriament de fonts bibliogràfiques, tot i que s'ha procurat que les imatges i figures que acompanyen el text siguin majoritàriament de creació pròpia. El treball de camp conté una part de recerca bibliogràfica, però també s'han aportat molts exemples propis, extrets de l'entorn més proper. Per últim, el disseny de la biblioteca és de creació pròpia, comptant amb l'ajuda d'un arquitecte, cotutor del treball.

Així doncs, aquest treball pretén tractar la transversalitat de les matemàtiques a través de la proporció àuria, per tal d'aportar visibilitat i interès a un fenomen tan fascinant.

I. BLOC TEÒRIC

1. HISTÒRIA

El número d'or és present en innumerables fenòmens naturals, així com en estructures creades per l'home al llarg dels temps. És difícil discernir si l'ús que van fer els arquitectes antics d'aquesta proporció és intencionat o és una simple casualitat, perquè no es conserva prou documentació per verificar-ho.

Per això, en aquest apartat s'intentaran resoldre els mites que envolten la proporció àuria a través de les evidències històriques trobades, i també donar a conèixer els diferents matemàtics que l'han estudiada.

1.1. Egipcis: El misteri de la Gran Piràmide

La Gran Piràmide de Keops, construïda l'any 2480 aC. aproximadament, ha estat associada a molts mites matemàtics. Un dels més importants és el que la relaciona amb la proporció àuria.

Heròdot (484-425 aC), un historiador grec, va aprendre dels sacerdots egipcis que l'altura al quadrat de la Gran Piràmide era igual a l'àrea de les seves cares triangulars. Aquesta afirmació és el mateix que dir que l'altura de la cara triangular i la distància del centre de la piràmide a la meitat del costat de la base estan en proporció àuria[1].

Si es comprova a partir de les mesures reals de la Gran Piràmide es fa evident la presència de *phi (Φ):* els costats de la base quadrada fan 230,45 m., i l'altura de la piràmide és de 146,73 m. A partir d'aquestes dades podem obtenir que l'altura de la cara triangular és 186'56 m. Aquesta altura (186,56 m) entre la meitat del costat de la base (115,23 m) dóna 1'619, una xifra molt propera al número d'or, 1,618039887... [2]

Tot i l'evidència, no es pot afirmar que els egipcis coneguessin la proporció àuria, perquè no es tenen suficients proves que ho demostrin. Per tant, podria tractar-se d'una simple casualitat.

[1] Veure demostració a l'annex I (p.86)
[2] Veure càlculs a l'annex II (p.86)

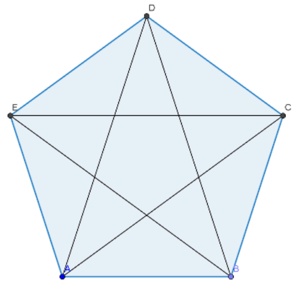
1.2. Els pitagòrics: Univers matemàtic

Pitàgores de Samos (475 aC) va ser un destacat matemàtic i filòsof nascut a l'illa de Samos, Grècia, cap al 569 aC. Va jugar un paper molt destacat en el desenvolupament de les matemàtiques gràcies a la creació d'una comunitat filosòfica, religiosa i matemàtica a Crotona.

Aquest grup, format per homes i dones, tenia un codi de conducta propi marcat per unes normes estrictes i unes creences místiques. Els pitagòrics defensaven que l'Univers es regeix per les matemàtiques, i que aquestes han sigut creades per un ésser superior. Per això, estudiaven astronomia, geometria, música i metafísica, i també practicaven atletisme i meditació per purificar l'ànima.

La importància de l'escola pitagòrica rau en la gran quantitat de descobriments i aportacions que van realitzar. Entre els més destacats hi ha el Teorema de Pitàgores o les notes musicals harmòniques.

Per ells, els números eren purs i perfectes, i tenien un significat propi. Per exemple, els números parells eren considerats femenins i els senars masculins. El número 5 era especialment venerat per ser la unió del primer número femení (2) i el primer número masculí (3), simbolitzant, per tant, el matrimoni.



Imatge 1 Pentagrama

És per aquest motiu que el símbol més representatiu de l'escola pitagòrica era el pentagrama, l'estrella de cinc puntes formada a l'unir les diagonals d'un pentàgon regular. Aquesta figura possiblement va portar-los a trobar el número auri.

Hipàs de Metapont, un seguidor de Pitàgores, va descobrir la incommensurabilitat[3], i en conseqüència, els números irracionals. Sembla ser que a partir de l'estudi del pentagrama el matemàtic va obtenir el número d'or, que apareix dividint qualsevol segment de la figura (Imatge 1) entre el que és immediatament més petit.[4]

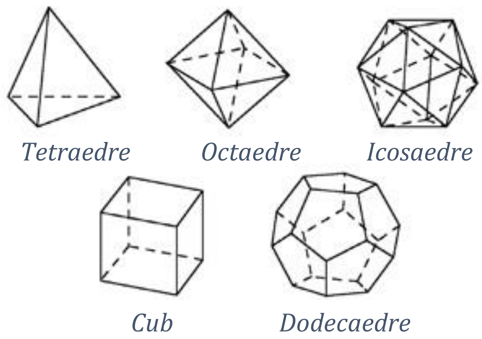
El descobriment dels irracionals va comportar una gran crisis del pensament pitagòric, ja que trencava amb la seva idea d'ordre i harmonia universal, però també va ser un gran avanç en la història de les matemàtiques. Tot i que s'han trobat pentagrames anteriors als grecs, es creu que aquests van ser els primers a estudiar-ne les propietats, i per tant, a descobrir *phi* (Φ).

[3] Qualitat d'incommensurable: dues magnituds la divisió de les quals no dóna un nombre racional.
[4] Explicació detallada a l'apartat 3.5. Pentàgon i pentagrama (p.28)

1.3. Grecs: passió pel coneixement pur

Després de la dissolució de l'escola pitagòrica, alguns dels seus antics seguidors van continuar estudiant les matemàtiques com a forma de descriure el món. Aquest va ser el cas de Plató (428-348 aC.), reconegut especialment per la seva vessant de filòsof tot i que també era matemàtic.

Va explicar l'estructura de la matèria a través de cinc sòlids regulars, coneguts com a sòlids platònics: el tetraedre, el cub, l'octaedre, el dodecaedre i l'icosaedre. La particularitat d'aquestes figures és que totes les seves cares són idèntiques i tenen tots els costats iguals.



Imatge 2: Sòlids platònics

Possiblement, l'interès dels grecs per la proporció àuria va començar a l'intentar construir els sòlids anteriors ja que, per exemple, l'àrea del dodecaedre de costat 1 és $15\Phi\sqrt{3-\Phi}$ o el volum de l'icosaedre de costat 1 és $5\Phi^5/6$.

Euclides va ser un matemàtic molt important, no només per aportar nous continguts sinó també per recollir-ne d'altres autors. La seva obra més destacada, *Elements,* és el llibre de matemàtiques més influent de la història. Consta de 13 volums sobre geometria i teoria numèrica. La proporció àuria hi apareix més d'una vegada: al llibre II de forma indirecta, al llibre IV on s'utilitza per a dibuixar un pentàgon, al Llibre XIII per a la construcció de l'icosaedre i el dodecaedre, i al llibre VI, on apareix la primera definició clara de la que després s'anomenaria proporció àuria:

> *" Una recta està dividida en extrema i mitja raó, quan la totalitat del segment és al segment major com el segment major és al menor."*

Fídies (490-430 aC), artista encarregat de les escultures del Partenó d'Atenes, és el protagonista d'un altre dels grans misteris de la proporció àuria. Es creu que la utilitzava en les seves construccions, inclosa la façana de l'esmentat Partenó.

Tot i que no se sap del cert si Fídies va utilitzar la secció àuria de manera conscient, la primera lletra grega del nom de l'artista, *phi (Φ),* va servir per batejar el nombre d'or.

Després dels grecs, l'interès per aquest número va decaient. Els musulmans, grans matemàtics, només van usar-lo per a construir pentàgons i decàgons, cosa que no suposa cap avanç. Al cap d'uns segles però, torna a aparèixer gràcies a Fibonacci.

1.4. Fibonacci: la successió àuria

Leonardo de Pisa o Leonardo Fibonacci (1175-1250) va ser l'encarregat d'introduir el sistema de numeració indo-aràbic a Europa en substitució dels números romans que s'utilitzaven fins aquell moment. En el nou sistema, que encara es conserva actualment, els números varien el seu valor segons la posició que ocupen: es multiplica el valor per 10 elevat a la posició. Això dóna lloc a les unitats (10^0), desenes (10^1), centenes (10^2), etc.

Per mostrar els avantatges d'aquest sistema, especialment en la comptabilitat, va escriure un tractat matemàtic, el *Liber abaci*, que recull un seguit de regles i procediments per a aprendre a utilitzar la nova numeració. El més interessant del llibre, però, va resultar ser un exercici per a practicar, el problema dels conills:

"Un home va posar una parella de conills envoltats per una paret. Quantes parelles de conills es poden produir a partir d'aquesta parella durant un any si se suposa que tots els mesos cada parella engendra una nova parella i que només es poden reproduir a partir del segon mes?"

Mes	Parelles adultes	Parelles joves
1	1	0
2	1	1
3	2	1
4	3	2
5	5	3
6	8	5
7	13	8
8	21	13
9	34	21
10	55	34
11	89	55
12	144	89

Taula 1: Successió de Fibonacci a partir del problema dels conills

Com es pot observar, la nova xifra és la suma de les dues xifres anteriors, i es pot expressar de la forma: $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$. Aquesta és la successió de Fibonacci.

En aquells moments no tenia relació amb el número d'or, fins que Johannes Kepler va descobrir que la proporció entre dos nombres consecutius de la successió de Fibonacci tendeix a *phi* (Φ).

1.5. Luca Pacioli i el Renaixement

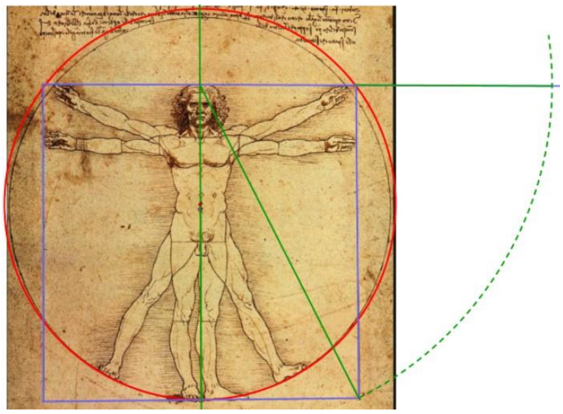
Luca Pacioli (1445-1517), un important professor de matemàtiques, va escriure un tractat dedicat exclusivament a la secció àuria: La *Divina Proportione* (La Proporció Divina).

En el primer volum va resumir-ne les propietats i la seva relació amb els sòlids platònics i altres poliedres. També va utilitzar per primera vegada la paraula "divina" per referir-se a la proporció àuria, ja que va afirmar que la seva irracionalitat era comparable amb la incomprensibilitat de Déu i que tots dos eren omnipresents.

En el segon tractat va parlar de les proporcions del cos humà basant-se en l'obra de l'arquitecte romà Marcus Vitruvius Pollio, qui va establir la relació entre la geometria i l'anatomia. Aquesta relació, però, no es basa en la proporció àuria, sinó en proporcions simples de nombres enters.

L'anterior fet porta a parlar d'un dels altres mites relacionats amb el número d'or: L'home de Vitruvi. Leonardo da Vinci, autor d'aquest dibuix, va ser un alumne de Pacioli i per això se'l relaciona amb la proporció divina.

Diferents estudiosos de la seva obra han afirmat que la divisió entre el radi de la circumferència i el costat del quadrat és igual a *phi (Φ)*. Però sobreposant la circumferència que estaria en verdadera proporció àuria amb el costat del quadrat s'observa que no coincideix exactament amb la del dibuix original, perquè es tracta d'una construcció a partir de proporcions simples.



Imatge 3: L'home de Vitruvi, de Leonardo da Vinci

Tot i que la proporció àuria no va formar part d'aquesta obra de Leonardo da Vinci, sí que va influenciar a altres artistes com Albrecht Dürer (1471-1528).

Aquest pintor alemany va viure en ple Renaixement, època on s'intentava tornar als principis artístics de l'Antiga Grècia. Per això, Dürer es va interessar per les matemàtiques, i en especial per l'obra d'Euclides i de Pacioli.

Va escriure *Tractat sobre la mesura amb regle i compàs,* on va manifestar la importància de la geometria en l'art. També va descriure el procés de construcció de diferents corbes, com l'espiral logarítmica, molt relacionada amb la proporció àuria, i de diferents sòlids, com els sòlids platònics.

A part del tractat, l'artista també va fer ús del nombre d'or en les seves pintures, com és el cas d' *Adam i Eva* (1507).

En resum, el Renaixement va reviure l'interès per a la proporció àuria dels grecs. A més, es va crear una relació entre la geometria i el funcionament de l'Univers, que encara es va accentuar més amb l'arribada de Kepler.

1.6. Johannes Kepler: Univers matemàtic

Johannes Kepler (1571-1630) va ser un astrònom, matemàtic i metafísic alemany conegut per descobrir les tres lleis del moviment planetari.

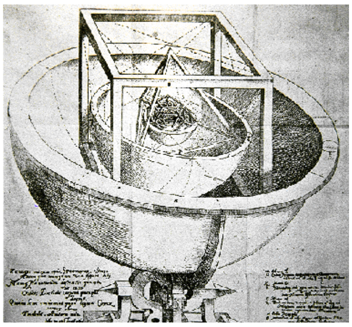
Entre les seves aportacions també hi ha el descobriment de la relació de *phi* (Φ) amb la successió de Fibonacci.

1	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**	**233**	**377**
1	2	1,5	1,6667	1,6	1,625	1,6154	1,619	1,6176	1,6182	1,618	1,6181	1,618

Taula 2: A dalt, els 13 primers números de la successió de Fibonacci. A baix, el quocient entre la xifra de dalt i l'anterior

Kepler va veure que la divisió d'una xifra de la successió entre l'anterior s'aproxima a *phi (Φ)* a mesura que aquesta xifra tendeix a infinit. Aquest interès pel número d'or ve per la pregunta que es feia constantment: quina eina va utilitzar Déu per dissenyar el seu Univers?

Per respondre-la, va intentar explicar el funcionament de les òrbites dels planetes utilitzant els sòlids platònics. Partint d'una esfera exterior que representava l'òrbita de Saturn, va anar inscrivint un cub, l'esfera de Júpiter, un tetraedre, l'esfera de Mart, un dodecaedre, l'esfera de la Terra, un octaedre i finalment l'esfera de Mercuri, que eren els planetes coneguts en aquell moment.



Imatge 4: Esquema de la teoria de Kepler

Com ja s'ha explicat, la construcció dels sòlids platònics està íntimament relacionada amb el número d'or, i com a conseqüència del seu estudi, va arribar a la conclusió que la proporció àuria va ser la base per crear el món i que el pentàgon era la manifestació més directa d'aquesta.

Tot i que la seva teoria va resultar ser totalment falsa, l'astrònom va ser el primer que va relacionar directament la proporció àuria amb els fenòmens naturals, i va desencadenar un interès científic pel número d'or.

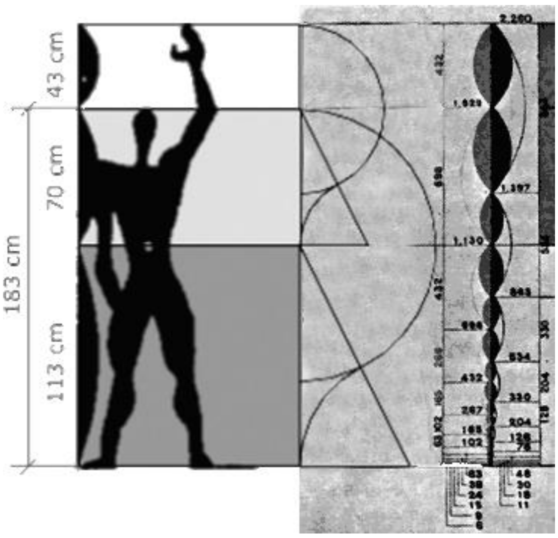
1.7. Le Corbusier: arquitectura funcional

Charles-Édouard Jeanneret-Gris (1887-1965), més conegut com a Le Corbusier, va ser un arquitecte francès d'origen suís que va renovar l'arquitectura moderna. Pretenia adaptar les necessitats de la societat del moment a la construcció. Per a dissenyar edificis que complissin els seus principis de funcionalitat i estètica va desenvolupar el Modulor.

Aquest invent era un sistema de mesures on cada magnitud tenia relació amb les altres segons la proporció àuria i també amb les mesures del cos humà. D'aquesta manera, va tornar al principi clàssic de reflectir les proporcions de la natura a l'arquitectura.

El Modulor pretenia substituir els sistemes de construcció europeus i americans per un sistema que es basava en les mesures de l'home.

Per a construir-lo, es partia d'una persona de 1'83 m d'altura inscrita en un rectangle auri. Aquest rectangle es dividia en dues parts, la raó de les quals fos *phi (Φ):* la mesura gran era de 1,13 metres i la petita de 0,70 metres (1,13/0,70=1,614). Aquesta primera divisió corresponia a l'altura del melic.



Imatge 5: El Modulor de Le Corbusier

Es construïa un segon rectangle partint de la mesura de l'home amb el braç alçat: 2,26 metres. El segment que s'obtenia de dividir 2,26 entre el número d'or era 1,40 m, el punt de recolzament del braç.

Per últim, la divisió de 1,40 m entre *phi (Φ)* donava 0,86 metres, el punt de recolzament de la mà.

La primera aplicació de l'invent va ser la Casa Curutchet, construïda a La Plata, Argentina, que va ser reconeguda com a "obra d'interès científic".

Gràcies al Modulor, es va facilitar l'aplicació de la proporció àuria a l'arquitectura, tot i que actualment s'utilitzi només de forma puntual en el disseny i la construcció.

2. CONCEPTES FONAMENTALS

2.1. Proporció àuria

2.1.1. Definició

Es diu que una recta ($\overline{AB}$) està dividida en proporció àuria quan la relació del segment llarg ($\overline{AC}$) respecte al curt ($\overline{CB}$) és la mateixa relació que la de la totalitat de la recta ($\overline{AB}$) respecte al seu segment llarg ($\overline{AC}$). També es pot anomenar secció àuria o proporció divina.

Figura 2.1-1

L'enunciat anterior es pot expressar de la següent forma:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Si dues fraccions són equivalents es pot trobar una constant: en aquest cas, el número d'or, que es representa amb la lletra grega *phi (Φ)*.

Per a trobar aquest valor, CB serà una unitat (1), AC s'anomenarà x i per tant AB equivaldrà a x+1:

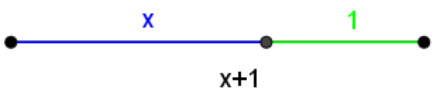


Figura 2.1-2

I s'expressarà:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$$

A partir d'aquesta expressió s'obté l'equació de segon grau $x^2 - x - 1 = 0$, que té dues solucions:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solució negativa no és vàlida perquè s'està tractant amb longituds, però amb la positiva s'obté el valor de *phi (Φ):* 1,618039887...

2.1.2. Propietats

La proporció àuria, i en conseqüència el número d'or, té unes característiques pròpies que han contribuït a que sigui un dels nombres més interessants per a estudiar:

- El seu quadrat té exactament les mateixes xifres decimals: $\Phi^2 = 2{,}6180339887\ldots$, per tant, $\Phi + 1 = \Phi^2$.
- Si s'inverteix també conserva els mateixos decimals: $\frac{1}{\Phi} = 0{,}6180339887\ldots$, per tant, $\Phi - 1 = \Phi^{-1}$
- La divisió de dos nombres consecutius de la successió de Fibonacci ($x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$) tendeix a Φ: $\lim_{x\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \Phi$
- Es pot representar a partir d'una sèries d'arrels quadrades infinites:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

- També s'obté el seu valor partint de fraccions contínues:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

2.2. Números irracionals

Els números irracionals són aquells que posseeixen infinits nombres decimals no periòdics, i que no es poden expressar en forma de fracció de nombres enters. Juntament amb els racionals formen el conjunt dels nombres reals ($\mathbb{R}$), que es poden representar en una recta.

Els irracionals van ser descrits per primera vegada pels pitagòrics. Una teoria apunta que el descobriment d'aquests números està relacionat amb *phi (Φ),* és a dir, buscant la raó entre un costat del pentagrama i l'immediatament més petit. També hi ha la possibilitat que intentant calcular la diagonal d'un quadrat de costat 1 es trobessin amb un altre irracional: $\sqrt{2}$. [5]

Els nombres irracionals més coneguts tenen nom propi i es representen amb una lletra. Un d'aquests és el número d'or, *phi (Φ),* però se'n poden destacar dos més per la seva importància dins les matemàtiques.

2.2.1. El número pi (π)

El número pi és la relació entre la longitud d'una circumferència i el radi:

$$longitud = 2 \cdot \pi \cdot r$$

El seu valor aproximat és 3,141592653589…

Es creu que els primers en calcular-lo van ser els babilonis, l'any 2000 a.C., ja que es van adonar que la circumferència era una mica més de tres vegades el diàmetre.

Arquímedes (287-212 a.C.) va fer una aproximació de cinc decimals: 3,14159 a partir de figures inscrites i circumscrites al cercle. Des d'aleshores, diferents matemàtics han trobat més decimals per a pi, i actualment se'n coneixen més de 12 milions gràcies als ordinadors.

2.2.2. El número e

El número e, també anomenat constant de Nepler o número d'Euler, és la base dels logaritmes naturals, i és molt utilitzat en càlculs, com l'interès compost continu.

El va descobrir Jacob Bernoulli (1654 – 1705) buscant el valor de l'expressió: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

El seu valor aproximat és 2.718281828459...

[5] Veure com es troba la diagonal del quadrat a l'annex III (p. 87)

2.3. Números metàl·lics

Els números metàl·lics són el conjunt infinit de nombres que són solució positiva de les equacions quadràtiques de la forma $x^2 - px - q = 0$, on p i q són nombres naturals. Van ser descrits per primera vegada per la matemàtica argentina Vera de Spinadel el 1994.

Com s'ha explicat anteriorment, la divisió de dos termes consecutius de la successió de Fibonacci obtinguda a partir de l'equació $x^2 - x - 1 = 0$ tendeix al número d'or, i passa el mateix amb les diferents successions obtingudes a partir d'equacions de la mateixa forma. Per a obtenir les variants de la successió de Fibonacci es parteix de la fórmula:

$$x_n = p \cdot x_{n-1} + q \cdot x_{n-2}$$

A continuació es presenten els números metàl·lics més famosos i les seves successions[6].

Número	Equació	Successió	Valor
Or	$x^2 - x - 1 = 0$	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...	1,618033989 ...
Plata	$x^2 - 2x - 1 = 0$	1, 3, 7, 17, 41, 99, 239...	2,414213562 ...
Bronze	$x^2 - 3x - 1 = 0$	1, 4, 13, 43, 142, 469, 1549...	3,302775638 ...
Coure	$x^2 - x - 2 = 0$	1, 3, 5, 11, 21, 43, 85...	2
Níquel	$x^2 - x - 3 = 0$	1, 4, 7, 19, 40, 97, 217...	2,302775638 ...
Platí	$x^2 - 2x - 2 = 0$	1, 4, 10, 28, 76, 208, 568...	2,732050808 ...

Taula 3: Els números metàl·lics

Igual que el número d'or, els números metàl·lics també són emprats en altres camps: El número de plata apareix en tapissos i patis romans, el de platí va ser utilitzat en l'arquitectura renaixentista i molts es troben en l'estructura de l'Univers i de l'ADN.

[6] Veure càlculs a l'annex IV (p.88)

3. CONSTRUCCIONS GEOMÈTRIQUES

La proporció àuria és la base de molts polígons regulars i figures diferents. A continuació se'n destacaran els més coneguts i s'explicarà el procediment per a construir-los.

3.1. Segment auri

Tot i no ser un polígon, és important conèixer els passos per a obtenir un segment dividit en proporció àuria.

3.1.1. Partició àuria d'un segment

Partint d'un segment $\overline{AB}$, es dibuixa una perpendicular que passi pel punt B.

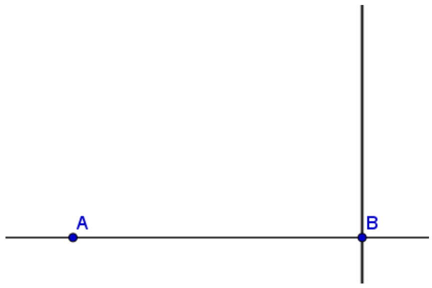


Figura 3.1-1

A continuació, es traça la mediatriu del segment $\overline{AB}$ (punt C) i amb centre B i radi BC es fa un arc que talla la perpendicular pel punt D.

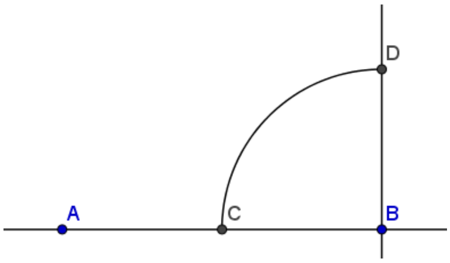


Figura 3.1-2

Aquest punt D s'uneix amb A, i es dibuixa un altre arc amb centre D i radi DB que talli la nova línia en el punt E.

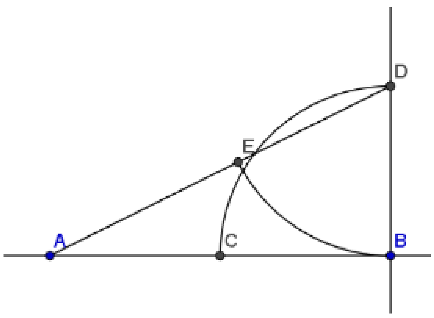


Figura 3.1-3

Finalment, amb radi AE i centre a A, es traça un arc que talli el segment $\overline{AB}$. Aquest punt F divideix el segment en dues parts (a i b) en proporció àuria. El segment llarg, a, s'anomena partició àuria de $\overline{AB}$.

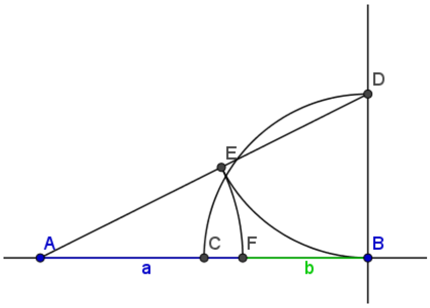


Figura 3.1-4

3.1.2. Trobar un segment a partir de la partició àuria

Partint d'un segment $\overline{AB}$, es traça una perpendicular pel punt *B.*

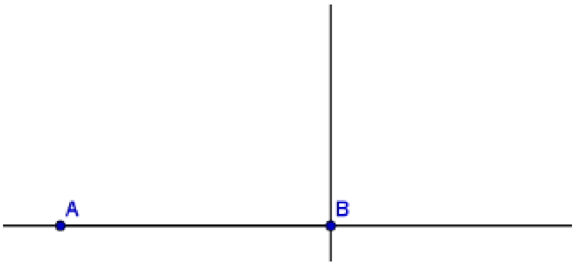


Figura 3.1-5

A continuació, es traça un arc amb centre B i radi BA que talli la perpendicular pel punt C

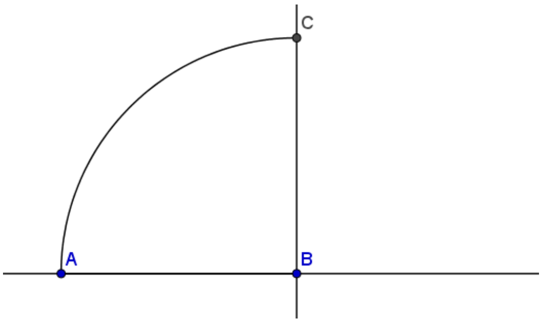


Figura 3.1-6

Es fa el punt mig de $\overline{AB}$ (punt D) i fent-lo servir de centre es dibuixa un arc de radi DC. Es troba el punt *E,* que marca el segment $\overline{AE}$ que es buscava (a+b).

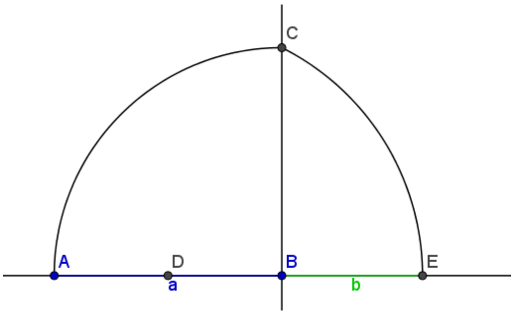


Figura 3.1-7

3.2. Rectangle auri

La primera figura que es tractarà és el rectangle auri, és a dir, el rectangle on la relació entre el costat llarg i el curt és igual a *phi (Φ).*

La particularitat d'aquest polígon és que és l'únic que al extreure'n un quadrat, el rectangle sobrant és semblant a l'original:

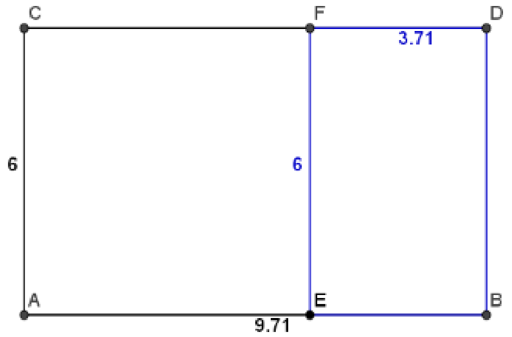


Figura 3.2-1

Com es pot veure a la *Figura 3.2-1*: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{9{,}71}{6} = 1{,}618$ i $\frac{\overline{EF}}{\overline{FD}} = \frac{6}{3{,}71} = 1{,}617$, per tant els rectangles són semblants i auris.

Una altra forma de reconèixer un rectangle auri és la següent:

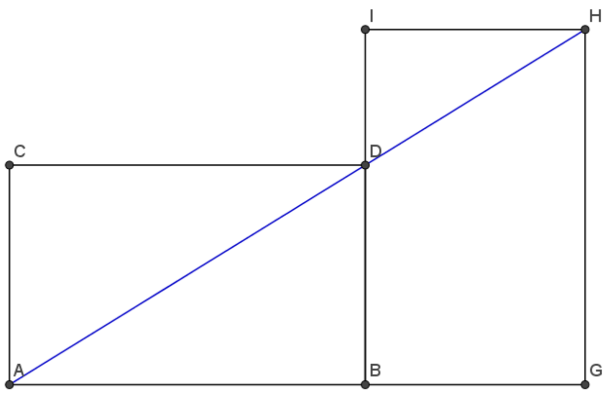


Figura 3.2-2

Col·locant un rectangle en horitzontal i un d'igual en vertical, la diagonal del primer rectangle coincidirà amb l'extrem superior més allunyat del segon.

3.2.1. Construcció d'un rectangle auri a partir del costat curt

Partint d'un segment $\overline{AB}$ (costat curt), es segueix el mateix procediment que en el punt anterior (3.1.2) fins a aconseguir el segment $\overline{AE}$ (costat llarg)

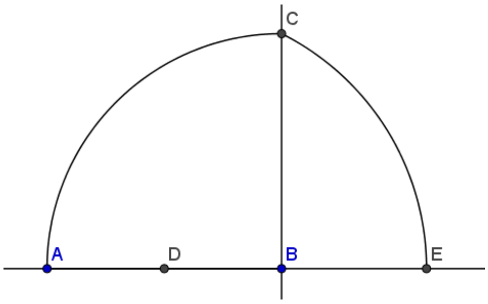


Figura 3.2-3

Es tracen dues perpendiculars a $\overline{AE}$: una pel punt A i l'altre pel punt E.

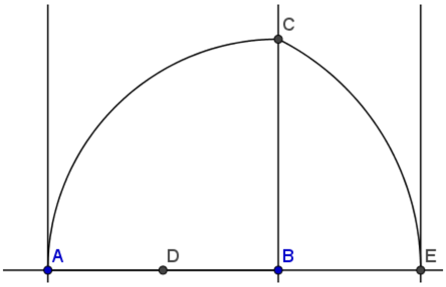


Figura 3.2-4

Per últim, es dibuixa una perpendicular a $\overline{BC}$ que talli les perpendiculars a A i a E, formant un rectangle auri de costats a i b.

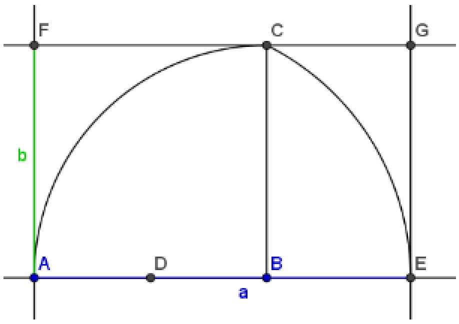


Figura 3.2-5

3.3. Triangle auri

El triangle auri és un triangle isòsceles on la relació entre els seus costats iguals i la base és igual al número d'or. Els dos angles iguals són de 72° i el tercer de 36°.

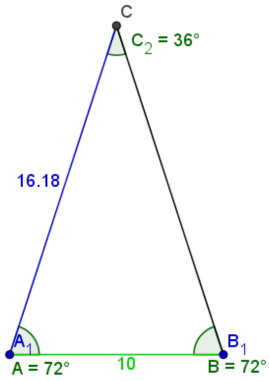


Figura 3.3-1

Com es pot comprovar a la *Figura 3.3-1*: $\frac{16{,}18}{10} = 1{,}618 = \Phi$

Es pot obtenir un triangle semblant fent la bisectriu d'un dels angles de 72°.

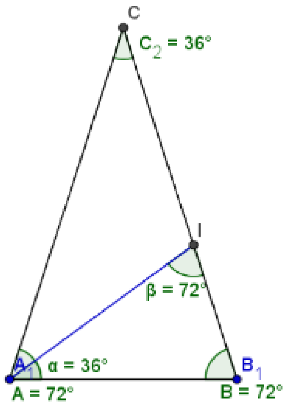


Figura 3.3-2

També s'obté un altre triangle isòsceles, conegut com a triangle auri menor, que a la *Figura 3.3-2* correspon al triangle ACI, que té angles de 36°, 36° i 108° i costats amb una relació a la base igual a $\frac{1}{\Phi}$.

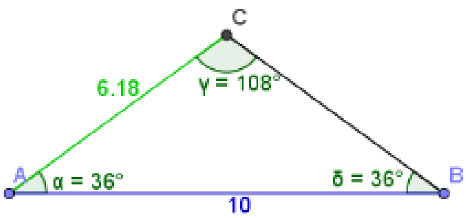


Figura 3.3-3

Com s'observa a la *Figura 3.3-3*, $\frac{6{,}18}{10} = 0{,}618 = \frac{1}{\Phi}$

3.3.1. Construcció d'un triangle auri a partir de la base

A partir de la base $\overline{AB}$, es segueix el procediment descrit al punt 3.1.2 per a trobar el costat llarg $\overline{AE}$.

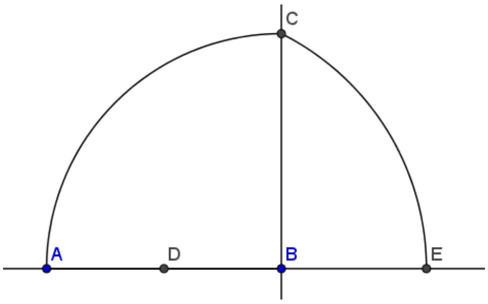


Figura 3.3-4

Amb centre a *A* i radi *AE,* es traça un arc.

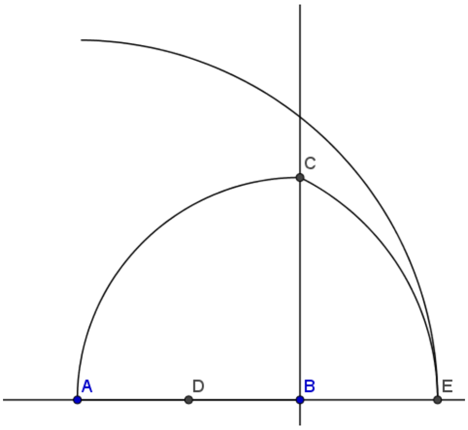


Figura 3.3-5

Amb la mateixa mesura, es dibuixa un altre arc fent centre a *B,* i s'obté el tercer punt del triangle auri, amb base a i costats iguals b.

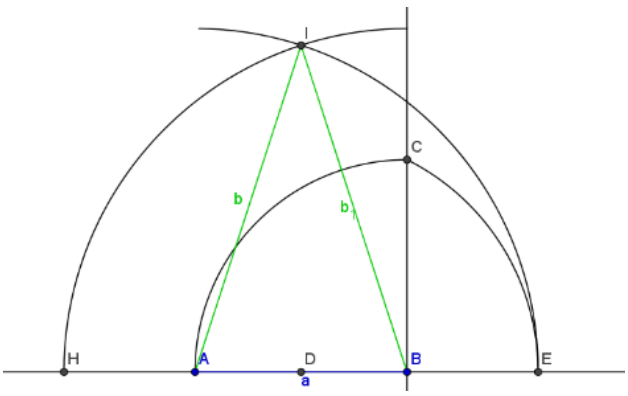


Figura 3.3-6

3.4. Espiral logarítmica

Una espiral logarítmica és aquella que s'expandeix de forma contínua seguint la seva pròpia rotació, és a dir, es va fent més ampla de forma proporcional a mesura que s'allunya del centre.

3.4.1. Construcció d'una espiral logarítmica a partir d'un rectangle auri

Es parteix d'un rectangle auri *ABCD.* Amb centre *A* i radi *AC,* es traça un arc que talli el segment $\overline{AB}$ en el punt *E.* Es dibuixa una perpendicular en aquest punt i s'obté un quadrat i un rectangle semblant a l'original.

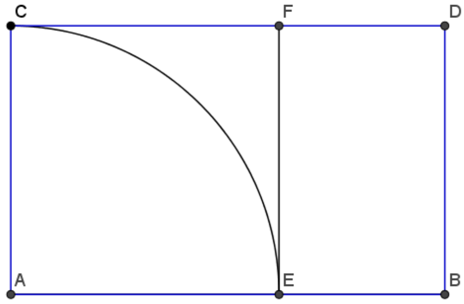


Figura 3.4-1

Es repeteix el mateix procediment amb el rectangle obtingut, i així successivament. Es poden obtenir infinites particions.

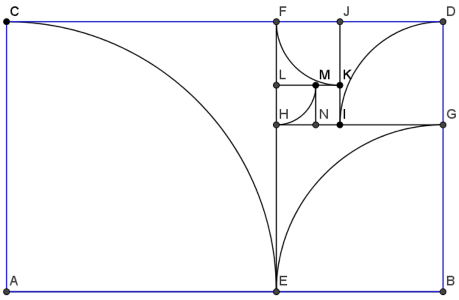


Figura 3.4-2

Amb centre *M* i radi *MN,* es traça un arc fins a *L.* De *K* es fa un altre arc amb radi *KL* fins a *J.* Es van fent arcs amb el radi de la mida del costat del quadrat que correspongui fins a obtenir un espiral.

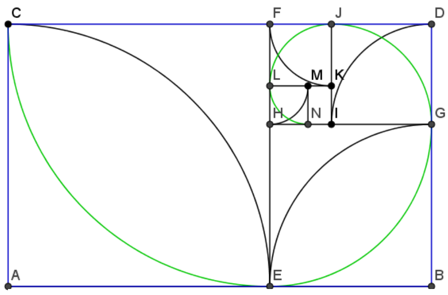


Figura 3.4-3

3.4.2. Construcció d'una espiral logarítmica a partir d'un triangle auri

Es parteix d'un triangle auri *ABC.* Es traça la bisectriu de l'angle $\hat{A}$ per a obtenir un triangle semblant.

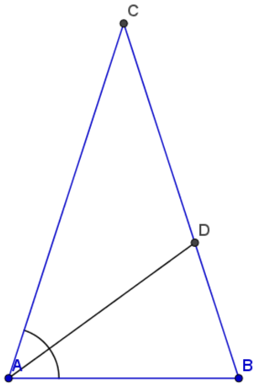


Figura 3.4-4

Es repeteix el procediment per anar obtenint més triangles auris, cada vegada més petits.

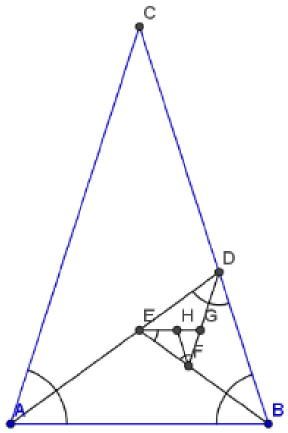


Figura 3.4-5

Per últim, es traça un arc de centre a *H* i radi *HF,* a continuació fent centre a *G* i radi *GE,* i així successivament fins a formar l'espiral.

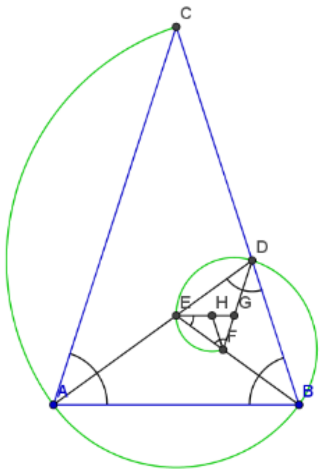


Figura 3.4-6

3.5. Pentàgon i pentagrama

El pentàgon és un polígon regular de cinc costats. S'hi pot inscriure un pentagrama, és a dir, una estrella de cinc puntes, que s'aconsegueix dibuixant totes les diagonals del pentàgon.

La relació d'aquesta figura amb la proporció àuria és molt estreta, ja que qualsevol segment dividit entre l'immediatament més petit és igual a *phi (Φ)*:

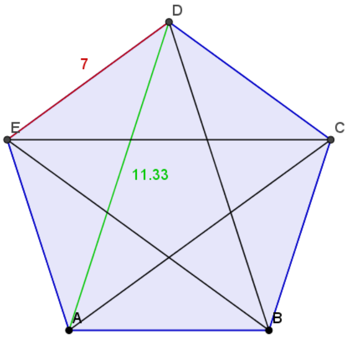


Figura 3.5-3

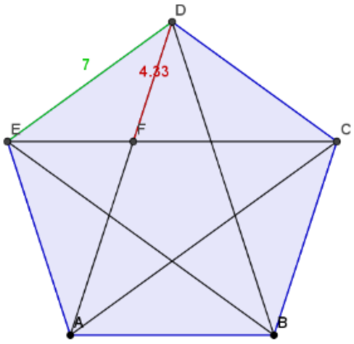


Figura 3.5-2

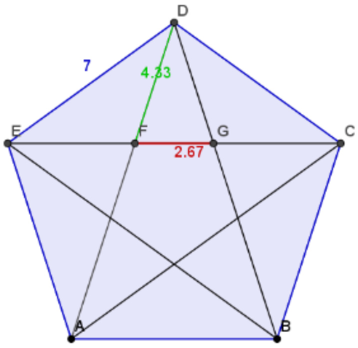


Figura 3.5-1

Com es pot comprovar: $\frac{11,33}{7} = 1,619$ (*Figura 3.5-1*), $\frac{7}{4,33} = 1,617$ (*Figura 3.5-2*) i $\frac{4,33}{2,67} = 1,622$ (*Figura 3.5-3*).

3.5.1. Construcció d'un pentàgon a partir del radi de la circumferència circumscrita

Es dibuixa la circumferència amb el radi donat *OA* i dos diàmetres perpendiculars.

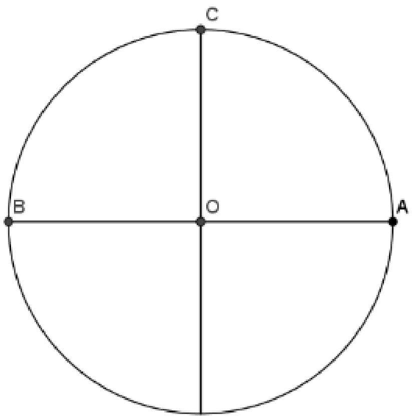


Figura 3.5-4

Es traça la mediatriu del radi i des d'aquest punt (*D*) es dibuixa un arc de radi *DC* que talli el diàmetre *BA* en el punt *E.*

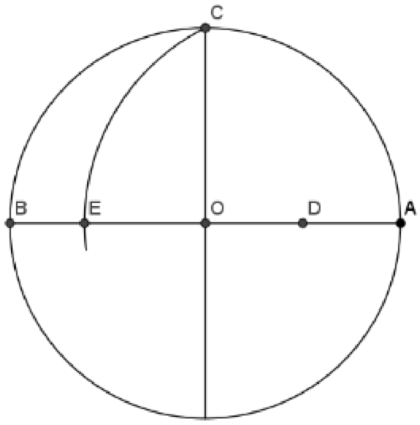


Figura 3.5-5

Fent centre a *C* i amb radi *CE,* es fa un arc que talli amb la circumferència. Aquesta distància *CF* és el costat del pentàgon.

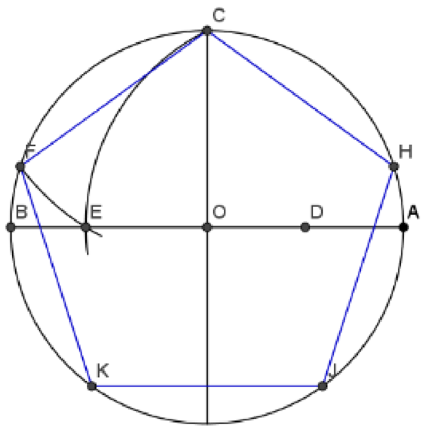


Figura 3.5-6

3.5.2. Construcció d'un pentàgon coneixent-ne el costat

Donat un costat del pentàgon *AB* es traça una perpendicular pel punt *A.* Fent centre a *A* i radi *AB,* es dibuixa un arc que talli la perpendicular en el punt *C.*

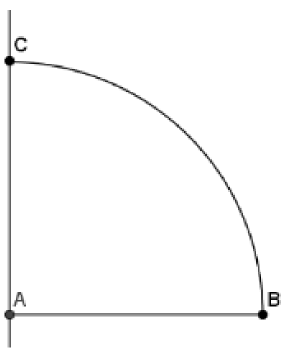


Figura 3.5-7

Es busca la mediatriu del segment AB, i fent centre en aquest punt (D) i radi DC es traça una mitja circumferència que talli la prolongació de AB en dos punts: E i F.

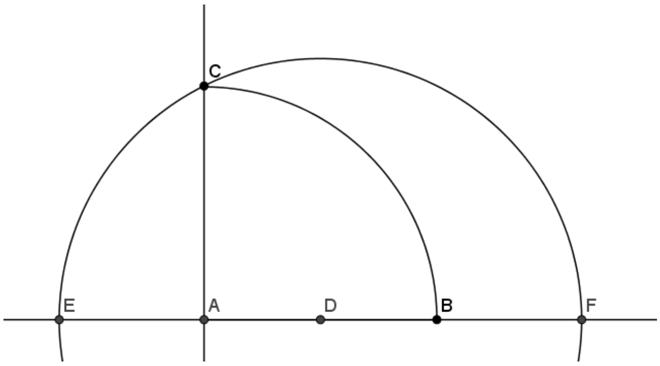


Figura 3.5-8

Fent centre a A i radi AF es fa un arc. Amb el mateix radi però des de B es dibuixa un arc que talli amb l'anterior.

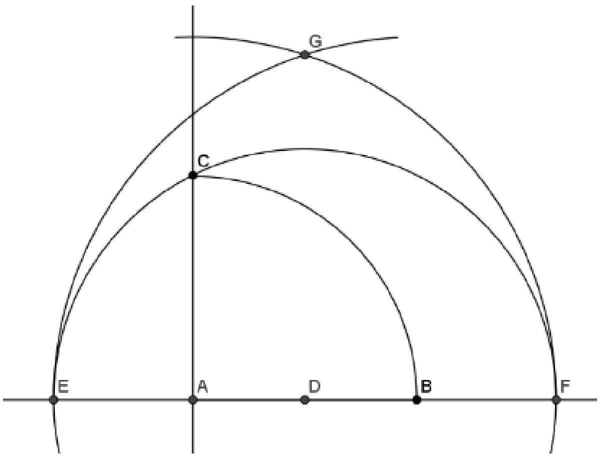


Figura 3.5-9

Per últim, s'agafa la mesura del costat AB i des de A es traça un arc que talli l'arc que va de de E a G trobant el vèrtex H, i es repeteix el procés des de B i l'arc que va de F a G per a trobar el vèrtex I.

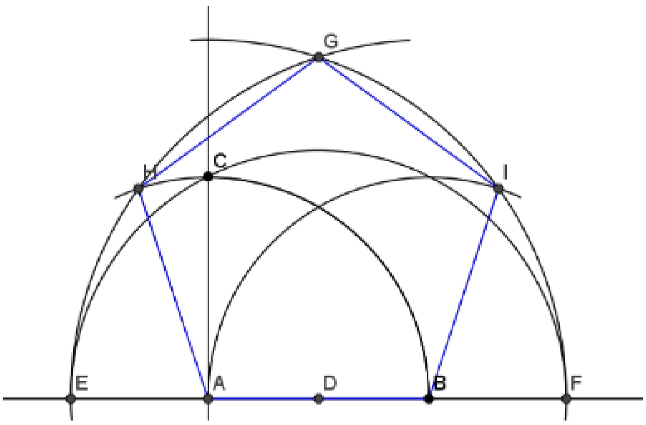


Figura 3.5-10

3.6. Decàgon

El decàgon regular és un polígon de deu costats iguals. L'estrella que es forma unint les diagonals és el decagrama.

Aquesta figura està estretament lligada al número d'or, ja que la relació entre el radi del cercle que circumscriu un decàgon i un costat és igual a *phi (Φ)*:

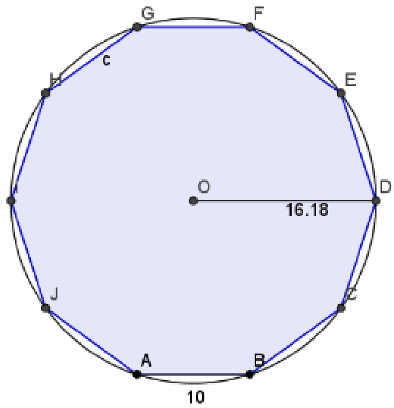


Figura 3.6-1

Com es pot comprovar: $\frac{16{,}18}{10} = 1{,}618 = \Phi$

3.6.1. Construcció d'un decàgon coneixent el radi de la circumferència circumscrita

Es divideix el diàmetre de la circumferència donada *AB* en 10 parts iguals.

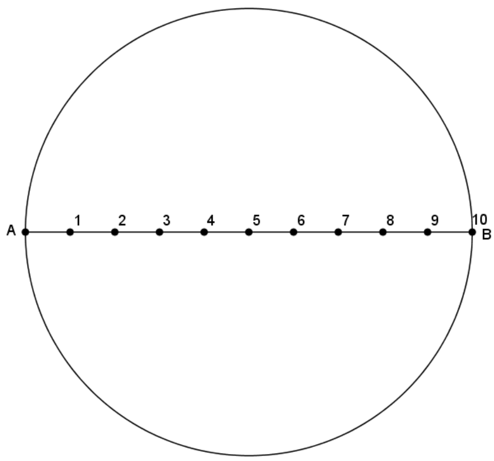


Figura 3.6-2

Des de *A* i amb radi *AB* es traça un arc i es repeteix el procediment des de *B* per a trobar el punt *C*. S'uneix el punt C amb la segona divisió i s'obté el punt *D,* que talla la circumferència.

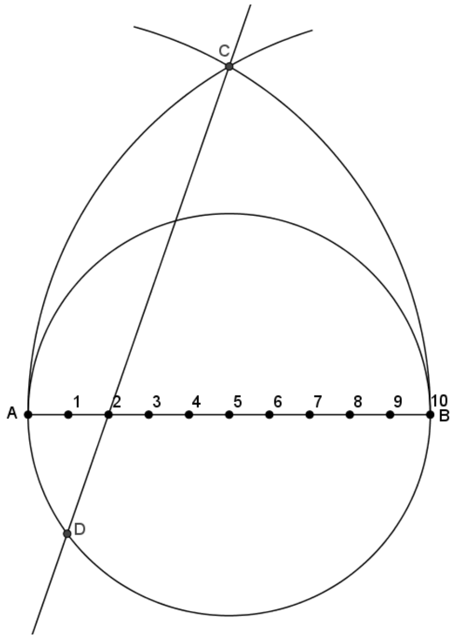


Figura 3.6-3

La distància *AD* correspon al costat del decàgon.

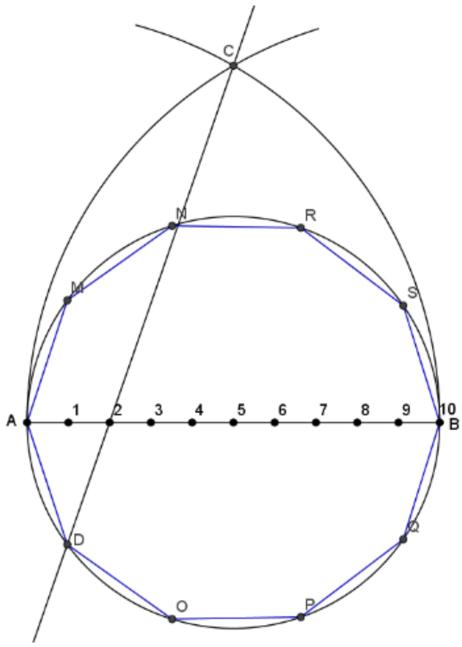


Figura 3.6-4

3.7. Angle auri

L'angle auri és el resultat de dividir la longitud d'una circumferència en proporció àuria.

Per a trobar el valor de l'angle, el total de la longitud de la circumferència correspondrà a 360°, l'arc curt serà *x* i per tant l'arc llarg equivaldrà a *360-x,* tal i com s'il·lustra a la *Figura 3.7-1.*

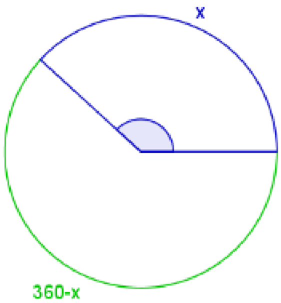


Figura 3.7-1

Partint de la definició de la proporció àuria es forma l'expressió:

$$\frac{x}{360-x} = \frac{360-x}{360}$$

A partir d'aquesta expressió s'obté l'equació de segon grau $x^2 - 1080x + 129600 = 0$, que té dues solucions[7]:

$$x_1 = 942{,}492236\ \ldots°$$

$$x_2 = 137{,}5077641\ldots°$$

La solució x_1 no és vàlida en aquest context perquè una divisió de la circumferència no pot ser superior al total, 360°.

Per tant, l'angle auri és, aproximadament, 137,5°.

És un angle irracional, ja que té infinits nombres decimals no periòdics, i per tant la suma d'angles auris dins d'una circumferència no coincidirà mai amb l'inici.

[7] Veure resolució completa de l'equació a l'annex V (p. 94)

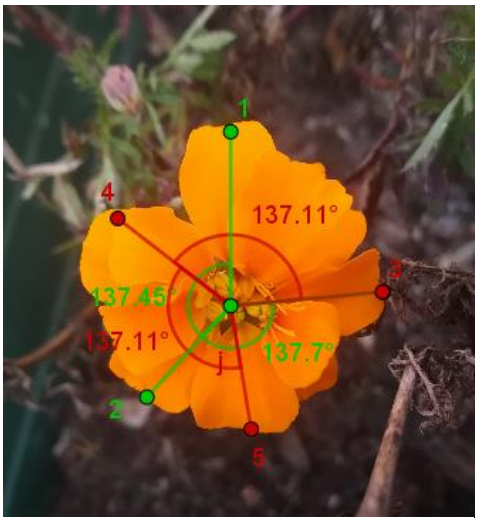
II. BLOC PRÀCTIC:

Treball de camp

4. LA PROPORCIÓ ÀURIA A LA NATURA

4.1. Botànica

Les flors busquen una distribució eficient dels seus pètals per tal de cobrir tota la circumferència sense que quedin espais buits ni es sobreposin entre ells, per tal d'exposar-se al màxim a la llum i a la humitat. Si l'angle que formen aquests elements entre ells és un nombre racional, els pètals acabarien un a sobre de l'altre i no optimitzarien l'espai. És per això que l'angle auri (137,5...º) és utilitzat per a moltes flors per a repartir els pètals de tal manera que mai coincideixin en el mateix punt.

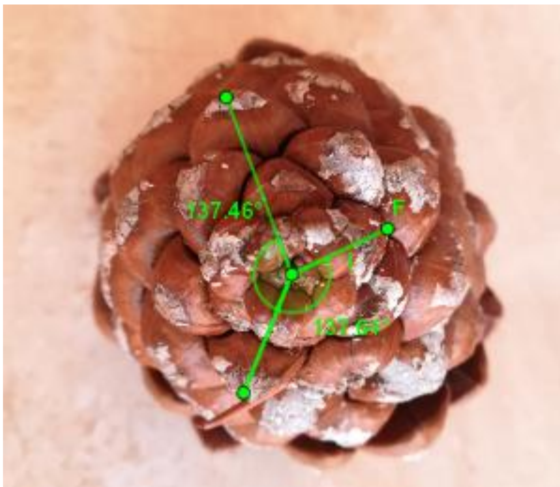


Imatge 6: Distribució dels pètals d'una flor, formant angles auris entre els consecutius.

La fil·lotaxis és la distribució ordenada de les fulles a la tija, constant en cada espècie. Algunes plantes tenen una proporció fil·lotàctica de 3/8 o de 2/5, és a dir, que utilitzant vuit fulles hauran completat tres voltes senceres, o amb cinc n'hauran fet dues. La relació amb el número d'or rau en que els quatre números mencionats formen part de la successió de Fibonacci.

Un fenomen similar apareix en la distribució de les escates de les pinyes. Aquestes formen espirals que comencen a la punta de la tija, i solen ser cinc, vuit, tretze o vint-i-un espirals, tots números de Fibonacci. Igualment, l'angle que formen les escates a mesura que van naixent és de 137,5...º, l'angle auri.

Imatge 7: Pinya amb vuit espirals.



Imatge 8: Distribució d'escates de la pinya, formant angles auris.

Els gira-sols també presenten una propietat relacionada amb el número d'or*:* la relació entre els espirals en sentit antihorari, normalment 55, i els espirals en sentit horari, que solen ser 34, s'aproxima a *phi (Φ).*

Imatge 9: Girasol amb 55 espirals en sentit antihorari.

Imatge 10: Girasol amb 34 espirals en sentit horari.

4.2. Cos humà

Des de l'època clàssica s'han fixat diferents cànons que serveixen per a determinar les mesures ideals de l'home. Un dels que s'ha utilitzat és la proporció àuria, que pot funcionar com a ideal de bellesa.

A continuació es comprovarà si la proporció àuria es troba present de forma habitual, o tal com deien els grecs només és un ideal.

Es presenten sis parelles de mesures on s'acostuma a trobar una relació àuria, fetes a sis individus diferents. En principi, si la relació entre aquestes parelles de mesures és similar[8] al nombre d'or es pot considerar ideal.

1	**Altura total/altura melic**		
Individu	Total	Melic	Relació
1	163	97'0	1'68
2	177	104	1'70
3	161	93'0	1'73
4	164	105	1'56
5	180	112	1'61
6	165	102	1'62

Taula 4

Tres persones s'aproximen a *phi (Φ)* en la relació entre l'altura total i l'altura fins al melic.

2	**Altura maluc/altura genoll**		
Individu	Maluc	Genoll	Relació
1	84'0	45'0	1'78
2	89'0	48'0	1'85
3	80'0	45'0	1'86
4	89'0	54'0	1'65
5	93'0	55'0	1'69
6	89'0	51'0	1'75

Taula 5

Només una persona s'aproxima a 1,618... dividint l'altura fins el maluc i l'altura fins al genoll.

[8] S'ha establert un error relatiu del 2'6%

3	**Espatlla–canell/espatlla-colze**		
Individu	Espatlla-canell	Espatlla -colze	Relació
1	56’0	35’0	1’60
2	58’0	35’0	1’66
3	53’0	33’0	1’61
4	55’0	33’0	1’67
5	63’0	38’0	1’66
6	57’0	33’0	1’73

Taula 6

En aquest cas, tres individus compleixen la proporció àuria al braç.

4	**Colze–dits/colze-canell**		
Individu	Colze-dits	Colze-canell	Relació
1	43’0	26’0	1’65
2	44’0	27’0	1’63
3	42’0	25’0	1’68
4	44’0	26’0	1’69
5	48’0	28’0	1’71
6	44’0	26’0	1’69

Taula 7

Dos dels participants s’aproximen a *phi (Φ)* pel que fa a la relació entre la distància del colze als dits i del colze al canell.

5	**Primera/segona falange dits**		
Individu	Segona	Primera	Relació
1	3’30	2’30	1’43
2	3’50	2’30	1’52
3	3’70	2’20	1’68
4	3’60	2’20	1’64
5	3’60	3’00	1’20
6	3’90	2’60	1’50

Taula 8

Tan sols una persona s’acosta al número d’or dividint la mesura de la primera falange dels dits entre la segona.

6	**Segona/tercera falange dits**		
Individu	Tercera	Segona	Relació
1	5’40	3’30	1’64
2	6’00	3’50	1’71
3	5’90	3’70	1’59
4	5’80	3’60	1’61
5	6’30	3’60	1’75
6	6’40	3’90	1’64

Taula 9

Quatre persones tenen la segona i tercera falange dels dits en proporció àuria.

Com s’ha pogut observar, el número d’or no apareix de forma constant en el cos humà. És més aviat una forma de mesurar la bellesa que pretén ser objectiva, però tot i així la percepció de la bellesa és subjectiva i per tant no acaba de ser un cànon ni universal ni atemporal.

4.3. Arbres genealògics

Leonardo Fibonacci va escriure el famós problema dels conills, que donava com a resultat una successió, posteriorment batejada amb el mateix cognom de l'autor. [9]

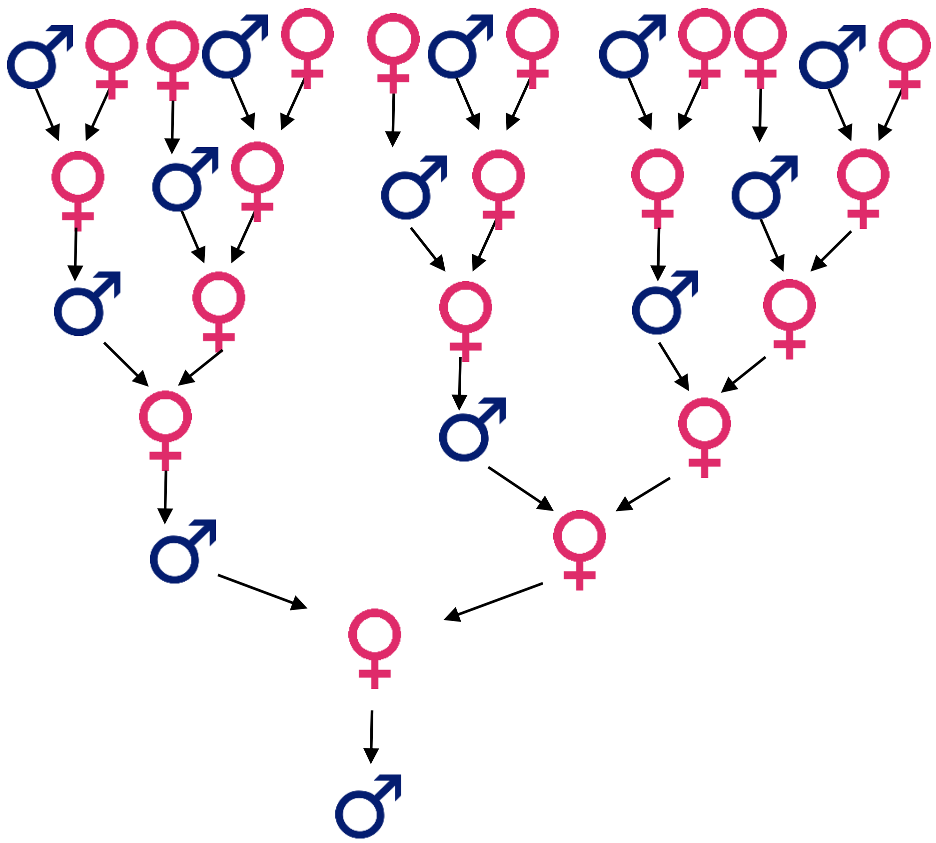
Tot i que el cas dels conills és un cas ideal i inventat, a la natura es pot trobar un animal que sí que segueix un patró semblant al descrit pel matemàtic italià: els abellots.

L'abella mascle neix a partir d'un ou de l'abella reina no fecundat, per tant només té un progenitor. En canvi, l'abella femella prové d'un ou que sí que ha estat fecundat per un abellot, i en conseqüència té "pare" i "mare".

Mirant l'arbre genealògic d'un abellot, s'observa que té una mare, dos avis, tres besavis, cinc rebesavis, vuit quadravis, tretze avis cinquens, etcètera, tots números de Fibonacci.

També formen part de la seqüència el número de mascles i femelles de cada generació. Per exemple, en els avis cinquens hi ha 8 abelles per a 5 abellots.

Per tant, la relació entre generacions tendeix a *phi (Φ),* igual que la divisió entre mascles i femelles d'una mateixa generació.



Imatge 11: Arbre genealògic d'un abellot.

[9] Veure 1.4. Fibonacci: la successió àuria (p.12)

5. LA PROPORCIÓ ÀURIA ALS OBJECTES QUOTIDIANS

La proporció àuria s'ha utilitzat en infinites ocasions per a mesurar la bellesa, o per a trobar un patró a totes les coses estètiques. Per això, els dissenyadors l'utilitzen per a fer certs objectes més atractius.

L' ús del número d'or en el disseny també és degut a la presència d'aquest en el cos humà, i per tant és una forma d'adaptar els productes a la mesura humana.

A continuació es mostren una sèrie d'objectes que presenten la proporció àuria en alguna forma.

Imatge 12: Violí. Segment superior: 21,8 cm. Segment inferior: 35,3 cm.

Imatge 14: Document d'identitat, 8,5 x 5,4 cm

Imatge 13: Ratolí d'ordinador inscrit en un rectangle auri.

Imatge 15: Bossa de la marca OneSixOne

Imatge 16: Tarjeta de crèdit

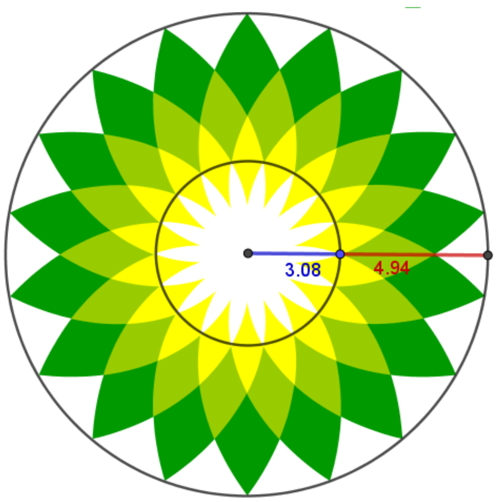
A la IX fira d'Invents de Vilanova i la Geltrú, l'any 2001, va presentar-se l'estenedor *Drymax,* les articulacions del qual estan en proporció àuria. L'objectiu era minimitzar l'espai i reduir el temps d'assecat.

Imatge 17: Estenedor Drymax

6. LA PROPORCIÓ ÀURIA A LA COMUNICACIÓ

Moltes marques aprofiten l'harmonia de la proporció àuria per als dissenys dels seus logotips. A continuació es mostren alguns exemples.

Imatge 18: Logotip de National Geographic. Es pot comprovar que la divisió entre els costats del rectangle interior (3,78 i 2,34) donen com a resultat 1,61538... que s'aproxima a Φ.



Imatge 19: Logotip de BP. La relació entre els dos segments marcats és 1,6039...

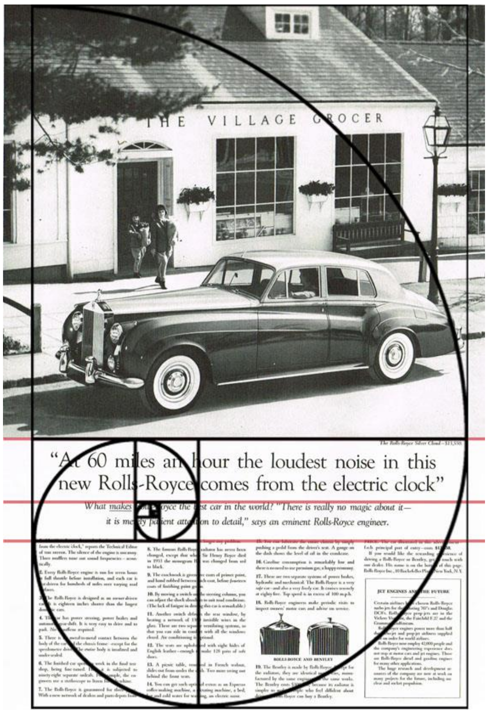
Alguns anuncis publicitaris també utilitzen una distribució basada en la proporció àuria per a captar l'atenció als possibles compradors.

Imatge 20: Anunci de CocaCola (2016)

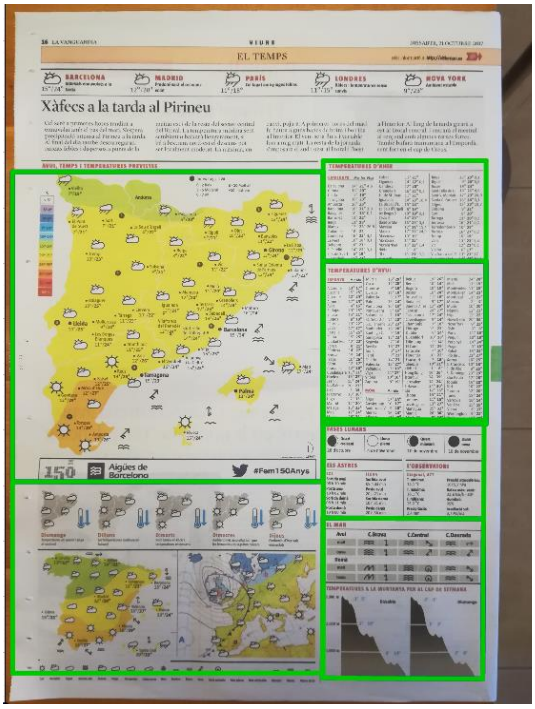
En aquest anunci s’utilitza la proporció àuria com a reclam publicitari, definint-la com a “bellesa objectiva”.

Imatge 21: Anunci Audi A5 (2010)

Els diaris la utilitzen com a eina visual en la distribució de les imatges i el text o de diferents elements.



Imatge 22: Plana d'un diari (1955)



Imatge 23: Secció del temps de la Vanguardia (2017)

7. LA PROPORCIÓ ÀURIA A L'ART

L'art té com a objectiu expressar la bellesa a través de formes, colors, sons... Alguns autors han optat per transmetre aquesta harmonia utilitzant el nombre d'or i la secció àuria.

Es troben obres amb proporció àuria en diferents camps, des de la pintura fins a la música, passant pel disseny gràfic, la música, la fotografia i l'arquitectura. A continuació es descriuen alguns exemples de cada tipus.

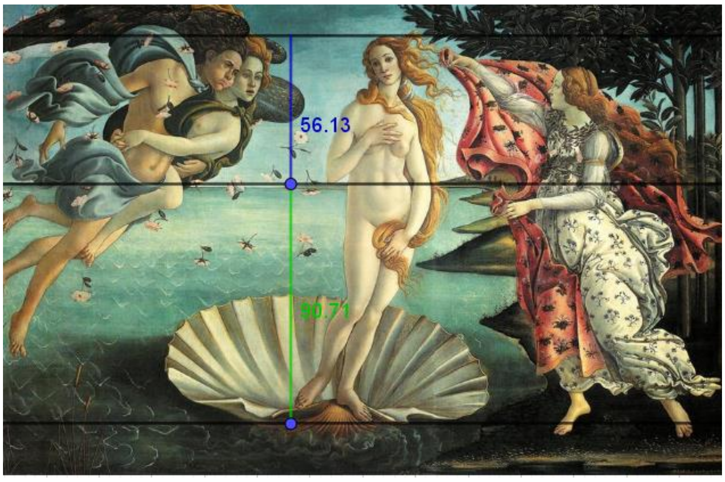
7.1. Pintura

La pintura és l'art que s'expressa a través dels colors, les formes i les línies amb una certa estètica. Una eina que han trobat els pintors de diferents èpoques per a plasmar la bellesa i l'harmonia és la proporció àuria.

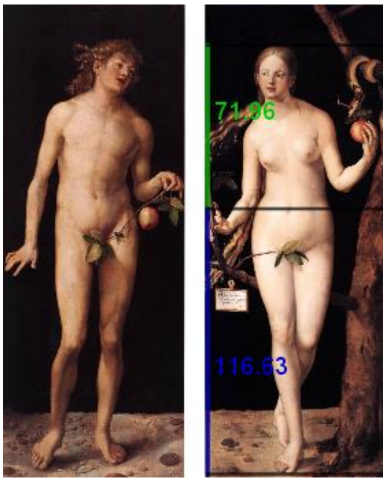
Els artistes del Renaixement s'interessen per les ciències, una d'ella les matemàtiques, i també busquen l'ideal de bellesa recuperant els cànons clàssics. La suma d'aquests dos factors fa que la secció àuria sigui bastant recurrent en les seves obres.

És el cas de Sandro Botticelli (1445-1510) en la seva obra *El naixement de Venus* (Imatge 24), on utilitza la secció àuria per a dividir el cos de Venus en dues parts: una del melic al cap de 56'13 cm i l'altra del melic als peus, de 90'71 cm. La relació entre els dos segments és 1'6161...

Albrecht Dürer (1471-1528) reparteix de la mateixa forma a Eva del seu quadre *Adam i Eva:* dels peus al melic fa 116'63 cm i del melic al cap 71'96, la divisió dels quals dóna 1'6208... (Imatge 25).

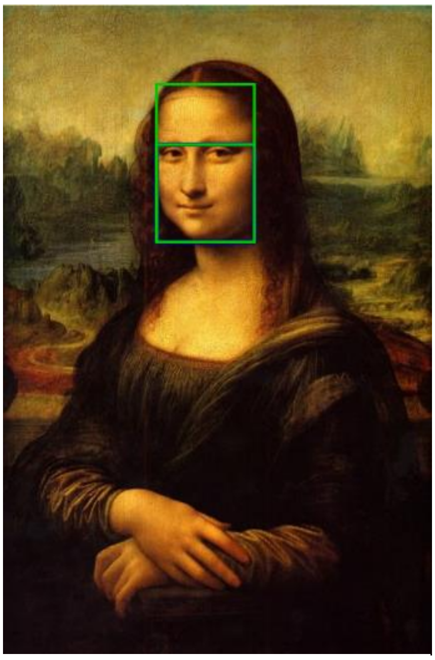


Imatge 24: El naixement de Venus, Sandro Botticelli (1482-1486)

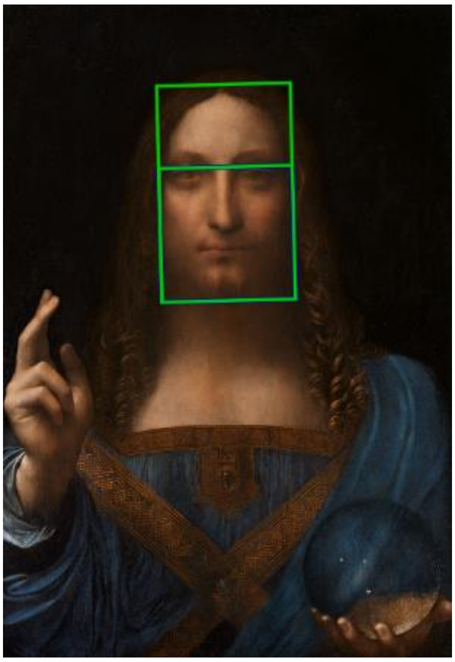


Imatge 25: Adam i Eva, Albrecht Dürer (1507)

La *Mona Lisa,* de Leonardo da Vinci (1452-1519), és un exemple de rostre auri perquè s'hi pot inscriure un rectangle d'or. Complint la propietat dels rectangles auris, si se n'extreu un quadrat la línia divisòria que resta queda a l'altura de l'arc supraorbital, formant un nou rectangle auri, que correspon al front del rostre (Imatge 27). El pintor fa servir la mateixa distribució per a la cara del *Salvator Mundi* (Imatge 26).

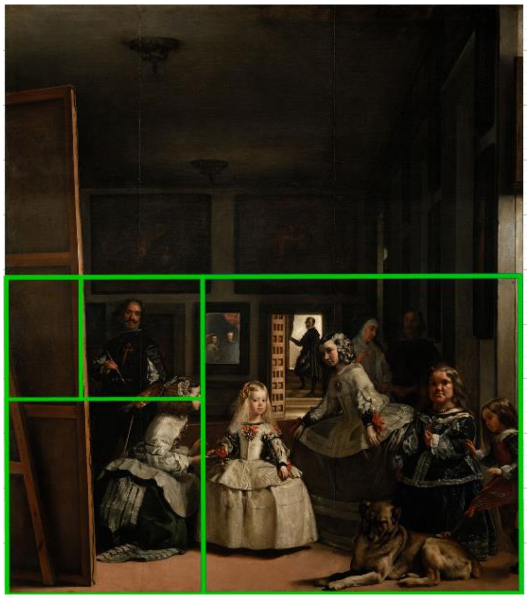


Imatge 26: Mona Lisa, Leonardo da Vinci (1503)



Imatge 27: Salvator Mundi, Leonardo da Vinci (1490)

A part del cos humà, la proporció divina també serveix per a distribuir l'espai d'un quadre. Velázquez (1599-1660) parteix de rectangles auris per a separar els personatges de *Las Meninas.*



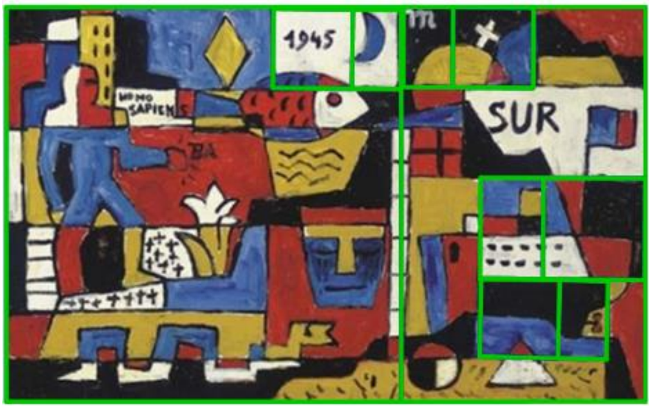
Imatge 28: Las Meninas, Diego Velázquez (1656)

Més endavant, al segle XX, l'art torna a utilitzar la proporció àuria.

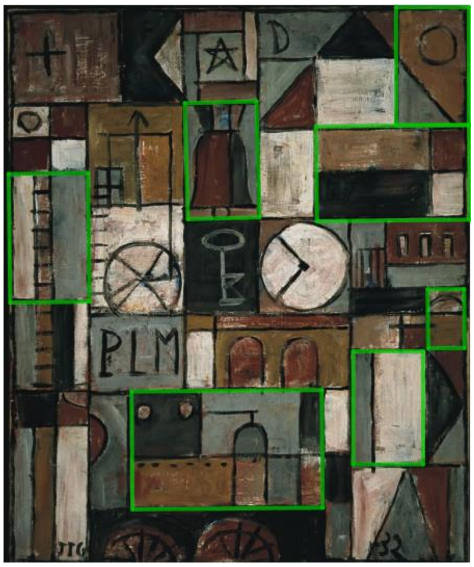
El cubisme és un moviment artístic que crea una interpretació totalment nova de la naturalesa: descompon els elements en parts mínimes, és a dir, figures geomètriques bàsiques. Per tant, els artistes d'aquest corrent relacionen de nou les matemàtiques amb la pintura.

L'any 1912, un grup de cubistes van organitzar una exposició anomenada *La Section d'Or,* fet que remarca la importància de les matemàtiques per a aquests artistes, tot i que no és té constància de que les obres exposades presentessin el número d'or.

Joaquín Torres García (1874-1949) , cubista uruguaià-català, fa ús del rectangle auri a *Homo Sapiens* i també a *Constructivo con Campana.*

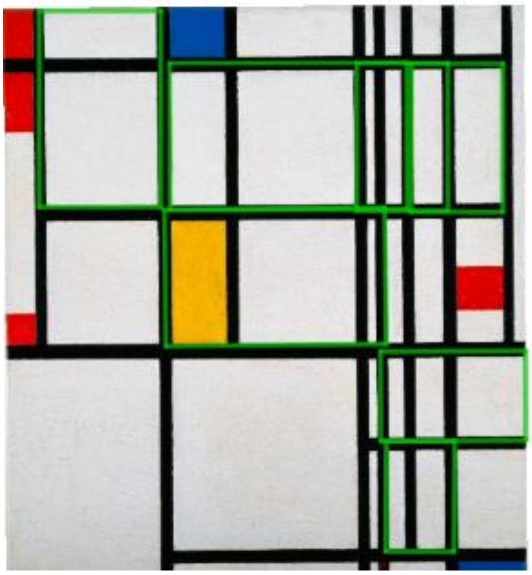


Imatge 30: Homo Sapiens, Joaquín Torres García (1945)

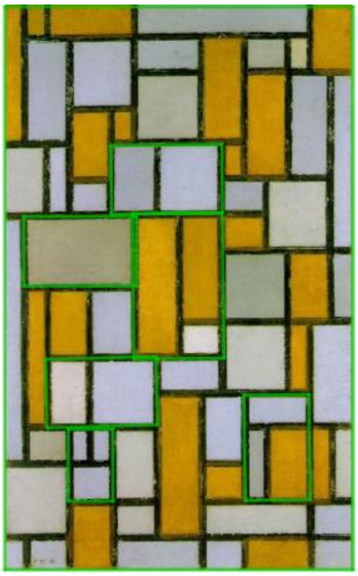


Imatge 29: Constructivo con Campana, Joaquín Torres García (1931)

Dins del corrent abstracte, Piet Mondiran (1872-1944) pinta dues composicions que contenen rectangles auris: *Composición en rojo, azul y amarillo* (Imatge 31) i *Composición con gris y luz tostada* (Imatge 32).



Imatge 31: Composición en rojo, azul y amarillo, Piet Mondrian (1937)

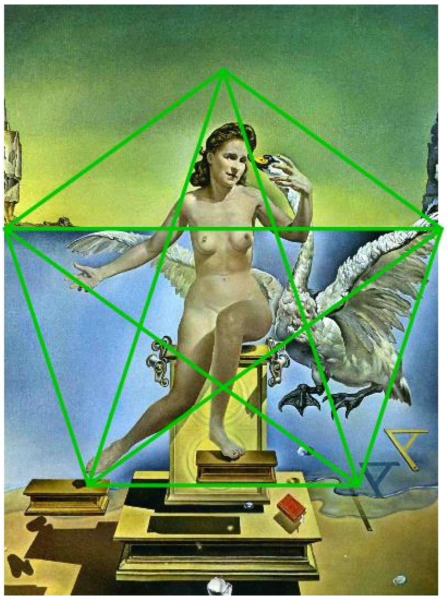


Imatge 32: Composición con gris y luz tostada, Piet Mondrian (1918)

Salvador Dalí (1904-1989) utilitza el pentàgon, que és una figura estretament lligada al número d'or, per la distribució de la seva obra *Leda Atòmica* (Imatge 34).

Tassa gegant volant, amb apèndix incomprensible de cinc metres de llarg (Imatge 33), del mateix pintor, és un rectangle auri dividit dues vegades, de manera que els elements encaixen en quadrats i es pot traçar un espiral auri.

Imatge 33: Tassa gegant volant, amb apèndix incomprensible de cinc metres de llarg, Salvador Dalí (1944)



Imatge 34: Leda Atòmica, Salvador Dalí (1949)

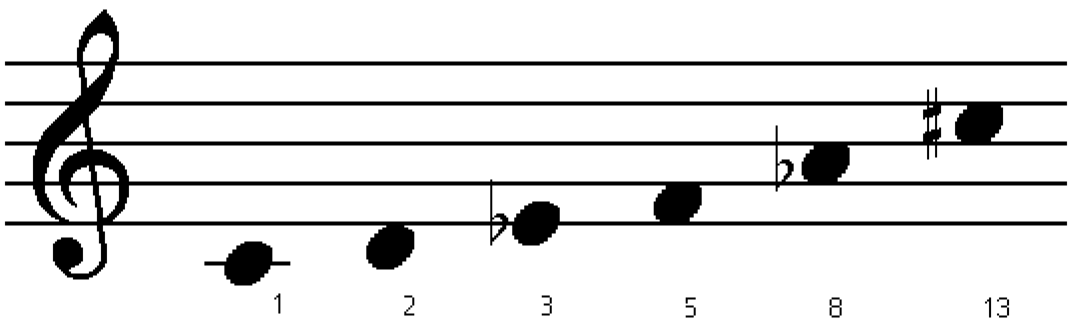
7.2. Música

La música és una forma d'art que s'expressa mitjançant l'ordenació dels sons en el temps. Per a distribuir les seves obres, alguns músics han utilitzat la proporció àuria.

Es creu que Mozart va utilitzar el número d'or per a dividir el primer moviment de la sonata nº1 en Do major K.279, que consta de 100 compassos. La primera secció, que correspon a l'exposició, són els primers 38 compassos. La segona part, els 62 restants, formen part del desenvolupament i la reexposició.[10] La divisió entre 62 i 38 dóna 1'6316... que s'aproxima a *phi (Φ)*

Tot i que en l'exemple anterior no es té constància de que fos un ús conscient de la proporció àuria, sí que és evident que el músic Bela Bartok utilitzava de forma habitual els recursos matemàtics en les seves obres, com ara la successió de Fibonacci. És el cas del primer moviment de *Música per a cordes, percusió i celesta,* que consta de 88 compassos i que arriba al seu punt culminant al compàs 55. Dividint els dos números, s'obté una aproximació a *phi (Φ):* 1'6.

El seu interès per a les matemàtiques, va fer crear a Bartok una escala musical basada en els números de Fibonacci:



Imatge 35: Escala de Fibonacci

Com a últim exemple, Joan Serra, un compositor mallorquí, va compondre una obra electrònica basada en intervals relacionats amb la successió de Fibonacci, fruit d'un encàrrec per l'any mundial de les matemàtiques (2000).

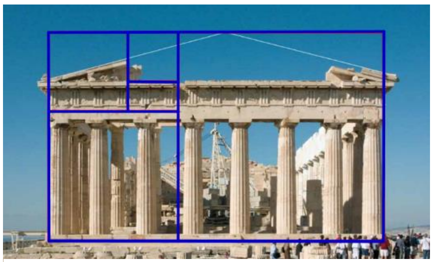
[10] L'exposició, el desenvolupament i la reexposició són les tres parts que caracteritzen una sonata.

7.3. Arquitectura

L'arquitectura és l'art de dissenyar, projectar i construir edificis. Moltes vegades s'inspira en formes de la naturalesa, i per tant la proporció àuria hi apareix constantment com a eina per a donar equilibri i harmonia a les construccions.

Una forma d'utilitzar-la és en forma de rectangle auri com a façana de l'edifici.

Es poden trobar arquitectes de l'antiguitat que van utilitzar la proporció divina en la construcció de temples, no se sap si conscientment o no. És el cas del Partenó d'Atenes. Com es veu, la façana es pot inscriure en un rectangle auri (Imatge 36).



Imatge 36: Partenó d'Atenes, Fídies (s.V a. C)

També existeixen edificis contemporanis amb una façana àuria, com és el cas de la seu de la Organització de les Nacions Unides (ONU), a Nova York. Aquest edifici va ser dissenyat utilitzant el Modulor de Le Corbusier, i per això la proporció àuria també apareix a l'entrada i a les finestres (Imatge 37).

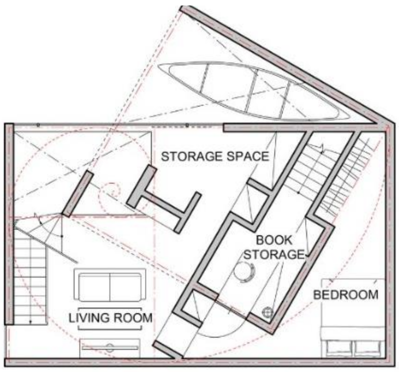
Imatge 37: Seu de l'ONU, W. Harrison (1947)

Le Corbusier també va fer servir el seu sistema per a dissenyar alguns projectes. Un d'aquests és la Casa Curutchet, que a part de tenir un rectangle auri com a part de la façana també inclou altres elements relacionats amb el número d'or a l'interior.

Imatge 38: Casa Curutchet, La Plata (1948)

Altres arquitectes han aplicat la proporció àuria a les plantes de les seves construccions.

És el cas de Takato Tamagami, que va projectar una casa utilitzant rectangles auris inscrits com a planta. A partir d'aquests es dibuixa un espiral auri que permet una distribució espacial única i molt pràctica (Imatge 39).



Imatge 39: Northern Nautilius, T.Tamagami (2013)

Antonio Cazorla és un arquitecte català autor del projecte de la Casa Fibonacci, una vivenda unifamiliar que té forma de tub amb una secció del rectangle auri (Imatge 40). [11]

Imatge 40: Casa Fibonacci, Antonio Cazorla (2011)

El segment auri va ser utilitzat per a edificar la Torre CN (Canadian National), a Toronto. L'edifici, de 553.33 m en total, està dividit en dues parts: una base de 342 metres i una antena de 211,33 m. La divisió entre el total i la base, i entre la base i l'antena, donen un mateix número: *phi (Φ)* (Imatge 42).

Igualment, es pot trobar proporció àuria en edificis corrents, com per per exemple angles auris en frontons triangulars (Imatge 41) o rectangles en finestres (Imatge 43).

Imatge 41: Església Parroquial de Sant Andreu, Tona (s.XVIII-XIX)

Imatge 42: Torre CN, WZMH Architects (1973-1976)

Imatge 43: Finestres de la papereria Araujo & Sobrinho a Porto, Portugal (1829)

[11] Veure l'entrevista a Antonio Cazorla a la pàgina 51.

8. ENTREVISTA


Imatge 44: Antonio Cazorla

Antonio Cazorla és un arquitecte nascut el 1973 a Barcelona. És col·legiat pel Col·legi Oficial d'arquitectes de Catalunya. Entre els seus mèrits destaquen: Títol d'Arquitecte per la E.T.S. d'Arquitectura de Barcelona (Universitat Politècnica de Catalunya) (2000), Beca Sòcrates-Erasmus a la Universitá degli Studi di Firenze. Florència, Itàlia (1998-99), Màster en estructures arquitectòniques per la Fundació Politècnica de Catalunya) (2004-06), Cursos d'infografia y 3DStudio Max a l' Escola d'Arquitectura La Salle (Universitat Ramon Llull), Desenvolupament de més de 60 projectes propis i direccions d'obra, col·laboració en diverses promocions de 220 cases a Sant Cugat, Ajuntament de Gelida (Barcelona) i guarderies a Catalunya.

Té en compte la proporció àuria sempre que dissenya un edifici?

No sempre. És un medi que pot ajudar a resoldre l'encaix de proporcions en moltes ocasions junt amb d'altres decisions.

Creu que la proporció àuria s'utilitza de forma inconscient en l'arquitectura?

Penso que pot donar-se aquest cas, ja que són proporcions que veiem en la natura, al nostre cos, en obres d'art. Quan fem proporcions de figures geomètriques és probable que ens apropem a la proporció àuria de forma inconscient.

El seu ús és estètic o funcional?

La finalitat no la justificaria com una o altra cosa i penso que hauríem de superar aquesta dicotomia. Tots els objectes tenen una part de la seva funció lligada al que podríem dir que és estètic i al contrari. Penso que l'etiqueta "estètic" té encara entre molta gent una connotació banal, supèrflua, de la que es va pensar que es podia separar de la seva funció, etc. i jo penso que encara que no volem, forma, textura, color, funció, etc. són parts inseparables del conjunt de qualsevol edifici, objecte. La imatge que rebem del nostre entorn ens dóna una informació que hem de descodificar amb tot el que hem après. Podríem fer una casa totalment funcional a tots els efectes però amb una "estètica" o imatge que fos un problema per comunicar per exemple que és una casa, entre d'altres. Moltes vegades donem moltes coses per òbvies o certes quan no ho són. Segons el meu criteri no és tan senzill separar forma i funció.

Pensa que sempre s'ha utilitzat o ha patit èpoques on ha caigut en desús?

Sí, depèn del coneixement que ens arriba a les escoles, mitjans de comunicació, etc. Del nostre moment històric.

Per què va decidir seguir el número d'or en la construcció d'una casa unifamiliar?

Penso que millorava el projecte al tenir més rigor geomètric i connectar-lo amb una llei geomètrica present a la natura.

II. BLOC PRÀCTIC:
Disseny d'un edifici amb proporció àuria

9. INTRODUCCIÓ

L'arquitectura és una de les manifestacions més destacades de la proporció àuria. Com ja s'ha vist en l'apartat anterior, alguns edificis presenten elements com el rectangle, el triangle, l'angle o la secció àuria, ja que és una eina que aporta harmonia i proporcionalitat a les estructures.

Com a demostració de la utilitat de la proporció àuria en l'arquitectura, es presenta el procés de disseny d'una biblioteca que utilitza com a base per a la seva distribució i forma el número d'or.

La raó per haver elegit fer una biblioteca i no un altre edifici és que aquesta és un espai públic i d'ús cultural. Aquesta funció està molt lligada amb el número d'or, perquè *phi (Φ)* ha sigut i és una eina molt utilitzada en diferents elements de les cultures, com poden ser les obres d'art o els edificis.

Una segona raó és que els requisits d'una biblioteca pel que fa a equipaments que ha de tenir són més reduïts que en altres tipus d'edificis, per tant és més senzill i permet més llibertat a l'hora de dissenyar.

L'objectiu principal del bloc pràctic és demostrar que la proporció àuria és una eina útil en l'arquitectura perquè aporta harmonia i unitat al conjunt.

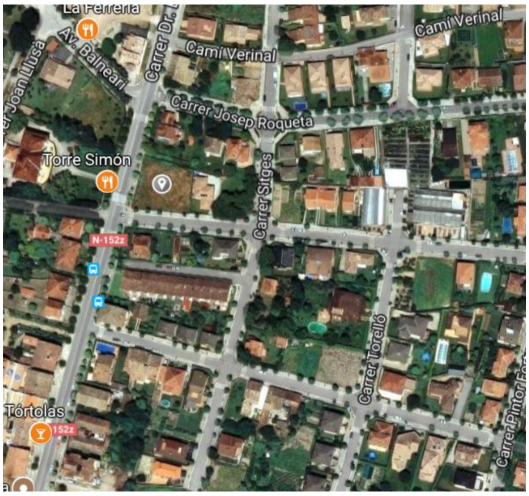
També es pretén aprendre a treballar amb programes de disseny arquitectònic i a construir maquetes.

A continuació es detalla tot el procediment seguit: l'elecció de la situació, els plànols de l'edifici, els materials utilitzats per a la maqueta i el procediment de construcció.

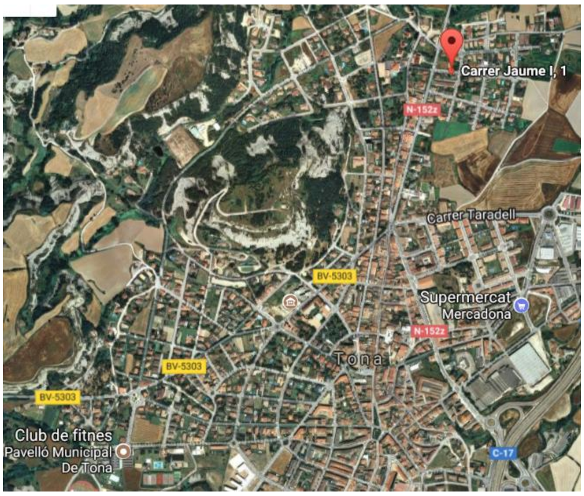
11. SITUACIÓ

La ubicació elegida[12] per a la biblioteca és la cantonada del carrer Doctor Bayés, 44 amb el carrer Jaume I, 1-3, 08551 Tona, Barcelona. És una zona propera al centre però molt accessible, ja que queda a l'entrada nord del poble.

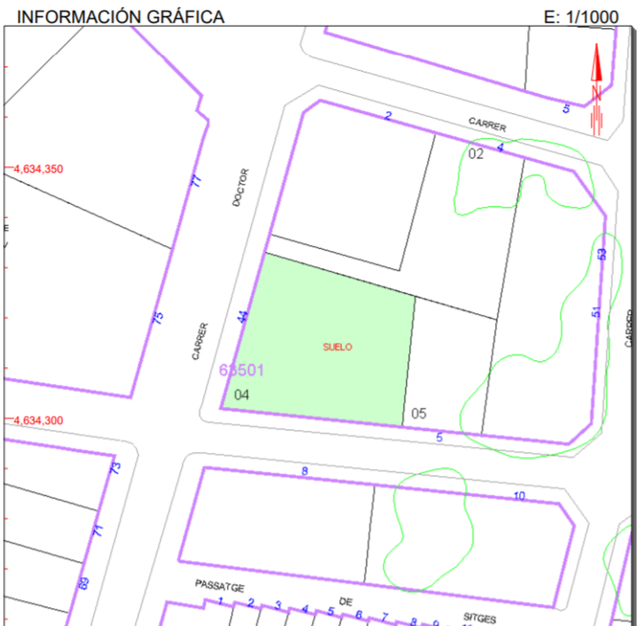
La façana principal es troba orientada cap al sud, al carrer Jaume I. La superfície és de 978 m².



Mapa 1: Situació dins del barri



Mapa 2: Situació de la biblioteca dins de Tona



Mapa 3: Informació catastral del terreny

[12] Referència catastral: 6350104DG3365S0001JG

12. CARACTERÍSTIQUES

12.1. Condicionants tècnics

S'ha dissenyat l'edifici d'acord amb el POUM (Pla d'Ordenació Urbanística Municipal) de Tona[13], que dictamina la normativa de construcció pel que fa a la separació entre edificis, l'espai lliure de construcció, el nombre de plantes, la façana mínima, la fondària mínima i d'altres.

La distribució de les diferents zones de la biblioteca s'ha inspirat en les recomanacions recollides en el Pla d'equipaments culturals de Catalunya (2010-2020)[14], tot i que la superfície de cada zona s'ha adaptat al projecte present, concebut a partir de la proporció àuria.

12.2. Descripció

L'entrada dóna accés a la zona principal, el lavabo i la zona de treball intern. Aquesta té un magatzem, un espai d'oficina i un espai diàfan amb una porta que comunica amb l'exterior per a facilitar l'arribada de material nou.

La zona principal inclou un espai de lectura polivalent, un d'estudi convencional i el fons bibliotecari per a facilitar l'accés directe als llibres. Comunica amb un jardí destinat a la lectura a l'aire lliure, amb bancs i arbres, que garanteix la tranquil·litat dels usuaris i alhora pot acollir actes culturals diversos.

[13] http://ptop.gencat.cat/rpucportal/AppJava/cercaExpedient.do?reqCode=veureDocument&codintExp=254143&fromPage=load i modificació: http://ptop.gencat.net/rpucportal/AppJava/cercaExpedient.do?reqCode=veureDocument&codintExp=268092&fromPage=load

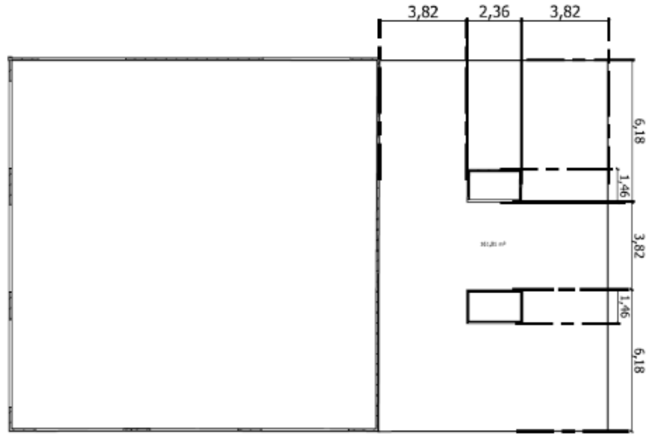
[14] http://cultura.gencat.cat/web/.content/dgcc/08_Serveis/Publicacions/documents/arxiu/pec_26_01_11.pdf

13. PLÀNOL

Planta:

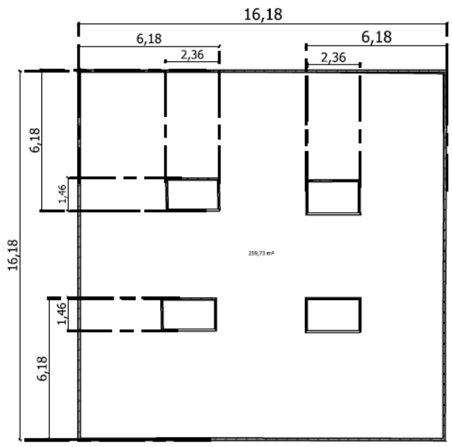
Plànol 1

Sostre mòdul secundari:



Plànol 2

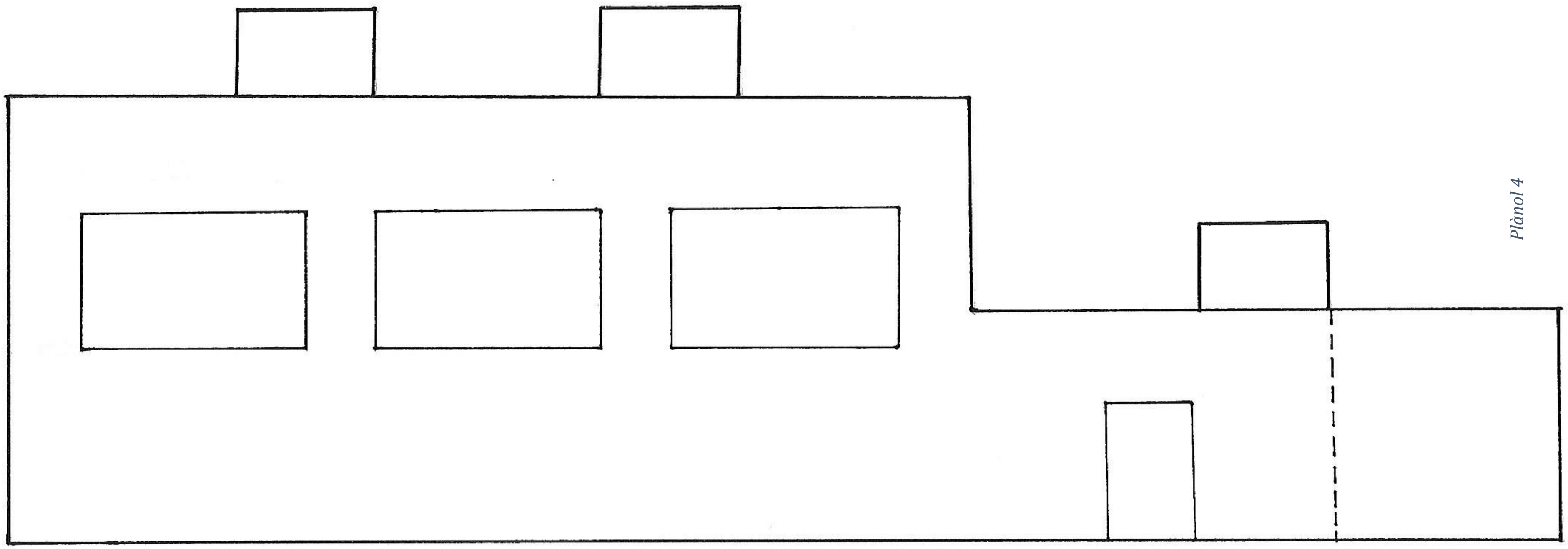
Sostre mòdul principal:



Plànol 3

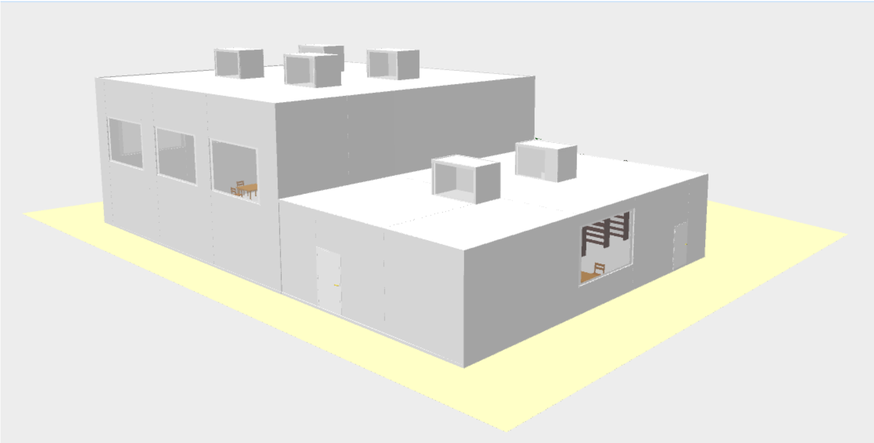
Façana sud

Escala 1:100



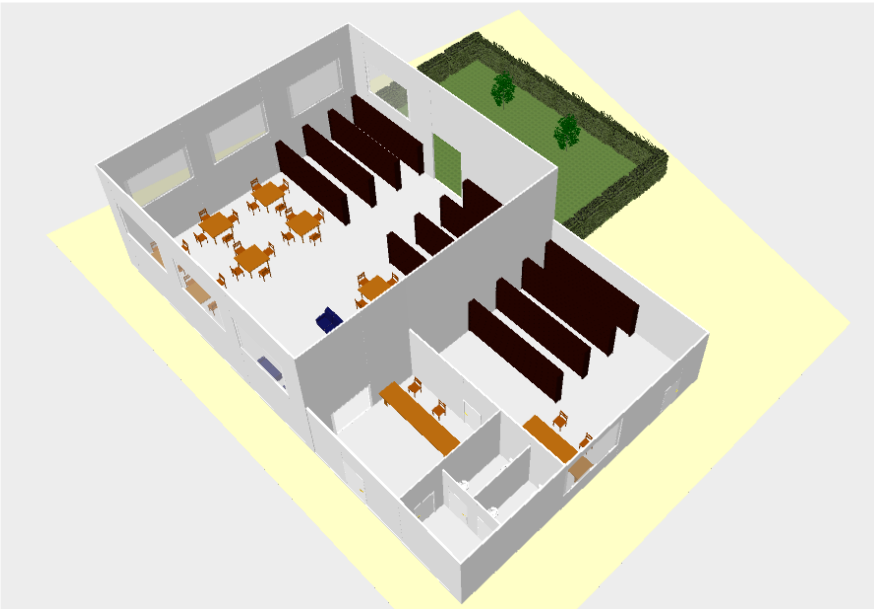
Plànol 4

Vistes 3D:



Imatge 45

Imatge 46



Imatge 47

14. MAQUETA

14.1. Materials i pressupost

Material	Preu/unitat	Unitats	Total
Cartró ploma	7,10 €	2	14,20 €
Cola	4,91 €	1	4,91 €
Fusta de balsa (planxa 100 x 10 cm)	2,86 €	2	5,72 €
Fusta de balsa (llistó 100 x 1 cm)	3,00 €	2	6,00 €
Arbres	2,50 €	4	10,00 €
Quadrats de fusta	4,20 €	1	4,20 €
Barres de silicona	1,66 €	1	1,66 €
Cartolina 50 x 25 cm	0,45 €	1	0,45 €
Esponja per a vegetació	8,79 €	2	17,58 €
Total			**64,72 €**

Taula 10

14.2. Procediment

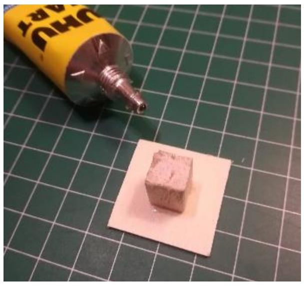
A continuació es detalla el procediment de construcció de la maqueta a escala 1:50.

14.2.1. Fabricació dels mobles

Taules (2’8 cm x 2’8 cm x 1,55 cm), 10 unitats:

1. Tallar les potes de fusta de balsa de 1’3 cm d’alçada.

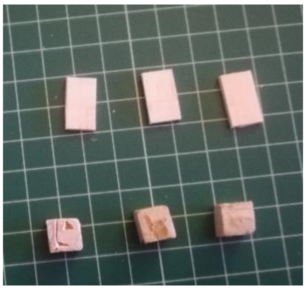
Imatge 48



Imatge 49

2. Enganxar una pota al centre de cada superfície quadrada de 2’8 cm de costat i 0’15 mm de gruix.

Cadires (1 cm x 1 cm x 1,8 cm), 40 unitats:



Imatge 50

1. Tallar el seient de fusta de balsa de 0’85 cm de gruix.
2. Tallar el respatller de 1 cm d’amplada, 0’15 cm de gruix i 1’8 cm d’alçada.

Imatge 51

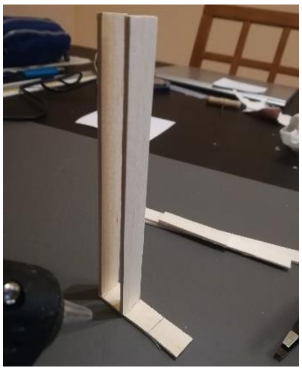
3. Enganxar el seient per la banda quadrada al respatller.

Prestatgeries (12 cm x 1’2 cm x 4’7 cm), 12 unitats:

1. Tallar els prestatges de 12 cm de llarg, 1’2 d’ample i 0’15 cm de gruix.
2. Tallar els suports verticals de 4’7 cm d’altura, 1’2 d’ample i 0’15 cm de gruix.

Imatge 52

3. Enganxar de forma perpendicular quatre prestatges a un suport, un a cada extrem i dos separats per 1’6 cm.



Imatge 53

4. Enganxar un segon suport a l’altre extrem de les prestatgeries.

Imatge 54

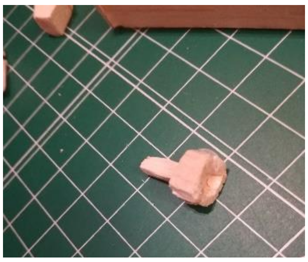
Vàters (0,7 cm x 1 cm x 2 cm), 2 unitats:

1. Tallar una peça de fusta de balsa de 1 cm d’ample, 1 cm de gruix i 1 cm d’alçada.
2. Tallar la peça donant-li forma de vàter.
3. Tallar una peça de 1 cm d’ample, 0’15 cm de gruix i 1 cm d’alçada amb dos cantons arrodonits, que servirà de tapa.
4. Enganxar la tapa perpendicular al vàter.

Imatge 55

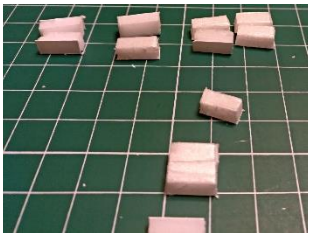
Piques (1’2 cm x 1 cm x 2 cm), 2 unitats:

1. Tallar una peça de fusta de balsa de 1,2 cm d’ample, 1 cm de gruix i 2 cm d’alçada.
2. Tallar la peça donant-li forma de pica.

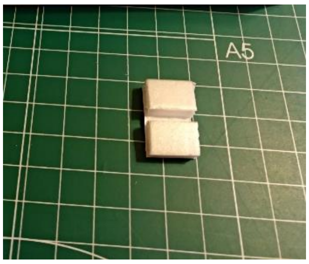


Imatge 56

Sofàs (3 cm x 1'5 cm x 1'8 cm), 6 unitats:

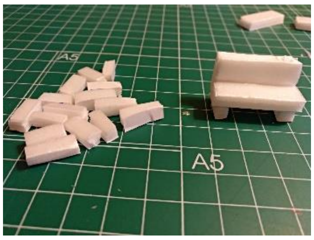

Imatge 58

1. Tallar rectangles de cartró ploma de 3 cm d'ample i 3'5 cm de llarg.



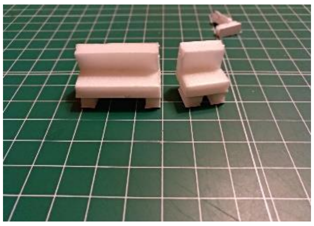
Imatge 59

2. Realitzar un tall de 5 mm al mig del rectangle i doblar-lo posant cola al tall.



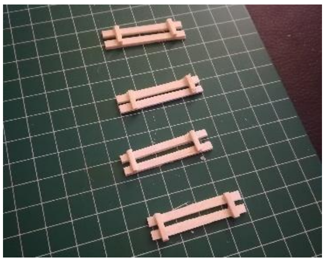
Imatge 60

3. Tallar potes de 0'5 cm d'alçada i enganxar-les per sota.

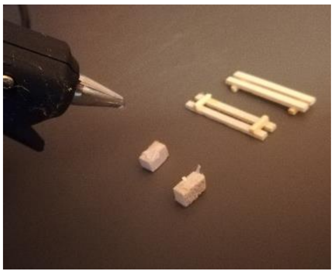

Imatge 61

4. Tallar dos dels sofàs per la meitat per tal d'obtenir-ne de petits.

Bancs (4 cm x 1 cm x 1'8 cm), 2 unitats:


Imatge 62

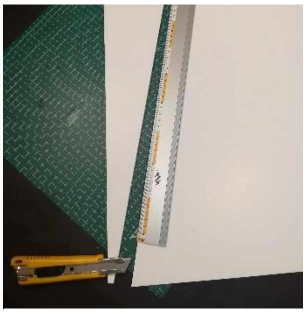
1. Tallar vuit tires de fusta de 4 cm de llarg i 3 mm de gruix.
2. Tallar vuit tires de 2 mm de gruix i 1 cm de llarg. Ajuntar-les amb les anteriors.


Imatge 63

3. Tallar potes de 0'8 cm d'alçada.
4. Ajuntar les tres parts.

14.2.2. Confecció de la base

1. Marcar les mesures del terreny sobre un cartró ploma i tallar el sobrant.



Imatge 64

2. Marcar el plànol sobre la base tallada.

Imatge 65

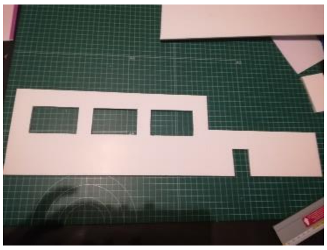
14.2.3. Confecció de les parets

Façana sud:

1. Marcar un rectangle de 53’36 cm de llarg i 14’78 d’alçada i tallar-lo.
2. Retirar un rectangle de 20’5 cm de llarg i 7’64 cm d’alçada de la banda de dalt a la dreta.

Imatge 66

3. Tallar la porta i les tres finestres.

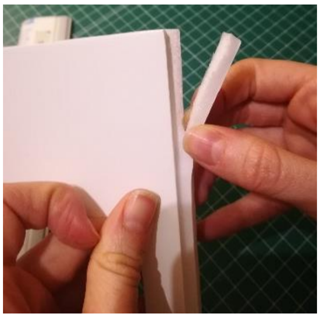


Imatge 67

4. Marcar un marge de 0’5 cm per banda.

Imatge 68

5. Fer un tall sobre la marca, sense acabar de travessar el cartró, per a retirar el farciment.



Imatge 69

6. Posar cola a la pestanya que queda i doblar-la per tal de tapar el costat de la paret.

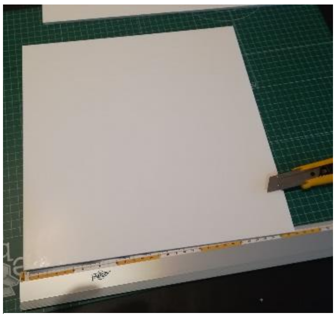
Imatge 70

Repetir el mateix procediment per a la resta de parets:

- Paret nord (53’36 cm x 14’78 cm)
- Paret oest (32’36 cm x 14’78 cm)
- Paret est (32,36 cm x 7’14 cm)
- Paret interior 1 (32’36 cm x 14’78 cm)
- Paret interior 2 (20 cm x 7’14 cm)
- Paret interior 3 (12’36 cm x 7’14 cm)
- Paret interior 4 (7’65 cm x 7’14 cm)
- Paret interior 5 (7’62 cm x 7’14 cm)

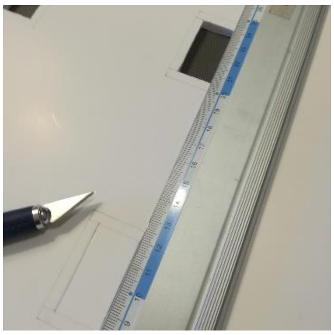
14.2.4. Confecció del sostre

1. Marcar i tallar una superfície quadrada de cartró ploma de 32,36 cm de costat i una de 32,36 cm x 20 cm.



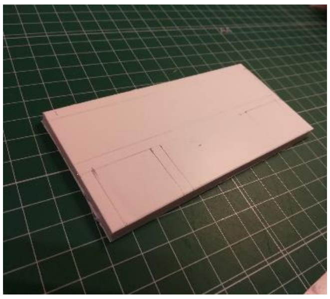
Imatge 71

2. Marcar quatre rectangles de 2’92 cm d’alçada i 4’72 cm d’amplada al sostre quadrat i dos al sostre petit i fer-li un marc interior de 5 mm.



Imatge 72

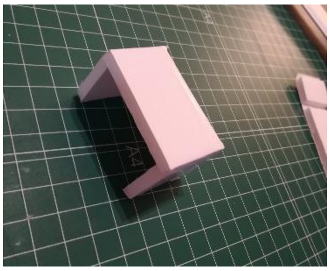
3. Per a les claraboies, marcar un rectangle de 4’72 cm x 2’92 cm. Després, a cada costat, deixar un espai de 5 mm i a continuació un quadrat de 2’92 cm de costat. Finalment, a dalt, deixar un marge de 5 mm i marcar un rectangle igual que el primer.


Imatge 73

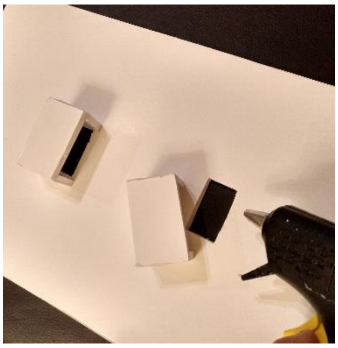
4. Buidar els marges de 5 mm i tallar el sobrant.


Imatge 74

5. Enganxar la peça formant una claraboia amb una obertura mirant al sud.

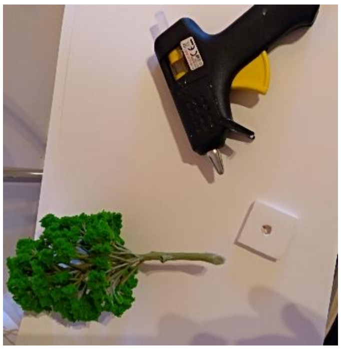

Imatge 75

6. Repetir el procediment per a obtenir sis peces i enganxar-les a cada obertura del sostre.


Imatge 76

14.2.5. Elements del jardí

1. Per als arbres, tallar una superfície quadrada de 3 cm de costat i fer-hi un forat al mig.


Imatge 77

2. Per als arbustos, tallar dos rectangles de cartró ploma de 3 cm d'altura i de 18'2 cm de llargada, i un de 3 cm d'altura i 32'36 cm de llargada.


Imatge 78

3. Recobrir-los amb l'espuma per a vegetació.


Imatge 79

14.2.6. Muntatge

1. Enganxar les parets exteriors a la base, excepte la façana sud.


Imatge 80

2. Enganxar les parets interiors.


Imatge 81

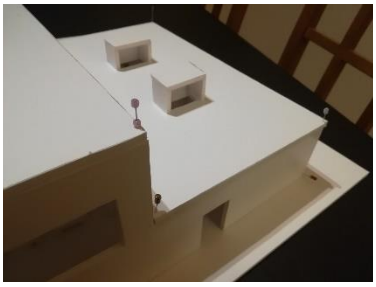
3. Enganxar els mobles.


Imatge 82

4. Enganxar els elements del jardí.


Imatge 83

5. Col·locar agulles al sostre i a la façana sud per tal de poder posar i treure aquestes parts i veure l'interior.



14.2.7. Resultat


Imatge 85


Imatge 84


Imatge 86


Imatge 87

15. RESULTATS

La realització de tot el procés de disseny d'una biblioteca àuria ha permès entrar en el món de l'arquitectura, encara que sigui en les primeres fases del procés de construcció d'un edifici.

És sorprenent la importància que prenen factors com la orientació a l'hora de situar els diferents espais i les obertures, sumant-hi la dificultat d'adequar-se a la normativa vigent.

El disseny dels plànols no ha resultat especialment dificultós gràcies a la premissa d'utilitzar la proporció àuria tant en les mesures dels espais com en la distribució dins de les sales, i ha servit per a facilitar la col·locació dels elements d'una forma harmònica, formant un conjunt unit.

També cal destacar la importància de dominar els programes de disseny arquitectònic però també el dibuix tècnic, que és la base de l'arquitectura. Per construir la maqueta cal saber fer servir les eines adequades amb cura i precisió per a tallar i enganxar el material, que també ha de ser específic per a realitzar maquetes.

La maqueta ha sigut la part més laboriosa, però també la més amena. Requereix moltes hores de preparació dels mobles i parets, càlculs per a fer la maqueta a escala 1:50, així com molta precisió en les mesures perquè quedi ajustada.

En resum, tot i que el disseny d'un edifici sigui un procés molt ampli i amb molts factors a tenir en compte, la proporció àuria ha servit com a eina per a dissenyar una estructura compacta i harmònica.

16. CONCLUSIONS

Un cop finalitzat el treball, s'hauria de concloure amb una frase de l'estil: "La proporció àuria es troba a tot arreu, fins i tot als llocs més inesperats". De fet, és el resultat que s'espera aconseguir estudiant aquesta proporció, però que no ha estat així.

És molt difícil, per no dir impossible, determinar amb exactitud si els elements de la natura, siguin plantes o persones, segueixen la proporció àuria, ja que cada ésser és únic i lleugerament diferent als altres de la seva espècie. Per tant, el número d'or és més un model ideal i no pas un patró constant.

On sí que resulta més senzill saber si s'ha utilitzat *phi (Φ)* és en tot allò creat per l'ésser humà. Molts artistes o dissenyadors es serveixen del nombre d'or per a les seves obres. La seva funció és estètica, perquè provoca una sensació d'harmonia i proporcionalitat, perquè es troba bell allò que un està acostumat a veure, i forma part de l'ideal de bellesa de la seva cultura, que va variant d'una època a l'altra.

Potser per aquesta exposició continuada a les formes àuries se'n fa un ús inconscient. Molts dels exemples descrits no constaven com a auris, i tot i així les seves proporcions s'hi aproximen. També s'han trobat casos contraris, on certes obres d'art o dissenys suposadament auris no complien amb les proporcions, o eren massa rebuscades per a ser exemples clars.

El punt anterior porta a parlar dels grans mites i misteris del nombre d'or. La proporció àuria és, en primer lloc, un fenomen matemàtic, descrit en l'època clàssica, que serveix per a calcular volums dels sòlids platònics, està present en el pentagrama, està estretament lligat amb la successió de Fibonacci i té unes propietats úniques i increïbles. Aquests són els únics fets que s'han pogut demostrar, juntament amb l'ús que n'han fet els artistes que ho han afirmat. La resta, com la seva presència a la natura, no es pot confirmar al 100% i fa que sorgeixin mites que només serveixen perquè perdi la seva base matemàtica.

Per tant, s'hauria de deixar de veure la proporció àuria com a una forma d'expressió constant en tot l'entorn, i concebre-la com a una eina matemàtica per a aconseguir harmonia, així com valorar més les seves propietats com a nombre.

Com s'ha explicat en l'apartat anterior, s'ha pogut constatar que la proporció àuria pot ser una eina molt útil en l'arquitectura, que ha permès dissenyar una biblioteca i construir-ne una maqueta. També s'ha vist la importància de factors com la orientació de l'edifici, així com de dominar els programes de disseny i els materials per a realitzar la maqueta.

Tot i haver resolt moltes de les preguntes formulades a la introducció, s'han obert nous interrogants aparentment irresolubles que animen a continuar estudiant la proporció àuria, una constant omnipresent.

17. FONTS UTILITZADES

17.1. Bibliografia i webgrafia

- AJUNTAMENT DE TONA: Pla d'Ordenació Urbanística Municipal, <http://www.tona.cat/ajuntament-seu-electronica/informacio-oficial/planejament-urbanistic/pla-dordenacio-urbanistica-municipal> [consulta: 15/08/2017]
- ARC ARQUITECTURA: 10 principios básicos para el buen diseño de una vivienda: Factores de eficiencia energética, <http://www.arc-arquitectura.es/10-principios-basicos-para-el-buen-diseno-de-una-vivienda-factores-de-eficiencia-energetica/> [consulta: 15/08/2017]
- ARQHYS ARQUITECTURA: El Modulor- Le Corbusier, <http://www.arqhys.com/articulos/el-modulor-corbusier.html> [consulta: 02/08/2017]
- ARQUIVALL: Arquivall, <http://www.arquivall.com/cat/acercade.htmlZ [consulta: 27/08/2017]
- ARTNET: Homo Sapiens, <http://www.artnet.com/WebServices/images/ll00032lldn0SGFgUNECfDrCWvaHBOc4nJC/joaqu%C3%ADn-torres-garc%C3%ADa-homo-sapiens---constructivo-en-5-tonos.jpg> [consulta: 01/11/2017]
- ASTROLOGÍA MUNDIAL: Johannes Kepler y los sólidos Platónicos, <http://www.astrologiamundial.net/2010/10/johannes-kepler-y-los-solidos.html> [consulta: 02/08/2017]
- BIOGRAFÍAS Y VIDAS: Le Corbusier, <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/c/corbusier.htm> [consulta: 02/08/2017]
- BLOK DE BID: El diseño del espacio de la biblioteca pública: un lugar común de aprendizaje, inspiración, creación y participación de la comunidad, <http://www.ub.edu/blokdebid/es/content/el-diseno-del-espacio-de-la-biblioteca-publica-un-lugar-comun-de-aprendizaje-inspiracion> [consulta: 15/08/2017]
- BP GLOBAL: Logotip, <https://www.bp.com/> [consulta: 28/10/2017]
- BUENOS AIRES CONNECT: La Casa Curutchet, legado de Le Corbusier en La Plata, <https://buenosairesconnect.com/wp-content/uploads/2016/05/CASA-CURUTCHET.jpg> [consulta: 21/08/2017]

- CANO SUÁREZ, MARÍA ROSA: Los números metálicos, <http://matematicas.uclm.es/estalmat/sites/matematicas.uclm.es.estalmat/files/files/N%C3%BAmeros%20met%C3%A1licos(1).pdf> [consulta: 04/09/2017]
- CENTRO DE DIVULGACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS: La Divina Proporción y el Pentagrama pitagórico, <http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Pitagoras13.asp.htm> [consulta: 2/07/2017]
- DESIGNMATIC: The golden ratio bring harmony into design, <https://www.slideshare.net/DesignMantic/golden-ratio-in-design> [consulta: 26/08/2017]
- DÍGITS: La proporció divina, <http://www.digits.cat/colaboracions/la-proporcio-divina> [consulta: 03/07/2017]
- DITUTOR: Clasificación de los números, <http://www.ditutor.com/numeros_naturales/clasificacion_numeros.html> [consulta: 04/08/2017]
- DRYMAX: Presentacion Drymax, <http://drymaxsecnat.blogspot.com.es/> [consulta: 21/10/2017]
- DUKE UNIVERSITY: Mystery of the Golden Ratio Explained, <http://pratt.duke.edu/news/mystery-golden-ratio-explained> [consulta: 17/09/2017]
- E.H. HUNTLEY: The divine proportion, A Study in Mathematical Beauty, <https://books.google.es/books?hl=ca&lr=&id=YSXUAAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=The+Divine+Proportion:+A+Study+in+Mathematical+Beauty+(Dover+Books+on+Mathematics)&ots=mOw192VpBZ&sig=n8qSLqFiWQItiuS8hxGE52ydJ08#v=onepage&q&f=false> [consulta: 16/06/2017]
- EDU 365: Els nombres reals, <http://www.edu365.cat/eso/muds/matematiques/edad/eso4A/4quincena2/4quincena2_contenidos_1a.htm> [consulta: 05/08/2017]
- EL FIL DE LES CLÀSSIQUES: El discòbol com a reclam publicitari, <http://blocs.xtec.cat/elfildelesclassiques/2009/07/30/el-discobol-com-a-reclam-publicitari/> [consulta: 28/10/2017]
- ENCICLOPÈDIA.CAT: Art, <https://www.enciclopedia.cat/EC-GDLC-e00012557.xml> [consulta: 25/10/2017]
- ENCICLOPÈDIA.CAT: Incommensurable, <http://www.enciclopedia.cat/EC-GEC-0188422.xml> [consulta: 2/07/2017]

- ENCICLOPÈDIA.CAT: Música, <https://www.enciclopedia.cat/EC-GDLC-e00092515.xml> [consulta: 05/11/2017]
- EUCLIDES59: Dalí y la divina proporción, <https://euclides59.wordpress.com/2013/10/05/dali-y-la-divina-proporcion/> [consulta: 25/11/2017]
- FERRANDO, IRENE I SEGURA, CARLES: La sucesión de Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza, <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/viewFile/3111/3204> [consulta: 17/09/2017]
- FRESHOME: How architects take advantage of the Golden ratio, <http://freshome.com/2014/10/29/how-architects-take-advantage-of-the-golden-ratio/> [consulta: 26/08/2017]
- GENERALITAT DE CATALUNYA: Registre de planejament urbanístic de Catalunya, <http://ptop.gencat.cat/rpucportal/AppJava/cercaExpedient.do?reqCode=veureDocument&codintExp=254143&fromPage=load> [consulta: 15/08/2017]
- GEOMETRÍA SAGRADA: La proporción aurea, <http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/la-proporci%C3%B3n-aurea> [consulta: 09/08/2017]
- GO THERE GUIDE: CN Tower Toronto, <http://www.gothereguide.com/cn+tower+toronto-place/> [consulta: 22/08/2017]
- GÓMEZ I URGELLÉS, Joan: Un parell de nombres emblemàtics. Zàping matemàtic, Barcelona, Edicions UPC, 2010, p. 81-98.
- GONZÁLEZ ÁLVAREZ, PABLO: Pitàgores; Música i matemàtiques, <http://www.recercat.cat/bitstream/handle/2072/43226/PJ_20090009001.pdf?sequence=1> [consulta: 31/06/2017]
- HOPKINS, Owen: Leer la arquitectura, Barcelona, Blume, 2012, 1a edició.
- IES EZEQUIEL GONZÁLEZ: Día escolar de las matemáticas, <http://www.iesezequielgonzalez.com/matematicas/images/12%20mayo%2008/musicabartok.jpg> [consulta: 26/11/2017]
- IES RAMÓN CABANILLAS: La razón áurea en el Hombre de Vitruvio, <http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/r_aurea.htm> [consulta: 31/07/2017]
- IES SANTANYÍ: Fibonacci en la música, <http://www.iessantanyi.cat/exposiciomatematiques/castellano/web2008/cartells/16_Fibonacci_musica.pdf> [consulta: 05/11/2017]

- INTENSION DESIGNS: The Geometry of Anatomy, <http://www.intensiondesigns.com/geometry_of_anatomy.html> [consulta: 30/06/2017]
- INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE: Geogebra, <https://www.geogebra.org/> [consulta: 16/06/2017]
- LA NUBE ARTÍSTICA: La proporción en la figura humana, <http://www.lanubeartistica.es/dibujo_artistico_1/Unidad3/DA1_U3_T3_Contenidos_v02/42_la_proporcin_en_la_figura_humana.html> [consulta: 02/08/2017]
- LA VANGUARDIA: El bolso perfecto, áureo y artesanal existe en una marca de lujo valenciana <http://www.lavanguardia.com/local/valencia/20160417/401172180748/el-bolso-perfecto-aureo-y-artesanal-existe-en-una-marca-de-lujo-valenciana.html> [consulta: 06/12/2017]
- LEVY, Joel: Matemáticas medievales. La curiosa historia de las matemáticas, Madrid, Editorial LIBSA, 2016, p. 85-124.
- LIVIO, Mario: *La proporción áurea: la historia de phi, el número más enigmático del mundo,* Barcelona, Editorial Ariel Colección Booket, 2008, 4a edició.
- LLEGIM IMATGES: Mondrian, <http://blocs.xtec.cat/llegimimatges/quadres/mondrian/> [consulta: 02/11/2017]
- MATEMÁTICA INTERACTIVA: Triángulo áureo y su espiral equiangular, <http://www.matematicainteractiva.com/triangulo-aureo-y-su-espiral-equiangular-no-aurea> [consulta: 09/08/2017]
- MAURER, Bertram: El nacimiento de la ciencia. Matemáticas. El fascinante mundo de los números, Colònia, Fuackelträger, 2016, p. 34-77.
- MAURER, Bertram: El renacimiento de la ciencia. Matemáticas. El fascinante mundo de los números, Colònia, Fuackelträger, 2016, p. 102-121.
- MIMBREA: ¿Cómo elegir la mejor orientación de tu vivienda?, <http://www.mimbrea.com/como-elegir-la-mejor-orientacion-de-tu-vivienda/> [consulta: 22/08/2017]
- NATIONAL GEOGRAPHIC: Logotip, <https://www.nationalgeographic.org/> [consulta: 28/10/2017]
- NEWS ARTNET: Mona Lisa, <https://news.artnet.com/app/news-upload/2014/07/Mona_Lisa.jpg> [consulta: 30/10/2017]

- ONESIXONE: Gaia Small Aurea Nude <https://onesixonebag.com/coleccion-aurea/gaia-pequeno-aurea-nude/> [consulta: 21/10/2017]
- PAULO PORTA. FOTOGRAFIA E IMAXE DIXITAL: La proporción áurea, <http://www.pauloporta.com/Fotografia/Artigos/epropaurea1.htm> [consulta: 10/08/2017]
- PICKOVER, Clifford: La proporción áurea. El libro de las matemáticas, Kerkdriel, Librero b.v., 2011, p.112-113.
- PIET MONDRIAN: Composition with gray and light brown 1918, <https://alcanfordelasinfantas.files.wordpress.com/2014/03/piet-mondrian-composicic3b3n-con-gris-y-luz-tostada-1918.jpg> [consulta: 01/11/2017]
- PLATAFORMA ARQUITECTURA: Northern Nautilus/ Takato Tamagami, <http://www.plataformaarquitectura.cl/cl/02-240027/northern-nautilus-takato-tamagami?ad_medium=widget=navigation-prev> [consulta: 28/08/2017]
- PREZI: Proporción áurea aplicada a la arquitectura, <https://prezi.com/d0ltzprqbrlw/proporcion-aurea-aplicada-a-la-arquitectura/> [consulta:27/08/2017]
- RENDÓN GÓMEZ, Álvaro: Relaciones métricas en el plano. Geometría paso a paso, Madrid, Editorial Tébar, 2000, 1a edició, p.175-214.
- ROCA SANCHO, JAVIER: ¿La proporción áurea en publicidad?, <http://www.xavirocasancho.com/la-proporcion-aurea-en-publicidad/> [consulta: 25/10/2017]
- RODRÍGUEZ, MARÍA, La arquitectura y los centros culturales, <http://www.academia.edu/7497796/La_Arquitectura_y_los_centros_culturales> [consulta: 15/08/2017]
- ROTH, Leland M.: Entender la arquitectura: sus elementos, historia y significado, Barcelona, Editorial Gustavo Gili, 1999.
- SALVADOR, ADELA: Recursos para el aula. El número de oro, <http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/11.Numero%20de%20oro.pdf> [consulta: 07/08/2017]
- SCIENTIFIC AND ACADEMIC PUBLISHING: Geometrical Substantiation of *Phi*, the Golden Ratio and the Baroque of Nature, Architecture, Design and Engineering, <http://article.sapub.org/10.5923.j.arts.20110101.01.html> [consulta: 28/08/2017]
- SEDE ELECTRÓNICA DEL CATASTRO: Buscador de immuebles, <https://www1.sedecatastro.gob.es/OVCFrames.aspx?TIPO=consulta> [consulta: 15/08/2017]

- SEENA. V: Fibonacci Sequence and Golden Ratio, <https://www.slideshare.net/vayappurathu/fibonacci-sequence-and-golden-ratio> [consulta: 17/09/2017]
- TEKNOPLOF: Dalí y sus obsesiones matemáticas, <http://www.teknoplof.com/2011/08/02/dali-y-sus-obsesiones-matematicas/> [consulta: 25/11/2017]
- THE GLOBE AND MAIL: In search of the golden ratio in architecture, <https://www.theglobeandmail.com/life/home-and-garden/architecture/in-search-of-the-golden-ratio-in-architecture/article20040240/> [consulta: 26/08/2017]
- TOLEDO AGÜERO, YOLANDA: Sección áurea en arte, arquitectura y música, <http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/240/La_seccion_aurea_en%20arte.pdf> [consulta: 25/10/2017]
- TORRES GARCÍA, JOAQUÍN, Constructivo con campana, <http://solanabaum.blogspot.com.es/2009/11/autor-joaquin-torres-garcia-titulo.html> [consulta: 01/11/2017]
- TRULLS MEDINA, CARMEN: Treball multidisciplinari a l'aula a l' entorn de la proporció àuria, <http://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/23440/410309_Mem%C3%B2ria_MA_Trulls_Medina.pdf?sequence=1> [consulta: 03/07/2017]
- UNIVERSITAT DE LLEIDA: Fil·lotaxi, <http://botanicavirtual.udl.es/fulla/filotax.htm>[consulta: 17/09/2017]
- UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA: La sucesión de Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza, <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/3111/3204> [consulta: 14/08/2017]
- UNIVERSITY OF ST ANDREWS: Pythagoras of Samos, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pythagoras.html> [consulta: 31/06/2017]
- URBANISMO MÁLAGA: Normativa de usos, ordenanzas y edificación, <http://urbanismo.malaga.eu/urbanismo/Plangeneral/PGMOM/memorias_y_normativas/normativas/uoe/NUOE-T12-4.htm> [consulta: 15/08/2017]
- UTT PROCESOS INDUSTRIALES: Afirmación de 5 obras del rectángulo dorado, <http://magalyherrera5.blogspot.com.es/2017/01/afirmacion-de-5-obras-del-rectangulo.html> [consulta: 20/08/2017]

- VÍA ROSARIO: El Modulor de Le Corbusier, <http://viarosario.viapais.com.ar/arquitectura/notas/el-modulor-de-le-corbusier-21264.html> [consulta: 02/08/2017]
- VIQUIPÈDIA: El naixement de Venus, <https://ca.wikipedia.org/wiki/El_naixement_de_Venus> [consulta: 30/10/2017]
- WIKIARQUITECTURA: Sede de la ONU en Nueva York, <https://es.wikiarquitectura.com/edificio/sede-de-la-onu-en-nueva-york/> [consulta: 21/08/2017]
- WIKIMEDIA: Salvator Mundi, <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Leonardo_da_Vinci_or_Boltraffio_%28attrib%29_Salvator_Mundi_circa_1500.jpg> [consulta: 30/10/2017]
- WIKIPEDIA: Adam and Eve, <https://en.wikipedia.org/wiki/Adam_and_Eve_(D%C3%BCrer)#/media/File:Albrecht_D%C3%BCrer_-_Adam_and_Eve_(Prado)_2.jpg> [consulta: 30/08/2017]
- WIKIPEDIA: Las Meninas, <https://ca.wikipedia.org/wiki/Las_Meninas#/media/File:Las_Meninas,_by_Diego_Vel%C3%A1zquez,_from_Prado_in_Google_Earth.jpg> [consulta: 01/11/2017]
- WILKINSON, Philip: Cincuenta cosas que hay que saber sobre arquitectura, Barcelona, Editorial Ariel, 2011, 1a edició en llibre electrònic.
- WIQUIPEDIA: Violín, <https://es.wikipedia.org/wiki/Viol%C3%ADn> [consulta: 20/10/2017]

17.2. Índex d'imatges

17.3. Índex de figures

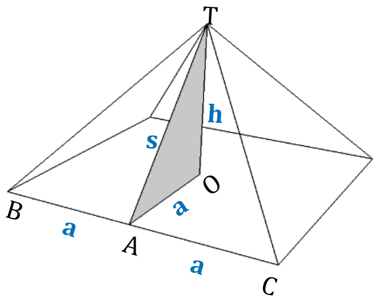
17.4. Índex de taules

17.5. Índex de mapes

III. ANNEX

I. LA GRAN PIRÀMIDE

"Heròdot, un historiador grec, va aprendre dels sacerdots egipcis que l'altura al quadrat de la Gran Piràmide era igual a l'àrea de les seves cares triangulars. Aquesta afirmació és el mateix que dir que l'altura de la cara triangular i la distància del centre de la piràmide a la meitat del costat de la base estan en proporció àuria." (p. 9)



Imatge 88 Esquema de la Gran Piràmide, sent:
s *l'altura de la cara triangular*
h *l'altura interior*
a *la meitat de la base del quadrat i la distància de la meitat de la base del quadrat al centre de la piràmide*

Se sap que $h^2 = \frac{2a \times s}{2}$ i es vol demostrar que $\frac{s}{a} = \Phi$.

Simplificant, s'obté $h^2 = a \times s$

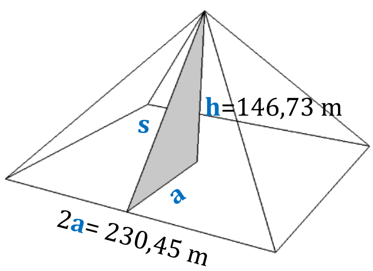
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle TOA, s'obté $s^2 = h^2 + a^2$. Aïllant h^2 queda que $h^2 = s^2 - a^2$.

Igualant les dues expressions, s'obté $a \times s = s^2 - a^2$

Si se substitueix a per 1, queda l'equació que defineix el número d'or: $s^2 - s - 1 = 0$, per tant $\frac{s}{a} = \Phi$.

II. LA GRAN PIRÀMIDE (II)

També es pot demostrar la presència de *phi (Φ)* a la Gran Piràmide amb les mesures d'aquesta.



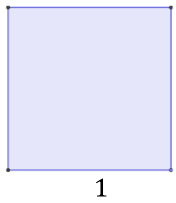
Imatge 89

Aplicant el teorema de Pitàgores, es pot saber que $s^2 = 146{,}73^2 + \left(\frac{230{,}45}{2}\right)^2$, i per tant que $s = 186{,}56\ m$.

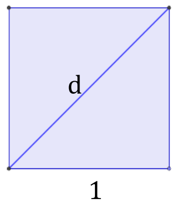
Dividint l'altura s entre la meitat de la base quadrada a, s'obté $186{,}56 \div 115{,}22 = 1{,}619$, una xifra molt propera a *phi (Φ)*= 1,618.

III. DIAGONAL DEL QUADRAT

Es parteix d'un quadrat de base 1:



Dibuixant una diagonal, s'obtenen dos triangles rectangles idèntics:



Aplicant el teorema de Pitàgores ($hipotenusa^2 = catet^2 + catet^2$) s'obté que:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

Per tant:

$$d^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$ és la diagonal del quadrat, i és un nombre irracional.

IV. SUCCESSIONS DELS NÚMEROS METÀL·LICS

a. Or

L'equació del número d'or és $x^2 - x - 1 = 0$, per tant *p = 1* i *q = 1*.

Substituint els valors a la fórmula de la successió de Fibonacci $x_n = p \cdot x_{n-1} + q \cdot x_{n-2}$ s'obté:

$$x_n = 1 \cdot x_{n-1} + 1 \cdot x_{n-2}$$

Es construeix una taula amb els valors de *x:*

x_n	Fórmula	Successió	Quocient
x_1	$-$	1	1
x_2	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$	2	2
x_3	$1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$	3	1,5
x_4	$1 \cdot 3 + 1 \cdot 2$	5	1,6666666...
x_5	$1 \cdot 5 + 1 \cdot 3$	8	1,6
x_6	$1 \cdot 8 + 1 \cdot 5$	13	1,625
x_7	$1 \cdot 13 + 1 \cdot 8$	21	1,615

Taula 11

Per obtenir el valor exacte del número d'or es resol l'equació $x^2 - x - 1 = 0$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = 1{,}618033989 \ldots$$

b. Plata

L'equació del número de plata és $x^2 - 2x - 1 = 0$, per tant *p = 2* i *q = 1*.

Substituint els valors a la fórmula de la successió de Fibonacci $x_n = p \cdot x_{n-1} + q \cdot x_{n-2}$ s'obté:

$$x_n = 2 \cdot x_{n-1} + 1 \cdot x_{n-2}$$

Es construeix una taula amb els valors de *x:*

x_n	**Fórmula**	**Successió**	**Quocient**
x_1	$-$	1	1
x_2	$2 \cdot 1 + 1 \cdot 1$	3	3
x_3	$2 \cdot 3 + 1 \cdot 1$	7	2,333333...
x_4	$2 \cdot 7 + 1 \cdot 3$	17	2,4285714...
x_5	$2 \cdot 17 + 1 \cdot 7$	41	2,4117647...
x_6	$2 \cdot 41 + 1 \cdot 17$	99	2,4146341...
x_7	$2 \cdot 99 + 1 \cdot 41$	239	2,4141414...

Taula 12

Per obtenir el valor exacte del número de plata es resol l'equació $x^2 - 2x - 1 = 0$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = 2{,}414213562 \ldots$$

c. Bronze

L'equació del número de bronze és $x^2 - 3x - 1 = 0$, per tant *p = 3* i *q = 1*.

Substituint els valors a la fórmula de la successió de Fibonacci $x_n = p \cdot x_{n-1} + q \cdot x_{n-2}$

s'obté:

$$x_n = 3 \cdot x_{n-1} + 1 \cdot x_{n-2}$$

Es construeix una taula amb els valors de *x:*

x_n	**Fórmula**	**Successió**	**Quocient**
x_1	–	1	1
x_2	$3 \cdot 1 + 1 \cdot 1$	4	4
x_3	$3 \cdot 4 + 1 \cdot 1$	13	3,25
x_4	$3 \cdot 13 + 1 \cdot 4$	43	3,3076923…
x_5	$3 \cdot 43 + 1 \cdot 13$	142	3,3023255…
x_6	$3 \cdot 142 + 1 \cdot 43$	469	3,3028169…
x_7	$3 \cdot 469 + 1 \cdot 142$	1549	3,3027718…

Taula 13

Per obtenir el valor exacte del número de bronze es resol l'equació $x^2 - 3x - 1 = 0$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = 3{,}302775638 \ldots$$

d. Coure

L'equació del número de coure és $x^2 - x - 2 = 0$, per tant *p = 1* i *q = 2*.

Substituint els valors a la fórmula de la successió de Fibonacci $x_n = p \cdot x_{n-1} + q \cdot x_{n-2}$

s'obté:

$$x_n = 1 \cdot x_{n-1} + 2 \cdot x_{n-2}$$

Es construeix una taula amb els valors de *x:*

x_n	**Fórmula**	**Successió**	**Quocient**
x_1	$-$	1	1
x_2	$1 \cdot 1 + 2 \cdot 1$	3	3
x_3	$1 \cdot 3 + 2 \cdot 1$	5	1,6666666...
x_4	$1 \cdot 5 + 2 \cdot 3$	11	2,2
x_5	$1 \cdot 11 + 2 \cdot 5$	21	1,90909091...
x_6	$1 \cdot 21 + 2 \cdot 11$	43	2,04761905...
x_7	$1 \cdot 43 + 2 \cdot 21$	85	1,97674419...

Taula 14

Per obtenir el valor exacte del número de coure es resol l'equació $x^2 - x - 2 = 0$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x = 2$$

e. Níquel

L'equació del número de níquel és $x^2 - x - 3 = 0$, per tant *p = 1* i *q = 3*.

Substituint els valors a la fórmula de la successió de Fibonacci $x_n = p \cdot x_{n-1} + q \cdot x_{n-2}$

s'obté:

$$x_n = 1 \cdot x_{n-1} + 3 \cdot x_{n-2}$$

Es construeix una taula amb els valors de *x:*

x_n	Fórmula	Successió	Quocient
x_1	$-$	1	1
x_2	$1 \cdot 1 + 3 \cdot 1$	4	4
x_3	$1 \cdot 4 + 3 \cdot 1$	7	1,75
x_4	$1 \cdot 7 + 3 \cdot 4$	19	2,71428571...
x_5	$1 \cdot 19 + 3 \cdot 7$	40	2,10526316...
x_6	$1 \cdot 40 + 3 \cdot 19$	97	2,425
x_7	$1 \cdot 97 + 3 \cdot 40$	217	2,2371134...

Taula 15

Per obtenir el valor exacte del número de níquel es resol l'equació $x^2 - x - 3 = 0$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = 2{,}302775638 \ldots$$

f. Platí

L'equació del número de platí és $x^2 - 2x - 2 = 0$, per tant *p = 2* i *q = 2*.

Substituint els valors a la fórmula de la successió de Fibonacci $x_n = p \cdot x_{n-1} + q \cdot x_{n-2}$ s'obté:

$$x_n = 2 \cdot x_{n-1} + 2 \cdot x_{n-2}$$

Es construeix una taula amb els valors de *x:*

x_n	**Fórmula**	**Successió**	**Quocient**
x_1	$-$	1	1
x_2	$2 \cdot 1 + 2 \cdot 1$	4	4
x_3	$2 \cdot 1 + 2 \cdot 1$	10	2,5
x_4	$2 \cdot 1 + 2 \cdot 1$	28	2,8
x_5	$2 \cdot 1 + 2 \cdot 1$	76	2,71428571…
x_6	$2 \cdot 1 + 2 \cdot 1$	208	2,73684211…
x_7	$2 \cdot 1 + 2 \cdot 1$	568	2,73076923…

Taula 16

Per obtenir el valor exacte del número de platí es resol l'equació $x^2 - 2x - 2 = 0$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{1}$$

$$x = 2{,}732050808\ldots$$

V. EQUACIÓ PER A TROBAR L'ANGLE AURI

A partir de l'expressió:

$$\frac{x}{360-x}=\frac{360-x}{360}$$

Es multiplica en creu per treure els denominadors:

$$x\cdot 360=(360-x)^2$$

$$360x=129600+x^2-720x$$

$$0=x^2-1080x+129600$$

Aplicant la fórmula per a resoldre equacions de segon grau $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, s'obté:

$$x=\frac{1080\pm\sqrt{(-1080)^2-4\cdot 1\cdot(129600)}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{1080\pm\sqrt{1166400-518400}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{1080\pm\sqrt{648000}}{2}$$

Les dues solucions són:

$$x_1=\frac{1080+\sqrt{648000}}{2}$$

$$x_2=\frac{1080-\sqrt{648000}}{2}$$

$$x_1=942{,}492236\ldots^\circ$$

$$x_2=137{,}5077641\ldots^\circ$$

VI. PLANTILLES

Plantilles utilitzades per a la realització del Treball de camp (p. 34)