

Estudi empíric de l'Efecte Doppler
En un laboratori escolar

2n de Batxillerat
Daunis
Curs 2016/2017

“La física no és més que la recerca de la simplicitat última, però per ara tot el que tenim és una mena de desordre elegant”

- Bill Bryson, *Una breu història de gairebé tot*

Taula de continguts

1. Introducció.....	5
2. Marc Teòric.....	8
2.1 Bases de l'Efecte Doppler.....	8
2.2 Fórmula.....	10
2.3 Variabilitat de factors.....	11
3. L'Efecte Doppler al llarg de la història.....	13
3.1 Experiment de Buys-Ballot.....	13
3.2 Edwin Hubble i l'expansió de l'univers.....	13
4. Disseny de l'experiment.....	15
4.1 Descripció de l'experiment.....	15
4.2 Paper del carril d'aire.....	16
5. Construcció d'elements auxiliars.....	19
5.1 Freqüencímetre.....	19
5.2 Carril d'aire.....	21
6. Anàlisi dels resultats.....	22
7. Conclusions.....	26
7.1 Verificació de la hipòtesi.....	26
7.2 Noves vies de recerca.....	27
8. Annex.....	29
8.1 Demostració matemàtica.....	29
8.1.1 Fórmula de l'Efecte Doppler.....	29
8.1.2 Binomi de Newton i velocitat del so.....	31
8.1.3 Singularitat de Prandtl-Glauert.....	34
8.2 Suport visual.....	35
8.2.1 Construcció del carril d'aire.....	35
8.2.2 Anàlisi gràfica dels resultats.....	38
9. Bibliografia i Webgrafia.....	42

1. Introducció

Tothom ha sentit alguna vegada el soroll característic de la sirena d'una ambulància i hi haurà qui s'haurà fixat que, quan aquesta s'acosta, el to que ens arriba és molt més agut que quan s'allunya, si bé el to que emet és sempre el mateix. Què s'amaga darrere d'aquest fenomen? Christian Andreas Doppler el 1842, mogut per la curiositat científica, li va donar nom: Efecte Doppler, tema d'aquest treball.

L'Efecte Doppler ens diu que hi ha un "canvi de freqüència aparent d'una ona, produït pel moviment relatiu de la font respecte al seu observador". En altres paraules, l'existència d'una velocitat relativa entre dos cossos altera la freqüència aparent de qualsevol ona emesa per un dels dos. En el cas de l'ambulància, la freqüència puja quan s'acosta, fent l'efecte d'un to més agut. En canvi, la freqüència baixa quan s'allunya, i ens arriba un to més greu.

En un principi, aquesta afirmació pot semblar que no té gaire importància, i menys especialment en la vida quotidiana. En comparació a d'altres descripcions de fenòmens físics, sembla concisa però potser no especialment significativa. La pregunta fàcil és, doncs, si va més enllà d'aquest breu postulat o si té cap interès fora de l'univers teòric.

Respecte a la profunditat que oculta el Doppler, podem dir que és simple en la seva forma, però no en el seu contingut. La seva definició ja s'ha vist que està lliure de complicacions; ara bé, si busquem quins són els pilars que la sustenten, la simplicitat esdevé àlgebra. I és que el Doppler és un efecte intrínsecament exacte, com més tard s'explicarà. Ara ens queda respondre: té cap interès? Cap *utilitat*?

Abans de tot, cal dir que és important el fet que el Doppler sigui aplicable a tot tipus d'ones. Això comporta que trobem un efecte Doppler tant en les ones sonores com en les electromagnètiques. És per aquest motiu que cobra importància en àmbits com el de la medicina, en proves cardíaques i embarassos; el de les telecomunicacions, en la construcció de radars; o en el camp de l'astrofísica, en què el Doppler ha servit per calcular la velocitat dels anells de Saturn, mesurar la distància entre estrelles llunyanes o demostrar l'expansió de l'Univers.

Així, podem concloure que el Doppler no és un efecte qualsevol, sinó que, mentre que és fàcil pel que fa a la seva comprensió, dóna una explicació absolutament precisa a fenòmens de gran rellevància i complexitat, fins i tot sent aquests de disciplines tant disperses com la biologia, l'electrotècnica o la física.

No hi ha dubte que l'efecte Doppler té diverses i importants aplicacions, de fet, una quantitat massa gran com per assolir en un Treball de Recerca. És per això que en ens centrarem en la part relativa a les ones mecàniques, les de caràcter sonor. La raó d'aquesta concreció és l'abast a nivell d'eines i materials que es pot assolir en un laboratori, que és l'espai en què es desenvolupa la investigació.

També té a veure el fet que per efectuar mesures que tinguin com a objecte ones electromagnètiques, lumíniques en aquest cas, cal una instrumentació molt més especialitzada, a més que comporta una major complexitat de càlcul (mentre que la velocitat del so és aproximadament de $343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, la de la llum és d'uns $300.000.000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$).

L'estudi efectuat passa en gran part pel disseny i materialització d'un experiment, que permetés demostrar l'existència de l'Efecte Doppler de forma empírica, en un espai de laboratori. De fet, la hipòtesi del treball és la següent: "Podem demostrar l'existència de l'Efecte Doppler en un espai de laboratori escolar". Cal puntualitzar, que aquest experiment, s'ha basat en la que podríem considerar com a situació emissor-receptor fonamental dins de l'efecte, en què trobem una font o emissor en moviment i un receptor estàtic.

De tota manera, el Treball de Recerca que s'ha efectuat no ha estat tan sols l'estudi del fenomen pròpiament dit. Per aconseguir l'objectiu principal del projecte també ha calgut elaborar instruments per procurar que les mesures fetes fossin fiables. Aquest subapartat del treball s'ha centrat en dues tasques principals, com són la construcció des de zero d'un carril d'aire, una plataforma que permet reduir la fricció exercida sobre un cos, i així propiciar que tingui una velocitat propera a constant, i el muntatge d'un freqüencímetre.

De fet, la manufactura o programació dels instruments necessaris per dur a terme el projecte ha arribat gairebé al paper de coprotagonista. Això no ha estat només per la transcendència que suposa el fet que les mesures siguin el més acurades dins del possible, sinó també pel temps que ha suposat el seu disseny i construcció. En definitiva, es tracta d'un projecte basat en la creació de tot un sistema que permeti l'anàlisi del fenomen en qüestió, i el posterior tractament de les dades recollides.

A més a més, també s'ha fet ús d'un *software* variat, que va des de la utilització d'Autocad per al disseny del carril d'aire fins a programes informàtics per al tractament de les dades recollides, passant per l'ús d'una placa Arduino (i la seva programació) com a mitjà intermedi entre el freqüencímetre i l'ordinador, el que ha facilitat una via de captació de dades automàtica i per tant més precisa.

Al llarg del treball, però, veurem que han sorgit nombrosos obstacles, i alguns han forçat l'adopció de canvis, sobretot en referència a les tècniques emprades per a les mesures. Un clar exemple ha estat el muntatge del freqüencímetre, que ha estat substituït per l'ús de programes i aplicacions informàtiques externes.

Descobrir, entendre i ser capaços d'explicar tot el que pertany al món que ens envolta és una actitud profundament arrelada a la conducta humana. L'home, des dels seus inicis, no ha estat sinó un científic a la recerca de respostes, perseguint l'etern desig que aquestes el conduïssin a un enteniment de l'espai que ocupava. I aquest ha estat precisament el meu propòsit, investigar un fenomen que em va atraure des del primer moment en què en vaig sentir a parlar, i arribar a la seva comprensió per mitjà de l'experimentació.

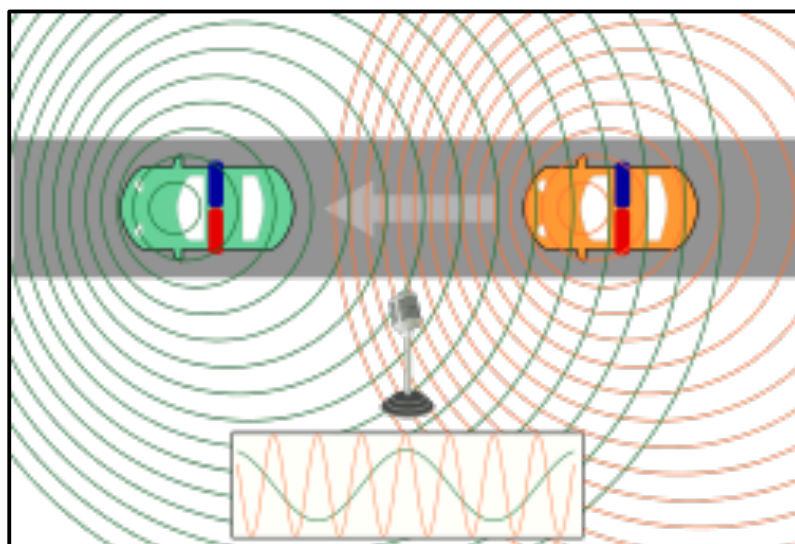
En aquestes pàgines es troba el punt culminant de 9 mesos de treball i recerca sobre un tema que d'inici m'era pràcticament desconegut. Un temps que ha servit per entendre un fenomen, i idear i realitzar un experiment que el posés de manifest; tot intentant solucionar els problemes que han sorgit al llarg del camí. Ara tan sols espero que el lector gaudeixi del resultat tant com jo ho he fet del procés.

2. Marc Teòric

2.1 Bases de l'Efecte Doppler

L'Efecte Doppler es produeix quan percebem una ona estant o bé nosaltres, receptors, o bé la font que l'emet en moviment. La situació que considerarem al llarg de tot aquest treball serà unidimensional, amb una font en moviment i un receptor en repòs, estant així ambdós elements disposats en una mateixa direcció. El fet de considerar aquest cas específic es deu a que l'esmentada és la que podríem considerar com a situació fonamental de l'Efecte Doppler, a més del fet que aquest ha estat el model en què s'ha basat l'experimentació.

Quan trobem una font sonora situada a una certa distància constant de nosaltres, el temps que transcorre entre l'emissió de les ones fins al seu destí és constant, sent la freqüència de les ones al seu inici percebuda de la mateixa manera que al final del moviment. En canvi, si la font comença a allunyar-se del receptor, per a aquest, el temps que passarà entre l'arribada de dues ones successives serà una mica més gran que el temps transcorregut entre elles a l'abandonar la font, pel fet que cada ona seguirà tenint la mateixa velocitat (velocitat del medi), però haurà de recórrer una distància una mica més gran que l'anterior.



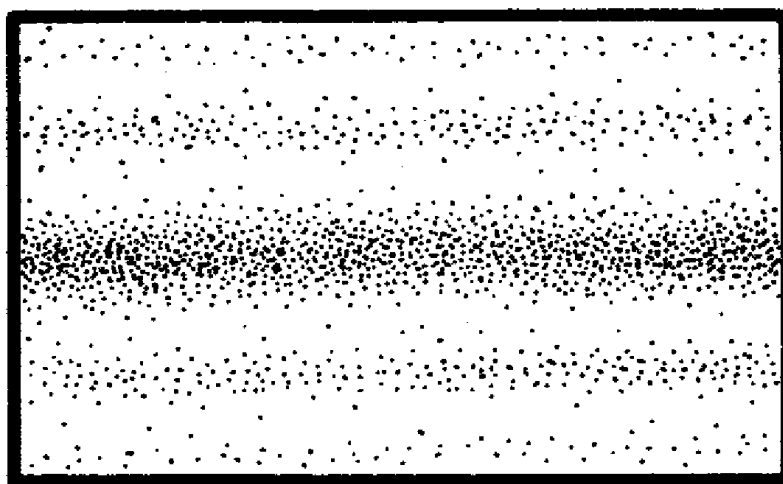
Imatge 1. Un micròfon registra les sirenes de dos cotxes: en el cas del verd, que s'allunya, cada ona triga més que l'anterior en arribar a la posició de l'observador; mentre que per les ones del cotxe taronja trobem l'efecte contrari.

La magnitud que relaciona una ona amb la seva tonalitat és la longitud d'ona, representada amb la lletra grega lambda (λ). La longitud d'ona és una qualitat física que mesura la distància entre dos punts consecutius d'un moviment ondulatori que es troben a la mateixa fase, sent la fase la situació instantània en el cicle de l'ona.

Podem pensar també que qualsevol fenomen sonor consisteix en una sèrie de “compressions i rarefaccions”¹ de l’aire, oscil·lacions de la pressió aèria que impliquen una variació de l’estat tensional del medi, i que són convertides en ones mecàniques a l’oïda humana. En aquest cas, la distància que hi ha entre una regió qualsevol de compressió i la següent és la longitud d’ona del so (veure imatge 2).

Com ja s’ha mencionat a la introducció, la mesura de velocitats per l’observació de corriments Doppler és una tècnica intrínsecament exacta. Això es deu a que les longituds d’ona associades a les diferents tonalitats poden mesurar-se amb gran precisió; no és estrany trobar longituds d’ona indicades amb fins a 8 dígits decimals. Així mateix, la tècnica conserva la seva exactitud sense importar quina sigui la distància de la font, sempre i quan el so sigui suficient com per recollir informació suficientment fiable.

En termes més concrets, la longitud d’ona és inversament proporcional a la freqüència², és a dir, si la longitud d’ona augmenta, la freqüència disminueix, i a l’inrevés. Cal veure com si la font s’acosta a nosaltres, tindrem la percepció d’una longitud d’ona més curta i per tant, notarem un augment en la freqüència³, el que farà que el to que escoltem sigui més agut (cas típic d’una ambulància a l’acostar-se). En canvi, si la font s’allunya de nosaltres la longitud d’ona que rebrem serà major, i percebrem una disminució en la freqüència, el que farà que el to que escoltem sigui més greu (cas típic d’una ambulància a l’allunyar-se).



Imatge 2. Esquema de compressió i rarefacció

¹ Rarefacció es el terme que Asimov utilitza per descriure el so al seu llibre *L'Univers*, i té a veure amb la reducció de la intensitat d'un medi, és a dir, és l'antítesi de la compressió.

² La freqüència es defineix matemàticament com a la velocitat del medi entre la longitud d'ona.

³ Aquesta freqüència "fictícia" que rep el receptor s'anomena freqüència aparent.

En paraules d'Steven Weinberg, premi Nobel de Física l'any 1979, "És com si un viatjant de comerços enviés una carta a casa una vegada per setmana de forma regular durant els seus viatges; mentre s'allunya de la seva casa, cada carta successiva haurà de travessar una distància major que l'anterior, de forma que les seves cartes arribaran a intervals de més d'una setmana; en canvi, en el viatge de tornada, cada carta successiva haurà de travessar una distància menor, el que farà que la freqüència de les cartes sigui de menys d'una carta per setmana."

Tenint aquesta analogia en ment, sembla sensat dir que ha de tenir també importància la velocitat a la que es mou la font, en el cas anterior: el carter. Això es deu a què quan més ràpid s'allunyi de la seva casa, més distància haurà recorregut en els set dies que separen l'emissió de cada carta, i per tant més trigarà cadascuna d'aquestes en arribar a la seva destinació. En el cas contrari, quan més ràpid viatgi en el seu camí de tornada, menys espai haurà de recórrer cada carta per arribar, i tot i que ell escrigui rigorosament una carta per setmana, a casa seva pensaran que ho fa a una freqüència major.

2.2 Fórmula

Ara, ja hem establert que la freqüència té una relació inversa amb la longitud d'ona, i una relació directa amb la velocitat. A partir d'aquest punt, podem arribar¹ a una expressió que ens diu que la freqüència aparent que rep un cos quan la font se li acosta és igual a la freqüència emesa, més la fracció que representa la seva velocitat respecte la del medi. De forma contrària, en el cas que la font s'allunyés, tindríem la mateixa relació de velocitats, que aquest cop es restaria a la freqüència realment emesa. Així, l'equació que ens queda és la següent:

$$f' = f \cdot \left(1 \pm \frac{V}{V_s}\right)$$

On:

f' = freqüència aparent [Hz²] [s⁻¹]

f = freqüència emesa [Hz] [s⁻¹]

V = velocitat de la font [m·s⁻¹]

V_s = velocitat del medi, per el cas estudiat, del so [m·s⁻¹]

Aquesta és la fórmula generalitzada de l'Efecte Doppler, i de fet, ha estat pràcticament l'única necessària per a l'estudi específic del fenomen al llarg de tot el projecte.

¹ Veure càlculs amb detall a Annex, pàgina 21.

² L'Hertz és la unitat de freqüència del SI, i adverteix de "un succés per segon".

És important destacar la importància del fet que ens permeti veure la relació existent entre la freqüència emesa i la freqüència aparent, només en termes de la corresponent relació establerta entre les velocitats de la font i del medi. Amb aquesta expressió, si sabem la freqüència “real” o emesa, mesurant la que rebem, podem saber la velocitat amb què la font s’allunya o s’apropa de nosaltres. Aquesta relació és important, com es veurà al llarg dels punts 6 i 7.

Però cal establir uns límits: mai no podem sobrepassar la velocitat del medi en què viatgen les ones que estudiem. En el cas del so, això es deu a què en cas que les ones assolissin una velocitat major a la del so, es produiria el que es denomina com a explosió sònica, un fenomen que ja de per si canvia les condicions del medi on es produeix.

El veritable problema, de tota manera, vindria per al fet que una ona que s’allunyés de nosaltres a una velocitat superior a la del so, el medi en aquest cas, ja que segons la fórmula mencionada el resultat seria una freqüència aparent negativa, el que va contra la pròpia definició de freqüència. Es tracta d’un fenomen conegut com a *Singularitat de Prandtl-Glauert*¹. Tot i això, aquesta casuística no ha estat un inconvenient pel que fa a la realització aquest treball, ja que com es veurà més endavant, les velocitats assolides en les proves van ser sempre inferiors al 3% de la velocitat del so (uns $10,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ o $37 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$).

En aquest moment, doncs, ja tenim fixada quantitativament la variació en la freqüència o freqüència aparent per a un observador estàtic i una font en moviment, sempre i quan aquests dos cossos es trobin en una mateixa direcció, això és, la trajectòria del cos en moviment (per al nostre cas, la font) segueixi una línia recta respecte al receptor, ja sigui cap a ell o en sentit contrari. Aquesta serà la disposició que seguirem al llarg de tot el treball.

2.3 Variabilitat de factors

Encara hi ha un inconvenient, però: podem veure que a l’equació esmentada hi ha quatre variables: la freqüència aparent, la freqüència emesa, la velocitat de la font i la velocitat del medi. Les tres primeres no presenten cap tipus d’incomoditat, en canvi, la darrera sí ens pot portar algun maldecap. En el cas que ens ocupa, la velocitat del medi és la del so, i es considera que a 20°C de temperatura, 50% d’humitat i a nivell del mar aquesta té un valor de $343,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Sens dubte, es tracta d’unes condicions molt específiques, el que significa que en un entorn de laboratori potser estaríem usant uns valors inadequats.

¹ Veure Annex, pàgina 24.

Tenint en compte que en termes quantitius el canvi de temperatura és la variable que més afecta a la velocitat del medi, s'ha intentat millorar la precisió en aquesta direcció. El progrés aconseguit en forma d'una millor aproximació, passa pel desenvolupament d'un cas especial del *Binomi de Newton*, concretament en referència al desenvolupament amb un exponent fraccionari; un mètode matemàtic que s'ha aplicat a l'equació general dels gasos ideals¹. A partir d'aquí, podem extreure una expressió molt més rigorosa, que en efecte ens dóna una relació de dependència amb la temperatura:

$$V_s \approx 331,4 + t \cdot 0,61$$

On:

V_s = velocitat del so [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$]

t = temperatura [$^{\circ}\text{C}$]

Amb això, ja tenim totes les dades que necessitem per prosseguir amb la investigació. En les darreres pàgines s'han comentat els diferents elements que prenen part en l'Efecte Doppler, donant també la mesura quantitativa en què ho fan. Com ja s'ha dit anteriorment, tot el treball es centra en un experiment dissenyat per posar de manifest l'existència d'un Efecte Doppler, i ara, una vegada assentades les bases teòriques del fenomen a estudiar, i abans de centrar-nos en l'experiment pròpiament realitzat, donem pas a una breu aproximació històrica de l'Efecte Doppler.

¹ Veure Annex, pàgina 23.

3. L'Efecte Doppler al llarg de la història

Des del seu descobriment el 1842, com ja s'ha dit l'Efecte Doppler ha estat una constant en el camp de la física, tant per la seva inherent exactitud com pel fet que és aplicable a tot tipus d'ones. A continuació, es presentaran breument alguns dels moments més significatius que ha tingut aquest efecte en la vida científica al llarg de la història.

3.1 Experiment de Buys-Ballot

Tres anys després que Christian Doppler senyalés l'existència de l'efecte, Christopher Buys-Ballot va realitzar el primer experiment que el va posar de manifest de forma empírica, tot i que es podria dir que té més valor com a anècdota que no pas com a experiment científic.

Buys-Ballot va utilitzar com a font sonora una orquestra de trompetes, situada dins d'un vagó obert d'un tren que travessava Utrecht. Estant ell fora del tren (i sent per tant l'observador estàtic) va poder comprovar com la peça musical que ell percebia estava marcada per una dissonància impròpia del so realment emès.

Estant l'Efecte Doppler comprovat, van començar a sorgir possibles aplicacions que aquest podia tenir en la concepció del moment.

El propi Doppler, va pensar que aplicant-se a les ones, podria explicar els diferents colors de les estrelles: la llum de les estrelles que s'allunyessin de la Terra es desplaçaria cap a longituds d'ona més llargues (com el color vermell), i l'efecte invers passaria per les estrelles que s'apropessin, la llum de les quals es desplaçaria al blau. Aviat, però, aquesta teoria va ser rebutjada per la comunitat científica.

3.2 Edwin Hubble i l'expansió de l'univers

Molts anys més tard, cap al 1929, Edwin Hubble va observar que a banda d'unes poques galàxies veïnes, l'enorme majoria de cúmuls estel·lars, presentaven en la seva llum una forta tendència cap al color vermell, igual que havia previst Doppler. Aquest efecte, va ser llavors immediatament interpretat com la conseqüència de l'efecte en qüestió.

De fet, Hubble va observar que aquest corriment era més pronunciat quant més distants estaven les galàxies de la Terra i, utilitzant la mateixa fórmula emprada en aquest treball (en el seu cas,

sent el buit el medi en què es desplaçaven les ones, i la velocitat de la llum la utilitzada), va deduir que quant més lluny estaven les galàxies, a més velocitat s'allunyaven¹. Dit d'una altra manera, uns 80 anys més tard del descobriment de l'Efecte Doppler, aquest es va usar per plantejar i recolzar un model generalment acceptat avui en dia a la comunitat científica: l'expansió de l'univers.

¹ Aquesta enumeració és coneix avui com a llei de Hubble.

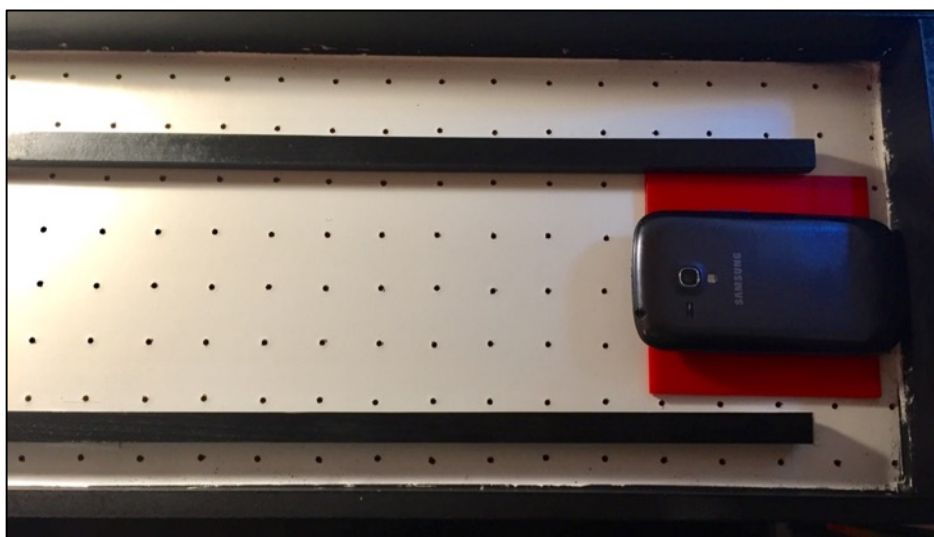
4. Disseny de l'experiment

L'experiment dissenyat, seguint l'objectiu de tot el treball i adreçant-se a la hipòtesi inicial, pretenia provar experimentalment i amb eines d'un laboratori escolar l'existència de l'Efecte Doppler, i comparar els resultats obtinguts amb la teoria ja existent. Per tant, per dur a terme l'experiment, una vegada més, es va agafar el model fonamental de l'Efecte Doppler, on trobem una font en moviment i un observador en repòs.

4.1 Descripció de l'experiment

En un principi, es buscava un experiment el més simple possible, que pogués proporcionar la situació en la qual es basava el projecte. Al llarg de tot el procés de disseny i realització van anar sorgint complicacions, que van derivar en l'experiment final que s'explicarà a continuació.

El primer a comentar és la construcció que es va fer d'un carril d'aire¹, a un extrem del qual s'hi va posar una placa de metacrilat, que al seu torn portava enganxat un telèfon mòbil encarregat d'emetre el so. A l'altra banda del carril, situat a uns 1'20 metres de distància, en un principi havia d'haver-hi un freqüencímetre connectat a una placa Arduino, que havia de permetre una captació automàtica de dades. Donades però les complicacions que el seu muntatge va suposar, es va optar finalment per la gravació del so mitjançant un altre dispositiu mòbil, i per separat la posterior anàlisi de les dades.



Imatge 3. Mòbil emissor situat a l'extrem del carril

¹ Els detalls de la construcció del carril d'aire es poden consultar tant al punt 4 com a l'Annex.

L'experiment consistia en el llançament del mòbil emissor des d'un dels extrems del carril d'aire cap a l'altre, on es trobava el mòbil que actuava com a receptor. A l'existir d'aquesta manera un moviment d'un dels dos cossos, es creava la velocitat relativa necessària per a l'existència d'un Efecte Doppler. El mòbil en repòs era l'encarregat d'enregistrar el so que rebia en forma de gravacions, sent aquestes més tard analitzades.

Com ja s'ha dit abans, un element important a tenir en compte a l'hora de realitzar l'experiment era la temperatura de l'ambient. En aquest cas, les proves van ser efectuades a una temperatura de 15°C, el que seguint la fórmula explicada al punt anterior implica una velocitat del so, i per tant del medi, de $340,55 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Utilitzant una aplicació (*Frequency Generator*), es va poder establir una freqüència desitjada d'emissió, que al llarg de les proves es va anar alternant entre les diferents freqüències de les 7 notes musicals de la cinquena octava, donant així un rang d'entre 523 (Do) i 987 (Si) Hz. La raó d'aquestes freqüències no era una altra que pel fet que al tractar-se d'una escala sonora ja coneguda, la variació aparent produïda en forma de dissonància era més fàcil de detectar per a l'oient.

La idea de l'experiment era veure quin efecte es produïa en la freqüència rebuda al llençar el mòbil emissor en direcció al mòbil estàtic, és a dir, la distorsió que patien les notes musicals al crear aquesta velocitat relativa entre els dos cossos. Aquí, és important el fet d'utilitzar un rang ampli de freqüències, el que permetia establir una relació entre la variació en la freqüència aparent respecte de la freqüència pròpiament emesa.

4.2 Paper del carril d'aire

Tot i que en un principi no estava prevista la seva construcció, el carril d'aire va esdevenir un element indispensable per al projecte. Si es recorda la fórmula general de l'Efecte Doppler, es veurà que la freqüència aparent és igual a la freqüència emesa, més aquesta mateixa freqüència multiplicada per la fracció que representa la *velocitat del mòbil* respecte la *velocitat del medi*. És aquí on trobem un impediment.

Pel que fa a la velocitat del medi o del so en aquest cas, aquesta no representa un problema, ja que és constant, i podem obtenir una bona aproximació sempre i quan es tingui en compte la temperatura de l'espai on es desenvolupa l'experiment.

En canvi, cal tenir en compte que qualsevol mòbil que es llenci al llarg d'una superfície plana es veurà afectat per l'existència de forces no conservatives¹, a saber, la força de fricció.

L'existència de forces no conservatives implica que no es pot garantir una energia mecànica constant (en aquest cas una energia cinètica, donat que el carril es situaria paral·lel al terra, i en qualsevol cas l'energia potencial seria sempre constant). El que passa és que, a raó de la fricció produïda, el mòbil vagi reduint la seva velocitat. En altres paraules, en dos moments diferents en el temps, el mòbil no tindrà mai la mateixa velocitat.

Aquest darrer sí que és un greu problema, ja que tot i que es pugui mesurar la freqüència que arriba al receptor, no es podria saber mai a quina velocitat correspon, a més de què en l'anàlisi de les dades es veuria com la desviació esperada s'aniria reduint, en la mesura en què disminuís la velocitat. Per tant, l'única forma de veure una desviació constant de la freqüència mentre l'emissor està en moviment és aconseguir que la velocitat que aquest porta sigui constant, i això es precisament el que aconseguix el carril d'aire a partir de la disminució de la força de fregament.

A continuació, segueix una breu explicació de com el carril duu a terme aquesta tasca. Abans de tot, cal saber que podem trobar quina és la força de fricció que s'exerceix sobre el mòbil seguint l'expressió següent:

$$F_f = \mu \cdot N$$

On:

μ = coeficient de fricció propi de cada material

N = força normal [N]

La força normal és la força que una superfície exerceix en un cos que estigui recolzat en ella, sent en un cos que estigui sobre un pla horitzontal igual al pes. El que fa el carril d'aire és extreure aire a una pressió alta per un gran nombre de forats, exercint una força sobre el mòbil que es desplaça sobre seu.

En altres paraules, exerceix una força en el sentit contrari al pes. Llavors, el valor que ha de tenir la normal disminueix, ja que el valor a contrarestar és inevitablement més petit. Això, significa que la força de fricció també esdevé menor.

¹ Les forces no conservatives són aquelles que transformen l'energia mecànica en un altre tipus d'energia. En el cas de la força de fricció, en energia calorífica.

En resum, d'aquesta manera s'aconsegueix que la velocitat del mòbil emissor sigui *pràcticament* constant, ja que tot i que és poc menys que impossible aconseguir que un cos que es desplaça per un pla ho faci sense fricció, després de la intervenció del carril d'aire sí que es pot considerar negligible a efectes pràctics. D'aquesta forma, sí podem considerar que s'assoleix un moviment uniforme, assegurant un experiment que permet un estudi de la fórmula teòrica de l'Efecte Doppler a partir de criteris empírics.

5. Construcció d'elements auxiliars

Tot i que aquest treball hagi estat centrat en l'experimentació d'un fenomen físic concret, la construcció d'elements auxiliars ha tingut una importància capital en el procés. Això es deu a què conforme han anat sorgint necessitats al llarg del procés s'han hagut de plantejar solucions, de les quals moltes han passat per l'ús d'eines o mecanismes alternatius, que s'han hagut de fabricar.

Aquest apartat es centra en la descripció del procés de muntatge d'aquests elements, que podem dividir en freqüencímetre i placa Arduino i carril d'aire.

5.1 Freqüencímetre

Un freqüencímetre és un instrument que serveix per mesurar la freqüència d'un moviment ondulatori, contant el nombre de repeticions d'una ona mitjançant l'ús d'un comptador que acumula el nombre de períodes.

En un principi, per a l'experiment plantejat resultava de gran utilitat, ja que és un aparell generalment capaç de donar valors en intervals de temps molt petits i amb una gran fiabilitat. A més, també té l'avantatge de poder connectar-se a una placa Arduino, que connectada a la vegada a un ordinador, crea un sistema de captació automàtica de dades, el que facilita la posterior anàlisi.

És per tot això, que es va decidir fer-ne ús, i el freqüencímetre escollit va ser l'Sparkfun Frequency Counter. Entre els seus avantatges, estava el fet que es podia disposar d'una programació ja feta, directament de la pàgina del fabricant, a més de què es tractava d'un producte barat en comparació a d'altres freqüencímetres. Com a inconvenients, hi havia principalment el fet que es tractava d'un producte que s'havia de muntar des de zero i que per tant requeria coneixements d'electrònica.

Amb l'ajut de *datasheets*¹ trobats per internet es va poder anar muntant el freqüencímetre, però es va arribar a un punt on la informació no era clara i el risc que no funcionés era alt, ja que podien aparèixer problemes que fossin donats tant per les soldadures com per les connexions.

¹ Un datasheet és un document que serveix per donar informació sobre el funcionament d'un sistema

5.2 Carril d'aire

Abans, ja s'ha fet menció de la transcendència que ha tingut l'ús del carril d'aire pel que fa a l'experiment i l'obtenció d'uns resultats fiables, i és per això que aquest apartat es centra no en la seva utilitat, sinó en el seu disseny i construcció que, com en el cas del freqüencímetre, també va haver de ser des de zero.

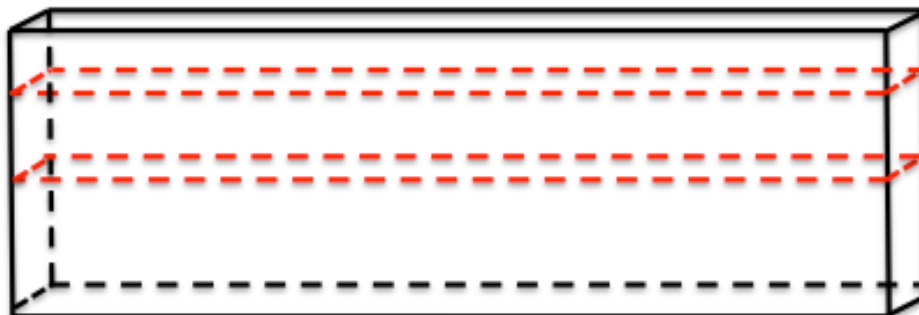
Un carril d'aire és un aparell de laboratori utilitzat per estudis tant de cinemàtica (moviment) com de dinàmica (interacció de forces) en un ambient de baixa fricció. Anteriorment, s'ha fet esment de com es redueix aquesta fricció: a través de petits forats disposats al llarg de tota la pista, pels quals surt aire a pressió. Una comparació fàcil i prou acurada és la que es pot establir entre un carril d'aire i un joc d'*air hockey*, en què l'aire s'utilitza per mantenir una velocitat alta per al *puck*. En ambdós casos, s'aconsegueix eliminar la fricció gairebé en la seva totalitat, i per això podem considerar que comparteixen la mateixa essència.

De fet, quan la construcció del carril encara es trobava en una fase teòrica, la informació necessària per a la seva construcció era en gran mesura realment destinada a la construcció d'un joc d'*air hockey*. Tant és així, que una major part del projecte de construcció va estar basat en un vídeo de la plataforma YouTube, en què un usuari (Bob Clagett) explicava amb tot detall els passos que havia seguit per fabricar el popular passatemps al seu canal *I Like To Make Stuff*.

El primer a decidir eren els materials, en especial els referents a la planxa en què havien de situar-se els cossos, ja que a banda de què hi hagués una sortida d'aire, també era convenient que la superfície fos lliscant.

En aquest sentit es va concloure que el material més apropiat era una planxa d'uns 4 mil·límetres recoberta de melamina ($C_3H_6N_6$), un compost orgànic que presenta un coeficient de fricció molt baix.

El disseny del carril d'aire, des d'un principi, va basar-se en una capsa en forma de prisma rectangular on, a dins, hi havia d'haver dues planxes que limitarien l'espai en què es mouria l'aire. La de dalt seria la recoberta de melamina. L'estructura de la caixa es va fer amb 4 peces de conglomerat: dues de 0'20x0'30 metres, i dues més de 1'20x0'30 metres. A més, un dels aspectes importants a decidir van ser tant la grandària com la distància dels forats de la planxa de melamina. Finalment, es van decidir de fer amb una broca de 2 mil·límetres de diàmetre, i una separació entre forats de 2'5 centímetres de quadrat, el que donava un total de 352 forats.



Imatge 6. Esquema usat per construir el carril d'aire; en vermell, s'hi trobarien les planxes interiors, sent la de dalt la recoberta de melamina

El primer que es va fer va ser marcar cada punt on havia d'haver-hi un forat, mitjançant una quadrícula disposada a sobre de la planxa superior. Una vegada fet, es van fer els forats amb l'ajut d'un trepant i la broca ja indicada.

Quan es va acabar aquest procés, el següent va ser enganxar dos llistons a cadascuna de les planxes grans de conglomerat, a una alçada de 5 i 20 centímetres de la part superior¹. Aquests llistons es van enganxar tant amb cola d'impacte com amb claus, ja que sobre seu, va ser on més tard s'hi van posar les dues planxes interiors, que van quedar situades com es veu a la imatge 6.

Abans d'aquest últim pas, però, entre aquestes dues planxes interiors era on s'havia de situar l'entrada de l'aire que havia de sortir a l'exterior a través dels forats, i com es volia que accedís a aquest espai ja en la mateixa direcció de sortida, es va fer un forat de 4 centímetres de diàmetre al centre de la planxa inferior de melamina.

Més tard, es va repetir el mateix procés, aquest cop al lateral d'una de les planxes grans de conglomerat, per on posteriorment es va fer l'entrada d'aire des de l'exterior.

Finalment, es van unir interiorment aquests dos forats, amb un seguit de tubs. Havent ja dut a terme tots els passos anteriors, es va procedir a la unió de tots els elements, que va resultar en el carril d'aire usat en les proves.

L'últim que es va fer, va ser posar silicona al voltant de cadascuna de les dues planxes de melamina, per assegurar que l'aire entrant no s'escapés per algun dels laterals.

¹ Es poden trobar imatges així com una explicació més detallada a l'Annex, pàgina 26.

Havent acabat el carril, es van fer algunes proves per veure si el rendiment era satisfactori. Primerament, es va pensar que així era, però més tard es va rectificar. Sí que hi havia un problema, i aquest tenia a veure amb l'amplada de la pista del carril: al ser massa gran en relació a l'amplada de la placa de metacrilat que havia de desplaçar-se sobre seu (20 i 10 centímetres d'amplada respectivament), era extremadament difícil que el moviment fos rectilini.

Al parlar dels fonaments teòrics de l'Efecte Doppler, ja es va fer èmfasi en què calia que el moviment fos en una direcció constant, o dit d'una altra manera, que no hi hagués una desviació. El que es va fer per evitar aquesta situació, va ser enganxar amb *velcro* dos llistons al llarg de la pista, separats entre ells a una distància d'uns 11 centímetres, delimitant així el moviment de la placa de metacrilat. Es pot veure l'efecte d'aquest darrer canvi a la imatge 3.

6. Anàlisi dels resultats

Després d'haver realitzat les gravacions anunciades al punt 4, es va passar al tractament i anàlisi de les dades recollides. Els arxius, però, estaven en gran part alterats pel soroll que produïa tant l'aire entrant al carril com el propi so causat pel desplaçament de la placa. És per això, que es va decidir fer ús d'un programa informàtic per tal d'intentar treballar amb un so més net. El programa escollit va ser *Audacity*.

Una vegada ja tractades les dades, amb l'ajuda del programa informàtic *Garage Band* es van crear dos arxius de so per cada nota musical. D'aquests, un contenia la nota sense cap alteració, amb la freqüència constant corresponent. En canvi, l'altre arxiu contenia un tall de la gravació efectuada, concretament en el que la freqüència variava, disposat en forma de bucle. Així, es podia dur a terme una comparació entre el so "estàndard" i la seva variació causada pel moviment, a més de poder mesurar la freqüència de cadascun d'una forma més efectiva. Una vegada recollida tota la informació, es va fer la següent taula:

NOTA MUSICAL	FREQÜÈNCIA EMESA	FREQÜÈNCIA APARENT	% DE VARIACIÓ	VELOCITAT ASSOCIADA
Do ₅	523 Hz	535 Hz	2,29%	7,79 m·s ⁻¹
Re ₅	587 Hz	596 Hz	2,04%	6,94 m·s ⁻¹
Mi ₅	659 Hz	674 Hz	2,27%	7,73 m·s ⁻¹
Fa ₅	698 Hz	715 Hz	2,43%	8,27 m·s ⁻¹
Sol ₅	783 Hz	802 Hz	2,42%	8,24 m·s ⁻¹
La ₅	880 Hz	901 Hz	2,38%	8,10 m·s ⁻¹
Si ₅	987 Hz	1009 Hz	2,22%	7,56 m·s ⁻¹

Imatge 7. Taula de les dades recollides

Com es pot observar amb la taula anterior, en tots els casos es va donar un augment fraccional de la freqüència aparent respecte de la freqüència emesa equivalent a un valor d'entre el 2% i el 3%. A més, una conseqüència de la fórmula que s'ha explicat a l'apartat en referència al contingut teòric de l'Efecte Doppler és que aquesta mateixa fracció és igual a la que representa la velocitat de l'emissor respecte la del medi, que en el cas de l'experiment ja s'ha indicat que era de 340,55 m·s⁻¹.

Aquesta és una de les més importants implicacions que resulten de què la fracció que representa la velocitat de la emissió respecte la del medi sigui igual a l'augment fraccional de la freqüència aparent: si es manté la mateixa velocitat per a la font, forçosament es mantindrà l'augment en tant per cent de la freqüència, el que implica que per a una mateixa velocitat, l'augment en valor absolut serà major quan més gran sigui la freqüència.

Això significa que per a una oïda humana, en el cas que es produeixi un Efecte Doppler, quant més gran sigui la freqüència d'emissió més fàcilment serà percebut (clar està, dins del rang de freqüències perceptibles). Aquest apunt és important, i sens dubte molt és fàcil d'identificar de forma empírica que amb una fórmula.

Per tal de saber el grau d'exactitud que l'experiment assolía, s'hauria d'haver conegut la velocitat a la que es llençava en cada cas el mòbil emissor. De tota manera, hi ha dos factors que ens avisen que els resultats obtinguts són prou acurats: el primer, és el fet que les velocitats calculades de forma indirecta presenten valors del tot probables en les condicions en què es desenvolupa el moviment; el segon, fa referència al fet que totes les velocitats tot i no ser mesurades de forma directa, presenten en els 7 casos estudiats uns valors molt semblants, que oscil·len en la seva majoria entre els 7 i els $8,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (entre els 25 i els $30 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$).

Tot amb tot, per no deixar la veracitat dels resultats en un supòsit, alhora que es realitzava l'experiment, es va dur a terme una darrera comprovació: amb un cronòmetre, es va mesurar el temps que el mòbil trigava des d'un dels extrems fins l'altre, i seguint la coneguda expressió que diu que en un moviment uniforme la velocitat és igual a la distància partida pel temps ($v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$), es va corroborar la plausibilitat dels càlculs realitzats. Aquesta operació es va realitzar fins a 10 vegades, i la mitjana dels resultats es va situar en els $7,94 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, uns $28 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Veiem doncs, que es tracta d'un valor molt semblant al de les velocitats indirectament calculades, que presenten una mitjana aritmètica de $7,80 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

En definitiva, podem considerar que es va demostrar l'existència d'un Efecte Doppler en un rang de 7 freqüències diferents, corresponents a les 7 notes musicals de la cinquena octava, donant una variació significativa en el valors recollits, que en alguns casos arriba fins a una diferència de 20 Hz entre la freqüència emesa i l'aparent. En altres paraules, no solament s'ha donat una demostració qualitativa, com podria representar qualsevol de les gravacions en què es distingeix una variació en la freqüència, sinó que s'han usat els resultats per calcular indirectament però de forma satisfactòria la velocitat amb què l'emissor es desplaçava.

7. Conclusions

Aquesta darrera part del treball es centrarà en un sumari d'allò que s'ha aconseguit al llarg del treball, és a dir, en si s'ha pogut validar la hipòtesi inicial, que recordem era: "Podem demostrar l'existència de l'Efecte Doppler en un espai de laboratori". A banda d'aquesta reflexió, però, també s'hi trobaran idees per a noves vies de desenvolupament del projecte, amb l'objectiu que d'altres puguin tenir com a referència el treball present.

7.1 Validació de la hipòtesi

En un principi, a la resposta per la pregunta de si s'ha validat la hipòtesi inicialment plantejada podria semblar que la contestació ha de ser simplement afirmativa. Al cap i a la fi, s'ha demostrat l'existència de l'Efecte Doppler mitjançant la gravació de canvis en la freqüència de diverses notes musical, és a dir en freqüències diferents, i això s'ha fet en un espai i utilitzant unes eines pròpies d'un laboratori escolar. Es podria dir, doncs, que la hipòtesi ha estat validada.

De tota manera, al llarg del treball s'ha anat fent esment dels obstacles que han sorgit, i de com alguns han resultat ser suficientment greus com per suposar canvis importants en el transcurs del projecte. Potser l'exemple més clar en aquest sentit ha estat el del freqüencímetre, ja que al decidir no comptar amb el seu ús, es va renunciar implícitament a la creació de tot un sistema de gran precisió amb l'avantatge afegit d'una recollida automàtica de dades; passant a l'ús de gravacions en què inevitablement es perd part de la cura respecte a la fidelitat de les mesures.

És en aquest sentit on es poden plantejar objeccions a la validació total de la hipòtesi. Tot i haver obtingut unes dades que indiquen clarament l'existència d'un Efecte Doppler i tot i saber de la impossibilitat d'uniques dades completament correctes, mai no està de més en un treball de caràcter científic una major concreció. Per això, per tal de d'acabar amb qualsevol tipus de dubte hauria estat preferible un marge d'error menor, un camí que considerant la exactitud intrínseca d'aquest efecte ha de passar necessàriament per una major precisió a l'hora de la recollida de dades.

Tanmateix, també és cert el fet que és pràcticament impossible aconseguir una precisió absoluta, i per tant és igualment difícil decidir per aquests mitjans si un treball és o no vàlid. Això igualment, no vol dir que les mesures en què es fonamenta aquest treball siguin en cap cas imprecises, ja que la seva captació ha estat curosament estudiada. De fet, es pot veure com s'ha mantingut una preocupació contínua per aquest aspecte, i n'és precisament una excel·lent prova tot el relacionat amb la construcció del carril d'aire, dissenyat únicament per a aquest fi.

Així doncs, tenint en compte tot l'esmentat, es pot concloure que la hipòtesi ha estat parcialment validada, el que es podria traduir com al fet que s'ha acomplert l'objectiu principal del treball, però no s'ha fet de la forma idònia, que era també una de les qüestions tàcitament plantejades.

7.2 Noves vies de recerca

Ja des de la primera introducció a l'Efecte Doppler com a fenomen físic, es va fer especial èmfasi en la quantitat d'aplicacions que se li poden atorgar tant dins com fora del camp de la física. En aquest treball en particular, però, no s'ha adreçat la seva pluralitat, sinó que s'ha centrat en l'explicació i demostració del fenomen com a un tot, el que justifica l'elecció de la situació més bàsica en què es manifesta.

Arribats a aquest punt, però, es pot considerar l'Efecte Doppler com a un camí on hi trobem constants bifurcacions. Es va començar el treball fent menció a dos tipus diferents d'ones: les mecàniques i les electromagnètiques. Es va dir, a més, que s'havien escollit les primeres, de caràcter sonor. Per tant, aprofitant la validesa de l'efecte en tot tipus d'ones, la primera nova via de recerca fa referència a aquesta primera escissió: un estudi de l'Efecte Doppler en ones electromagnètiques o més concretament, lumíniques. També en aquesta direcció es podria optar per un estudi en referència a les ones gravitacionals, tot i que aquest darrer comportaria una major complexitat teòrica a més d'un enorme inconvenient a l'hora d'idear experiments, ja que les ones gravitatòries són ones extremadament febles.

En cas que es vulgui optar per les ones de caràcter sonor, encara hi ha un gran nombre de possibilitats en què es poden aplicar gran part de les tècniques i procediments del treball efectuat. De fet, es podria mantenir l'estructura del treball però tenint com a referència una situació més complexa, com seria el cas de l'estudi de l'Efecte Doppler en l'existència d'una velocitat obliqua entre dos cossos, o en el cas que ambdós estiguin en moviment. Tot i que en essència el resultat hauria de ser el mateix, s'estaria afegint un component pràctic a l'experiment, ja que les situacions citades són més comunes a la vida quotidiana.

D'altra banda, també es poden buscar vessants més teòriques, sobre les quals en aquest treball tan sols s'ha fet una breu explicació, com és el cas de la Singularitat de Prandtl-Glauert. En aquesta ocasió, la importància no residiria en la demostració empírica, a raó de la dificultat d'assolir situacions límit com la mencionada. En canvi, el treball podria estar basat en l'estudi teòric de les limitacions físiques d'un fenomen com l'Efecte Doppler. A més, en aquest sentit torna a existir la possibilitat d'un estudi en ones lumíniques, que en referència a les situacions límit passaria per l'estudi de la física relativista.

També, es podria trobar una altra via de recerca deixant de banda l'espai de laboratori escolar, en favor d'un laboratori especialitzat, en què es disposés des d'un principi de la instrumentació necessària que en el present treball s'ha hagut de construir, per així poder dur a terme un major nombre d'experiments amb una també major complexitat pel que fa al comportament de l'efecte que és objecte d'estudi. Val a dir, que aquest darrer canvi no s'exclou de totes les noves vies de recerca anteriorment esmentades.

Finalment, una darrera via de recerca vindria de la mà del carril d'aire. Gràcies al fet que permet experimentar situacions tant cinètiques com dinàmiques en un ambient de baixa fricció, podria servir per a experimentar la naturalesa dels xocs entre cossos, o el comportament dinàmic de diferents elements com, per exemple, una molla. En definitiva, per a l'estudi de qualsevol fenomen on es vulgui treballar salvant l'obstacle de forces dissipatives.

8. Annex

L'annex del present treball ha estat dividit en dues parts. Ambdues, però, comparteixen la mateixa essència: es tracta de material que no ha pogut ser afegit al treball, però que es considera suficientment important per l'enteniment global d'aquest, i per tant ha estat afegit a aquest apartat. La primera, té a veure amb demostracions matemàtiques, mentre que la segona es basa en una addició de suport visual.

8.1 Demostració Matemàtica

La primera de les parts d'aquest annex farà referència a la demostració de caràcter matemàtic de tots aquells fenòmens que han aparegut al llarg del treball, i de totes aquelles expressions i fórmules que s'han usat per explicar-los.

Es tracta, per tant, del vertader fonament del treball. Tot el seguit d'expressions i fórmules s'ha dividit al seu torn en: la fórmula de l'Efecte Doppler emprada; la dependència de la velocitat del so amb la temperatura; i la Singularitat de Prandtl-Glauert.

8.1.1 Fórmula de l'Efecte Doppler

Suposem que les crestes d'una ona abandonen una font sonora a intervals regulars separats per un període de temps T . Si la font s'apropa a l'observador a una velocitat V , durant el temps comprès entre la sortida de dues crestes successives la font s'haurà apropat a l'observador una distància $V \cdot T$.

Això, fa que disminueixi el temps que la cresta de l'ona necessita per anar de la font a l'observador, i ho fa a una quantitat $V \cdot T / V_s$, on V_s és la velocitat del so. Així, el temps transcorregut entre l'arribada de dues ones successives serà:

$$T' = T - \frac{V \cdot T}{V_s}$$

Pel Teorema de Fourier, podem considerar que la longitud d'ona del so al ser emès és la mateixa en tot moment, i obeeix l'expressió:

$$\lambda = V_s \cdot T$$

Mentre que la longitud d'ona del so al arribar a l'observador és:

$$\lambda' = V_S \cdot T'$$

Així, la relació entre aquestes dues longituds d'ona és:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{T'}{T} = 1 - \frac{V}{V_S}$$

El mateix raonament seria aplicable en el cas que la font s'allunyés de l'observador, tan sols s'hauria de reemplaçar el signe negatiu per un de positiu.

I d'igual manera es pot aplicar aquest raonament a qualsevol altre tipus d'ona, tenint sempre en compte quina és la velocitat del medi en cada cas.

En canvi, si el que es vol és l'expressió de la freqüència a l'arribar a l'observador, tan sols cal recordar quina era la relació que s'establia entre la longitud d'ona i la freqüència:

$$f = \frac{V_S}{\lambda}$$

I substituir a l'expressió de λ' :

$$f' = \frac{V_S}{V_S \cdot T'} = \frac{1}{T'} = \frac{1}{T - \frac{V \cdot T}{V_S}}$$

I sent la freqüència la inversa del període, podem concloure:

$$f' = f \cdot \frac{V_S}{V_S - V}$$

El que equival a:

$$f' = f \cdot \left(1 - \frac{V_S}{V}\right)$$

En aquest cas, també veiem el fet que com més gran és la velocitat de l'observador, també més gran, és a dir més aguda, és la freqüència aparent.

De tota manera, si es vol aconseguir la mateixa expressió usada a l'apartat de marc teòric, es pot considerar que la font s'acostarà al receptor amb una velocitat V' , corresponent a V_s+V . Així, es tindrà:

$$f' = \frac{V'}{\lambda}$$

Que, com s'ha dit, és equivalent a:

$$f' = \frac{V_s}{\lambda} + \frac{V}{\lambda} = f + \frac{V}{\lambda}$$

El que porta a:

$$f' = f \cdot \left(1 + \frac{V}{f \cdot \lambda}\right)$$

$$f' = f \cdot \left(1 + \frac{V}{V_s}\right)$$

D'aquesta manera, es demostra l'ús que s'ha fet de la fórmula general de l'efecte Doppler.

8.1.2 Binomi de Newton i velocitat del so

Es considera que l'equació de la velocitat de l'aire en un gas és la següent:

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{\rho}}$$

On:

γ = Constant de dilatació adiabàtica d'un gas¹

P = Pressió normal del gas [Pa]

ρ = Densitat del gas [$\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$]

Aplicant l'equació general dels gasos ideals:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad ; \quad P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

¹ La constant de dilatació adiabàtica d'un gas es la raó que s'estableix entre la seva capacitat calorífica a pressió constant i la seva capacitat calorífica a volum constant

On:

V = Volum del gas [m³]

R = Constant universal dels gasos [8,314 J·mol⁻¹·K⁻¹]

m = Massa del gas [Kg]

M = Massa molar del gas [Kg]

T = Temperatura [°K]

El resultat de combinar les dues equacions és:

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{M}}$$

A partir d'aquí, es pot establir una relació amb la temperatura de la següent manera:

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R}{M} \cdot (T_0 + t)} \approx \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T_0}{M}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma \cdot R}{M \cdot T_0}} \cdot t$$

Per fer aquesta aproximació s'han tingut en compte els dos primers termes del desenvolupament de $(1+t \cdot T_0)^{1/2}$ pel *Binomi de Newton*.

Una vegada hem arribat a aquesta expressió final, tan sols cal substituir tots els valors que ja coneixem, que són:

$$T_0 = 273,15 \text{ °K}$$

$$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

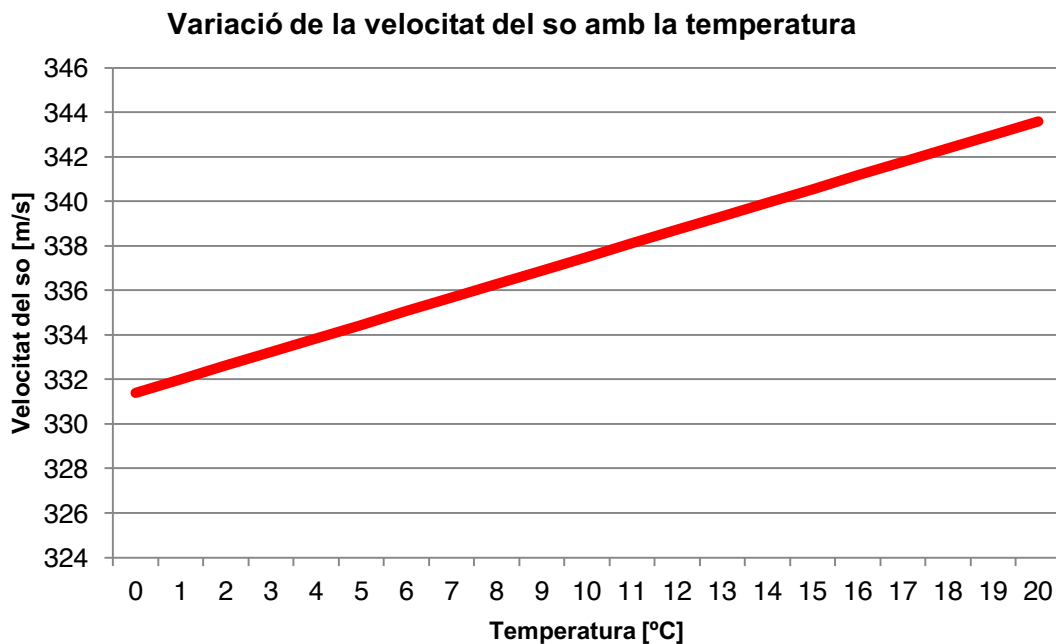
$$\gamma = 1,4$$

$$M = 28,95 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Una vegada introduïts aquests valors a l'equació, trobem que el valor per la velocitat obeeix la mateixa fórmula ja mencionada al marc teòric:

$$V_s \approx 331,4 + t \cdot 0,61$$

Amb aquesta expressió, podem deduir que la dependència que s'estableix entre la velocitat del so a l'aire i la temperatura és de tipus lineal. Aquesta dependència la podem aproximar gràficament de la següent forma:



Imatge 8. Gràfic de la variació de la velocitat del so

Com s'ha mencionat, per arribar a l'expressió anterior s'ha fet ús d'una aproximació que tenia a veure amb el desenvolupament del Binomi de Newton, i de fet, d'un cas que es podria considerar com a especial. Abans de tot, però, cal recordar que un binomi és qualsevol expressió algebraica formada per la suma o la diferència de dos termes o monomis.

Al segle XVII, Newton va generalitzar el teorema del binomi en una expressió que servia per a desenvolupar els termes d'un binomi elevat a qualsevol potència d'un nombre natural, i és per això que aquesta operació li deu el nom. Aquesta expressió a la que arribà és la següent:

$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0} a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 \pm \dots \pm \binom{n}{n} b^n$$

Tenint en compte que:

$$\binom{l}{m} = \frac{l!}{m!(l-m)!}$$

A més, pel que fa a l'aproximació anterior, es tractava d'un cas especial d'aquest desenvolupament, ja que en comptes de tenir un exponent natural, n'hi havia un de fraccionari. En aquest cas, s'ha de tenir en compte que el primer terme del binomi ha de ser forçosament superior al segon per tal que l'operació es pugui efectuar. En aquest cas especial, la fórmula que s'ha d'utilitzar és la següent:

$$(a \pm b)^{n/m} = a^{n/m} + \frac{n}{m} a^{\frac{n-m}{m}} b + \frac{n(n-m)}{m^2 \cdot 2!} a^{\frac{n-2m}{m}} b^2 \dots$$

Aquest desenvolupament en concret, que seguiria fins a l'infinit, té la particularitat que cada terme representa un valor molt més petit que l'anterior. És per això, que per al càlcul de la velocitat del so respecte un increment de temperatura tan sols es van agafar els dos primers termes.

8.1.3 Singularitat de Prandtl-Glauert

Quan all llarg del treball s'ha parlat de la fórmula de l'Efecte Doppler, també s'ha fet el mateix de les seves limitacions. La Singularitat de Prandtl-Glauert és una d'elles. Si agafem la fórmula de l'Efecte Doppler per a una font que s'allunya de l'observador, una de les múltiples expressions que podem trobar és:

$$f' = f \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{v_s}{v}} \right)$$

És important adonar-se que aquesta fórmula comporta un perill. En el cas que la velocitat del observador arribi a ser igual que la del medi, la freqüència aparent seria igual a la freqüència emesa multiplicada per 1/0, és a dir, infinit; un resultat que no té sentit. Aquesta situació s'entendria matemàticament de la següent forma:

$$f' = \lim_{v \rightarrow v_s} f \left(\frac{1}{1 - \frac{v_s}{v}} \right)$$

Fent una vegada més l'analogia amb les ones lumíniques, si es busquen situacions límit en l'Efecte Doppler s'haurà de pensar en claus de física relativista, que en aquest sentit diu que cap partícula amb massa intrínseca pot viatjar a la velocitat de la llum, ja que per causa de l'equivalència massa-energia d'Einstein, s'infereix que l'energia que hauria calgut per a accelerar el suposat cos fins a la velocitat de la llum seria infinita.

Dit d'una altra manera, en el cas de les ones lumíniques no existeix aquest problema. En canvi, pel que fa a les ones sonores sí que es pot donar aquesta situació, ja que es pot aconseguir viatjar a una velocitat igual o superior a la del so, com de fet ho fan molts avions militars.

En el primer d'aquests casos, quan una partícula assoleix la velocitat del so, es produeix un fenomen conegut com a explosió sònica, el component audible de la ona de xoc produïda, que a més també canvia les condicions de pressió i temperatura en l'àrea circumdant. El veritable problema, però, el trobem quan un cos s'allunya a una velocitat superior a la del so.

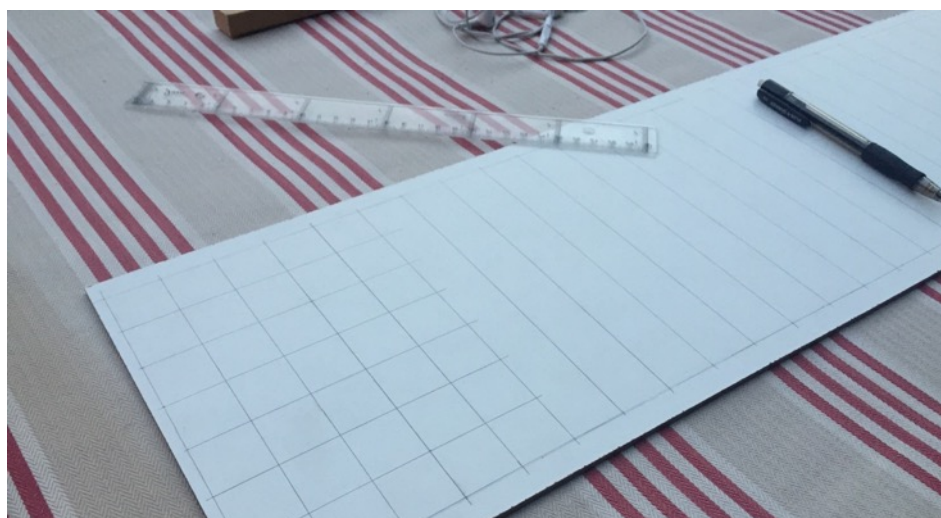
Això es deu a què, si mirem l'equació anteriorment citada, en aquest cas s'estaria dividint 1 per un nombre negatiu, el que donaria un resultat de signe negatiu. És per aquesta raó que l'equació es coneix com a incompatible, ja que no se li pot donar una solució amb sentit físic. Sent la definició de freqüència el nombre de vegades per unitat de temps d'un succés, es veu clar que aquest valor no pot ser menor de zero. La inconsistència que sorgeix és la que es coneix com a Singularitat de Prandtl-Glauert.

8.2 Suport visual

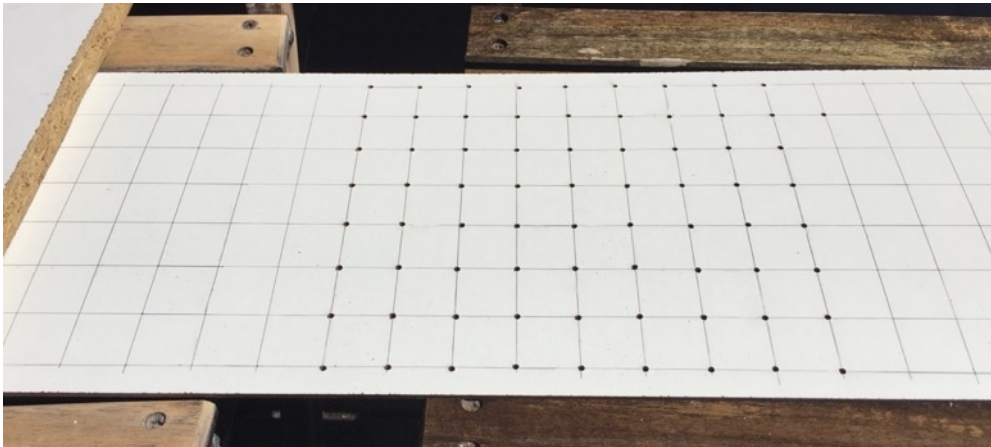
Aquesta segona part, a diferència de la primera, es centrarà en donar el suport visual referent a aquelles parts del treball en què, per una qüestió d'espai, no s'ha pogut proveir tot el necessari. L'apartat s'ha dividit alhora en dos: en el primer, s'hi poden trobar imatges referents a la construcció del carril d'aire, mentre que en el segon es fa èmfasi en el tractament i classificació de les dades recollides.

8.2.1 Construcció del carril d'aire

En aquest espai, es donarà de forma detallada tot el suport gràfic relatiu a les diferents fases de construcció del carril d'aire.



Imatge 9. Es comença a dibuixar la quadrícula que ha de marcar els espais on hi haurà forats.



Imatge 10. Es comencen a fer els forats a la planxa superior de melamina, pels que després sortirà l'aire.



Imatge 11. Una vegada ja preparades les dues planxes de melamina, es mira en quina posició es convenient que es situïn, per posar-hi a sota els llistons.



Imatge 12. Quan ja es té el lloc exacte on es volen situar les planxes, s'enganxen, amb cola d'impacte i claus, dos llistons per cada planxa llarga de conglomerat, a 5 i 20 cm de la part superior.



Imatge 13. Una vegada els llistons han estat enganxats, es fa el forat lateral a una de les planxes llargues de conglomerat, per on més tard entrarà l'aire.



Imatge 14. Després d'haver fet també el forat de la planxa inferior de melamina, i d'haver ajuntat les quatre planxes de conglomerat, es fa la unió dels dos forats per on ha d'entrar l'aire.



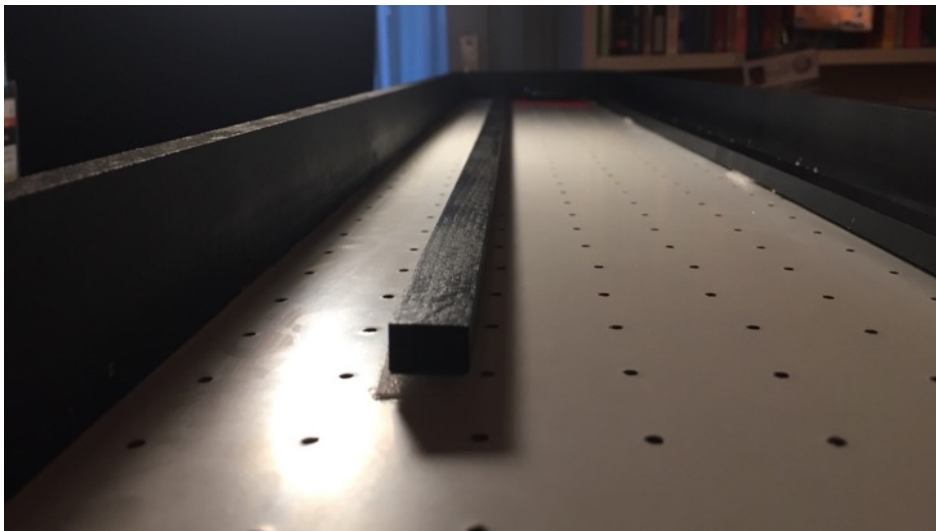
Imatge 15. Imatge del carril d'aire amb l'estructura exterior ja fixada.



Imatge 16. Vista superior del carril després d'haver ajuntat les quatre planxes exteriors i els tubs corresponents a l'entrada de l'aire.



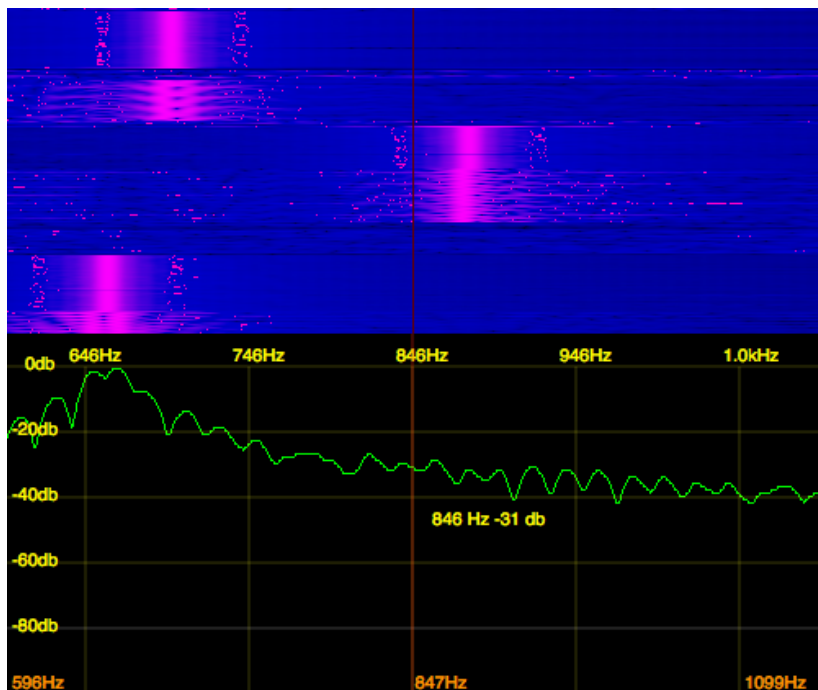
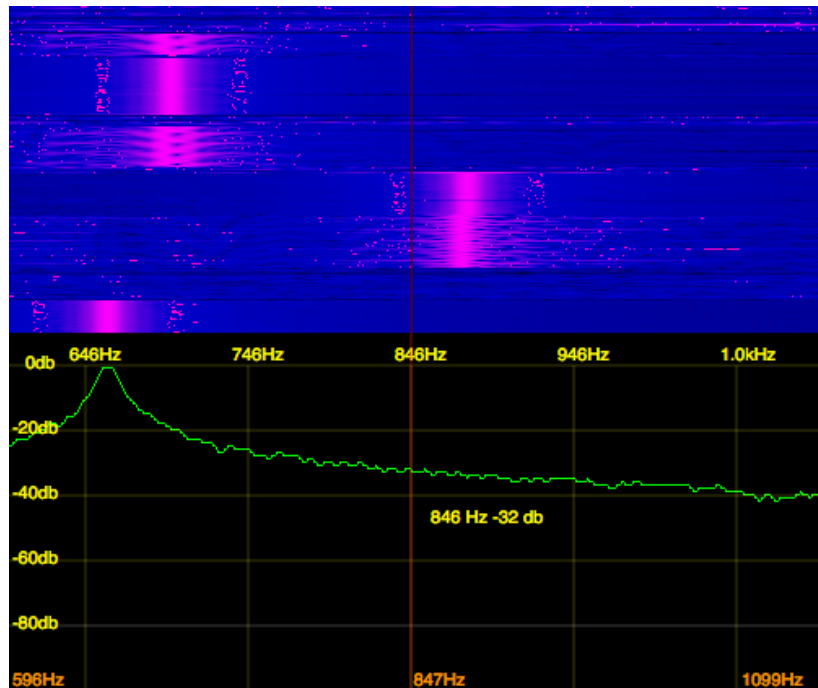
Imatge 17. Després d'haver finalitzat el procés de construcció del carril, es pinta amb esprai.



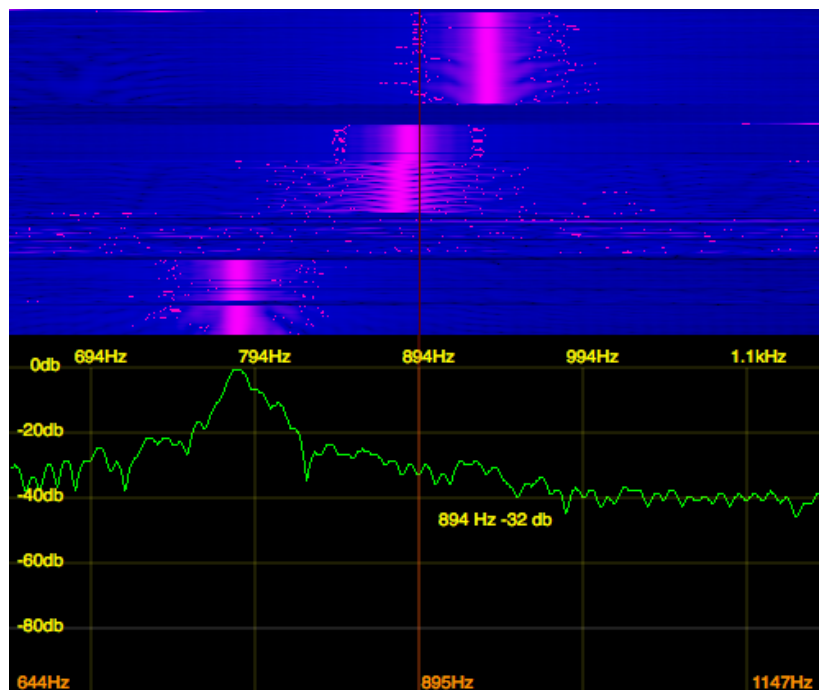
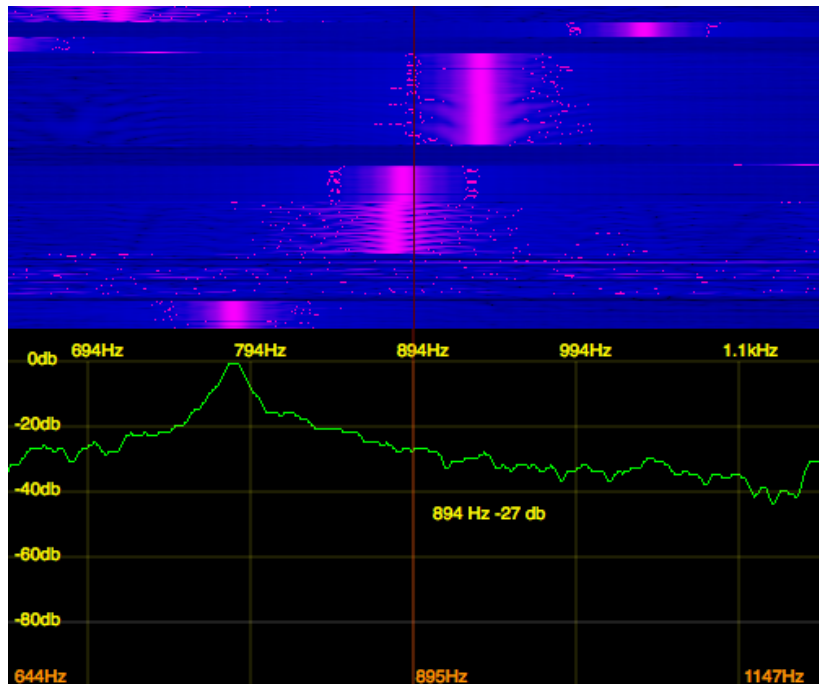
Imatge 18. Imatge de la pista després d'haver-hi posat els llistons.

8.2.2 Anàlisi gràfica dels resultats

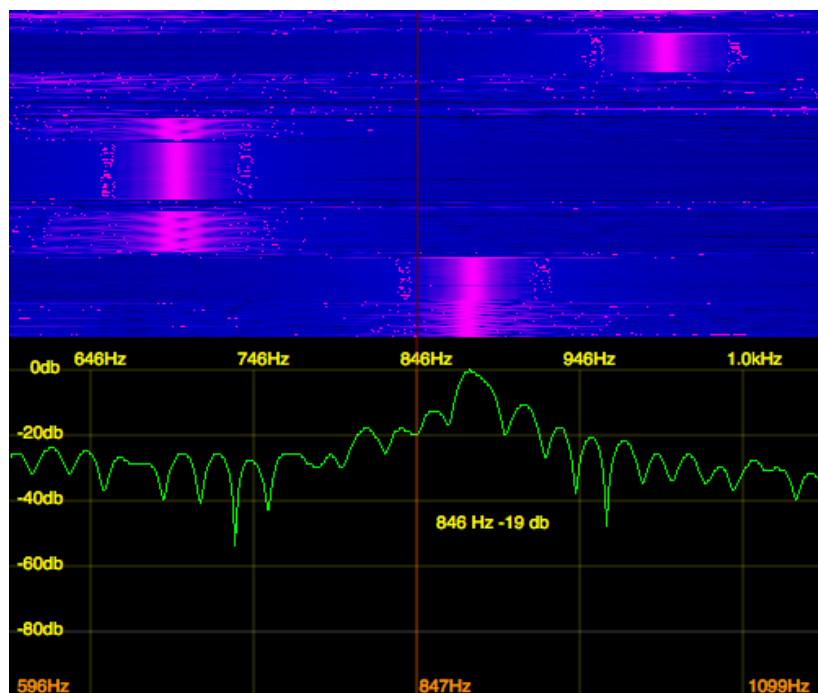
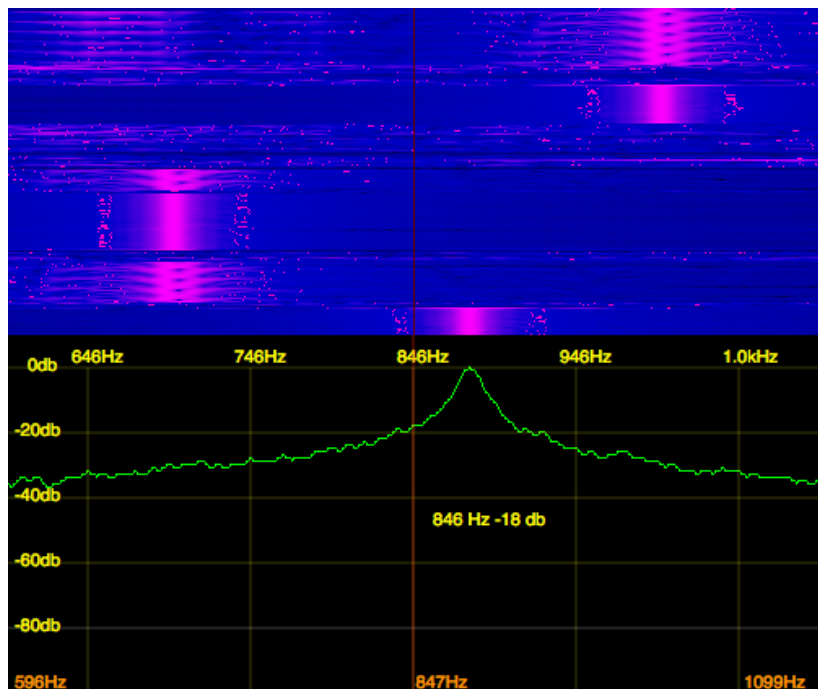
Per finalitzar, l'apartat que ve a continuació s'ha destinat a l'anàlisi dels resultats obtinguts en l'experiment, disposats a través de gràfics. Les següents, són les representacions gràfiques de les freqüències de 3 de les notes musicals i les seves respectives alteracions, produïdes, és clar, per l'existència d'un Efecte Doppler.



A dalt, trobem la imatge espectrogràfica d'una nota Mi pertanyent a la cinquena octava (659 Hz). A baix, la imatge espectrogràfica de la mateixa nota, però recollida d'una font que es trobava en moviment. Com es pot observar, l'ona que dibuixa l'espectrògraf a la segona imatge, a banda de molt més inestable (efecte produït pel bucle de l'arxiu), presenta una tendència cap a freqüències més altes, aquest cop sí, com a conseqüència de l'Efecte Doppler.



En les dues noves imatges, es pot observar la imatge espectrogràfica de la nota Sol, també de la cinquena octava, i per tant relativa a 783 Hz. Una vegada més, és apreciable la diferència entre la primera espectrografia, en què es veu una freqüència neta; i la segona, on hi ha molts més daltabaixos. També en aquesta segona comparativa, es notable en el cas de la nota alterada la tendència a una freqüència més alta de la que en principi correspondria, un efecte que novament podem apropiat al Doppler.



En aquesta darrera parella d'imatges es dona exactament la mateixa situació que en les anteriors: la imatge alterada presenta no tan sols una molta major inestabilitat, sinó també una tendència a longituds d'ona més curtes, o el que és el mateix, a freqüències més elevades; una conseqüència de l'Efecte Doppler. Aquesta vegada però, es pot observar aquesta variació en una nota La, que en la cinquena octava, equival a una freqüència de 880 Hz. Al ser aquesta de les freqüències més elevades d'emissió que s'han estudiat, es pot considerar com a normal el fet que la variació en l'espectrògraf sigui també major (com ja es va explicar a l'anàlisi dels resultats).

9. Bibliografia i Webgrafia

ASIMOV, ISAAC. *El universo*. Madrid: Alianza Editorial, 1973.

BATTANER, EDUARDO. *Introducción a la astrofísica*. Madrid: Alianza Editorial, 1999.

FEYNMAN, RICHARD. *Seis piezas fáciles*. Barcelona: Crítica, 2014.

HAWKING, STEPHEN W. *Historia del tiempo*. Madrid: Alianza Editorial, 1990.

PENROSE, ROGER. *La nueva mente del emperador*. Barcelona: Penguin Random House, 1991.

SKOLNIK, MERRIL I. *Introduction to Radar Systems*. Nova York: McGrawHill, 2008.

WEINBERG, STEVEN. *Los tres primeros minutos del universo*. Madrid: Alianza Editorial, 1977.

«Efecto Doppler». *Laplace.us.es* [en línea]. Març de 2016.

http://laplace.us.es/wiki/index.php/Efecto_Doppler

«Efecto Doppler». *Wikipedia, la enciclopedia libre* [en línea]. Març de 2016.

https://es.wikipedia.org/wiki/Efecto_Doppler

«Qué es el Efecto Doppler». *Batanga* [en línea]. Abril de 2016.

<http://www.batanga.com/curiosidades/3669/que-es-el-efecto-doppler>

BERNARDO, ÁNGELA. «Descubren el lugar donde podría haberse estrellado el vuelo MH370». *Hipertextual* (27 de Juliol de 2016) [en línea].

<https://hipertextual.com/2016/07/mh370-vuelo-desaparicion>

PÉREZ, MARTÍN. «Así funciona un carril de aire». *YouTube* [en línea]. Juny de 2016.

<https://www.youtube.com/watch?v=v5oUiTAaeH0>

«Coeficientes de fricción». *Didáctica Física* [en línea]. Juliol de 2016.

http://didactica.fisica.uson.mx/tablas/coefficients_of_friction.htm

IEEE SPECTRUM. «Build a Cofee-Can Radar». *YouTube* [en línia]. Març de 2016.

<https://www.youtube.com/watch?v=Zr78A6cJDa4>

CHARVAT, GREGORY. «Doppler radar explanation and demo using the cofee-can radar». *YouTube* [en línia]. Març de 2016.

<https://www.youtube.com/watch?v=FOWopYv-JTM>

«Doppler Effect». NASA [en línia]. Abril de 2016.

<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/doppler.html>

«Propagación del sonido». *Museo virtual de la ciencia* [en línia]. Maig de 2016.

<http://museovirtual.csic.es/salas/acustica/sonido1/s4.html>

PARDO, LISANDRO. «Descubren un exoplaneta en Próxima Centauri, nuestra vecina estelar». *Neoteo* (25 d'Agost de 2016) [en línia].

<http://www.neoteo.com/descubren-exoplaneta-proxima-centauri-nuestra-vecina-estelar>

«Materiales con coeficiente de fricción bajo». *Finesoftware* [en línia]. Juliol de 2016.

<http://www.finesoftware.es/ayuda-en-linea/geo5/es/tabla-de-factores-de-friccion-de-diferentes-materiales-01/>

«Tipos de Efecto Doppler». *Estudiar Física* [en línia]. Junio de 2016.

<https://estudiarfisica.com/2015/04/09/los-tres-efectos-doppler-clasico-relativista-cinetico-y-relativista-gravitatorio-y-el-experimento-pound-rebka/>

«Ecografía Doppler». *Web Consultas* [en línia]. Maig de 2016.

<http://www.webconsultas.com/pruebas-medicas/ecografia-doppler-13668>

«Riel de Aire». *Bligoo* [en línia]. Juny de 2016.

<http://rieldeaire.bligoo.es/caracteristicas-generales#.V-BBJpN96i4>

«Longitud de onda y frecuencia». *Hyperphysics* [en línia]. Abril de 2016.

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/sound/dopp.html>

ALT SHIFT X. «The Doppler Effect. What does motion do to waves?». *YouTube* [en línia]. Abril de 2016.

<https://www.youtube.com/watch?v=h4OnBYrbCjY>

«Fuerzas de Van der Waals». *Areaciencias* [en línea]. Agost de 2016.
<http://www.areaciencias.com/quimica/fuerzas-de-van-der-waals.html>

«Fuerzas de Van der Waals». *Quimitube* [en línea]. Agost de 2016.
<http://www.quimitube.com/videos/enlaces-de-hidrogeno-y-fuerzas-de-van-der-waals>

«Fuerzas de Van der Waals». *Wikipedia, la enciclopedia libre* [en línea]. Març de 2016.
[https://es.wikipedia.org/wiki/Fuerzas de Van der Waals](https://es.wikipedia.org/wiki/Fuerzas_de_Van_der_Waals)

«Doppler Effect». *BBC Schools* [en línea]. Maig de 2016.
<http://www.bbc.co.uk/schools/gcsebitesize/science/aqa/origins/redshiftrev2.shtml>

«Doppler Effect». *Encyclopedia* [en línea]. Abril de 2016.
http://www.encyclopedia.com/topic/Doppler_effect.aspx

«Maths Doppler Effect». *Phys* [en línea]. Juny de 2016.
http://www.phys.uconn.edu/~gibson/Notes/Section6_3/Sec6_3.htm

«Maths Doppler Effect». *Physics classroom* [en línea]. Abril de 2016.
<http://www.physicsclassroom.com/class/waves/Lesson-3/The-Doppler-Effect>

PARDO, LISANDRO. «Descubren un exoplaneta en Próxima Centauri, nuestra vecina estelar». *Neoteo* (25 d'Agost de 2016) [en línea].
<http://noticieros.televisa.com/mundo/1403/efecto-doppler-ayudo-encontrar-avion-malaysia-airlines/>

«Color Theory». *Wikipedia, la enciclopedia libre* [en línea]. Abril de 2016.
https://en.wikipedia.org/wiki/Color_theory

«Propagación del sonido». *Wikipedia, la enciclopedia libre* [en línea]. Juliol de 2016
[https://es.wikipedia.org/wiki/Propagaci%C3%B3n del sonido](https://es.wikipedia.org/wiki/Propagaci%C3%B3n_del_sonido)

«Doppler Effect Experiments». *Eumus* [en línea]. Juny de 2016.
<http://www.eumus.edu.uy/docentes/maggiolo/acuapu/prp.html>

«Características de propagación del sonido». *Portal educativo* [en línea]. Juliol de 2016.
<http://www.portaleducativo.net/primero-medio/44/sonido-caracteristicas-propagacion>

«Ondas sonoras». *sc* [en línea]. Agosto de 2016.

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/acustica/sonido/sonido.htm>

«Binomi de Newton». *Vitutor* [en línea]. Octubre de 2016.

<http://www.vitutor.net/1/8.html>

«Teorema del Binomio». *Areaciencias* [en línea]. Octubre de 2016.

http://132.248.164.227/publicaciones/docs/apuntes_matematicas/38.%20Teorema%20del%20Binomio.pdf

«Gamma function». *Sosmath* [en línea]. Octubre de 2016.

<http://www.sosmath.com/calculus/improper/gamma/gamma.html>

UNICOOS. «Binomio de Newton con exponente fraccionario y negativo». *YouTube* [en línea]. Octubre de 2016.

https://www.youtube.com/watch?v=xGwjE_Cnp6M

«Desarrollo Binomio de Newton». *Platea* [en línea]. Octubre de 2016.

http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/ayudas/newton/binomio_de_newton.htm (9/2016)

«Newton's binomial theorem». *FicMath* [en línea]. Octubre de 2016.

<http://www.fic.umich.mx/~lcastro/binomial.pdf>

«Binomio de Newton con exponente fraccionario». *Vídeos de matemáticas* [en línea]. Octubre de 2016.

<http://www.videosdematematicas.com/pardonativos/Productos%20Notables%20%20Binomio%20de%20Newton%20con%20coeficientes%20fraccionarios>

«Efecto Doppler en ondas gravitacionales». *Textos Científicos* [en línea]. Setiembre de 2016

<http://www.textoscientificos.com/fisica/articulos/ondas-gravitacionales-agujeros-negros>

«Tipos de ondas». *Tiposde* [en línea]. Setiembre de 2016.

<http://www.tiposde.org/ciencias-exactas/66-tipos-de-ondas/>

«Explosión Sónica». *Wikipedia, la enciclopedia libre* [en línea]. Setiembre de 2016

https://es.wikipedia.org/wiki/Explosi%C3%B3n_s%C3%B3nica

«Sparkfun Frequency Counter Datasheet». *SparkfunElectronics* [en línea]. Octubre de 2016.
<https://www.sparkfun.com/datasheets/Kits/Frequency-Counter-v11.pdf>

«Sparkfun Frequency Counter Datasheet». *SparkfunElectronics* [en línea]. Octubre de 2016.
<https://www.sparkfun.com/datasheets/LCD/GDM1602K-Extended.pdf>

Diverses consultes. *Diec2* [en línea].
<http://dlc.iec.cat/>

«Compresión y rarefacción del aire». *Angelfire* [en línea]. Octubre de 2016
www.angelfire.com/empire/seigfrid/Compresionesyrarefacciones.html

«Comportamiento ondas mecánicas». *Eumus* [en línea]. Setembre de 2016
www.eumus.edu.uy/eme/ensenanza/acustica/apuntes/material-viejo/fisica_r/

«Velocidad del sonido». *Wikipedia, la enciclopedia libre* [en línea]. Juliol de 2016.
https://es.wikipedia.org/wiki/Velocidad_del_sonido

«Air Hockey fan». *Amazon* [en línea]. Juliol de 2016.
<https://www.amazon.com/Air-Hockey-Blower-Motor-Fan-electronic/dp/B0147O3ZYW>

«Online Frequency Counter». *Amazon* [en línea]. Setembre de 2016.
https://www.amazon.es/SparkfunKitFrecuenc%C3%ADmetro/dp/B00L7ZIIH4/ref=sr_1_1?ie=UTF8&qid=1474308802&sr=81&keywords=frecuencimetro

«Build an Air Hockey». *Gizmodo* [en línea]. Juliol de 2016.
<http://sploid.gizmodo.com/building-your-own-air-hockey-table-is-surprisingly-easy-1784029615>

«Ensanchamiento Doppler». *Wikipedia, la enciclopedia libre* [en línea]. Juny de 2016
https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADnea_espectral#Ensanchamiento_Doppler_t.C3.A9rmico