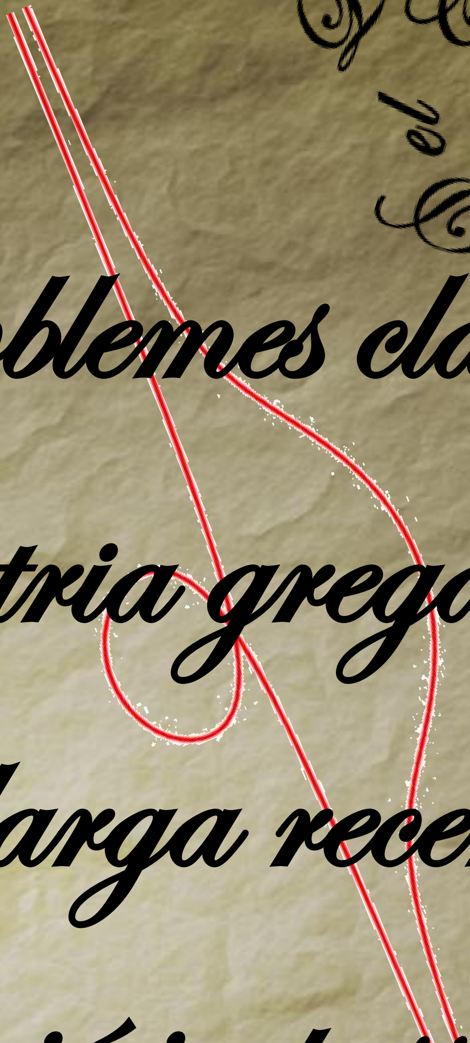
La Trisecció d'un Angle

La Quadratura del Cercle



Els tres problemes clàssics de la geometria grega: la fecunda i llarga recerca d'una solució impossible

Pseudònim: Алексей Минковский (Alexei Minkowski)

ABSTRACT

El present treball de recerca pretén demostrar la irresolubilitat dels tres problemes clàssics de la geometria. Aquests tres cèlebres problemes són: la **quadratura del cercle**, que consisteix a construir amb regle i compàs un quadrat que tingui la mateixa àrea que un cercle donat; la **duplicació del cub**, que consisteix a construir amb regle i compàs un cub que tingui el doble de volum que un de donat anteriorment; i la **trisecció de l'angle** consistent a construir amb regle i compàs un angle que tingui un terç de l'obertura de l'angle donat.

Per poder fer-ho amb més precisió cal anar més enllà del temari de batxillerat, i endinsar-se al tema d'estructures algebraiques. És necessari tenir una lleugera idea de irresolubilitat de polinomis a $\mathbb{Z}$ i a $\mathbb{Q}$, a part d'altres qüestions. A més del temari d'estructures, també s'han de tenir coneixements més exhaustius de geometria. També s'ha fet servir el programa GeoGebra per fer les representacions gràfiques necessàries.

Una de les eines prèvies per poder demostrar els teoremes d'aquest treball és la teoria de cossos, tal com va fer el matemàtic francès Pierre Wantzel a l'any 1837 per demostrar-ne una gran part.

Per aquest motiu, s'ha dividit el treball, principalment, en dues parts: una part teòrica o de recerca i la part principal o pràctica, on es trobaran els tres problemes clàssics amb les seves respectives demostracions. A més, també hi ha altres parts, com ara els annexos (on es pot veure alguna representació amb el GeoGebra) i les conclusions.

The present research project intends to demonstrate the unsolvability of the three classical problems of the geometry. The three known problems are: **the quadrature of the circle**, which consists in constructing a square with a ruler and a compass that has the same area than a given circle; **the duplication of the cube**, that it consists in constructing a cube with a ruler and a compass that it has the double of volume that one given formerly; and **the trisection of the angle** consistent in constructing an angle with a ruler and a compass that has a third of the opening of the given angle.

To be able to make it with more accuracy it is necessary to go deeping into the high school curriculum, and to penetrate into the subject of algebraic structures. It is necessary to have a light idea of unsolvability of polynomials at $\mathbb{Z}$ and at $\mathbb{Q}$, apart from other definitions. Apart from knowing the program of structures, one also has to have more exhaustive knowledge about geometry. The program has used GeoGebra to make the graphical representations possible.

One of the previous tools to be able to demonstrate the theorems of this work is the field theory, as the French mathematician Pierre Wantzel made in 1837 to demonstrate such a big part.

For this reason, the project has been divided, mainly, into two parts: a theoretical part and the main or practical part, where the three classical problems will be shown with their respective demonstrations. Moreover, there are also other parts such as the annexes (where some representations can be seen with the GeoGebra) and the conclusions.

Dedicat a
tots el que ho
han fet possible

In mathematics the art of proposing a question must be held of higher value than solving it.

Georg Cantor

One of the most amazing things about mathematics is the people who do math aren't usually interested in application, because mathematics itself is truly a beautiful art form. It's structures and patterns, and that's what we love, and that's what we get off on.

Danica McKellar

ÍNDEX GENERAL

PART I

INTRODUCCIÓ

CAPÍTOL 1

INTRODUCCIÓ

Desitjant seguir en l'avenir estudis de matemàtiques, no vaig passar-me moltes hores (per no dir gens) a deliberar que el treball de recerca havia d'estar relacionat amb aquesta ciència formal que segons Galileo Galilei *"(les matemàtiques) són l'alfabet amb el qual Déu ha escrit l'Univers"*.

La tria del tema no va ser gens fàcil, però des d'un primer moment em captivava més l'estudi de conceptes matemàtics que no els estudiés en cap moment, o si més no, que no s'instruïssin a fons. A més, volia endinsar-me profundament en un aspecte matemàtic sense haver-lo freqüentat amb anterioritat, volia partir de zero en tema de coneixements. També vaig pensar en què no hi haguessin gaires treballs confeccionats sobre el tema que volia estudiar. Com a qualsevol alumne, l'elecció del tema m'ha suposat un trencacolls, ja que des del primer moment, ens van afirmar que un desencert en l'elecció del tema podria arribar a ser un problema en l'elaboració del treball. Aquest treball l'he realitzat amb el magnífic suport del programa Argó de la UAB.

Finalment, em vaig decantar per la decisió de *Construccions amb regle i compàs* . Com que volia que en el treball pogués utilitzar molt l'eina informàtica del Geogebra, vaig voler-hi afegir algunes corbes que he considerat importants i què es poden observar a la natura. A més, vaig decidir escollir-lo per poder conèixer la història de la matemàtica grega respecte les construccions amb regle i compàs. Aquest tipus de coneixements adquirits em serviran tant per a la vida diària com per als meus futurs estudis. Una gran motivació del treball ha estat la demostració de la irresolubilitat dels tres problemes clàssics amb regle i compàs.

A més a més, un altre al·licient que em va portar a realitzar aquest treball va ser la de considerar la transcendència de la història de les matemàtiques. En el currículum de batxillerat, no es tracta el què és pròpiament la història, sinó que es tracten conceptes teòrics i conceptuals. Considero que la utilitat de la història de les matemàtiques és molt significant per a la posterior realització de diverses activitats, en el meu cas, conèixer els tres problemes clàssics i poder experimentar i divulgar en aquests problemes irresolubles amb regle i compàs. Crec que mitjançant la història es pot incitarL molt més l'interès dels alumnes sobre el punt que es tracta en aquest moment, i, tot seguit, es podrà entendre molt millor els conceptes més formals i conceptuals ja que la història dóna a conèixer el context i les circumstàncies que van originar els problemes. Crec que utilitzar la història per aprendre matemàtiques és imprescindible i primordial ja que proporciona dos continguts: saber la història de la teoria matemàtica i, també, la saps aplicar en diverses situacions perquè l'has estudiada.

Un altre aspecte a afegir, és la realització del treball amb LaTeXque és un sistema de composició tipogràfica, adequat per produir documents de gran qualitat visual i ben estructurats. He escollit aquest processador de textos per poder incloure amb facilitat tot el seguit de fórmules i conceptes matemàtics. A més, m'agradaria citar la importància que m'han facilitat dos treballs de recerca[1] elaborats per diferents alumnes ja que m'han aportat un resum de la teoria necessària, per poder demostrar la irresolubilitat dels tres problemes clàssics, adaptada al nivell de secundària.

En la realització d'aquest treball de recerca, la metodologia emprada ha estat a partir del material bibliogràfic citat, suport de diferents professors, suport del nou mitjà de comunicació (Internet)...

Segons una general estructuració del treball, aquest es divideix en diferents grups:

i **PART TEÒRICA:** Base de fonaments matemàtics d'àlgebra. Aquesta part és fonamental per tal de poder entendre i aplicar les lleis matemàtiques i els diferents aspectes que es consideren a la segona part. El teorema de Wantzell és la part fonamental de tot el treball ja que determina quins nombres són construïbles amb regle i compàs i quins no ho són. Aquesta part inclou: conceptes previs necessaris, espai vectorial, nombres complexos, estructures algebraiques i criteri de constructibilitat d'un nombre.

ii **PART PRÀCTICA:** Inclou els tres problemes clàssics, la demostració

[1]Citats a la bibliografia [1] [2]

de perquè són irresolubles amb regle i compàs. A més, inclou diferents representacions amb regle i compàs de diferents polígons i corbes; i el triangle de Reuleaux.

iii **ANNEXOS:** S'inclouen diferents aspectes que es poden veure a l'índex.

iv **CONCLUSIONS:** S'inclou les conclusions del treball de recerca.

He volgut endinsar-me en els tres problemes clàssics ja que trobo molt interssant el fet que no es van demostrar que eren irresolubles amb regle i compàs fins al segle XIX, amb la constructibilitat dels nombres.

A la introducció del treball, li vull donar molta importància al fet d'haver posat a l'inici aquelles dues frases cèlebres, i no unes altres.

La primera frase de Georg Cantor[2] diu: *En matemàtiques l'art de proposar una pregunta s'ha de considerar de més valor que resoldre-la.* He aplicat aquesta frase al meu treball de recerca, ja que considero que l'elecció del tema és una tasca molt complexa, ja que has de pensar allò que es vol estudiar i per què vols estudiar allò. Per a desenvolupar un projecte, cal que t'interessi, que sigui apte al teu nivell acadèmic i que sigui possible fer-ho. Tots aquests tres condicionants que considero les més importants, les compleixo. Tot seguit, cal decantar-se sobre quina modalitat de treball vols desenvolupar, en el meu cas, seria un treball d'investigació, ja que a partir d'un treball bibliogràfic, n'extreus el que consideres oportú per realitzar la part pràctica del treball. He adjuntat aquesta frase, perquè considero que si elegeixes un tema interessant, apte i possible ja pots seguir endavant per desenvolupar el projecte (o segons Cantor, resoldre la pregunta o l'objectiu).

La segona frase de Danica McKellar[3] diu: *Una de les coses més sorprenents sobre matemàtiques és que la gent que fa matemàtica no s'interessa normalment en l'aplicació, perquè les matemàtiques mateixes són veritablement una forma d'art bonica. Les matemàtiques són estructures i patrons, allò que ens encanta, i allò en què ens alliberem.* Aquesta segona frase, no us l'explicaré en aquest precís moment, ja que l'he de contestar al final del treball, perquè és una de les interpel·lacions que em faig i que intentaré contestar. Bàsicament em pregunto si el que treballaré està present al món físic. Això ho veurem a les conclusions.

[2] Matemàtic que va inventar la teoria de conjunts

[3] Actriu i matemàtica

CAPÍTOL 2

OBJECTIUS

Els principals objectius d'aquest treball són:

- Determinar quins nombres es poden construir amb regle i compàs i quins no.
- Explicar i entendre el per què els tres problemes clàssics de la geometria són impossibles de fer amb regle i compàs.
- El per què de la durada de demostrar que els tres problemes clàssics no es podien resoldre amb regle i compàs. (Per observar aquesta durada, des del s. V a.C. els matemàtics grecs es van plantejar construccions que no eren capaços de fer, i fins al s.XIX no es va demostrar que en realitat cap dels tres tenia solució).
- Què s'entén exactament per una construcció amb regle i compàs, i per què aquests problemes no són construïbles amb regle i compàs.
- Tenir en compte que molts matemàtics han intentat resoldre aquests problemes, i precisament no ho han fet de la mateixa forma.
- Observar la importància que tenen els tres problemes clàssics, corbes i espirals en el món físic en el qual vivim, i observar que existeixen diferents patrons i art matemàtic referent al que estudiaré.

Altres objectius no tan fonamentals com els primers són:

- Aprendre a utilitzar eines informàtiques (Geogebra) per a representar la formalitat i l'abstracció de les matemàtiques (en aquest cas, de corbes i espirals i els tres problemes clàssics).
- Ampliar el coneixement d'aquesta ciència formal i dels seus continguts.

CAPÍTOL 3

MATEMÀTICA GREGA

Abans de centrar-nos en la matemàtica grega, ens hem d'encastar en el passat d'aquesta civilització. La geometria egípcia, babilònica, índia i xinesa consistia en un conjunt de regles i coneixements pràctics obtinguts mitjançant experiments. Es va començar a estructurar com una ciència deductiva, a partir del segle VII aC amb la introducció de la geometria grega.

La matemàtica i la ciència grega es distingeixen de les cultures anteriors, bàsicament, pel seu desig de saber, amb contrast amb la necessitat de fer avenços utilitaris. La geometria grega mostra elements abstractes que es van perdre, en gran part, durant l'Edat Mitjana, després de la caiguda de l'Imperi Romà: només es van recuperar gradualment en els segles XVI i $XVII$. Hem de tenir clar que molts dels grans descobriments, en geometria, es van fer fa més de dos mil anys. Donada la dificultat de conservar fràgils manuscrits, escrits en pergamí o en papir, no és molt sorprenent trobar que no tenim bastants registres fiables sobre l'origen de la geometria grega o dels seus practicants. En tenim detalls gràcies a uns escrits realitzats en els segles quart o cinquè de l'era actual. També cal esmentar l'obra *Els Elements d'Euclides*, recuperat al segle XI. Cal afegir Arquímedes que el veurem amb més precisió en els apartats dels problemes clàssics.

No podem donar una explicació de com la geometria grega va entrar a la vida i la forma en què es va perfeccionar; per tant, ens hem de limitar a descriure alguns aspectes acceptats globalment. **Tales** (624-546 aC) és considerat el fundador de la geometria grega. Va néixer a Milet, una ciutat ara en l'actual Turquia (Àsia Menor). A part de ser matemàtic, també era astrònom i filòsof. Va ser nomenat com un dels set *homes savis* de Grècia.

Diverses històries de Tales han arribat fins als nostres dies. Una història relata que va viatjar a Egipte, on va entrar en contacte amb la geometria egípcia. L'enfocament de la geometria egípcia era essencialment pràctica; en canvi, el treball de Tales va ser l'inici d'una investigació abstracta de la geometria. Els següents descobriments de la geometria elemental s'atribueixen a Tales:

- Els angles de la base d'un triangle isòsceles són iguals.
- Quan dos segments es tallen entre si, els angles verticalment oposats pel vèrtex són iguals.
- L'angle inscrit en un semicercle és un angle recte.
- Dos triangles són iguals en tots els aspectes, si tenen dos angles i un costat respectivament iguals.

També se li atribueix un mètode per trobar la distància a un vaixell a alta mar, i un mètode per a determinar l'altura d'una piràmide a través de la longitud de la seva ombra. No està clar si això implica que entenia la teoria dels triangles equiangulars[1]. Tales es pot considerar que va originar la geometria de les línies (part fonamental de la geometria elemental).

Procle diu que Tales va interposar el coneixement de la geometria a Grècia després del seu temps de permanència a Egipte. Pel que fa a la geometria egípcia, Heròdot creia que el coneixement bàsic de la geometria el va originar la necessitat recurrent per mesurar la terra després de la inundació del Nil. Aristòtil creu que les matemàtiques eren la invenció dels sacerdots egipcis que disposaven del temps i oci per especular sobre coses abstractes. Hi ha una gran controvèrsia entre els historiadors moderns de matemàtiques sobre l'extensió dels descobriments de Tales. S'observa que la geometria egípcia no era rudimentària, no tenia cap base teòrica, i va consistir principalment en algunes tècniques de mesurament. Es considera també poc probable que Tales podria haver obtingut proves teòriques dels teoremes que se li atribueixen, però ell pot endevinar la veritat dels resultats sobre la base de mesuraments en casos particulars.

La següent figura important en la història de la geometria grega és **Pitàgores**. Es creu que va néixer al voltant de 584 aC, a Samos, una de les illes gregues. Tenia fama de ser un home molt intel·ligent. Es diu que va visitar Egipte i possiblement Babilònia, on podia haver après informació astronòmica i matemàtica. Va emigrar al voltant de 529 aC a Crotona, al sud d'Itàlia,

[1]Són dos triangles semblants que tenen els mateixos angles interiors.

on va fundar la seva segona escola amb regles de conducta molt estrictes. Bàsicament, era un espai que volia millorar la base moral de la societat. Després, es va traslladar a Metapont, sud d'Itàlia, on es creu que morí al voltant del 500 aC.

Pitàgores va ser un dels primers a establir la geometria com una veritable ciència. És difícil distingir el treball dels seguidos de Pitàgores[2] amb el del propi Pitàgores. Per tant, no és possible atribuir amb precisió l'autoria pel propi Pitàgores. Una sèrie de declaracions pitagòriques s'han atribuit fins als nostres dies:

- Aristòtil va dir *els pitagòrics es van aplicar a les matemàtiques, una ciència que van millorar; es van imaginar que els principis de les matemàtiques eren els principis de totes les coses.*
- Eudem[3] afirma que *Pitàgores va canviar la geometria en forma d'una ciència liberal, quant als seus principis es van desplaçar cap a una manera purament abstracta, i va investigar teoremes de l'immaterial i tenia un punt de vista intel·lectual.*
- Aristòxen[4] va afirmar que *Pitàgores estimava l'aritmètica per sobre de tota la resta.* Hi ha un lema atribuït a Pitàgores, *'Tot és nombre'.*
- Es diu que Pitàgores va descobrir les relacions numèriques de l'escala musical.
- Procle diu que *La paraula 'matemàtiques' es va originar amb els pitagòrics.* 'Matemàtica' vol dir 'allò que s'aprèn', amb connotacions de coneixement i d'habilitat.

Alguns dels treballs geòmetrics dels pitagòrics van ser el següents:

- Eudem estableix que el teorema que la suma dels angles d'un triangle és de dos angles rectes es deu als pitagòrics.
- Eudem estableix que els pitagòrics van descobrir els cinc sòlids regulars.
- Eudem atribueix el descobriment de quantitats irracionals a Pitàgores.

[2]Se'ls anomena pitagòrics.
[3]Va ser deixeble d'Aristòtil i escriptor de la història de les matemàtiques.
[4]Teòric musical.

El teorema que la suma dels angles d'un triangle és de dos angles rectes no és demostrable, sense recórrer al cinquè o al postulat de les paral·leles d'Euclides. Aquest és un punt molt subtil i qualsevol prova pels pitagòrics que la suma és constant ha d'haver tingut algun atractiu implícit al cinquè postulat de les paral·leles. L'historiador greg Plutarc ens diu que els egipcis coneixien, del triangle rectangle, que els costats tenen la mateixa longitud de 3, 4, i 5 unitats, i que en aquest cas s'observa que el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels altres dos costats (els catets). Altres versions d'aquesta construcció aritmètica semblen haver estat conegudes anteriorment a Babilònia. En general, es diu que els nombres naturals a, b i c que són els costats que formen un triangle rectangle compleixen $a^2 + b^2 = c^2$, on c és la hipotenusa i a i b són els catets. Procle ha descrit un mètode per trobar aquest tipus de triangles pitagòrics utilitzant un enter imparell m. Prenem un enter imparell m i establim:

$$\begin{aligned} a &- m, \\ b &- \frac{m^2 - 1}{2}, \\ c &- \frac{m^2 + 1}{2}. \end{aligned}$$

Recordeu que tant b i c són nombres enters, ja que m és senar. Sabem que el quadrat d'un senar sempre és un senar. Tot seguit ho demostrarem:

Sigui $2n + 1$ un nombre senar, amb $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$\begin{aligned} (2n+1)^2 = (2n)^2 + 2(2n)(1) + 1^2 = \\ = 4n^2 + 4n + 1 = \\ = 2(2n^2 + 2n) + 1 = \\ = 2q + 1, \;\; amb \;\; q = 2n^2 + 2n, \;\; amb \;\; q \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Retornem als triangles pitagòrics utilitzant un enter imparell m: és senzill verificar que (a, b, c) és un triangle pitagòric, i aquest és el mètode utilitzat per Pitàgores per generar aquests tipus de triangles. No sembla haver-hi acord en que el que coneixem com el teorema de Pitàgores en relació amb els triangles rectangles no es deu a Pitàgores o als pitagòrics. Una prova del teorema general es troba en la Proposició 47 en el Llibre 1 dels Elements d'Euclides, però és més complicat que la prova que es donaria en l'actualitat, mitjançant l'ús de la teoria dels triangles semblants. Tot seguit veurem aquesta Proposició:

Exemple 1 *La Proposició 47 afirma que en els triangles rectangles el quadrat del costat oposat a l'angle recte és igual a la suma dels quadrats dels costats que comprenen l'angle recte.*

La demostració d'Euclides es basa en comprovar que el quadrat $CEDB$ *construït sobre la hipotenusa* CB *és la suma dels quadrats* HC *i* GB *construïts sobre els catets* AB *i* CA*, respectivament.*

Hem de veure que els dos paral·lelograms CL *i* BL*, que formen el quadrat* $CEDB$*, són iguals als quadrats respectius* HC *i* GB

Sabem que els triangles ACE *i* BCK *són iguals, ja que tenen iguals dos costats i l'angle comprès entre ells. També, sabem que el quadril·later* CL *és el doble que el trianle* ACE*, ja que tenen la base i l'altura iguals per la Propisició* 41*. El quadrat* HC *és el doble que el triangle* BCK*, perquè tenen la mateixa base i la mateixa altura. El paral·lelogram* CL *i el quadrat* HC *són iguals, ja que ho són els dos triangles amb el que s'han comparat.*

De la mateixa manera, es pot demostrar que el paral·lelogram BL *és igual al quadrat* GB *considerant els triangles* ABD *i* CBF*.*

Per tant, el quadrat $CEDB$*, que és la suma dels paral·lelograms* CL *i* BL*, és igual a la suma dels quadrats* HC*,* GB *fet que demostra el teorema de Pitàgores.*

En resum, hem vist que la proposició ens deia que la suma dels dos quadrats dels catets era igual al quadrat de la hipotenusa. I, hem demostrat que el quadrat de la hipotenusa està compost de dos rectangles, i que aquests dos rectangles són iguals als quadrats dels catets. A l'arxiu adjunt del GeoGebra, es pot veure millor la demostració empírica d'aquesta proposició. ■

La proposició 47 tractada anteriorment, sovint es diu el teorema de Pitàgores, anomenat així per Procle. Més d'un mil·lenni abans de Pitàgores, els babilonis antics van utilitzar aquesta relació per a resoldre problemes geomètrics amb triangles rectangles. D'altra banda, la tauleta coneguda com Plimpton 322 que conté ternes pitagòriques.

Tot seguit, ens hem de fixar en els cinc sòlids regulars que són el tetraedre, el cub, l'octaedre, el dodecaedre i l'icosaedre. El tetraedre regular, el cub i l'octaedre són d'origen antic i es poden veure en l'arquitectura egípcia. Per tant, no es pot dir que els pitagòrics van descobrir aquests sòlids. Els especialistes estan d'acord en que és poc probable que els pitagòrics descobrissin els altres dos sòlids regulars, el dodecaedre i l'icosaedre. Sembla que Teetet, un atenès que va morir al 369 aC, va descobrir els altres dos sòlids regulars i va escriure un estudi dels cinc sòlids regulars. És possible que demostrés que només existien cinc tipus diferents de sòlids regulars (és un teorema en els Elements d'Euclides). La seva mort va ser commemorada pel diàleg de Plató titulat Teetet. Aquest diàleg també conté informació sobre els nombres irracionals, que havien estat recentment descoberts i havien causat un gran enrenou en les trobades matemàtiques i filosòfiques de l'època. Teetet es va associar amb alguns d'aquests treballs dels irracionals. Els sòlids regulars són també anomenats sòlids platònics, a causa de la importància que tenien en l'ensenyament de Plató. Va utilitzar els sòlids per explicar diversos fenòmens científics. De fet, els quatre elements (terra, aire, foc i aigua) es van associar amb els cinc sòlids regulars en un esquema còsmic que van fascinar pensadors ben entrat el Renaixement.

La personalitat i el pensament de Plató juguen un paper important en la història de la matemàtica grega. **Plató** (427-347 aC) és conegut principalment com un filòsof, però ell era un important promotor de les matemàtiques, especialment la geometria. Va fundar la famosa Acadèmia d'Atenes, al voltant de 380 aC, que es va convertir en un centre on els especialistes es van reunir per discutir temes intel·lectuals, matemàtics, innovadors. Alguns d'aquests especialistes van ser Teodor de Cirene, Eudoxo de Cnido, Teetet i Menecme. Plató no va fer cap contribució significativa a les matemàtiques creatives, sinó que va inspirar a altres a fer un treball innovador i va guiar-los.

Sabem en detall la vida i la carrera de Plató, i pràcticament tots els seus escrits han sobreviscut. La font de gran part de la vida de Plató és 'Vides dels Filòsofs' de Diògenes Laerci. Diògenes s'ha descrit com un mer compilador i que tracta anècdotes. No es pot confiar sempre en ell, però sembla ser fiable en molts aspectes relacionats amb Plató.

Plató va arribar a conèixer a Sòcrates, a prop del judici i de l'execució d'aquest últim per impietat al 399 aC. Plató es va impressionar per l'ús de Sòcrates de l'art de l'argumentació i la seva recerca de la veritat, però hem d'assenyalar que Sòcrates no va ser cap entusiasta de les matemàtiques. Plató va sentir que el seu deure era defensar les idees i els mètodes socràtics, i va concebre la idea de la formació dels joves d'Atenes en la disciplina de les matemàtiques i, a continuació, en l'interrogatori socràtic. Això va ser per contrarestar el que va veure com el problema dels joves confosos en la investigació filosòfica a una edat massa primerenca.

Al voltant de l'any 390 aC, Plató va visitar Sicília, on va estar sota influència d'Arquites de Tàrent, un seguidor dels pitagòrics. Arquites va estudiar, entre altres temes de les matemàtiques, les teories que estan associades amb la matemàtica grega: l'aritmètica, la geometria i els mitjans harmònics. Plató va retornar a Atenes al 388 aC, i en els propers vint anys, la seva Acadèmia va entrar en existència. El pròposit de l'Acad'emia va ser capacitar els joves en les ciències (matemàtiques, música i astronomia). Els dos principals interessos de l'Acadèmia eren les matemàtiques i la dialèctica[5]. Mentre que Plató considerava que l'estudi de les matemàtiques era una preparació per a l'estudi de la dialèctica, també creia, però, que l'estudi de l'aritmètica i la geometria plana, així com la geometria dels sòlids, han de formar la base d'una educació que condueixi al coneixement. A diferència d'opinió, l'ensenyament de Plató a l'Acadèmia va ser assistit per Teetet. Eudoxo de Cnido[6] també va ensenyar a l'Acadèmia. El paper de Plató en l'ensenyament a l'Acadèmia era probablement la d'un organitzador i sistematitzador, i ell va deixar l'ensenyament especialitzat als altres. L'Acadèmia era un lloc on s'ensenyava ciència i era com una disciplina mental ja que l'objectiu era la saviesa pràctica i l'habilitat legislativa.

Aristòtil (384-322 aC), el famís filòsof i lògic, va arribar a Atenes a l'any 367 aC i es va convertir en un membre de l'Acadèmia de Plató. Allí va romandre durant vint anys, fins a la mort de Plató a l'any 347 aC. Com hem assenyalat anteriorment, en l'època de Plató, la dialèctica era de cabdal importància en l'Acadèmia, amb les matemàtiques com un requisit previ important. Aristòtil sostenia que el mètode matemàtic era un model per a qualsevol ciència organitzada. Quan ell va aparèixer, la matemàtica grega es distingia pel seu mètode axiomàtic, i la seqüència de raonament, del qual es deriven els teoremes irrefutables. Aristòtil creia que tota ciència ha de procedir de la matemàtica, i el mètode matemàtic s'ha d'aplicar a totes les ciències.

Aristòtil assenyala que tota ciència demostrativa ha de partir de principis indemostrables; d'una altra manera, els passos de demostració serien interminables. Això és especialment evident en les matemàtiques. Ell discuteix

[5] L'examen socràtic de les suposicions fetes en el raonament.

[6] Alumne d'Arquites i un important contribuent a l'emergent teoria grega de magnitud i número.

la naturalesa del que és un axioma, una definició, un postulat i una hipòtesi. És molt difícil distingir entre un postulat i una hipòtesi. Tots aquests termes tenen un paper principal en els Elements d'Euclides.

La influència d'Aristòtil va ser immensa en el pensament europeu. Durant molts segles, pràcticament tot l'aprenentatge grec, excepte el d'Aristòtil, va caure en l'oblit. Aristòtil va ser limitat a ser la base de tot el coneixement. Veiem l'extensió de la seva influència fins i tot observant com moltes paraules d'Aristòtil han sobreviscut en l'ús modern, per exemple: principi, màxima, matèria, forma, energia, quinta essència, categoria... Va ser realment només en el Renaixement que l'autoritat d'Aristòtil va ser interrogant i suplantada.

Tenim poc coneixements fiables sobre la vida dels primers geòmetres grecs, i les nostres millors fonts són els matemàtics Pappo i Procle, que tots dos van viure molt segles després de l'edat d'or de la geometria grega. Procle afirma que **Euclides** va viure a l'època de Ptolemeu I, rei d'Egipte, que va regnar al 323-285 aC, i que Euclides era més jove que els associats de Plató (350 aC), però més gran que Eratòstenes (276-196 aC) i Arquimedes (287-212 aC). Es creu que Euclides va fundar l'escola de les matemàtiques a Alexandria, una ciutat que s'estava convertint en un centre de comerç i d'aprenentatge, després de la seva fundació al voltant de 330 aC. Procle va conservar un famós incident relacionat amb Euclides: en ser preguntat per Ptolemeu si podria aprendre geometria més fàcilment que mitjanánt l'estudi dels Elements, Euclides va respondre que 'no hi ha camí ral a la geometria'. Les dates exactes d'Euclides, el seu lloc de naixement, i els detalls de la seva vida no es coneixen, però podem dir que véixer al voltant del 300 aC.

Com hem pogut observar, els grecs no feien càlculs aritmètics, sinó que solucionaven els problemes gràficament fent construccions amb regle i compàs. A partir d'aquí, es quan es van originar els tres problemes clàssics; ho van fer en l'epoca d'or de la geometria grega (segona meitat del segle V aC). Uns problemes amb tantes incògnites que fins 2200 anys més tard no es van poder demostrar que eren irresolubles utilitzant només regle i compàs. A l'any 1837, es va demostrar la impossibilitat de duplicar el cub i de trisecar un angle per Pierre Wantzel. La impossibilitat de quadrar el cercle es va demostrar quan Lindemann va veure que π és transcendent.

CAPÍTOL 4

NOTACIÓ MATEMÀTICA

A part dels símbols que he ficat a la taula, n'hi poden haver més de vàlids. Els que estan a la taula són els que utilitzaré durant el treball.

SÍMBOL	ES LLEGEIX COM... (NOM)	SIGNIFICAT	EXEMPLE
$+$	Més (Addició o suma)	$a+b$ significa la suma de a i b	$2+2=4$
$-$	Menys (Substracció o resta)	$a-b$ significa la resta de b a a	$7428-3614=3814$
$\cdot$	Per (Multiplicació)	$a \cdot b$ significa la multiplicació de a per b	$1 \cdot 8 = 8$
$/$	Entre (Divisió)	$\frac{a}{b}$ significa dividir a entre b	$1/1=1$
$\sqrt{}$	Arrel quadrada de... (Arrel quadrada)	$\sqrt{x}$ representa el nombre real positiu el quadrat del qual és x x	$\sqrt{1}=1$
$\blacksquare$	Quadrat negre	Marca el final de l'exemple, demostració, proposició...	És impossible ... $\blacksquare$.
$=$	És igual (Igualtat)	$x=y$ significa que les dues variables tenen el mateix valor	$1+1=2$
$\neq$	És diferent de (Desigualtat)	$x \neq y$ significa que les dues variables no tenen el mateix valor	$2+2 \neq 5$
$\approx$	Aproximadament igual a (Aproximació)	$x \approx y$ significa que x és aproximadament igual a y	$\pi = 3.141592654$
$\Longleftrightarrow$	Si i només si (Equivalència lògica)	$A \Longleftrightarrow B$ significa que A és cert si B és cert i A és fals si B és fals	$x+5=y+2 \Longleftrightarrow x+3=y$
$\Rightarrow$	Implica (Implicació lògica)	$A \Rightarrow B$ significa que si A és cert, llavors B és cert; i si B és fals, llavors A és fals.	$x=2 \Rightarrow x^2=4$
$<$; $>$	És estrictament (menor o major) a... (Desigualtat estricta)	$A<B$ significa que A és més petit que B	$x<y \Longleftrightarrow y>x$
$\leq$; $\geq$	És igual o (menor a major) que... (Desigualtat ordinària)	$x \geq k$ significa que x és igual o més gran que k	$x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x$
$\forall$	Per a qualssevol (Quantificador universal)	$\forall x$ significa per a qualssevol x...	$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$
$\exists$	Existeix (Quantificador existencial)	$\exists x$ significa que existeix una x que...	$\exists n \in \mathbb{N} : n$ és parell
{ ,	El conjunt de... (Conjunt definit analíticament)	$\{a,b,c\}$ individualitza el conjunt del qual els elements són a, b i c	$\mathbb{N} = \{1,2,3...\}$
$\in$; $\notin$	(No)Pertany a... (Pertinença a un conjunt)	$a \in S$ significa que a és un element del conjunt S	$2 \in \mathbb{N}$
$\subseteq$; $\supseteq$	És un subconjunt de... (Subconjunt) ; Un conjunt conté un altre	$A \subseteq B$ significa que cada element de A és també element de B	$\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$
$\cup$	Unió de... (Unió)	$A \cup B$ indica el conjunt que conté tots els elements de A i B	$A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
$\cap$	Intersecció de... i de... (Intersecció)	$A \cap B$ indica el conjunt dels elements que pertanyen alhora a A i B	$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2=1\} \cap \mathbb{N} = \{1\}$
$\setminus$	Diferència de... i de... (Diferència)	$A \setminus B$ indica el conjunt de tots els elements de A que no pertanyen a B	$\{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5,6\} = \{1,2\}$
$\mathbb{N}$	Conjunt dels nombres naturals	$\mathbb{N}$ representa $\{0,1,2,3...\}$	$\{\mid a \mid; a \in \mathbb{Z}\} \setminus \{0\} = \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$	Conjunt dels nombres enters	$\mathbb{Z}$ representa $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$	$\{a; \mid a \mid \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} = \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	Conjunt dels nombres racionals	$\mathbb{Q}$ representa $\{p/q; p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N}\}$	$3.14 \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	Conjunt dels nombres reals	$\mathbb{R}$ inclou els nombres racionals i els irracionals	$\pi \in \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	Conjunt dels nombres complexos	$\mathbb{C}$ representa $\{a+b \cdot i \mid a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}\}$	$i \in \mathbb{C}$

PART II

PART TEÒRICA

CAPÍTOL 5

ELS NOMBRES COMPLEXOS

5.1 INTRODUCCIÓ ALS NOMBRES COMPLEXOS

Per començar a veure els nombres complexos, ens fixarem i classificarem els nombres com a solucions d'equacions.

$$x + 2 = 10 \Rightarrow x = 8 \tag{5.1}$$
$$x + 5 = 2 \Rightarrow x = -3 \tag{5.2}$$
$$4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4} \tag{5.3}$$
$$x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \tag{5.4}$$

Hem observat que 5.1 té solució en els nombres naturals $\mathbb{N}$, 5.2 en els nombres enters $\mathbb{Z}$, 5.3 en els nombres racionals $\mathbb{Q}$ i 5.4 en els nombres reals $\mathbb{R}$. Veiem que el conjunt dels nombres s'ha ampliat: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Quan resolem equacions del tipus: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$, ens fixem que no tenen solució en els nombres reals. Com sabem, no hi ha cap nombre el quadrat del qual sigui negatiu. Per tant, necessitem un altre conjunt de nombres que ens doni validesa a aquesta expressió, i d'aquí neixen els nombres complexos. Primer de tot, hem d'admetre com a vàlid el nombre $\sqrt{-1}$ i a tots els que puguem obtenir a partir d'operar amb aquest nombre.

A partir d'ara, el nombre $\sqrt{-1}$ s'anomenarà **unitat imaginària** i es designarà per la lletra i. Per tant, $i = \sqrt{-1}$ i $i^2 = -1$.

Únicament, hi ha quatre potències diferent del nombre i:

$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = i \\ i^6 &= i^4 \cdot i^2 = -1 \\ i^7 &= i^4 \cdot i^3 = -i \\ i^8 &= i^4 \cdot i^4 = 1 \end{aligned}$$

Si seguim calculant potències, només apareixeran:

$$\{1, -1, i, -1\}$$

Així, per exemple:

$$i^{47} = i^{4\cdot 11+3} = (i^4)^{11} \cdot i^3 = 1^{11} \cdot (-i) = -i$$

Els **nombres complexos** s'expressen de la següent manera: $a + bi$, on a i b pertanyen al conjunt dels nombres reals i i és l'unitat imaginària. L'expressió $a+bi$ s'anomena **forma binòmica** d'un nombre complex perquè té dues components: a =part real i b =part imaginària.

Dos nombres complexos són **iguals** només quan tenen la mateixa component real i la mateixa component imaginària.

El conjunt de tots els nombres complexos es designa per $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Els nombres reals són nombres complexos. Per tant, tenim que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Els nombres reals són nombres complexos, la part imaginària de la qual és 0: $a + 0i = a$.

Els nombres imaginaris són els nombres complexos, la part imaginària de la qual no és zero. Per tant, un nombre complex o és real o és imaginari. Els nombres imaginaris purs són aquells que la seva part real és 0: $0+bi = bi$.

L'oposat d'un nombre complex és:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ -z &= -a - bi \end{aligned}$$

El conjugat d'un nombre complex és:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ \overline{z} &= a - bi \end{aligned}$$

Exemple 2 *Resol l'equació:* $x^2 + 8x + 25 = 0$.

Resolem l'equació substituint $\sqrt{-1}$ *per* i*:*

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 25}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{-1 \cdot 6^2}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm (\sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2})}{2} \\ &= \frac{-8 \pm 6\sqrt{-1}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm 6i}{2} \\ &= -4 \pm 3i \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple 3 *Comprova que* $-4 + 3i$ *verifica* $x^2 + 8x + 25 = 0$

Substituim i operem de forma natural, tenint en compte les operacions amb la i*:*

$$\begin{aligned} (-4 + 3i)^2 + 8(-4 + 3i) + 25 &= 16 - 24i + 9i^2 - 32 + 24i + 25 \\ &= 9i^2 + 9 \\ &= 9(-1) + 9 \\ &= -9 + 9 = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Per acabar amb aquesta introducció als nombres complexos que ens permet endinsar-nos en el seguit d'operacions que es poden fer amb aquests nombres i la seva representació gràfica, m'agradaria acabar amb un acudit per fer més amè el treball, l'acudit diu: *Quin és el nen més complex de tot el món? Doncs, el que té una mare real i un pare imaginari.*

5.2 REPRESENTACIÓ GRÀFICA DELS NOMBRES COMPLEXOS

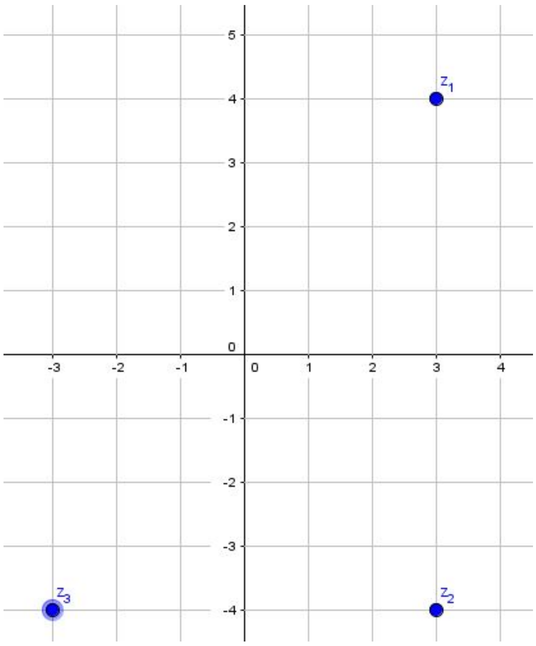
Els nombres naturals, enters, racionals i reals es poden representar com punts d'una recta, la recta real. Però, els nombres complexos els hem d'imaginar com a punts del pla (el pla dels nombres complexos). Això es deu al fet que un nombre complex en forma binòmica $a + bi$ queda determinat per un parell de nombres reals: la seva part real, a i la seva part imaginària, b. D'aquesta manera, el parell (a, b) representa les coordenades del punt en el pla. Podem destacar que aquesta interpretació dels nombres complexos (considerant-los punts en el pla) es deu a Gauss, Hamilton i Argand. Aquest últim va desenvolupar el mètode per interpretar els nombres complexos i el va anomenar 'Diagrama d'Argand'.

Els nombres complexos es representen en uns eixos cartesians.

- L'eix X s'anomena **eix real**.
- L'eix Y s'anomena **eix imaginari**.

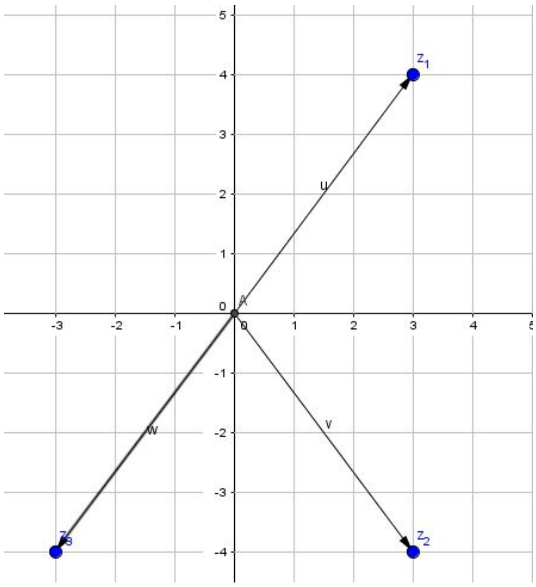
El nombre complex $a + bi$ es pot representar de dues maneres diferents:

- Pel punt (a, b), que rep el nom d'**afix** del nombre complex corresponent.



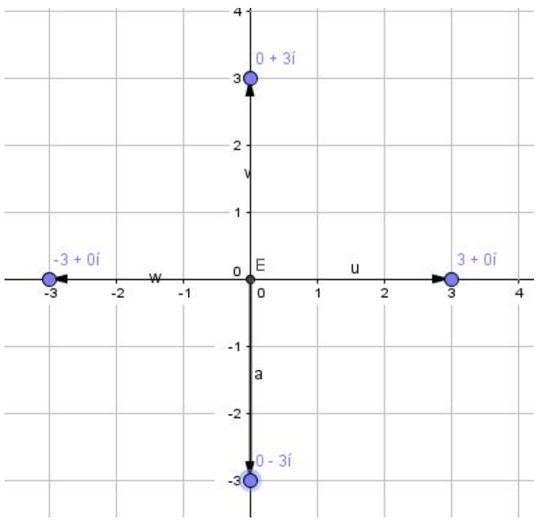
Amb el GeoGebra, hem fet aquesta representació gràfica de diferents nombres complexos que tenen relació entre si. Els nombres z_1 i z_2 són complexos conjugats, ja que tenen la part real igual i la part imaginària oposada. Els nombres z_1 i z_3 són complexos oposats. Aquesta representació, no l'hem inclòs als annexos, ja que és molt simple de fer; tan sols, hem de seleccionar nombre complex i situem el nombre on nosaltres vulguem.

- Mitjançant un vector d'origen $(0, 0)$ i d'extrem (a, b).



Hem representat els mateixos nombres complexos, però ho hem fet mitjançant vectors. Aquesta representació tampoc l'hem afegit als annexos per la seva facilitat de confeccionar.

Com hem pogut observar, els afixos dels nombres reals se situen sobre l'eix real, X. I, els afixos dels nombres imaginaris se situen sobre l'eix imaginari, Y. En la següent figura, es pot observar amb més facilitat els afixos dels nombres reals situats a l'eix X, i els afixos dels nombres imaginaris situats a l'eix Y:

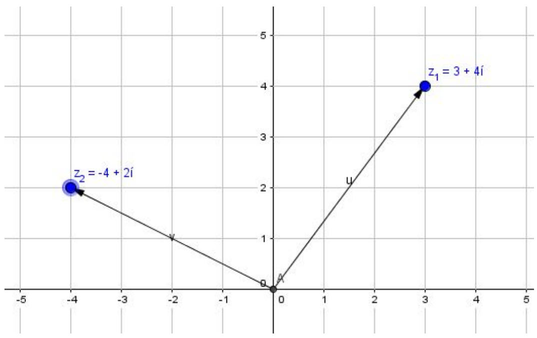


Podem sumar i restar vectors utilitzant la regla del paral·lelogram com ho fem amb els vectors; i així obtenir la suma o la resta de dos nombres complexos.

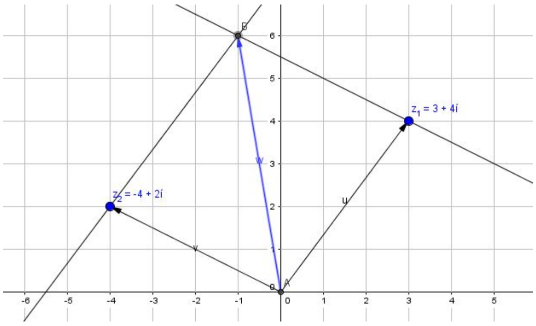
Exemple 4 *Realitza gràficament la suma de nombres complexos següent:* $(3+4i)+(-4+2i)$

Aquesta representació amb el GeoGebra, tampoc l'afegirem als annexos per la seva facilitat de confeccionar, ja que tan sols cal situar els dos nombres en el pla complex i fer dues paral·leles i veure on es tallen.

Primer de tot, hem de representar en forma de complexos els dos nombres complexos donats a l'enunciat:



Tot seguit, hem de fer paral·leles als vectors dibuixats que passin per l'extrem de l'altre vector. Després, hem de marcar el punt on es tallen les dues rectes i aquest serà el nombre complex que és el resultat de la suma *dels nombres donats a l'enunciat. I, seguidament, es pot marcar el nombre obtingut com a extrem del vector blau resultat. El resultat és el següent:*



■

5.3 FORMA BINÒMICA DELS NOMBRES COMPLEXOS

Un nombre complex en forma binòmica és $a+bi$. El nombre a és la part real (eix OX) del nombre complex; i el nombre b és la part imaginària (eix OY) del nombre complex.

Si $b=0$ el nombre complex es redueix a un nombre real, ja que $a+0i=a$.

Si $a=0$ el nombre complex es redueix a un nombre imaginari pur, $0+bi=bi$.

5.4 EXPRESSIÓ POLAR DELS NOMBRES COMPLEXOS

Per entendre l'expressió polar dels nombres complexos, ens hem de fixar amb el mòdul i l'argument d'un nombre complex.

El **mòdul** d'un nombre complex és el mòdul del vector determinat per l'origen de coordenades i el seu afix. Es designa per $\mid z \mid$ o per r. Si observem el triangle rectangle de la figura, veiem que a i b són els catets i r és la hipotenusa. Per tant, es verifica que $r^2=a^2+b^2$:

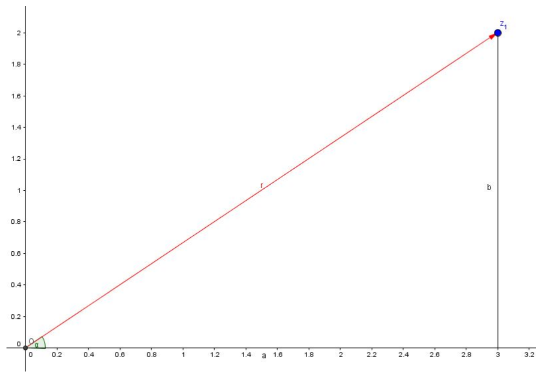
$$\begin{aligned} z &= a+bi \\ r =\mid z \mid &= \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

L'**argument** d'un nombre complex és l'angle que forma el vector amb l'eix real. Es designa per α. Si observem el triangle de la figura, veiem que α és l'angle agut adjacent al catet a i, per tant, oposat al catet b. Per tant, es verifica que $\tan\alpha = \frac{b}{a}$:

$$\alpha = arc\tan\frac{b}{a}$$

L'expressió polar d'un nombre complex es representa per:

$$z = r_\alpha$$



5.5 FORMA TRIGONOMÈTRICA DELS NOMBRES COMPLEXOS

Si ens fixem en el triangle rectangle de l'apartat anterior podem afirmar que aquestes igualtats es compleixen:

$$\sin\alpha = \frac{b}{r} \longrightarrow b = r\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \longrightarrow a = r\cos\alpha$$

A partir d'això, podem escriure la forma binòmica en funció dels valors r i α de la forma polar.

$$a + bi = r\cos\alpha + (r\sin\alpha)i = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

L'expressió escrita es coneix com la forma trigonomètrica d'un nombre complex.

Exemple 5 *Escriu en forma binòmica el nombre complex* $z = 2_{120^o}$.

Per passar de la forma polar a la forma binòmica, hem de passar en primer lloc a la forma trigonomètrica:

$$\begin{aligned} z = r_\alpha &= r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ &= 2\cdot(\cos 120^o + i\sin 120^o) \\ &= 2\cdot\cos 120^o + 2\cdot\sin 120^o\cdot i \\ &= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\sin 60^o\cdot i \\ &= -1 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \\ &= -1+\sqrt{3}i \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple 6 *Escriu en forma polar el nombre complex* $z = 1+\sqrt{3}i$.

Hem de calcular el mòdul i l'argument:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \\ \alpha &= arc\tan\frac{b}{a} = arc\tan\frac{\sqrt{3}}{1} = arc\tan(\sqrt{3}) = 60^o \end{aligned}$$

Tot seguit, ens hem de fixar en el quadrant en el qual pertany el nombre complex. Com que, a i b són positius, el nombre z pertany al primer quadrant. Per això, l'angle de 60^o *és correcte. El nombre complex en forma polar és* $z = 2_{60^o}$. $\blacksquare$

5.6 OPERACIONS EN FORMA BINÒMICA

Suma de nombres complexos

La suma de nombres complexos es realitza sumant parts reals entre si i parts imaginàries entre si.

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

Resta de nombres complexos

La diferència de nombres complexos es realitza restant parts reals entre si i parts imaginàries entre si.

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Exemple 7 *Calcula* $(5 + 2i) + (-8 + 3i) - (4 - 2i)$.

$$\begin{aligned}(5 + 2i) + (-8 + 3i) - (4 - 2i) &= (5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)i \\ &= -7 + 7i \blacksquare\end{aligned}$$

Multiplicació de nombres complexos

El producte dels nombres complexos es realitza aplicant la propietat distributiva del producte respecte de la suma i tenint en compte que $i^2 = -1$.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemple 8 *Calcula* $(5 + 2i) \cdot (2 - 3i)$.

$$\begin{aligned}(5 + 2i) \cdot (2 - 3i) &= 10 - 15i + 4i - 6i^2 \\ &= 10 - 11i + 6 \\ &= 16 - 11i \blacksquare\end{aligned}$$

Divisió de nombres complexos

Per dividir nombres complexos en forma binòmica es multiplica numerador i denominador pel conjugat del denominador i es realitzen les operaciones corresponents.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Exemple 9 *Calcula* $\frac{3+2i}{1-2i}$.

$$\frac{3 + 2i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 2i) \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} = \frac{3 + 6i + 2i + 4i^2}{1 - (2i)^2} = \frac{3 + 8i - 4}{1 + 4} = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5} i \blacksquare$$

La potenciació de nombres complexos no la fem en aquest apartat, ja que l'hem feta en la introducció dels nombres complexos.

5.7 OPERACIONS EN FORMA POLAR

Per sumar o restar nombres complexos en forma polar n'utilitzarem la forma binòmica. Per tant, haurem de transformar el nombre en la seva forma binòmica i fer la suma o la resta que hem vist a l'apartat d'operacions en forma binòmica. Tot i això, per realitzar multiplicacions i divisions, efectuar-ho en forma polar és més senzill.

Multiplicació

Per multiplicar dos nombres complexos en forma polar, es multipliquen els mòduls i se sumen els arguments:

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$$

Exemple 10 *Calcula el producte de $z_1 = 3_{45^o}$ i $z_2 = 4_{30^o}$:*

$$z_1 \cdot z_2 = 3_{45^o} \cdot 4_{30^o} = (3 \cdot 4)_{45^o+30^o} = 12_{75^o} \blacksquare$$

Divisió

Per dividir dos nombres complexos en forma polar, es divideixen els mòduls i es resten els arguments.

$$r_\alpha / s_\beta = (r/s)_{\alpha-\beta}$$

Exemple 11 *Calcula el quocient de $z_1 = 12_{135^o}$ i $z_2 = 3_{45^o}$:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12_{135^o}}{3_{45^o}} = \left(\frac{12}{3}\right)_{135^o-45^o} = 4_{90^o} \blacksquare$$

Potenciació

Per elevar a una potència un nombre complex en forma polar, s'eleva el mòdul a l'exponent i es multiplica l'argument per l'exponent.

$$(r_\alpha)^n = r^n_{n\cdot\alpha}$$

Exemple 12 *Calcula* $(3_{60^o})^4$*:*

$$(3_{60^o})^4 = 3^4_{4\cdot 60^o} = 81_{240^o}\blacksquare$$

La **fórmula de Moivre** és la potència d'un nombre complex escrita en forma trigonomètrica:

$$(r_\alpha)^n = [r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

5.8 RADICACIÓ DE NOMBRES COMPLEXOS

Els nombres reals positius tenen dues arrels quadrades. Per exemple, 2 i -2 són les arrels de 4. Els nombres reals negatius tenen dues arrels quadrades imaginàries. Si elevem al quadrat, $2i$ i $-2i$ són les arrels quadrades de -4. Qualsevol nombre complex, a part del 0, té n arrels enèsimes.

Tot seguit, anem a estudiar la relació que hi ha entre el mòdul i l'argument d'un nombre complex, R_β, i els de la seva arrel enèsima r_α:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{R_\beta} = r_\alpha \rightarrow (r_\alpha)^n &= R_\beta \\ (r_\alpha)^n &= (r^n)_{n\alpha} \end{aligned}$$

A partir d'aquestes dues expressions, deduïm que:

$$R_\beta = (r^n)_{n\alpha}$$

Per tant,

$$R = r^n \rightarrow r = \sqrt[n]{R}$$

$$\beta = n\alpha \rightarrow \alpha = \frac{\beta}{n}$$

L'**arrel enèsima** d'un nombre complex R_β té un mòdul $r = \sqrt[n]{R}$ i un argument $\alpha = \frac{\beta}{n}$.

No obstant això, tot i que l'argument d'un nombre complex el mateix pot ser β que $\beta + 360^o$, que $\beta + 720^o$, etc., els resultats al dividir per n aquests angles no són iguals. Estudiem quants resultats diferents hi ha:

$$\beta + 360^{\text{o}} \cdot k = n\alpha \rightarrow \alpha = \frac{\beta + 360^{\text{o}} \cdot k}{n}$$
$$Si \quad k = 0 \rightarrow \alpha_1 = \frac{\beta}{n}$$
$$Si \quad k = 1 \rightarrow \alpha_2 = \frac{\beta}{n} + \frac{360^{\text{o}}}{n}$$
$$Si \quad k = n-1 \rightarrow \alpha_n = \frac{\beta}{n} + \frac{360^{\text{o}} \cdot (n-1)}{n}$$

En dividir $\beta + 360^{\text{o}} \cdot k$ per n hi ha n possibles valors. Per tant, $\sqrt[n]{R_\beta}$ té n possibles arguments.

Si $k = n$, $\frac{\beta + 360^{\text{o}} \cdot n}{n} = \frac{\beta}{n} + 360^{\text{o}} = \frac{\beta}{n}$. S'obté α_1. Per valors superiors de k s'obtenen arguments que ja tenim.

Un nombre complex, R_β, té n arrels enèsimes. Totes elles tenen el mateix mòdul $r = \sqrt[n]{R}$. Els seus arguments són:

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{n},$$
$$\alpha_2 = \frac{\beta}{n} + \frac{360^{\text{o}}}{n},$$
$$\alpha_3 = \frac{\beta}{n} + \frac{360^{\text{o}}}{n} \cdot 2, \ldots$$
$$\ldots, \alpha_n = \frac{\beta}{n} + \frac{360^{\text{o}}}{n} \cdot (n-1)$$

Per a $n > 2$, els afixos d'aquestes n arrels són els vèrtexs d'un n-àgon regular amb centre a l'origen.

Exemple 13 *Troba les arrels cúbiques de 8i, i representa-les.*

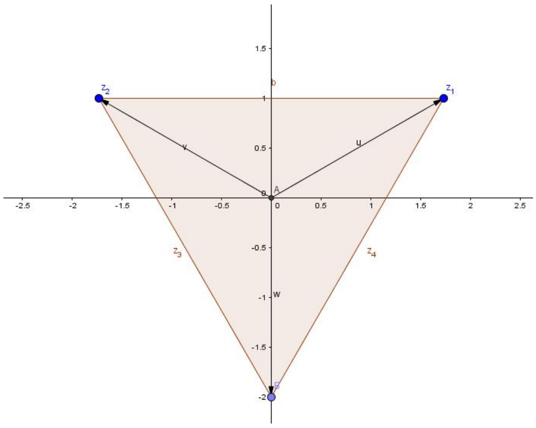
$8i = 8_{90^o}$ *Les seves arrels cúbiques tenen mòdul* $\sqrt[3]{8} = 2$.

Els seus arguments són:

$$\alpha_1 = \frac{90^o}{3} = 30^o$$
$$\alpha_2 = 30^o + \frac{360^o}{3} = 30^o + 120^o = 150^o$$
$$\alpha_3 = 30^o + 2 \cdot 120^o = 270^o$$

Així doncs, les tres arrels cúbiques de $8i$ *són:* $z_1 = 2_{30^o}$, $z_2 = 2_{150^o}$ *i* $z_3 = 2_{270^o}$.

És interessant observar que els seus afixos ocupen els vèrtexs d'un triangle equilàter.



■

5.9 INVERS D'UN NOMBRE COMPLEX

L'invers del nombre complex $a + bi$ és un altre nombre complex $x + yi$, de manera que el seu producte és l'element neutre de la multiplicació.

$$(a + bi) \cdot (x + yi) = 1 + 0i$$

si fem la multiplicació: $(a + bi) \cdot (x + yi) = ax + bxi + ayi + byi^2 = (ax - by) + (bx + ay)i$ i igualem: $(ax - by) + (bx - ay)i = 1 + 0i$, tenim el sistema d'incògnites x, y:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Resolem el sistema per reducció, multiplicant la primera equació per a i la segona per b:

$$\begin{cases} a^2x - aby = a \\ b^2x + bay = 0 \end{cases}$$

$$(a^2 + b^2)x = a$$
$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Quan multipliquem la primera equació per $-b$ i la segona per a i sumem les dues igualtats, obtenim $y = \frac{-b}{a^2+b^2}$.

Acabem de demostrar que l'invers de qualsevol nombre complex $a + bi$ és de la forma $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$. El nombre complex en què $a = b = 0$ és l'únic que no té invers.

CAPÍTOL 6

ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES

6.1 GRUP

Definició 1 *Sigui G un conjunt no buit i $\circ$ una operació sobre aquest conjunt, definirem grup com $(G, \circ)$:*

$$G \times G \to G$$
$$(a, b) \to a \circ b \blacksquare$$

L'expressió escrita anteriorment (operació binaria interna) significa que només hi ha una operació interna que pot ser suma, producte, composició... Diu que agafats dos elements del conjunt G els hi pots aplicar aquesta operació i com a resultat, dóna un element k que pertany a G. És a dir, el conjunt està tancat per aquesta operació. La fletxa significa condició o implicació i connecta dues proposicions. L'expressió es falsa només quan el conseqüent és fals i l'antecedent és veritable. Hem de tenir clar que $\circ$ és estable a G, és a dir:

$$a \circ b \in G, \forall a, b \in G$$

Amb l'operació $\circ$ tal que compleix:

- Associativa:
$$\forall a, b, c \in G \qquad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

- Element neutre:
$$\exists e \in G \qquad e \circ a = a \circ e = a$$

- Element invers:
$$\forall a \in G \;\; \exists a^{-1} \in G \qquad a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$$

Definició 2 *Direm que un grup $(G, \cdot)$ és **abelià** (o commutatiu) si a més, compleix que:*

$$\forall a, b \in G \qquad a \circ b = b \circ a. \blacksquare$$

Un grup amb un nombre finit d'elements se l'anomena **grup finit** i s'anomena **ordre del grup** al nombre d'elements d'aquest grup. Si tingués infinits elements s'anomenaria **grup infinit**

Tot grup té un únic element neutre.

Cada element poseeix un únic invers.

El simètric $(b')'$ del simètric b' d'un element b és el propi element b.

Es verifica la propietat simplificativa:

$$\forall a, b, c \in G \qquad a \circ b = a \circ c \rightrightarrows b = c.$$

El simètric, $(a \cdot b)'$, del producte de dos elements és el producte dels simètrics en ordre invers, $b' \cdot a'$.

Si l'operació $\circ$ definida a G és l'addicció, a l'element neutre se l'anomena **zero**, 0, i a l'element simètric de a se l'anomena **element oposat** i es designa amb $-a$.

Si l'operació $\circ$ és la multiplicació, a l'element neutre se l'anomena **element unitat**, 1, i al simètric, **element invers** i es designa amb a^{-1}.

Exemple 14 *Donat un conjunt $(\mathbb{Z}, +)$, definir si es tracta d'un grup o no; i si ho és, dir si és abelià.*

Primer de tot, cal saber el significat del conjunt donat: agafarem el conjunt dels nombres enters $\mathbb{Z}$, és a dir, contenen els nombres naturals $\mathbb{N}$ més els negatius. I l'operació interna és la suma. Tot seguit, hem de comprovar tot el seguit de propietats i veure si les compleix.

Com podem veure, compleix la primera propietat ja que només hi ha una operació interna (la suma). Si li apliquem la suma a un nombre del conjunt $\mathbb{Z}$ amb un altre element del conjunt $\mathbb{Z}$ ens ha de donar un nombre del conjunt $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

Llavors, agafo una a *i una* b *(dos elements del conjunt* $\mathbb{Z}$*) i ens ha de donar un element que pertanyi al conjunt* $\mathbb{Z}$*:*

$$(a, b) \to a + b \in \mathbb{Z}$$

Si mirem aquesta propietat per qualsevol nombre a *i* b *que pertanyin al conjunt* $\mathbb{Z}$ *es complirà sempre. Anem a exemplificar que* $a = 4$ *i* $b = -5$ *i podem veure que es compleix la premisa:*

$$(4, -5) \to -1 \in \mathbb{Z}$$

Tot seguit, anirem a veure si es compleix la propietat associativa. Com podeu deduïr es complirà ja que la associativa és una propietat fonamental de la suma. Tenim la propietat següent:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Com sabem, l'equació de dalt és exactament igual a la següent i significa que es compleix la propietat ja que el primer membre de l'equació és igual al segon:

$$a + b + c = a + b + c$$

De moment, tenim un semigrup ja que es compleix la propietat de l'operació inversa i la propietat associativa. Tot seguit, veurem si es compleix la propietat de l'element neutre:

$$a + e = a$$
$$e = a - a = 0 \in \mathbb{Z}$$

Hem pogut veure que l'element neutre pertany al conjunt $\mathbb{Z}$*; pertany, ja tenim un monoide (semigrup amb element neutre). Tot seguit, anem a veure si el conjunt donat és un grup, per ser-ho s'ha de complit, també, la propietat de l'element invers o simètric:*

$$a + a^{-1} = e$$
$$a + a^{-1} = 0$$
$$a^{-1} = -a \in \mathbb{Z}$$

També, tenim element invers; per tant, podem afirmar que el conjunt donat és un grup. Tot seguit, hem de veure si és abelià o no ho és. Per fer-ho, ens hem de centrar en la propietat commutativa:

$$a + b = b + a$$
$$a - a = b - b$$
$$0 = 0$$

Com que la igualtat es compleix, podem afirmar que la propietat commutativa també. Per tant, ***el conjunt donat és un grup abelià.***
Per acabar de veure l'exemple amb complexitat, ens hem de fixar amb els subgrups. En aquest cas, tenim subgrups o subgrups abelians. Si agafem un conjunt més petit que $\mathbb{Z}$*, per exemple el conjunt* $(2\mathbb{Z}, +)$*. Aquest conjunt complirà les propietats de grup i de grup abelià; però, com que és un subconjunt de* $\mathbb{Z}$ *serà un subgrup.* ■

Exemple 15 *Donat un conjunt* $(\mathbb{N}, -)$*, definir si es tracta d'un grup o no; i si ho és, dir si és abelià.*

Primer de tot, ens hem de fixar en l'enunciat i entendre el significat del conjunt donat: agafrem el conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ *amb l'operació interna de la resta. Tot seguit, hem de comprovar tot el seguit de propietats i veure si les compleix.*

En teoria, si li apliquem la resta a un nombre del conjunt $\mathbb{N}$ *amb un altre element del mateix conjunt ens ha de donar un nombre del conjunt* $\mathbb{N}$*:*

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(a, b) \to a - b \in \mathbb{N}$$

Tot seguit, per veure si es compleix li donem els valors següents als dos elements: $a = 2$ *i* $b = 3$*:*

$$a - b = 2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$$

Com que no pertany al conjunt $\mathbb{N}$*, podem afirmar que* ***el conjunt donat NO és un grup.*** ■

Exemple 16 *Donat un conjunt* $(\mathbb{Z}, \cdot)$*, definir si es tracta d'un grup o no; i si ho és, dir si és abelià.*

Primer de tot, ens hem de fixar en l'enunciat i entendre el significat del conjunt donat: agafrem el conjunt dels nombres enters $\mathbb{Z}$ *amb l'operació interna del producte. Tot seguit, hem de comprovar tot el seguit de propietats i veure si les compleix.*

Si li apliquem el producte a un nombre del conjunt $\mathbb{Z}$ *amb un altre element del mateix conjunt ens ha de donar un nombre del conjunt* $\mathbb{Z}$*:*

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \to a \cdot b \in \mathbb{Z}$$

Tot seguit, per veure si es compleix li donem els valors següents als dos elements: $a = 2$ *i* $b = -3$*:*

$$a \cdot b = 2 \cdot (-3) = -6 \in \mathbb{Z}$$

Com que la propietat es compleix per tots els nombres del conjunt $\mathbb{Z}$ *podem seguir a demostrar la segona propietat, la propietat associativa:*

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
$$a \cdot b \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

Com que l'igualtat es compleix, podem afirmar que la propietat també i que tenim un semigrup. Podem seguir per demostrar la propietat de l'element neutre:

$$a \cdot e = a$$
$$e = \frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{Z}$$

Ja tenim un monoide ja que l'element neutre pertant al conjunt $\mathbb{Z}$*. Tot seguit, anem a veure si es compleix la propietat de l'element invers:*

$$a \cdot a^{-1} = e$$
$$a \cdot a^{-1} = 1$$
$$a^{-1} = \frac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$$

Hem vist que l'element invers pertany al conjunt dels nombres racionals $\mathbb{Q}$*. Per tant, aquesta propietat no es compleix i podem afirmar que* ***el conjunt donat NO és un grup, és un monoide.*** ■

Exemple 17 *El grup cuaternio d'ordre 8,* Q_8 *és el conjunt* $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$*. La seva taula de multiplicació es basa en les regles* $i^2 = j^2 = k^2 = -1$*,* $i \cdot j = k$*,* $j \cdot k = i$*,* $k \cdot i = j$*. Demostra que és un grup* $(Q_8, \cdot)$*.*

Primer de tot, hem de construir la taula de multiplicació:

·	1	-1	i	j	k	-i	-j	-k
1	1	-1	i	j	k	-i	-j	-k
-1	-1	1	-i	-j	-k	i	j	k
i	i	-i	-1	k	-j	1	-k	j
j	j	-j	-k	-1	i	k	1	-i
k	k	-k	j	-i	-1	-j	i	1
-i	-i	i	1	-k	j	-1	k	-j
-j	-j	j	k	1	-i	-k	-1	i
-k	-k	k	-j	i	1	j	-i	-1

Amb la taula hem pogut veure perfectament que compleix la següent propietat:

$$Q_8 \times Q_8 \to Q_8$$
$$(a, b) \to a \cdot b \in Q_8$$

Tot seguit, hem de veure que es compleix la propietat associativa. Per fer-ho hauríem d'agafar totes les combinacions de tres en tres els elements de Q_8 i multiplicant-los entre si comprovar que es compleix la següent igualtat:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
$$a \cdot b \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

Com que l'igualtat es compleix, podem afirmar que la propietat també i que tenim un subgrup. Podem seguir per demostrar la propietat de l'element neutre:

$$a \cdot e = a$$
$$e = \frac{a}{a} = 1 \in Q_8$$

Com que l'element neutre pertany al conjunt Q_8, ja tenim un monoide. Tot seguit, veurem si es compleix la propietat de l'element invers:

$$a \cdot a^{-1} = e$$
$$a \cdot a^{-1} = 1$$
$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad \frac{a}{a} = 1 \to a = \frac{1}{a}$$
$$a^{-1} = a \in Q_8$$

Com que es compleix aquesta propietat ***hem demostrat que el conjunt Q_8 és un grup.*** ■

Subgrups

És interessant considerar els subconjunts d'un grup que a la vegada tenen estructura de grups.

Definició 3 *Un subconjunt no buit S d'un grup G és un subgrup (de G) si, pel que fa a la mateixa operació de G, S també és grup'.* ■

Exemple 18 *El conjunt $3\mathbb{Z}$ és un subgrup de $(\mathbb{Z}, +)$*■.

En tot grup existeixen, com a mínim, dos subgrups, $\emptyset$, G, anomenats subgrups impropis; si existeixen més subgrups s'anomen subgrups propis.

6.2 ANELL

Definició 4 *Sigui A un* ***anell*** $(A, +, \cdot)$ *si té dues operacions internes, anomenades* ***suma*** $(+)$ *i* ***producte*** $(\cdot)$ *que compleixen:*

- $(A, +)$ *és un grup abelià.*
- *El producte és associatiu:* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in A.$
- *El producte és distributiu respecte a la suma*

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad i \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \blacksquare$$

Per poder demostrar que una estructura algebraica és un anell s'han de seguir aquestes premisses:

- $(A, +)$ ha de ser un grup abelià. $\rightrightarrows$ Operació binaria interna, associativa, neutre, invers, commutativa.
- $(A, \cdot)$ ha de ser un semigrup. $\rightrightarrows$ Operació binaria interna, associativa. Si es compleix això, ja tindrem un **anell**.
- $(A, \cdot)$ ha de complir: element neutre o commutativa. Si compleix l'element neutre, tindrem un **anell unitari**. Si compleix la propietat commutativa, tindrem un **anell commutatiu**. Si compleix les dues propietats, tindrem un **anell unitari i commutatiu**.

La propietat distributiva mencionada a dalt, l'hem de fer amb les dues operacions. Per tant:

$$\forall a, b, c \in A \qquad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Exemple 19 *Un exemple d'anell és* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)\blacksquare$

L'anell unitari mencionat més a dalt, la seva unitat es denotarà sempre per 1 i compleix

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

L'element neutre per la suma es denota per 0 i l'oposat de a per aquesta operació és $-a$.

En tot grup abelià $(G, +)$ es pot introduir una estructura d'anell definint $ab = 0$ per a tots els elements de G. Diem en aquest cas que és un **anell trivial**. En el cas en que el grup estigui format per només un element direm que l'anell és **anell zero** i es sol designar per 0.

Proposició 1 *Donat un anell A, es compleix:*

I) $(a-b)c = ac - bc \quad i \quad a(b-c) = ab - ac$

II) $0a = a0 = 0$

III) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

IV) $(-a)(-b) = ab$

V) $(-1)a = -a$ ■

6.3 COS ALGEBRAIC

Definició 5 *Un cos, K, és un anell tal que $K - \{0\}$ és un grup abelià respecte a la multiplicació.*

En poques paraules, un cos és un conjunt on podem sumar, restar, multiplicar i dividir amb les propietats habituals. L'exclusió del zero en la definició és degut simplement que el zero no es pot dividir per zero.

Exemple 20 *El conjunt $\mathbb{N}$ amb la suma i el producte usuals no és un cos, ja que no hi existeixen ni oposats respecte la suma ni inversos respecte el producte. Tampoc ho és el conjunt $\mathbb{Z}$, ja que té oposats però no inversos. En canvi aquestes estructures: $(\mathbb{Q}, +\cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ són cossos. Aquests tres cossos compleixen:*

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

*En cada cas es compleix que la suma i el producte del conjunt petit són les mateixes que les del conjunt gran. Quan això passa es diu que el subconjunt petit és un **subcos** del gran i que el gran és una **extensió** del petit. Per tant, $\mathbb{Q}$ és un subcos de $\mathbb{R}$ i de $\mathbb{C}$; $\mathbb{R}$ és una extensió de $\mathbb{Q}$; i $\mathbb{C}$ és una extensió de $\mathbb{R}$ i de $\mathbb{Q}$.* ■

Gràcies a aquest exemple, podem treure la conclusió que un subconjunt de K és un subcos si es compleix que:

- Conté el 0 i l'1 de K.
- És estable respecte les operaciones suma, producte, oposat i invers, és a dir: $a, b \in S$ s'haurà de complir que $a + b, a \cdot b, -a, a^{-1} \in S$.

També, podem extreure la conclusió que extensió d'un cos K és un cos L que conté a K com a subcos.

$$K \subseteq L$$

Exemple 21 *$Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ és un cos.*

L'únic que no és del tot evident és l'existència de l'invers multiplicatiu. Només hem de racionalitzar:

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in K. \blacksquare$$

Perquè K sigui un cos ha de ser un anell i a més tenir invers pel producte. Mirem que l'exemple anterior $(Q[\sqrt{2}], +, \cdot)$ és un cos:

- Grup amb la suma:
  - Associatiu: $x + (y + z) = (x + y) + z \; x, y, z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

    $$\begin{aligned} x + (y + z) &= a + b\sqrt{2} + (c + d\sqrt{2} + e + f\sqrt{2}) = \\ &= a + b\sqrt{2} + (c + e + (d + f)\sqrt{2}) = \\ &= a + b\sqrt{2} + (c + e + (d + f)\sqrt{2}) = \\ &= a + c + e + (b + d + f)\sqrt{2} \end{aligned}$$

    Per altra banda:

    $$\begin{aligned} (x + y) + z &= (a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2}) + e + f\sqrt{2} = \\ &= ((a + c) + (b + d)\sqrt{2}) + e + f\sqrt{2} = \\ &= a + c + e + (b + d + f)\sqrt{2} \end{aligned}$$

    Per tant són iguals.
  - Element neutre: És obvi que el 0 és neutre perquè $x+0 = 0+x = x$.
  - Element oposat: $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

    Volem veure que $-x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Sabem que $x = a + b\sqrt{2}$. Ens preguntem si $-a - b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. És cert ja que $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow -a, -b \in \mathbb{Q}$.

    $$x - x = a + b\sqrt{2} - a - b\sqrt{2} = 0.$$
  - Commutatiu: Sí perquè $a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} + a + b\sqrt{2}$. Aquesta igualtat es pot fer ja que $a + c = c + a$ i $b + d = d + b$.

  Per tant, hem demostrat que és un grup amb la suma.

- Anell:
  - Associatiu: Es demostra igual que abans.
  - Neutre:

$$1 \cdot (a + b\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2}) \cdot 1 = (a + b\sqrt{2})$$

  - Commutatiu: Es demostra igual que abans.

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (c + d\sqrt{2})(a + b\sqrt{2})$$

  Per tant, és un anell.

- Cos:
  - Invers:

    $a \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Volem trobar x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

$$\begin{aligned} x &= a + b\sqrt{2} \\ (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2} &= 1 \\ ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + bd2 &= 1 \\ y = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} &= 1 \end{aligned}$$

    Veiem que x^{-1} existeix perquè $ac+2bd \in \mathbb{Q}$ i $ad+bc \in \mathbb{Q}$. Aquestes dues condicions impliquen que $y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

En definita, hem observat que anomenarem cos, K, a tot anell $(K', +, \cdot)$ unitari, commutatiu i tal que tot element diferent de zero posseeixi invers. És a dir, que verifiqui:

- $(K, +)$ és un grup abelià.
- $(K, \cdot)$ és un grup abelià.
- Propietat distributiva.

CAPÍTOL 7

ESPAI VECTORIAL

7.1 ESPAI VECTORIAL

Per parlar d'espai vectorial i relacionar-ho amb les estructures algebraiques cal definir les **operacions externes**. Considerem un conjunt X, i un altre conjunt K que anomenarem **conjunt d'escalars**. Anomenarem **operació binària externa** sobre X, a una funció que agafi un element de K i un element de X, i doni com a resultat un element de X. És a dir, una funció:

$$p : K \times \times \to X$$

Normalment, a una operació externa d'aquest tipus la designarem $\cdot$ i l'anomenarem **multiplicació per un escalar**; i el resultat d'aplicar-la a un escalar $\alpha \in K$ i a un element $x \in X$, la designarem $\alpha \cdot x$, i l'anomenarem producte de α per x.

Per tant, si tenim un conjunt X i un altre conjunt d'escalars K, podem tenir operacions internes a cada un d'aquests conjunts, i operaciones externes entre ells. Usant aquestes dues possibilitats, es defineixen els **espais vectorials**.

Definició 6 *Sigui V i K conjunts no buits. Sigui $+$ una operació interna sobre V, i sigui $\cdot$ una operació externa sobre V amb conjunt d'escalars K, que anomenarem **producte per un escalar**. Direm que V, amb aquestes operaciones, és un **espai vectorial** si es compleixen aquestes propietats:*

- $(V, +)$ *és un grup abelià.*

- K *és un cos.*

- *El producte per un escalar verifica les següents propietats:*

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{v}+\beta\overrightarrow{v}, &\quad \forall\alpha,\beta\in K, \forall\overrightarrow{v}\in V.\\ \alpha(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \alpha\overrightarrow{v}+\alpha\overrightarrow{w}, &\quad \forall\alpha\in K, \forall\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in V.\\ \alpha(\beta\overrightarrow{v}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{v}, &\quad \forall\alpha,\beta\in K, \forall\overrightarrow{v}\in V.\\ 1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}, &\quad \forall\overrightarrow{v}\in V. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Als elements d'un espai vectorial es denominen **vectors**. En un espai vectorial hi ha, per tant, quatre operacions: la suma de vectors, la suma i el producte d'escalars, i el producte de vectors per escalars.

Exemple 22 *Alguns exemples d'espais vectorials són:*

- *L'espai vectorial dels vectors de n coordenades sobre un cos K, es designen K^n. La suma es realitza coordenada a coordenada, i el producte per escalar també. Exemples: $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.*

- *L'**espai vectorial trivial** és el conjunt $V = \{0\}$, respecte a qualsevol cos K. Qualsevol operació on intervingui algun vector dóna com a resultat l'únic element: 0.*

- *Els conjunts de polinomis $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ i $\mathbb{C}[x]$ són espais vectorials amb cos d'escalars, respectivament $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.* $\blacksquare$

Proposició 2 *Si V és un espai vectorial sobre un cos K, s'han de complir les següents propietats, per a tot $\alpha,\beta\in K$ i per a tot $\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in V$:*

- $\alpha 0 = 0$, *on 0 és l'element neutre a V.*

- $0\overrightarrow{v} = 0$, *on 0 és l'element neutre a K.*

- *Si $\alpha\overrightarrow{v} = 0$ llavors, $\alpha = 0$ o*[1] $\overrightarrow{v} = 0$.

- *Si $\alpha\overrightarrow{v} = \beta\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{v} \neq 0$, llavors $\alpha = \beta$.*

- *Si $\alpha\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{w}$ i $\alpha \neq 0$, llavors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.*

- $(-\alpha)\overrightarrow{v} = \alpha(-\overrightarrow{v}) = -\alpha\overrightarrow{v}$. $\blacksquare$

[1] En matemàtiques, la conjunció 'o' s'utilitza sempre en sentit no exclusiu de 'un o l'altre, o els dos'.

7.2 COMBINACIÓ LINEAL DE VECTORS

Definició 7 *Sigui V un espai vectorial sobre K. Donats r vectors $\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_r}$, anomenem **combinació lineal** d'aquests vectors a qualsevol expressió de la forma:*

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_r\overrightarrow{v_r} \in V,$$

on $\alpha_1,\ldots,\alpha_r \in K$. ■

Definició 8 *Sigui V un espai vectorial. Direm que un vector $\overrightarrow{v}$ és **dependent linealment** d'un conjunt de vectors $\{\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_r}\}$ si $\overrightarrow{v}$ es pot escriure com a combinació lineal de $\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_r}$.*■

7.3 VECTORS LINEALMENT DEPENDENTS

Definició 9 *Sigui V un espai vectorial sobre K. Direm que un sistema (o conjunt) de vectors $S = \{\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_r}\} \subseteq V$ és **linealment dependent**, si existeixen r escalars (almenys un d'aquests ha de ser diferent de 0)$\alpha_1,\cdots,\alpha_r \in K$ tals que*

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_r\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{0}.$$ ■

7.4 VECTORS LINEALMENT INDEPENDENTS

Mirant a Definició 8 treiem la següent definició:

Definició 10 *Si l'única forma d'escriure el vector $\overrightarrow{0}$ com a combinació lineal d'aquests vectors és agafant $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = \overrightarrow{0}$, direm que el sistema S és **linealment independent** o **lliure**.*

7.5 BASES D'UN ESPAI VECTORIAL

Per poder definir el que és una base d'un espai vectorial, primer ens hem de fixar en el que és un sistema de generadors.

Definició 11 *Sigui V un espai vectorial. Direm que un sistema de vectors $S = \{\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_r}\}$ és un **sistema de generadors** de V si tot vector de V es pot escriure com a combinació lineal dels vectors de S. En aquest cas direm que V està generat per S, o pels vectors de S.* ■

Definició 12 *Un espai vectorial V es diu que és de* ***tipus finit*** *si està generat per un nombre finit de vectors. És a dir, si existeix un sistema de generadors $S = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_r}\}$.* ■

Per aquests espais vectorials de tipus finit, podem definir la noció de base:

Definició 13 *Sigui V un espai vectorial de tipus finit. Direm que un sistema de vectors $B \subseteq V$ és una* ***base*** *de V si compleix:*

- *B és un sistema de generadors de V.*
- *B és linealment independent.* ■

7.6 DIMENSIÓ D'UN ESPAI VECTORIAL

Teorema 1 *(Teorema de la base). Sigui V un espai vectorial de tipus finit. Totes les bases de V tenen el mateix nombre d'elements. A aquest nombre se l'anomena* ***dimensió*** *de V.* ■

Definició 14 *La dimensió d'un espai vectorial V, que designarem $dim(V)$, es defineix com:*

- *Si $V = \{0\}$, llavors $dim(V) = 0$.*
- *Si V és de tipus finit, la seva dimensió és el nombre d'elements de qualsevol base de V.*
- *Si V no és de tipus finit, direm que té una dimensió infinita, i escriurem $dim(V) = \infty$.* ■

CAPÍTOL 8

CONCEPTES DE CONSTRUCCIÓ AMB REGLE I COMPÀS

8.1 CONCEPTE DE CONSTRUCCIÓ AMB REGLE I COMPÀS

Una construcció amb regle i compàs consisteix en la determinació de punts, rectes (o segments d'aquestes) i circumferències (o arcs d'aquestes) a partir d'un regle i un compàs **ideals** que significa:

- El regle té longitud infinita, no té marques que permetin mesurar o traslladar distàncies i només té una vora. Es pot utilitzar només per traçar un segment de recta o una recta entre dos punts donats o per fer que un segment donat tingui major longitud (per perllongar un segment).

- El compàs es tanca quan l'aixequem del paper. És a dir, després d'utilitzar-lo oblida la distància que tenia entre els seus extrems. Es pot utilitzar només per traçar circumferències (o arcs d'aquestes) agafant com a centre un punt donat i com a radi la distància entre aquest punt i un altre també donat.

Pot semblar que amb aquestes normes donades podrem fer poc, però en realitat no és així.

8.2 PUNTS CONSTRUÏBLES

Partim d'un conjunt de punts $S = \{p_0, p_1, \cdot, p_n\}$ del pla. Anem ara a definir les figures que són **traçables**:

- Una recta és traçable a partir de S si passa per (com a mínim) dos punts de S.
- Una circumferència és traçable a partir de S si té per centre un punt de S i per radi la distància entre dos punts qualssevol de S. Això ho diem ja que no es pot aixecar el compàs.

Definició 15 *Un punt és* ***construïble amb regle i compàs*** *a partir de S si:*

- *És un punt del conjunt S.*
- *És un punt intersecció de dos rectes traçables a partir de S.*
- *És un punt d'intersecció de dues circumferències traçables a partir de S.*
- *És un punt d'intersecció d'una recta i una circumferència traçables a partir de S.* ■

A partir d'un cert conjunt S obtenim per construcció amb regla i compàs el conjunt S' format per tots els punts construïbles a partir de S. Reiterant aquest procediment generem una successió de conjunts S_n amb $n \geq 1$:

$$\begin{cases} S_1 = S \\ S_{n+1} = S'_n \end{cases}$$

Definim el conjunt $\overline{S'}$ com la unió de tots aquests conjunts, és a dir:

$$\overline{S'} = \bigcup_n S_n$$

Un punt del pla serà construïble si i només si aquest punt pertany a $\overline{S'}$. Per tant $\overline{S'}$ reuneix a tots els punts del pla construïbles amb regle i compàs.

Utilitzant regle i compàs es poden definir coordenades en el pla. Es parteix de dos punts que pertanyen a S, i es traça la recta que passa per aquests. El resultat s'anomena eix X i es defineix la longitud entre els dos punts donats com a una unitat de longitud. Per tant, tenir dos punts com a dades de partida és equivalent a tenir un eix de coordenades i una unitat de longitud.

Tot seguit, hem de traçar una recta perpendicular a la de l'eix X que ja tenim, i amb això ja obtenim l'eix Y. Així doncs, tenir dos punts com a dades és equivalent a tenir un sistema de coordenades cartesianes, amb eixos X i Y, i amb una unitat de longitud.

8.3 FIGURES CONSTRUÏBLES

Un cop definit tots els punts del pla construïbles amb regle i compàs $\overline{S'}$, ja podem definir fàcilment què és una figura construïble a partir de $\overline{S'}$.

Definició 16 *Sigui $\overline{S'}$ tots els punts del pla construïbles. S'anomena **figura construïble** a partir de $\overline{S'}$ qualsevol figura determinada per una família finita dels punts construïbles de $\overline{S'}$.*

- *Una recta és construïble quan conté almenys dos punts construïbles del conjunt $\overline{S'}$.*
- *Una circumferència és construïble quan el seu centre i el radi són construïbles a partir dels punts del conjunt $\overline{S'}$. El radi és construïble si ho són dos punts que es troben a una distància igual al radi de la circumferència.*
- *Un polígon és construïble quan tots els seus vèrtexs pertanyen al conjunt $\overline{S'}$.* ■

En resum, hem pogut observar que una construcció geomètrica és possible amb regle i compàs quan tots els punts i figures que cal construir són construïbles a partir dels punts donats.

8.4 NOMBRES CONSTRUÏBLES

Un punt en el pla euclidià és un **punt construïble** si, donat un fix sistema de coordenades (o un fix segment de línia de longitud unitària), el punt pot ser construït amb regle i compàs. Un nombre complex és un **nombre construïble** si el seu punt corresponent en el pla euclidià es pot construir a partir dels habituals eixos de coordenades.

Teorema 2 *Tot seguit, veurem la demostració que un nombre real r és construïble si i només si un segment de recta de longitud $\mid r \mid$ es pot construir* *amb regle i compàs.*

El conjunt de tots els nombres reals construïbles és un subcos del cos dels nombres reals.

Sigui F *un subcos de* $\mathbb{R}$. *El conjunt de tots els punts* (x, y) *en el pla euclidià* $\mathbb{R}^{\nvDash}$ *tal que* $x, y \in F$ *s'anomena el* ***pla de*** F. *Una línia recta amb una equació de la forma* $ax+by+c=0$*, tal que* $a, b, c \in F$*, s'anomena* ***línia en*** F. *Qualsevol circumferència amb una equació de la forma* $x^2+y^2+ax+by+c=0$*, tal que* $a, b, c \in F$*, s'anomena* ***circumferència en*** F.

Per tant, sigui F *un subcos de* $\mathbb{R}$*:*

- *Qualsevol línia recta que uneixi dos punts en el pla de* F *és una línia en* F.
- *Qualsevol circumferència amb el seu radi a* F *i el seu centre en el pla de* F *és una circumferència en* F.

Els punts d'intersecció de línies en F *i de circumferències en* F *estan en el pla de* $F(\sqrt{u})$*, per qualsevol* u *en* F.

El nombre real u *és construïble si i només si existeix un conjunt finit de* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *de nombres reals tals que:*

- u_1^2 *pertany a* $\mathbb{Q}$.
- u_i^2 *pertany a* $\mathbb{Q}(u_1, \cdots, u_{i-1})$*, per a* $i = 2...$
- u *pertany a* $\mathbb{Q}(u_1, \cdots, u_n)$.

Si u *és un nombre real construïble, llavors* u *és algebraic sobre* $\mathbb{Q}$*, i el grau del seu polinomi mínim sobre* $\mathbb{Q}$ *és una potència de* 2. ■

En termes d'àlgebra, un nombre és construïble si i només si es pot escriure usant les quatre operacions aritmètiques bàsiques i les arrels quadrades, però de cap arrel d'ordre superior.

Un nombre real és construïble si és una coordenada d'un punt construïble.

- (x, y) construïble $\Leftrightarrow x, y$ construïbles.
- Si y, x és construïble $\Rightarrow x \cdot y$ és construïble.

Un nombre complex és construïble si i només si les seves parts reals i imaginàries són construïbles.

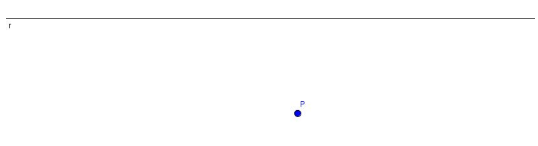
CAPÍTOL 9

CONSTRUCCIONS BÀSIQUES AMB REGLE I COMPÀS

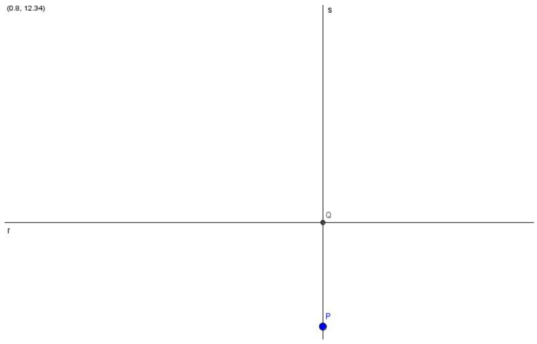
En aquest capítol, veurem diferents construccions realitzades amb el GeoGebra que no les afegirem a l'annex ja que les explicarem en el mateix apartat de cada construcció. Moltes o quasi totes d'aquestes construccions amb regle i compàs es poden trobar al llibre *Elements d'Euclides*.

9.1 SIMÈTRIC D'UN PUNT RESPECTE UNA RECTA

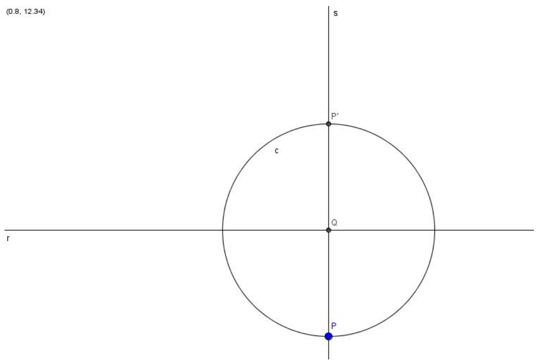
Donats un punt P i una recta r qualssevol. Ens poden donar tres punts també, ja que una recta es pot confeccionar a partir de dos punts qualssevol. De qualsevol de les dues maneres tenim la recta i el punt:



Traçem una perpendicular a la recta r que passi pel punt P. Això, amb el GeoGebra ho farem amb l'opció de recta perpendicular ja que en un altre apartat ja farem com es realitza una recta perpendicular a una altra recta. Ens ha quedat:



El punt Q és la intersecció de la recta r i la perpendicular s (aquest punt l'hem marcat mitjançant l'eina intersecció del GeoGebra). Finalment, hem de traçar una circumferència amb centre el punt Q que passi per P.

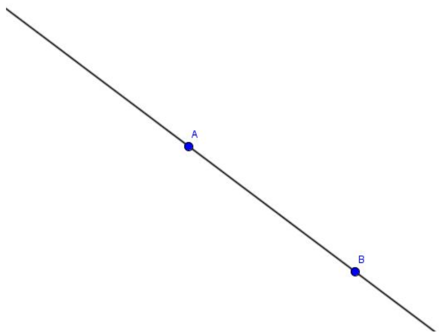


El punt P' és el punt simètric de P respecte la recta r.

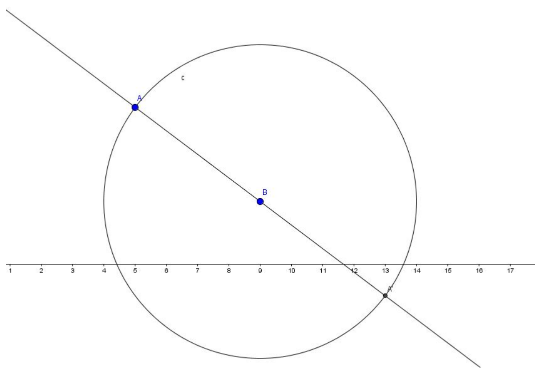
9.2 SIMÈTRIC D'UN PUNT RESPECTE UN ALTRE

Donats dos punts A i B, construirem el simètric de A respecte de B.

Primer de tot, hem de traçar la recta que passa per A i B.



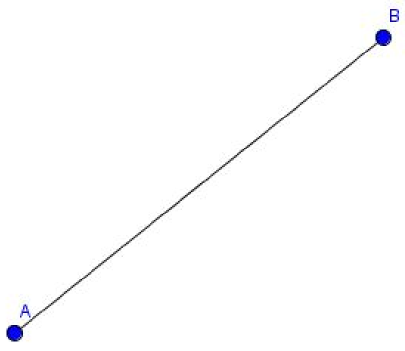
Tot seguit, traçem una circumferència de centre B i de radi AB. Aquesta circumferència talla amb la recta que havíem traçat abans amb un altre punt, el C que li canviem el nom per A', que és precisament el simètric de A respecte de B.



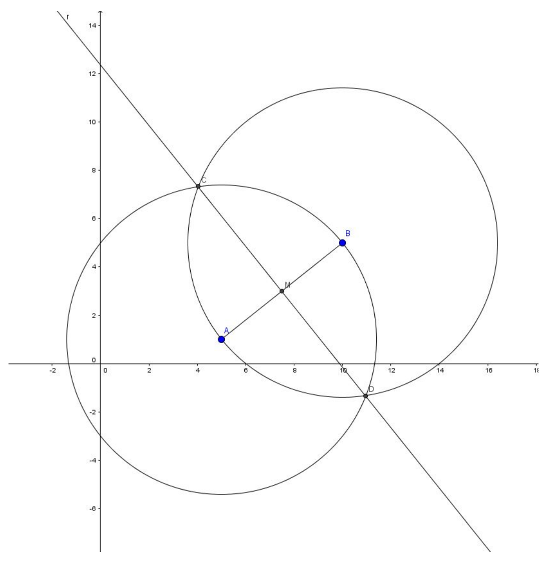
9.3 MEDIATRIU D'UN SEGMENT I PUNT MITJÀ D'UN SEGMENT

Definició 17 *La mediatriu d'un segment és la recta que és perpendicular al segment i que passa pel seu punt mitjà.* ■

Donats dos punts A i B. Ajuntem aquests dos punts i formem el segment AB:



Tot seguit, hem de traçar dues circumferències que tinguin el centre en un punt (A o B) i com a radi la distància entre el centre i l'altre punt. Per tant, hem de formar les circumferències de centre el punt A i radi AB; i de centre el punt B i radi BA. Tot seguit, hem de marcar els dos punts on es creuen les circumferències secants; i formar una recta r que passi per aquests dos punts. Llavors, ja tindrem la mediatriu del segment AB. Per trobar, el punt mitjà M del segment AB s'ha de marcar la intersecció entre el segment AB i la mediatriu r. El resultat és el següent:



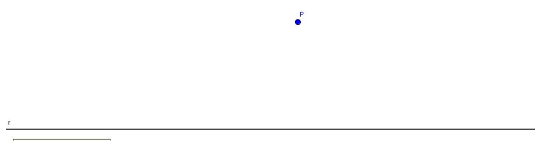
Com hem pogut observar, la mediatriu d'un segment divideix el segment en dues parts iguals.

Com que hem de parlar de la mediatriu, és necessari afegir la definició de circumcentre.

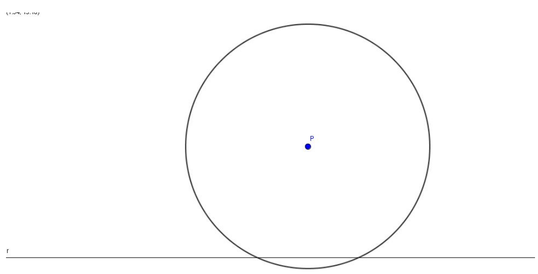
Definició 18 *En tot triangle ABC les mediatrius dels seus tres costats tallen en el mateix punt, anomenat circumcentre (O) del triangle.* ■

9.4 PERPENDICULAR A UNA RECTA PER UN PUNT EXTERIOR

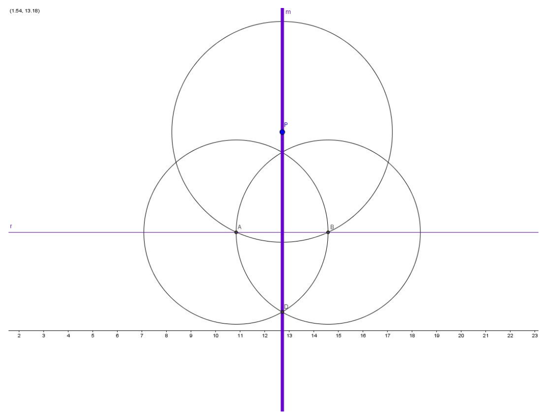
Donat una recta r i un punt P exterior a aquesta, hem de trobar una recta que sigui perpendicular a r i que passi per P.



Tot seguit, tracem una circumferència que tingui com a centre el punt P i que sigui secant a la recta r donada (pot tallar en qualssevol dos punts de la recta).

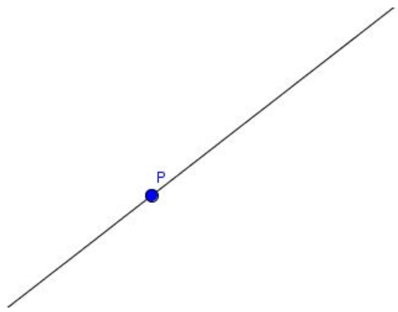


Tot seguit, trobem la mediatriu que passi pel punt mitjà del segment que formen els punts d'intersecció A i B entre la recta i la circumferència. Aquesta mediatriu trobada serà la recta perpendicular m. El resultat és el següent:

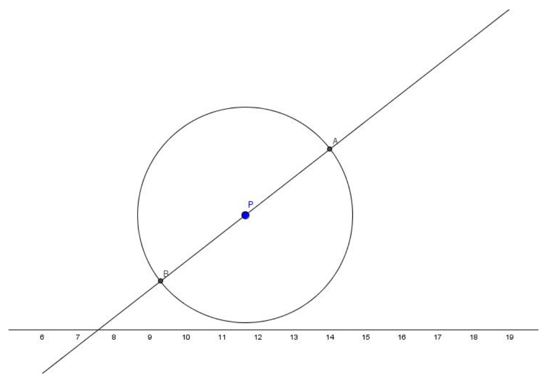


9.5 PERPENDICULAR A UNA RECTA PER UN PUNT DE LA PRÒPIA RECTA

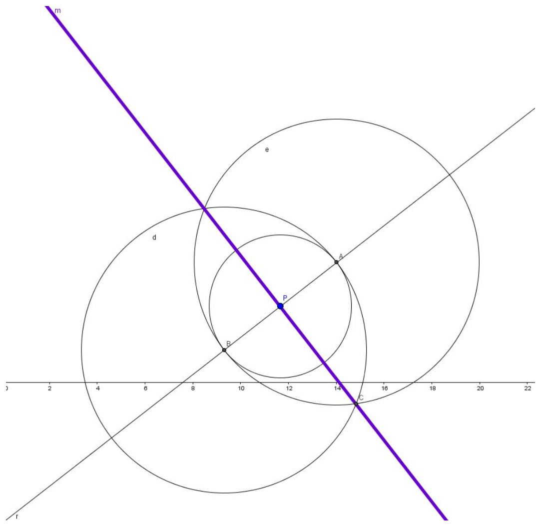
Donada una recta r i un punt P de la pròpia recta, hem de trobar la perpendicular a r que passi per P.



Tot seguit, hem de dibuixar una circumferència de centre el punt P i de radi qualsevol, i marcar els punts d'intersecció de la recta i la circumferència com a A i B.

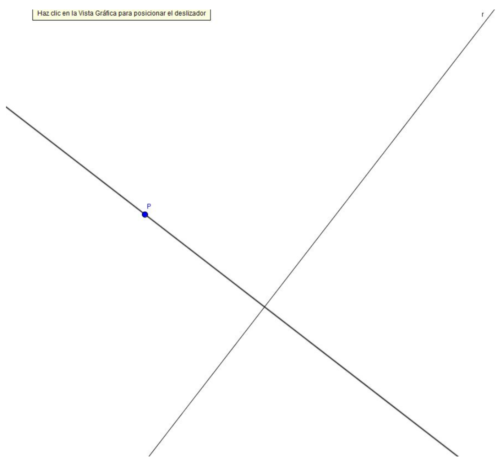


A continuació, hem de dibuixar la mediatriu del segment AB i aquesta mediatriu m serà la recta perpendicular que busquem.

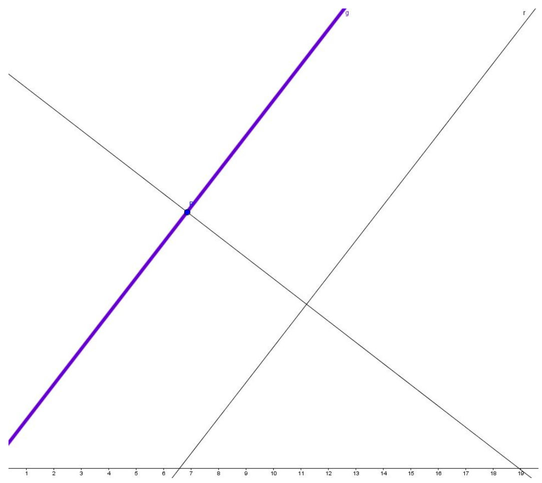


9.6 PARAL·LELA A UNA RECTA PER UN PUNT EXTERIOR

Donat un punt P exterior i una recta r, hem de trobar la paral·lela a r que passi per P. Per tant, hem de traçar una perpendicular a la recta r que passi per P.

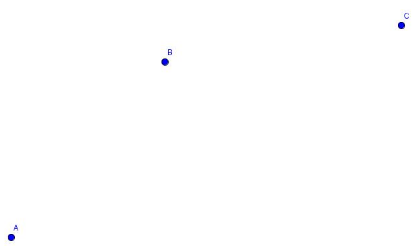


Tot seguit, cal fer una altra recta perpendicular g a la recta traçada i que passi pel punt P. Aquesta recta construïda ja serà la recta paral·lela que ens demanava l'enunciat.

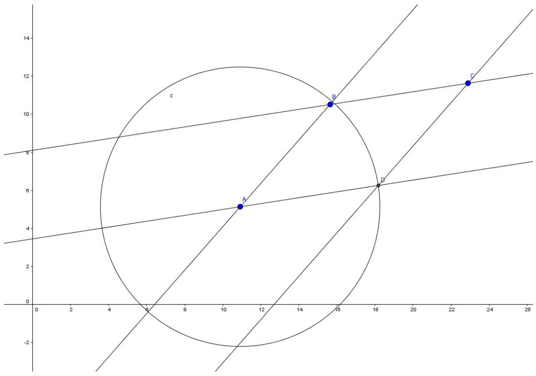


9.7 CIRCUMFERÈNCIA DE RADI LA DISTÀNCIA ENTRE DOS PUNTS

Donats tres punts A, B i C no alineats, volem construir una circumferència de centre A i que tingui com a radi la distància del segment BC.



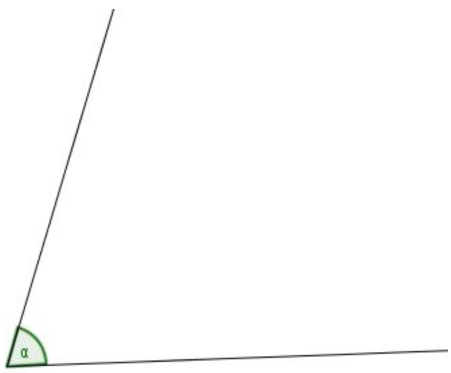
Tot seguit, hem de traçar la recta que uneix A i B, i la que uneix B i C. Tot seguit, hem de dibuixar les paral·leles d'aquestes dues rectes que passi per C en el primer cas, i per A en el segon cas. El punt d'intersecció de les dues rectes l'anomenarem D i és un punt de la circumferència de centre A. El resultat és el següent:



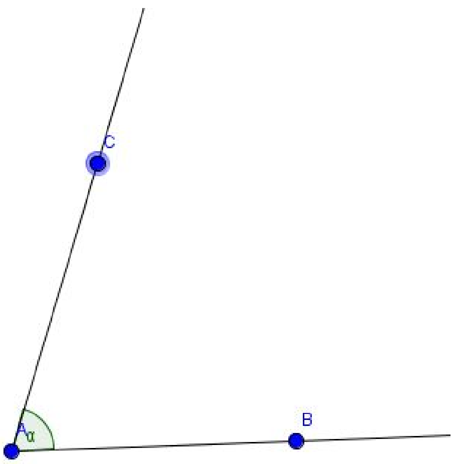
9.8 BISECTRIU D'UN ANGLE

Definició 19 *La bisectriu és la recta que divideix un angle en dos angles de la mateixa mesura. En altres paraules, la bisectriu és l'eix de simetria de l'angle.*

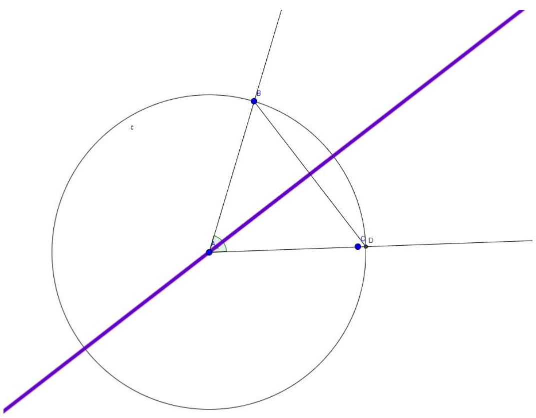
Donat un angle α de qualsevol mesura, hem de trobar la bisectriu d'aquest angle.



Tot seguit, marquem el punt d'intersecció entre les dues semirectes que formen l'angle com A i marquem dos altres punts B i C qualssevol que estiguin en una semirecta i en l'altre. Per tant, tenim:

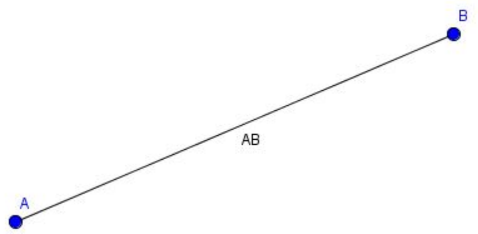


A continuació, tracem una circumferència de centre A i que passi per B. Marquem el punt d'intersecció D de la circumferència traçada amb la semirecta que conté el punt C i tracem el segment corresponent i hi dibuixem la seva mediatriu que correspondrà a la bisectriu de l'angle α. El resultat és el següent:

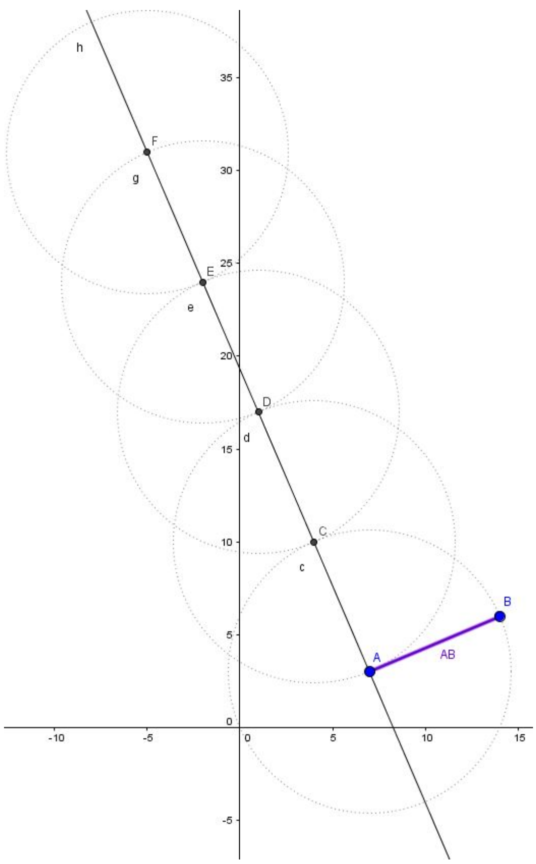


9.9 DIVISIÓ D'UN SEGMENT EN n PARTS IGUALS

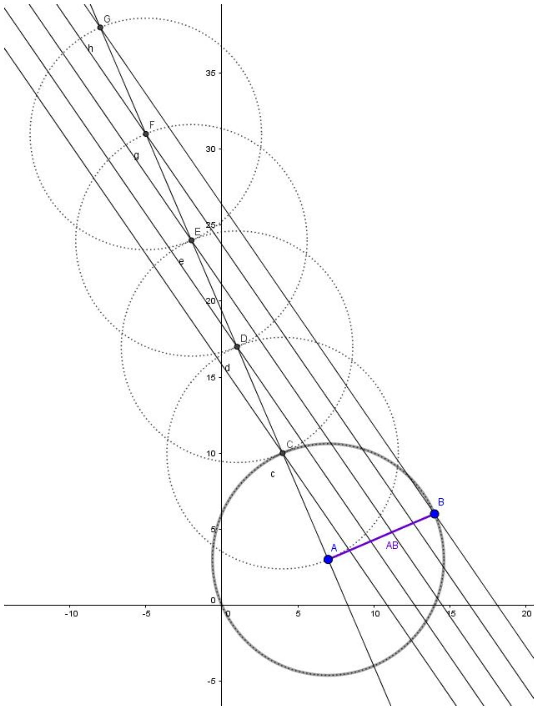
Donats dos punts A i B, hem de dividir el segment AB en n parts iguals. En primer lloc tracem el segment que els uneix.



Tot seguit, hem de traçar la recta perpendicular a aquest segment AB que passi per A. Sobre aquesta recta traçada, hem de dibuixar n circumferències de radi la longitud del segment AB, i de centre la intersecció de la circumferència anterior amb la recta traçada.



A continuació, hem de traçar la recta que conté l'última intersecció entre la circumferència i la recta perpendicular; i el punt B. Finalment, hem de traçar rectes paral·leles a aquesta recta traçada que passin per les interseccions de les circumferències amb la recta perpendicular. El resultat és el següent:

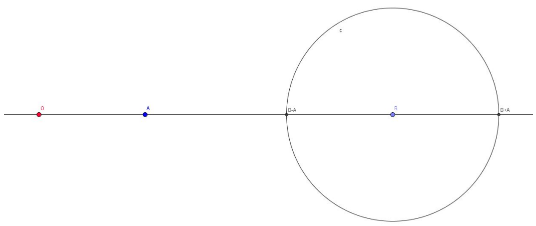


CAPÍTOL 10

OPERACIONS AMB REGLE I COMPÀS

10.1 SUMA I RESTA AMB REGLE I COMPÀS

Donats dos nombres construïbles A i B que pertanyen a la recta real, volem trobar les següents operacions aritmètiques utilitzant regle i compàs ideals: $B + A$ i $B - A$. Sabem que $B > A$. Per fer-ho, hem de traçar una circumferència de centre B i de radi la distància entre O i A. Tot seguit, hem de mirar les interseccions de la circumferència traçada amb la recta real. Aquestes interseccions seran els nombres que hem construït amb regle i compàs. El nombre que sigui més gran que el nombre B i que el nombre A serà per suposat $B + A$ i el que sigui més petit que B serà el nombre $B - A$. El resultat és el següent:



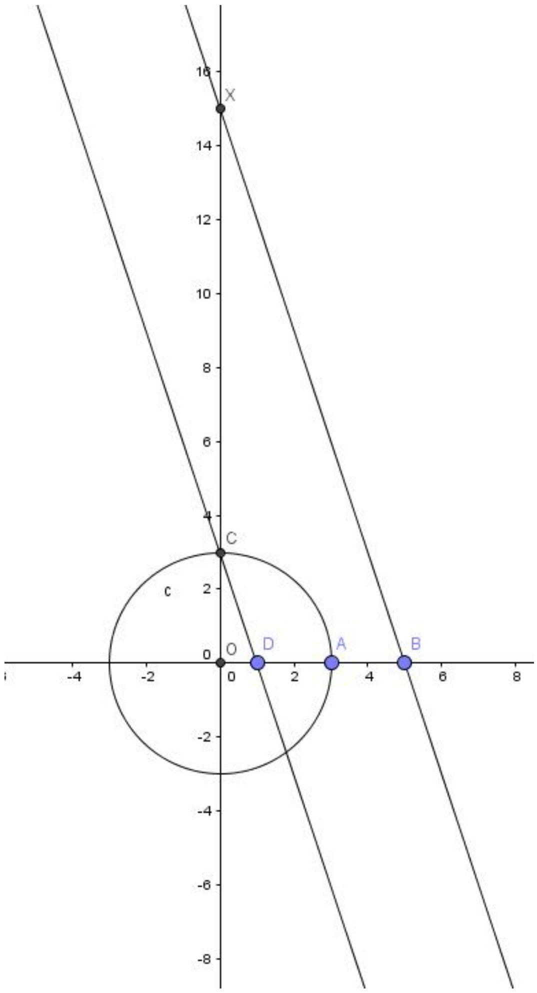
10.2 PRODUCTE I DIVISIÓ AMB REGLE I COMPÀS

Per fer el producte de dos nombres construïbles, hem de partir d'uns eixos de coordenades i dos punts construïbles sobre l'eix X, és a dir, $(A, 0)$ i $(B, 0)$.

Construïm el punt $(0, A)$ traçant la circumferència de centre 0 i de radi A. Tracem la recta que passa per $(0, A)$ i $(1, 0)$ (tenim aquest punt ja que tenim els eixos de coordenades).Tracem la paral·lela a aquesta recta que passi per $(B, 0)$ tallant llavors a l'eix Y en un punt, anomenat $(0, X)$. Apliquem ara el teorema de Tales:

$$\frac{X}{A} = \frac{B}{1} \rightarrow X = AB$$

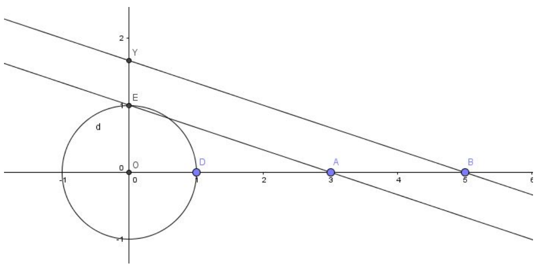
El resultat és el següent:



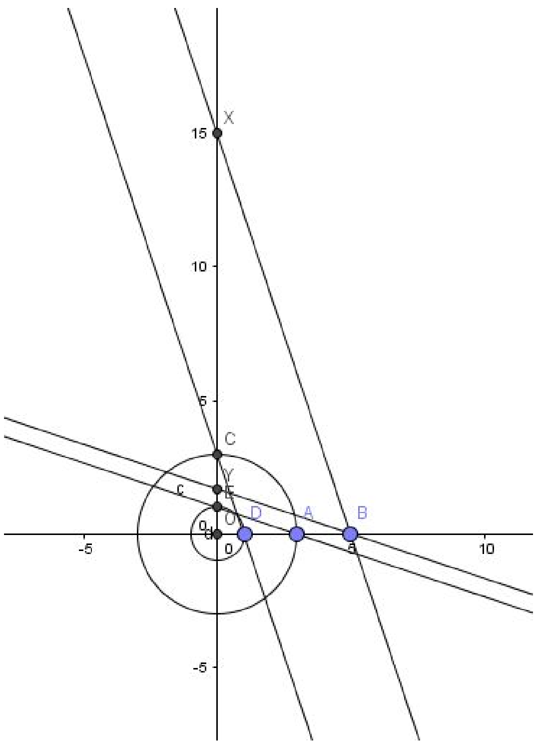
Per fer la divisió de dos nombres construïbles, partim del mateix que amb el producte. Construïm el punt $(0, 1)$ traçant la circumferència de centre 0 i radi 1. Tracem la recta que passa per $(0, 1)$ i $(A, 0)$. Tracem la paral·lela a aquesta recta que passi per $(B, 0)$ tallant llavors a l'eix Y en un punt, anomenat $(0, Y)$. Apliquem ara el teorema de Tales:

$$\frac{Y}{1} = \frac{B}{A} \to Y = \frac{B}{A}$$

Si $B = 1$ llavors $Y = \dfrac{1}{A}$ i per tant hem construït l'invers d'un nombre construïble A. Amb això obtenim, a més, que tots els nombres racionals són construïbles. El resultat és el següent:

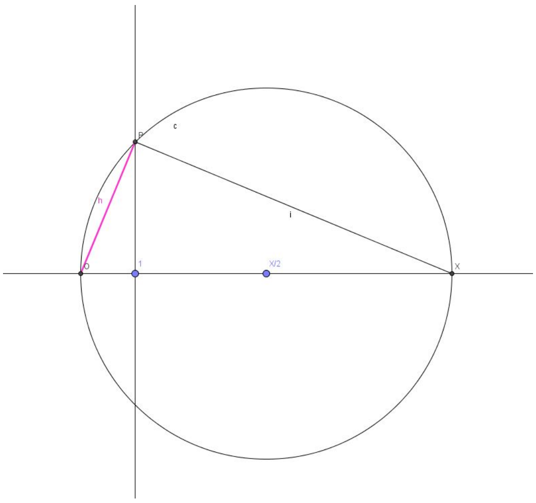


El resultat de tot el projecte del GeoGebra és el següent:



10.3 ARREL QUADRADA AMB REGLE I COMPÀS

Generalment resoldre l'arrel quadrada d'un nombre sense calculadora resulta fatigant i el procediment és complicat. Així que una alternativa divertida per poder trobar l'arrel quadrada és utilitzant un regle i un compàs. Trobarem l'arrel quadrada de x on $x \geq 0$. Primer de tot ens situarem a la recta real, marcarem el punt $\frac{x}{2}$ i dibuixarem una circumferència de centre $\frac{x}{2}$ i de radi la distància entre $(0,0)$ i $\frac{x}{2}$. Tot seguit, hem de marcar l'unitat (per tant, el punt $(1,0)$) i tracem una recta perpendicular a la recta real que passi per aquest punt i tallarà a la circumferència en el punt P. A continuació, unim el punt P amb el punt O i el que mesuri aquesta longitud h serà el resultat de $\sqrt{x}$. El resultat és el següent:



CAPÍTOL 11

TEOREMA DE WANTZELL

11.1 COM SABER SI UN POLINOMI ÉS IRREDUCTIBLE A COEFICIENTS A $\mathbb{Q}$

Podem definir el contingut($f(x)$) siguent $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ un polinomi de grau n com el màxim comú divisor dels seus coeficients. Contingut($f(x)$) = $mcd(a_0, a_1, ..., a_n)$.

Direm que $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ és un polinomi de grau n **primitiu** si contingut($f(x)$) = 1.

Per mirar que un polinomi sigui irreductible a coeficients a $\mathbb{Q}$, primer hem de veure que és irreductible a coeficients a $\mathbb{Z}$; llavors veure que és primitiu, és a dir:

Sigui p(x) un polinomi irreductible a $\mathbb{Z}$ i contingut (p(x))= 1 $\rightarrow$ p(x) és irreductible a $\mathbb{Q}$.

Sigui p(x) un polinomi de grau 2 o 3 a $\mathbb{Z}$ que no tingui arrels a $\mathbb{Z}$, llavors p(x) és irreductible a $\mathbb{Z}$. El polinomi p(x)= $x^2 - 2 = 0$ és irreductible a coeficients a $\mathbb{Q}$?

Possibles arrels: $\pm 1, \pm 2$.

$$1^2 - 2 = -1 \neq 0 (-1)^2 - 2 = -1 \neq 0 2^2 - 2 = 2 \neq 0 (-2)^2 - 2 = 2 \neq 0$$

Com he vist, no té arrels a $\mathbb{Z}$, i per tant p(x) és irreductible a $\mathbb{Z}$. El contingut de p(x) és 1. Per tant, **el polinomi és irreductible a $\mathbb{Q}$.**

■

11.2 NOMBRES ALGEBRAICS

La majoria dels nombres que utilitzem tots els dies són nombres algebraics. No obstant això, alguns no ho són com ara π.

Un nombre algebraic és aquell nombre que és arrel d'un polinomi no nul amb coeficient a $\mathbb{Q}$. Per tant, un nombre real α és algebraic si és un nombre algebraic sobre $\mathbb{Q}$, és a dir, si existeix un polinomi $P(x)$ amb coeficients a $\mathbb{Q}$ tal que $P(\alpha) = 0$. Per exemple, $\sqrt{2}$ és un nombre algebraic perquè és arrel del polinomi $x^2 - 2$. En canvi el nombre π no és un nombre algebraic perquè no existeix cap polinomi de coeficients racionals que tingui π per arrel.

El conjunt dels nombres algebraic és numerable[1] i és computable[2].

11.3 NOMBRES TRANSCENDENTS

Primer de tot, cal recordar la definició de nombres algebraics. Sigui $(L, +, \cdot)$ un cos algebraic i K un subcos de L, un element $x \in L$ diem que és un nombre algebraic sobre K si x és arrel d'un polinomi amb coeficients en K, és a dir, si existeixen $\lambda_i \in K$ tals que $\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots \lambda_n x^n = 0$ amb $\lambda_n \neq 0$. En cas contrari, direm que x és un nombre transcendent sobre K.

11.4 TEOREMA DE WANTZELL

Resumint molt el teorema de Wantzell per entendre-ho molt bé i per poder aplicar a les demostracions de la irresolubilitat dels tres problemes clàssics de la geometria, el resultat és el següent:

x és construïble amb regle i compàs $\Longrightarrow$ x és algebraic sobre $\mathbb{Q}$ i el polinomi irreductible amb coeficients en $\mathbb{Q}$ del que x és una arrel i té com a grau una potència de dos.

x NO és algebraic o bé x és arrel d'un polinomi irreductible amb coeficients

[1]Un conjunt és numerable quan els seus elements poden posar-se en correspondència un a un amb el conjunt dels nombres naturals.

[2]Els nombres computables són els nombres reals que poden ser computats amb la precisió que es desitgi per un algoritme finit.

en $\mathbb{Q}$ i NO té com a grau una potència de 2 $\Longrightarrow$ x NO és construïble amb regle i compàs.

PART III

PART PRÀCTICA

CAPÍTOL 12

ELS TRES PROBLEMES CLÀSSICS

Aquesta part del treball de recerca és la considero més important ja que és la que volia treballar des d'un bon principi. El fet d'afegir tota la part més teòrica del treball va ser per poder demostrar la irresolubilitat dels tres problemes clàssics.

Al segle $V a.C.$, els matemàtics grecs es van proposar construccions amb regle i compàs aparentment senzilles, però que eren incapaços de confeccionar. Amb el pas del temps, aquests problemes van esdevenir il·lustres perquè prosseguien sense saber-se solucionar i, per tant, sense trobar una resolució demostrada matemàticament. Tots hem sentit a parlar dels "tres" problemes clàssics, però en realitat n'hi havia quatre (construcció d'un polígon regular general – és el quart problema que l'estudiarem amb menys detall). Els tres problemes clàssics de la geometria, que estudiaré en més detall, són IMPOSSIBLES de resoldre amb regle i compàs; i són els següents:

- **La quadratura del cercle**→ Donat un cercle, confeccionar un quadrat que tingui la mateixa superfície que el cercle.
- **La duplicació del cub**→ Donat un cub de costat x, construir un cub de costat y, tal que el volum del segon cub dupliqui el del primer.
- **La trisecció de l'angle**→ Dividir un angle donat en tres fraccions iguals.

Aquests problemes van persistir sense resoldre's durant més de 2000 anys, i no va ser fins al segle XIX amb l'aparició de l'àlgebra abstracta, que es va confirmar mitjançant demostracions que cap dels tres problemes tenia solució. Pràcticament tots els matemàtics i alguns filòsofs han participat en la investigació de la solució, amb els estris geomètrics proposats pels grecs, que no va aparèixer perquè no existia. Per tant, podem arribar a pensar que hem millorat respecte a l'antiga Grècia, encara que ells també pensaven que els problemes no tenien solució, l'avantatge respecte els grecs és que nosaltres sabem perquè són irresolubles.

Els grecs, per intentar resoldre aquests problemes, van recórrer a diferents tècniques i eines que van fer avançar el coneixement matemàtic d'aquella època amb la utilització de noves corbes com ara:

- **Espiral d'Arquímedes**→ Lloc geomètric descrit per un punt que es desplaça al llarg d'una semirecta amb velocitat uniforme al temps que aquesta gira (uniformement). Amb ella, es resol la trisecció de l'angle i la quadratura del cercle.

- **Quadratiu d'Hipies**→ Corba inventada per Hipies de Elea. Permet la resolució de la quadratura del cercle i la trisecció de l'angle.

- **Còniques**→ Corbes que resulten de tallar un con mitjançant un pla. S'utilitza per la duplicació del cub.

Hi ha diferents punts de vista que marquen el per què els grecs se'ls hi va ocórrer resoldre aquests problemes [7]:

- Un punt de vista justificaria que les matemàtiques mateixes van suposar la realització de noves preguntes i problemes, que podria ser, que van aparèixer perquè servien per resoldre problemes anteriors als proposats.

- Un altre punt de vista justificaria que la realització de nous problemes matemàtics s'atribueix a l'estudi del món físic utilitzat per altres ciències. Per tant, els postulats o les teories de les matemàtiques serien aplicats a les ciències per resoldre noves qüestions. Aquest punt de vista s'exemplifica en la suposada carta d'Eratostenes[1] a Ptolomeu[2] que és

[1]Eratostenes ($276a.C.$–$194a.C.$) va ser un matemàtic, geògraf, poeta, astrònom i músic grec que va inventar la disciplina de la geografia i va ser la primera persona a calcular la circumferència de la Terra utilitzant la mesura estadi ($1 estadirom\,a = 185 metres/1 estadiegipci = 185,2 metres/1 estadi\,atic = 192 metres$).

[2]Ptolomeu ($100-160$) va ser un escriptor, matemàtic, astrònom, geògraf, i poeta grec-egipci. Ell va estudiar la gran quantitat de dades existents sobre el moviment dels planetes a fi de construir un model geomètric que pogués explicar aquestes posicions en el passat i que fos capaç de predir les posiciones futures

presentada per Eutoci[3]. En aquest fragment es refereix al problema de la duplicació del cub:

Les implicacions de la resolució del problema de la duplicació del cub, que podrem, llavors, constituir en cubs les mesures de les matèries seques i humides, i mesurar mitjançant el costat d'aquests cubs la capacitat dels recipients susceptibles de contenir aquestes matèries. La nostra invenció serà igualment útil per als que volen engrandir les catapultes i les màquines de llançar pedres, perquè si es desitja que el seu abast sigui més gran d'una manera proporcional, s'hauran d'engrandir proporcionalment tots els seus elements, gruixos, grandàries. Ara bé, totes aquestes coses no es poden obtenir sense la descoberta de les mitjanes.

- L'últim punt de vista justificaria que aquests problemes van arribar gràcies al raonament i al pensament de la filosofia i a les tradicions religioses.

Tots els tres problemes clàssics, es poden demostrar que són irresolubles mitjançant els nombres construïbles (que els veurem, en detall, en un altre punt i en cada problema clàssic). També, hem de tenir clar que els tres problemes clàssics es poden resoldre mitjançant altres eines matemàtiques com ara corbes o còniques, però no es poden confeccionar mitjançant construccions amb regle i compàs.

La importància d'aquests problemes clàssics ve donat pel fet que gràcies a la impossibilitat de la resolució mitjançant regle i compàs, els matemàtics es van veure obligats a investigar nous camps per buscar noves eines i estratègies per resoldre els problemes o teories més profundes i racionals que expliquessin la impossibilitat dels tres problemes clàssics.

Es pot arribar a pensar si els tres problemes clàssics han influït només en l'àmbit de les matemàtiques, o també han influït en la vida quotidiana. Doncs la resposta, és que han influït en els dos àmbits; en el primer, ho descobrirem durant el treball, i fora de l'àmbit matemàtic és normal escoltar a persones referint-se als tres problemes clàssics quan parlen d'aspectes de la vida impossibles o molt difícils de resoldre.

[3] Eutoci (480 – 540) va ser un matemàtic grec que va ser important gràcies als seus comentaris que van constituir una font important que aclareix aspectes desconeguts de la història de les matemàtiques gregues.

Aquests problemes han arribat a considerar-se famosos, o més aviat, llegendaris no perquè no tenen solució o les solucions són molt difícils de trobar, sinó perquè els tres problemes violaven una condició molt important per aquesta classe de problemes, una condició imposada pels matemàtics grecs mateixos:

Se suposa que les solucions vàlides als problemes de construcció consten d'un nombre finit de passos de dues classes només: dibuixant una recta a través de dos punts amb un regle i dibuixant un cercle amb un centre i un radi donat.

En aquesta introducció, voldria deixar clar que els tres problemes clàssics són impossibles de resoldre mitjançant regle i compàs (el que es van proposar els grecs), però són possibles de confeccionar mitjançant altres eines matemàtiques més avançades com ara corbes o les còniques.

CAPÍTOL 13

LA DUPLICACIÓ DEL CUB

13.1 DEFINICIÓ DEL PROBLEMA

La duplicació del cub és el problema que es basa en trobar, mitjançant l'ús de regle i compàs, el costat d'un cub tal que el seu volum sigui el doble d'un altre cub de costat donat.

Aquest problema ha estat considerat el problema més important i influent de l'antiguitat, molts dels intents per la seva resolució han desembocat a l'aparició de noves i útils eines matemàtiques.

En els tres problemes clàssis veureu que distingeixo els tres problemes segons la manera de resoldre:

- **Plans** si es podien solucionar amb regle i compàs.
- **Sòlids** si s'utilitzaven seccions còniques.
- **Lineals** si s'utilitzaven corbes com hipèrboles, espirals, cissoide...

13.2 DEMOSTRACIÓ DEL PERQUÈ NO ÉS POSSIBLE LA SEVA REALITZACIÓ AMB REGLE I COMPÀS

Sigui C_1 un cub de volum a^3. És impossible dibuixar un altre cub C_2, amb regle i compàs, de volum el doble ($2a^3$).
Ho demostrarem per reducció a l'absurd.Per tant, suposem que és possible i volem arribar a una contradicció.

Tenim que la longitud de cada costat (aresta) del cub C_1 és a. I per tant, la longitud del cub C_2 serà la següent:

$$a \cdot x$$
$$(ax)^3 = 2a^3$$
$$x^3 = 2$$
$$x^3 - 2 = 0$$

Prenem p(x)= $x^3 - 2$ i veiem que és irreductible a $\mathbb{Q}$.

$$x = \sqrt[3]{2}$$

Com veiem, la solució no és racional, és irreductible a $\mathbb{Q}$, és algebraic sobre $\mathbb{Q}$ i és de grau 3.

Per tant, pel criteri de Wantzell podem afirmar que $\sqrt[3]{2}$ no és un nombre construïble amb regle i compàs ja que NO té grau una potència de 2, sinó que té grau 3.

Arribem a la conclusió que no podem dibuixar C_2 amb regle i compàs.

13.3 HISTÒRIA

Hi ha dues històries que descriuen l'aparició d'aquest problema: la faula del rei Minos i la llegenda de Delos.

L'origen del problema de la duplicació del cub es creu que va començar a l'oracle de Delos[1]. Fora del mite, la història ens ensenya que el primer tem-

[1]Delos és una de les illes gregues més petites de les Cíclades en la mar Egea.

ple de Delfos[2] data de finals del II mil·leni abans de la nostra era. Construït en el vessant sud de la muntanya del Parnàs, està emmarcat per l'acantilat rosat de Rhodini i el florit acantilat de Phlemboucos, entre els quals brota la font sagrada de Castalia. La història que veurem està situada el $428aC$, any de la pesta d'Atenes.

Els pelegrins arriben al lloc ja sigui per mar, desembarcant en el petit port de Kirrha, o per terra, franquejant el pas d'Arachova. A partir del segle VI, la ciutat de Delfos comença a obtenir guanys del pas dels pelegrins. En el 548, un incendi destrueix el temple: es reconstruït, aquesta vegada més gran i més bonic, gràcies a una subscripció panhel·lènica[3]. Al començament, l'oracle es presenta una vegada a l'any. Degut a l'exit cada vegada més gran, els sacerdots adopten un ritme mensual i utilitzen dos, després tres pitonisses. Aquestes jornades són consagrades a les ofrenes, als sacrificis i a les purificacions.

La persona que consulta l'oracle ha de comprar un pastís molt car que ofereix sobre un altar, davant el santuari; després, sobre un altre altar, sacrifica una ovella o una cabra.

Es va enviar una delegació a l'oracle d'Apolo a Delfos, per preguntar com es podria conjurar la pesta, que va assotar Grècia al voltant de l'any $433aC$ i va matar a un quart de la població, al que l'oracle va contestar que era necessari duplicar l'altar cúbic dedicat a Apolo per poder oferir una ofrena més gran. Va semblar que els atenencs van duplicar diligentment les dimensions de l'altar, però això no va servir per aturar la pesta. Els artesans volien saber com l'altar havia augmentat vuit vegades el seu tamany quan es duplicava el tamany de la seva aresta.

L'epidèmia va ser un succés important en l'història de Grècia i molts intel·lectuals es van disposar a descobrir el misteri que rodejava aquell bloc de pedra. Aquest enigma ha seguit interessant a molts pensadors en el llarg de la història formant-se així la duplicació del cub. Sembla que els ateneses van duplicar el costat, com hem pogut veure, però aleshores el cub resultant va ser vuit vegades l'inicial.

[2]Delfos és una moderna ciutat de Grècia. En èpoques antigues era l'oracle de Delos, dins d'un temple dedicat al déu Apolo.

[3]El panhel·lenisme és un moviment i pensament la meta del qual és crear un Gran Estat grec concebut com una unitat política, és a dir, un Estat que uneixi a totes les nacions que, en la seva totalitat o en la seva majoria, estiguin habitades per pobles de llengua i ètnia gregues.

Teón de Esmirna cita una obra d'Eratòstenes per referir-se a aquesta versió de l'origen de la duplicació del cub [5]:

Eratòstenes, és la seva obra titulada Platonicus relata que, quan el déu va anunciar als delians a través de l'oracle que, per desfer-se d'una plaga, havien de construir un altar del doble del que hi havia, els seus artesans van quedar desconcertats en els seus esforços per descobrir com podien fer un sòlid que fos el doble d'un altre sòlid semblant; per això van anar a preguntar-li al respecte a Plató, qui va respondre que l'oracle volia dir no que el déu volgués un altar del doble de la seva mida sinó que desitjava, a imposar-los la tasca, avergonyir als grecs pel seu descuit de les matemàtiques i el seu menyspreu per la geometria.

Eutoci, en el seu comentari a *Sobre l'esfera i el cilindre d'Arquímedes*, va donar una versió diferent. Aquesta se suposa que es una carta escrita per Eratòstenes al Rei Ptolomeu i, tot i que la carta és una falsificació, l'escriptor si que cita alguns escrits genuïns d'Eratòstenes [6]:

Eratòstenes al Rei Ptolomeu, salutacions.
L'anècdota diu que un dels poetes tràgics antics representava a Minos fent construir una tomba pel seu fill Glauc i que, quan Minos va descobrir que la tomba mesurava cent peus de cada costat, va dir 'Massa petita és la tomba que heu assenyalat com el lloc real de descans. Feu-la el doble de gran. Sense arruïnar la forma, ràpidament dupliqueu cada costat de la tomba '. Això clarament era un error. Ja que si els costats es dupliquen, la superfície es multiplica per quatre i el volum per vuit.

Aquesta anècdota relata un episodi de la mitologia grega. No obstant això, els descubriments a Cnosos, a Creta, en temps relativament recents han mostrat que aquests fragments de la mitologia estan basats en esdeveniments històrics. La mitologia relata que Glauco, el fill de Minos, el rei de Creta i de la seva esposa Parsifae, va morir de nen al caure en un recipient de mel. A aquest fragment hem pogut veure l'autor de la tragèdia va cometre l'error en proposar com a solució que es dupliqués el costat.

Francisco Vera pensava que l'origen del problema es localitzava al fet que els geòmetres tenien curiositat per transportar a l'espai el problema del pla consistent en duplicar l'àrea d'un quadrat utilizant la diagonal. Això els conduiria a calcular l'aresta d'un cub de volum doble [8]:

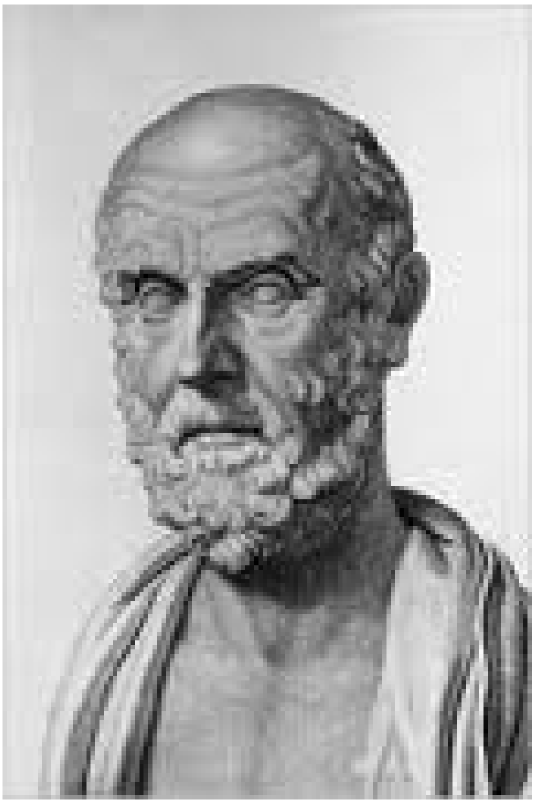
És probable que el problema de la duplicació del cub també anomenat problema de Delos, no fos inspirat per la megalomania de Minos ni per *l'oracle de la Sibil·la, sinó pels propis geòmetres posat que sabent des dels temps de Pitàgores que el quadrat construït sobre la diagonal d'un altre té doble àrea que aquest, és a dir: sabent duplicar el quadrat mitjançant la construcció gràfica de l'arrel quadrada de 2 i guiats per l'esperit de generalització, sembla natural que volguessin transportar a l'espai el mateix problema, el que els va portar a extreure l'arrel cúbica de 2 i davant la impossibilitat de construir amb regle i compàs l'aresta d'un cub de doble volum que un altre, van reduir el problema a un altre.*

A part d'aquests raonaments també pot haver repercutit la necessitat de la tecnologia militar de duplicar les catapultes; o Knorr pensava que era possible que l'origen del problema es localitzés en les investigacions de Hipòcrates de Quios al segle VaC sobre les mitjanes proporcionals.

Els origens del problema de la duplicació d'un cub poden ser tant foscos com acabem de veure. Siguin o no certes les historietes que acabem de veure, el problemes es va estudiar i es van proposar solucions.

13.4 MATEMÀTICS FAMOSOS QUE HI HAN DEDICAT ESFORÇOS

Hipòcrates de Quios va ser un matemàtic, geòmetre i astrònom grec que va viure aproximadement entre el 470 i el 410aC. Va néixer a l'illa de Quios davant de les costes de l'actual Turquia. Ell va ser un comerciant. Després de certs contratemps va marxar a Atenes i es va dedicar a l'ensenyança per sobreviure, i va acabar sent un matemàtic destacat. Ell és conegut per la seva quadratura de les lúnul·les que és la quadratura mitjançant regle i compàs, d'una lúnul·la de característiques molt específiques. Va escriure una obra de caràcter enciclopèdic titulada *Elements*, en el qual exposa teoremas a partir d'uns axiomes i postulats. Tot i que aquesta obra no ens hagi arribat directament, sí que ho ha fet indirectament ja que s'ha donat a conèixer a través dels relats d'Eudemo i Euclides va incloure els seus teoremes en els llibres primer i segon de la seva colecció *Elements d'Euclides.* Hipòcrates va utilitzar per primera vegada el conegut esquema premissa-teorema-demostració. Va introduir el mètode de demostració per reducció a l'absurd que utilitzem en el treball. En relació amb la duplicació del cub que aquesta era possible sempre que es poguessin trobar mitjanes proporcionals entre un nombre i el seu doble.



Arquites de Tàrent va ser un filòsof, matemàtic, astrònom de Plató. Ell va néixer a Tàrent (Magna Grecia) entre els anys 435 i 410aC. Va ser un polític que va timonejar la ciutat de Tàrent amb poder autocràtic, però amb justícia, durant set anys seguits. Ell volia defensar la raó com l'únic poder per realitzar millores socials. Ell també va inventar enginys com per exemple va construir un cascavell anomenat el picarol d'Arquites i va confeccionar un autòmat (un colom mecànic de fusta). A part de destacar en l'àmbit de l'enginyeria, també ho féu en el de la música ja que va redactar sobre aplicacions d'aquesta de les mitjanes aritmètiques, geomètrique i harmòniques. Ell creia que la música i les matemàtiques eren imprescindible per l'educació i les va introduir en matèries de formació de l'escolar, indirectament. Va pertanyer als pitagòrics i va ser amic de Plató, que el va conèixer durant el primer vaitge al sur d'Itàlia i a Sícilia (Plató va vaitjar a la Magna Grècia després que morís Sòcrates i es va fer enemic de Dionisi qui el va condemnar a mort. Tot seguit, Arquites es va interposar i li va salvar la vida deixant-lo en llibertat i així va començar la seva amistat). Arquites va ser la primera persona en aconseguir una bona aproximació al problema de la duplicació del cub consistent en confeccionar geomètricament les dues mitjanes proporcionals (idea d'Hipòcrates), i un dels primers que va treballar en el coneixement conjunt de l'aritmètica, la geometria, l'astronomia i la música.

Menecmo va ser un matemàtic i geòmetre grec. Va néixer en el primer terç del segle $IVaC$, a Alopeconnesus (actualment a Turquia). El seu estudi teòric de les seccions còniques va ser cèlebre en l'antiguitat, per això aquestes corbes van tenir el nom de corbes de Menecmo. Ell va obtenir les còniques tallant per el pla perpendiuclar la generatriu d'un con. Si aquest era acutangle, donava una el·lipse; si era obtusangle, donava una hipèrbola i si era rectangle, donava una paràbola. Va resoldre el problema de la duplicació del cub, utilitzant la paràbola i la hipèrbola.

Eratòstenes va ser matemàtic, astrònom i geògraf grec. Ell tenia una gran varietat de coneixements i aptituds per l'estudi. El seu cognom era Pentathlos, nom que se li reservaba a l'atleta guanyador en les cinc competicions dels Jocs Olímpics. Suidas afirma que també era conegut com el segon Plató i diferents autors diuen que se l'anomenava Beta, per la segona lletra de l'alfabet grec, perquè ocupava el segon lloc en totes les branques de la ciència que va cultivar. Ell va obtenir d'una manera ràpida tots els nombres primers menors que un nombre donat (aquest procediment és conegut com el Sedàs d'Eratòstenes). La versió informàtica d'aquest procediment (algoritme) s'ha convertit amb els anys en un mètode estàndard per caracteritzar o comparar l'eficàcia de diferents llenguatges de programació. Respecte a la duplicació del cub va inventar un aparell mecànic per construir les dues mitjanes proporcionals que consistia en uns triangles.

Nicomedes va ser un geòmetre grec conegut pel descubriment de la concoide de Nicodemes. Va viure a l'època d'Eratòstenes ja que va criticar el seu mètode per la duplicació del cub. En les seves investigacions per resoldre la duplicació del cub va crear la concoide de Nicomedes.

Apol·loni de Pèrgam va ser un geòmetre grec famós per la seva obra *Sobre les seccions còniques*. Ell va ser qui va donar el nom a l'elipse, la paràbola i la hipèrbola. Va aconseguir solucionar l'equació general de segon grau mitjançant la geometria cònica. Els seus extensos treballs sobre la geometria tracten de les seccions còniques i de les corbes planes i la quadratura de les seves àrees. Respecte la duplicació del cub, igual com Filó de Bizanci i Heró d'Alexandria van presentar la mateixa solució, però amb petites variants. Consisteix en introduir dues mitjanes proporcionals entre dos segments.

Diocles va ser un matemàtic i geòmetre de l'Antiga Grècia. El seu nom s'acciona a la corba geomètrica anomenada Cissoide de Diocles, la qual va introduir per resoldre la duplicació del cub.

Pappos d'Alexandria va ser un important matemàtic grec dels segles $III - IV$. En geometria, se li atribueixen diferents teoremes, coneguts tots amb el nom genèric de Teorema de Pappos. Ell va recollir una solució presentada per Sporus que és molt similar a la de Diocles.

13.5 HIPÒCRATES I LES PROPORCIONS

Hipòcrates va realitzar el primer progrés real en el problema de la duplicació del cub quan va reduir el problema que es basava en la construcció de mitjanes proporcionals[4] entre dos segments de línies donades de longitud a i $2a$. El volum d'un cub augmenta en progressió geomètrica cada vegada que dupliquem el tamany de l'aresta. Per tant, un cub d'aresta de valor a tindrà volum V, un cub d'aresta de valor $2a$ tindrà volum $8V$, un cub d'aresta de valor $4a$ tindrà volum $64V$... Llavors el valor de l'aresta per un volum igual al doble de l'inicial, s'ha de trobar entre els valors a i $2a$, com es troba en una progressió geomètrica que utilitza la mitjana proporcional.

Hipòcrates de Quios va demostrar que el problema de la duplicació del cub es podia reduir a trobar dues mitjanes proporcionals x i y en proporció contínua entre dos segments a i b és trobar dos valors x i y que compleixin:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}, b = 2a$$
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$
$$x^2 = a \cdot y,$$
$$y^2 = 2 \cdot a \cdot x,$$

[4] La mitjana proporcional o la mitjana geomètrica és cada un dels termes mitjans d'una proporció geomètrica continua, és a dir, cada un dels termes mitjans d'una proporció quan son iguals.

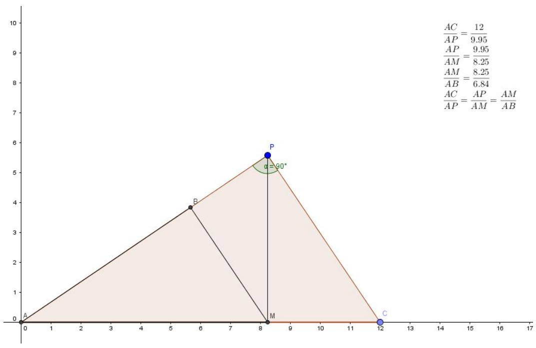
D'on aïllem y de la primera equació resultant i la substituïm a la segona equació:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{a}; \\ \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 &= 2 \cdot x \cdot a \\ \frac{x^4}{a^2} &= 2 \cdot x \cdot a \\ x^3 &= 2 \cdot a^3 \end{aligned}$$

Així, x és el costat d'un cub que té el doble de volum del cub de costat a.

13.6 LA SOLUCIÓ D'ARQUITES DE TÀRENT

La solució d'Arquites de Tarent es basa en confeccionar geomètricament les dues mitjanes proporcionals que Hipòcrates va proposar. Per fer-ho, ell volia obtenir el punt d'intersecció entre un cilindre recte, un tor[5] de diàmetre interior nul i un con circular recte. Es recolza en la divisió d'un triangle rectangle en tres triangles rectangles semblants. Sigui APC un triangle rectangle, dibuixa PM que és perpendicular a AC i BM que és paral·lel a PC.

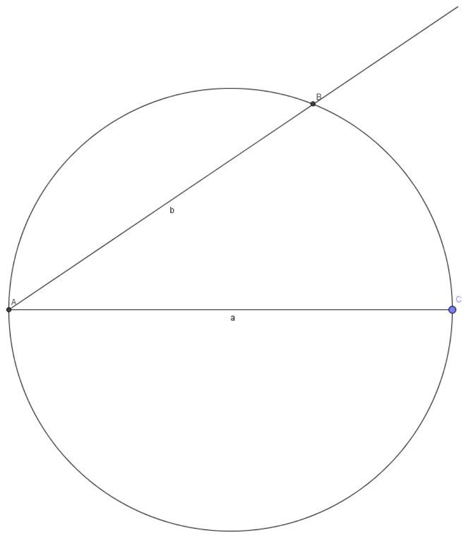


Llavors,

$$\begin{aligned} APC \approx APM &\approx ABM; \\ \frac{AC}{AP} = \frac{AP}{AM} &= \frac{AM}{AB} \end{aligned}$$

[5]Un tor és una superfície de revolució generada per un cercle que gira al voltant d'un eix coplanar a ell. Vulgarment, es coneix amb el nom de forma de dònut.

La qüestió consisteix en ser aptes de confeccionar el triangle APC a partir de dos segments donats a i b en els quals $AC = a$ i $AB = b$. Això és el que farem. Comencem amb el segment A qualsevol i comencem dibuixant una circumferència de diàmetre a i hi afegim una semirecta $AB = b$.



Ara, cal entrar a treballar amb tres dimensions en el GeoGebra. En el pla perpendicular a la circumferència dibuixada i que conté el segment a, tracem una semicircunferencia sobre el diàmetre a. Sobre la circumferència construïm un cilindre o un semicilindre. Al girar la semicircumferència perpendicular al pla al voltant de la recta perpendicular a aquest pla por A, es generarà la superfície d'un semitor de radi interior nul, que tallarà el cilindro en una determinada corba. Aquesta corba per tant estarà en les superfícies del tor y del cilindre. Si a continuació girem la semirecta b al voltant del diàmetre a, es generarà un con que tallarà el cilindre en una determinada corba i a la corba intersecció del cilindre i el tor en un punto P, que será el punto d'intersecció del cilindre, el tor y el con.

Tot seguit, anem a veure la solució d'Arquites en versió d'àlgebra. Tenim el con d'equació $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{a^2}{b^2}x^2$, el cilindre d'equació $x^2 + y^2 = ax$ i el tor d'equació $x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$. Recordem que $a = AC$ i $b = AB$; i també recordem que hem d'obtenir el punt d'intersecció entre les tres equacions, per tant hem de resoldre el sistema de tres equacions. Primer de tot aïllem la a de l'equació del cilindre i la substituim a la a de l'equació del con i obtindrem:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{b^2} \tag{13.1}$$

L'equació del tor arreglada és la següent:

$$(\sqrt{x^2+y^2+x^2})^2 = a\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

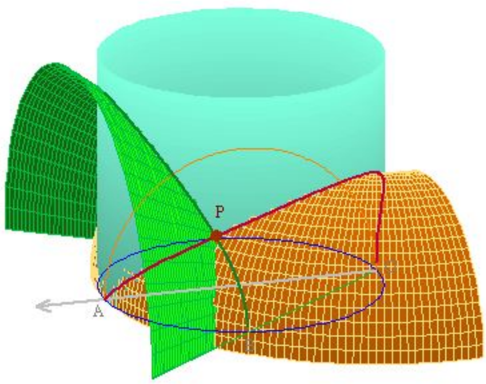
Si arreglem l'equació (44.1) ens queda:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{(\sqrt{x^2+y^2}^2}{b}$$
$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2}{b}$$

Tot seguit, ja podem veure els valors de les dues mitjanes proporcionals que buscavem:

$$\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2}{b}$$

Els valors de les dues mitjanes són $x = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i $y = \sqrt{x^2+y^2}$.



He extret la imatge de la pàgina web: http://gaussianos.com/la-solucion-de-arquitas-al-problema-delico/

13.7 LA DUPLICACIÓ DEL CUB I LES CÒNIQUES

Menecmo va utilitzar les còniques per duplicar el cub. Bàsicamen s'utilitzava el mateix enginy que des de Hipòcrates, per tant, es buscaven les dues mitjanes proporcionals entre dos segments. Recordem-ho:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b};$$
$$x^2 = by(1)$$
$$y^2 = ax(2)$$
$$xy = ab(3)$$

Com podem observar si ho mirem detingudament, l'equació (1) i (2) són paràboles i l'equació (3) és una hipèrbola. Donarà la solució del problema la intersecció d'un parrell d'aquestes corbes. Recordem que a és l'aresta del cub inicial i $b = 2a$ que condueix a $x^2 = ay$; $y^2 = 2ax$, és a dir, $x^3 = 2a^3$ i, per tant, x serà la longitud de l'aresta del cub el qual el seu volum és el doble que el d'abans.

Menecmo va intentar resoldre aquest problema trobant corbes els punts dels quals verifiquessin les dues equacions enteriors. I això ho va aconseguir seccionant un con rectangular amb un pla perpendicular a una de les seves generatrius. Tot seguit, veurem la solució de Menecmo que es basa en l'ús de les propietats de la paràbola i de la hipèrbola:

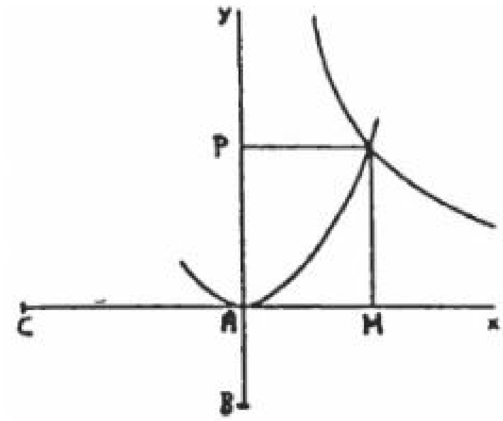
(i) Cal que ens situem a l'eix de coordenades i suposem que el problema estigui resolt i tenim les dues mitjanes proporcionals que són AP a l'eix AB i AM a l'eix AC. Els eixos AC i AP han de ser perpendiculars i $AC > AP$. Tot seguit, hem de trobar un punt que sigui un altre vèrtex del rectangle format pels punts A, M i P.

(ii) Llavors, tenim que:

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AP}{AM} = \frac{AM}{AB}$$

(iii) Cal trobar l'altre vèrtex del rectangle perquè quan el trobem ja tindrem les mitjanes proporcionals que necessitem per resoldre la duplicació del cub. Per trobar-lo, hem d'utilitzar les propietats de les còniques. Dibuixem una paràbola de vèrtex A, amb AP d'eix i amb coeficient igual a CB.

(iv) Tot seguit, dibuixem una hipèrbola de centre A i d'assímptotes AP i AM.



Nota: Aquesta representació és la única que he extret d'internet ja que no sabia com dibuixar la paràbola i la hipèrbola que em demanava la solució (https://www.academia.edu/4176387/Los$_{p}roblemas_{e}speciales_{L}a_{d}uplicación_{d}el_{c}ubo_{ID}e_{H}ipócr$
Per demostrar que aquesta solució és correcta utilitzarem geometria analítica. L'equació de la paràbola és: $y^2 = \frac{a}{2}x$ i l'equació de la hipèrbola és: $xy = a^2$. Llavors el punt d'intersecció tindrà per coordenades:

$$x = a\sqrt[3]{2}$$
$$y = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$$

La coordenada x serà l'aresta del cub de volum doble buscat.

13.8 EL MÈTODE DE PLATÓ

Tenint en compte la solució de Menecmo, Plató va intentar mostrar que aquesta solució no només es podia obtenir amb les còniques, sinó que també per procediments mecànics. Amb un estri anomenat peu de sabater[6]. Sigui $OA = a$ i $OB = b$ i $OG = r$. Disposem el nostre estri de manera que estigui en dues posicions diferents però que les dues passin per A i B. En una s'obté el punt P exterior a l'eix d'ordenades que compleix $AR \cdot RG = PR^2$, i en l'altre s'obté M sobre l'eix d'ordenades. Si $x = OR$ i $y = PR$ l'expressió del

[6] El peu de sabater està format de quatre bastons (tres fixes i un es desplaça) iguals dos a dos i disposats en forma de rectangle.

punt P quedarà:

$$(a+x)\cdot(r-x)=y^2(1)$$
$$ar+rx-ax-x^2=y^2$$
$$(a+x)r=y^2+ax+x^2$$
$$r=\frac{y^2+ax+x^2}{a+x}(2)$$

Els triangles PRG, SOG i OBG són semblants i compleixen:

$$\frac{PR}{RG}=\frac{SO}{OG}=\frac{OG}{OB}$$
$$\frac{y}{r-x}=\frac{r}{b}(3)$$

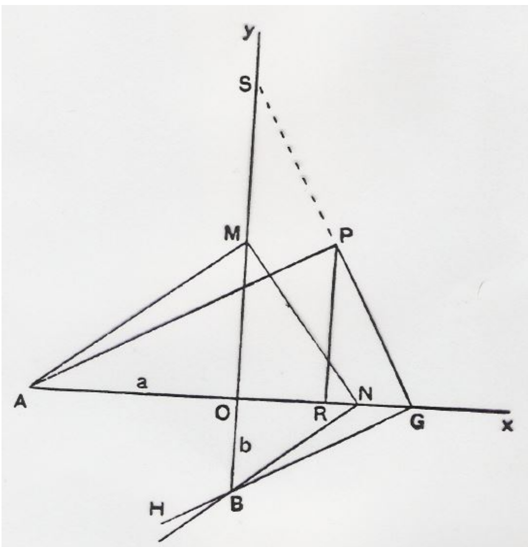
Multiplicant (1) i (3) obtenim:

$$by(a+x)(r+x)=y^2r(r-x)$$
$$b(a+x)=yr$$
$$r=\frac{b(a+x)}{y}$$

Si substituim r a (2) tenim:

$$b(a+x)=y\frac{y^2+ax+x^2}{a+x}$$
$$b(a+x)^2=y(y^2+ax+x^2)$$

Si $x=0$ llavors $PR=OM$ i $ba^2=y^3=OM^3$. Si $b=2a$ s'obté $2a^3=OM^3$ i implica que OM és la solució al problema de la duplicació del cub.



Nota: Aquesta representació tampoc és de creació personal ja que les que m'interessa representar són les que es basen en una sola corba.

13.9 LA CONCOIDE

Nicomedes va resoldre el problema de la duplicació del cub mitjançant l'ús d'una corba anomenada concoide partint de trobar les dues mitjanes proporcionals contínues.

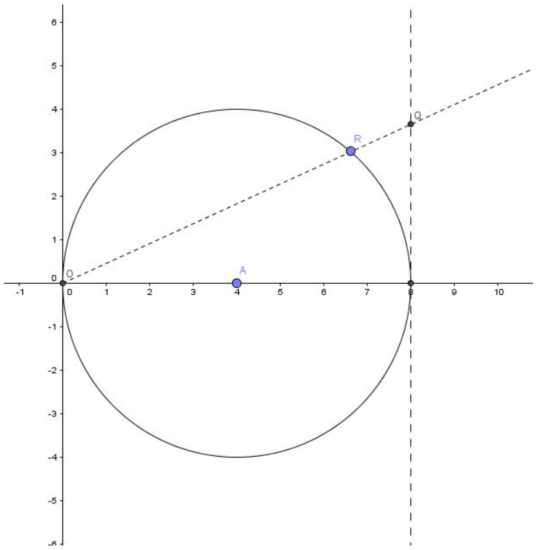
En aquesta secció no he pensat que seria necessari la realització d'una representació gràfica de la concoide ja que les solucions de la duplicació del cub es basen en el mateix cas tota l'estona; en trobar les dues mitjanes proporcionals contínues que ja ho hem explicat en apartats anteriors. A part, no faré la representació d'aquesta corba en aquest precís moment, ja que ho faré en la solució de la trisecció de l'angle que considero que és l'ús més important d'aquesta corba.

13.10 LA CISSOIDE

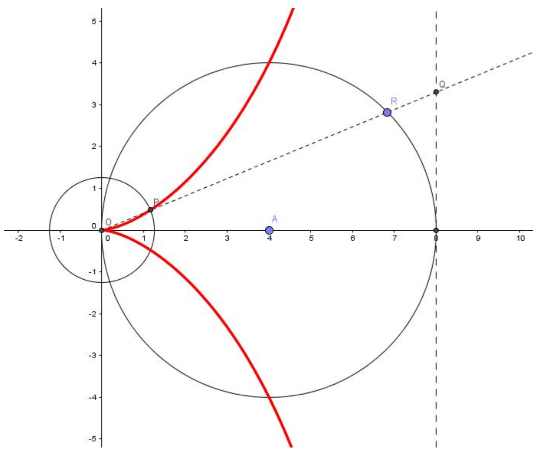
Un tractat de Diocles conté 17 proposicions que estan demostradas per les seccions còniques. Uns fragments d'aquesta obra que contenen les proposicions 11 i 12 utilitzen la cissoide per redolre la duplicació del cub per trobar dues mitjanes proporcionals que són la base com portem dient tota l'estona de la resolució d'aquest problema.

Per construir la cissoide de Diocles hem de seguir els passos següents:

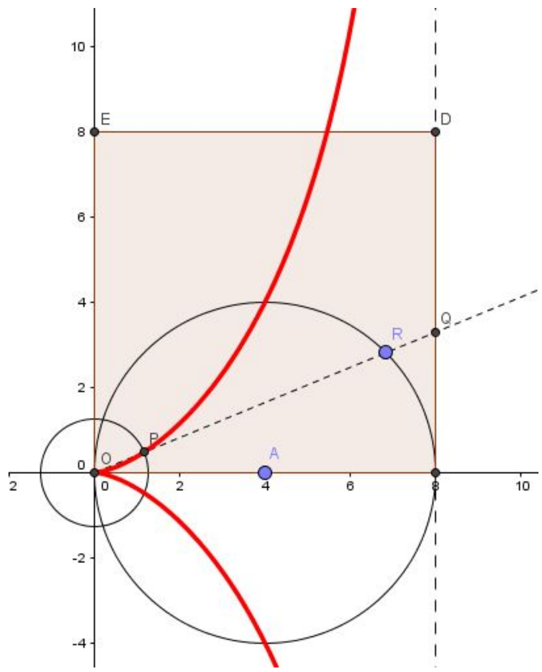
(i) Donada una circumferència de centre A i que passa per O (origen de coordenades), tracem una recta tangent pel punt oposat al punt O. Tracem una semirecta qualsevol que passi per O. Aquesta semirecta donará un punt d'intersecció R amb la circumferència i amb la tangent Q.



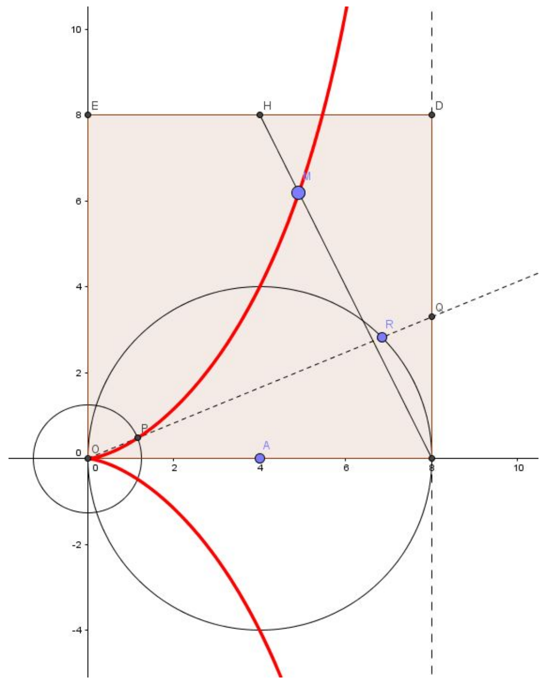
(ii) Ara busquem sobre la semirecta traçada un punt P de manera que la longitud OR és la mateixa que la longitud PQ. Per fer-ho, dibuixem una circumferència de diàmetre RQ i la desplacem al punt O. La intersecció entre aquesta circumferència i la semirecta serà el punt P. Tot seguit, contruïm un lloc geomètric amb punt P i Q i ja haurem obtingut la cissoide de Diocles.



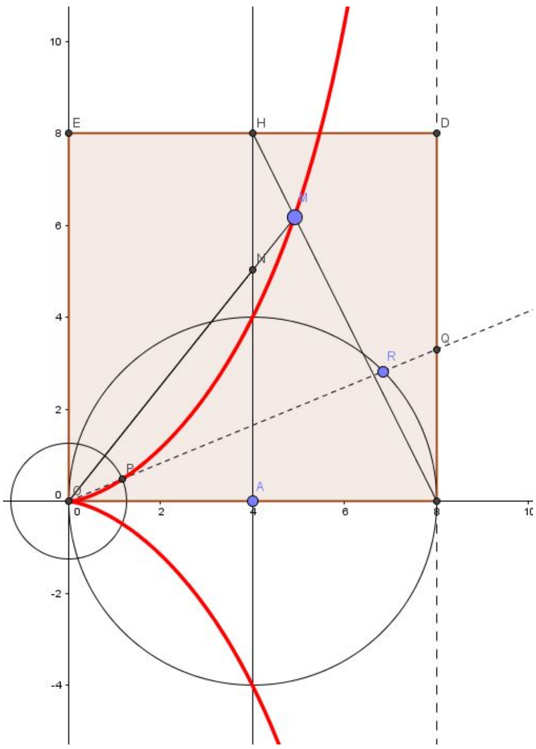
Seguidament, utilitzarem la representació que hem fet de la cissoide però centrant-nos en la resolució de la duplicació del cub. Es pot utilitzar ja que permet trobar l'arrel cúbica de 2. Per fer-ho construïm un quadrat de costat igual al diàmetre de la circumferència.



En el costat superior del quadrat agafem el seu punt mitjà H i aquest punt s'uneix amb el vèrtex inferior dret del quadrat, donant sobre la cissoide un punt d'intersecció M.



Traçant la perpendicular per H i la línia que uneix O i M, s'obté un altre punt d'intersecció N. El segment ON és l'arrel cúbica de 2. Aquest valor és el que permet resoldre la duplicació del cub.

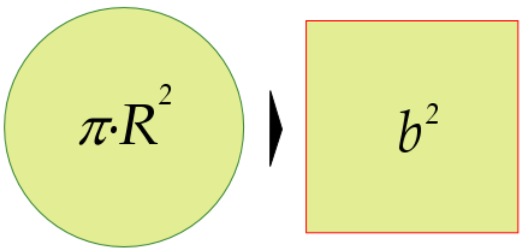


CAPÍTOL 14

QUADRATURA DEL CERCLE

14.1 DEFINICIÓ DEL PROBLEMA

La quadratura del cerle consisteix en trobar, amb regle i compàs, un quadrat que tingui la mateixa àrea que la d'un cercle donat. Aquest problema és el més conegut i el que ha captivat a més matemàtics i aficionats ja que en certa manera és més impossible que els altres dos.



14.2 DEMOSTRACIÓ DEL PERQUÈ NO ÉS POSSIBLE LA SEVA REALITZACIÓ AMB REGLE I COMPÀS

Sigui C un cercle de radi R. Llavors és impossible dibuixar un quadrat que tingui la mateixa àrea que el cercle C.

Farem la demostració a la reducció a l'absurd. Suposem que és possible i volem contradir-ho. Tenim un cercle de radi R. L'àrea d'aquest cercle és

$\pi \cdot R^2$. Volem formar un quadrat que tingui la mateixa àrea, per tant, com que sabem que l'àrea d'un quadrat és costat per costat; cada un d'aquests costats ha de mesurar $\sqrt{\pi} \cdot R$.

Si $\sqrt{\pi} \cdot R$ fos construïble ja podríem dibuixar el quadrat en qüestió amb regle i compàs.

Sabem que π és un nombre irracional i transcendent que significa que no és solució de cap equació a coeficients a $\mathbb{Q}$. Per tant, π és un nombres NO algebraic, per tant no és construïble amb regle i compàs segons el teorema de Wantzell.

Suposem que $\sqrt{\pi}$ fos construïble. Llavors com que el producte de construïbles és constrüible. $\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} = \pi$ tindríem que π és construïble. Sabem que π no és construïble perquè és NO algebraic. Per tant, $\sqrt{\pi}$ NO és algebraic. Pel teorema de Wantzell podem dir que $\sqrt{\pi}$ no és construïble amb regle i compàs.

Hem arribat a la conclusió que és impossible construir un quadrat d'àrea igual a un cercle amb regle i compàs.

14.3 HISTÒRIA

Les provinences d'aquest problema es remunten a la Grècia antiga, quan el Nil es desbordava al seu creixement anual i al retirar-se deixava un sòl fertilitzant de manera natural, però amb l'inconvenient d'arrastrar totes les marques de separació entre hortes, així que l'agricultor no sabia els límits de la seva horta. D'aquesta manera, els grecs van aprender a mesurar àrees i a *quadrar* qualsevol forma geomètrica construïda amb rectes, és a dir, construir un quadrat la superfície de la qual era igual a una àrea donada. Sabien quadrar rectangles i triangles, així que es van preguntar si podien quadrar un cercle, és a dir trobar el costat d'un quadrat que igualara la superfície del cercle; i ells es van proposar d'aconseguir aquest repte, i no va ser fins el segle XIX quan es va demostrar que era impossible de confeccionar amb regle i compàs.

El primer intent conegut d'obtenir un quadrat d'àrea igual a la d'un cercle donat apareix enunciat al Papiro Rhind, un document egipci descobert al 1855 i que conté una sèrie de problemes matemàtics plantejats fa uns 4000 anys. No obstant això, van ser els antics grecs, els que van plantejar amb precisió el problema en termes matemàtics: construir un quadrat d'àrea igual a la d'un cercle donat, utilitzant només el regle i el compàs.

La dificultat del problema ha anat a parar al folclore popular, i la frase *quadratura del cercle* ha passat al llenguatge col·loquial com a sinònim d'alguna cosa impossible de realitzar. Aquesta frase es pot veure als diaris, a la Literatura, a les cançons...:

El Partit Popular acaba de publicar un vídeo en el qual planteja la hipotètica ***quadratura del cercle*** *per sortir de la crisis.* [El Blog Salmón, 18/11/2011]

En el debat d'investidura celebrat en el Congrés, Mariano Rajoy ha tornat a posar de manifest la seva principal afició política, consistent en intentar una i una altra vageda la ***quadratura del cercle****.* [El País, 21/12/2011]

Aquesta aproximació al món popular mostra el profund impacte que ha tingut aquest problema al llarg dels segles, arribant en una verdadera obsessió. Avui en dia, apareixen noves solucions del problema i els aficionats continuen evaluant les solucions amb regle i compàs als Departaments de Matemàtiques de tot el món. I això passa, tot i sabent la seva irresolubilitat des de el 1882. Aquest problema, com veurem, va impulsar el desarrollament de noves tècniques i eines matemàtiques.

El primer matemàtic que va intentar resoldre aquest problema va ser Anaxàgores de Clezomone $(500 - 428aC)$. Hipòcrates de Quios $(470 - 410aC)$ també va dedicar grans esforços però sense èxit. Altres matemàtics grecs, no vinculats amb l'Escola de Plató van buscar respostes al problema sense tenir en compte la restricció de l'ús exclusiu del regle i el compàs, tal com el cas de Dinostrat $(390 - 320aC)$, el qual utilitzant la Quadratiu d'Hipies va demostrar que és possible rectificar la circumferència, i per consegüent, és possible resoldre la quadratura del cercle.

En l'antiguitat la contribució més important va ser la d'Arquímedes de Siracusa $(287 - 212aC)$ que va escriure un projecte sobre la mesura del cercle i va donar el valor de l'àrea del cercle i va proporcionar un mètode per determinar π amb el grau d'aproximació que es desitgi. No obstant això, els grecs ignoraben que per a la resolució geomètrica d'aquest problema era necessari trobar per mètodes geomètrics l'arrel quadrada del nombre π, i al ser aquest un nombre irracional i transcendent, com va demostrar segles més tard Lindemann, no es podia resoldre només amb regle i compàs. Arquímedes es va fonamentar amb que la longitud de la circumferència està compresa entre les longituds dels polígons regulars inscrits i circumscrits. Amb aquest procediment es marca l'inici del mètode que avui es coneix amb el nom de pas al límit.

En temps més recents, Wallis (1616 – 1703) pensava que la quadratura del cercle era impossible, en tant que creia que la raó del cercle a una figura rectilinia no pot ser expressada per cap expressió reconeguda. Com Wallis, James Gregory (1638 – 1675) creia que la quadratura del cercle era impossible i al 1668 va publicar Vera Circuli et Hiperbolae Quadratura, on va pretender demostrar que la quadratura del cercle era impossible. Les seves argumentacions van ser recollides per Huygens. Altres matemàtics han treballat en aquest problema com ara Euler, Lindemann, Cantor... Avui en dia sabem que aquest problema és irresoluble mitjançant regle i compàs ja que la seva resolució implica treballar amb el nombre π que és un nombre irracional i transcendent.

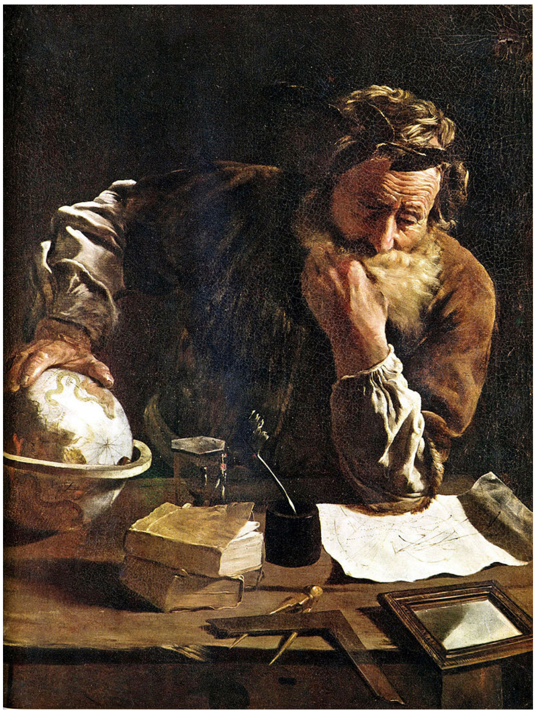
14.4 MATEMÀTICS FAMOSOS QUE HI HAN DEDICAT ESFORÇOS

Hipòcrates de Quios va reduir el problema de la quadratura del cercle al problema de quadrar determinades lúnules i va demostrar que determinadas lúnules són quadrables. Ell va aconseguir fàcilment la primera quadratura rigurosa amb regle i compàs d'una figura curvilinia en la història de la matemàtica.

Antifont va ser un orador, filòsof i matemàtic grec. Com a orador destacad per la seva facilitat en realitzar argumentacions, que descansan en l'ús d'evidències, testimonis i proves, *arguments de versemblança*. Ella era un sofista contemporani d'Hipòcrates. Respecte la quadratura del cercle, ell creia que havia trobat la solució ja que va inscriure un polígon en un cercle i va anar multiplicant el nombre de costats dels polígon, i pensava que repetint aquesta successió un nombre finit de vegades el polígon de n costats coincidiria amb el cercle. Si això no sigués erroni, hagués trobat la solució al problema ja que l'àrea del cercle seria igual a la del polígon i aquest últim si que es pot quadrar. Resulta evident que aquesta solució d'Antifont fós errònia.

Hípies d'Elis va ser un sofista grec de les primeres generacions i va ser un jove contemporani de Protàgores i Sòcrates. La major font de coneixement sobre ell procedeix de Plató. A més, va ser el creador dels sistemes mnemotècnics, per tant, es deia que era posseïdor d'una gran memòria. Ell va ser el descobridor de la quadratriu d'Hípies, utilitzada per buscar la solució a la trisecció de l'angle. No va utilitzar la seva quadratriu per quadrar el cercle, sinó que ho va fer Dinostrat.

Arquímedes de Siracusa va ser un físic, enginyer, inventor, astrònom i matemàtic grec. És considerat un dels científics més importants de l'Antiguitat clàssica. Ell va utilitzar el mètodex exhaustiu per calcular l'àrea sota l'arc d'una paràbola amb el sumatori d'una sèrie infinita, i va donar una aproximació precisa del nombre π. També va definir l'espiral d'Arquímedes que serà molt útil per quadrar el cercle, entre moltes altres coses. Els seus escrits matemàtics no van ser coneguts a l'antiguitat.



14.5 LA QUADRATURA DE LES LÚNULES

La quadratura de les lúnules és un problema diferent a la quadratura del cercle, però molt semblant, i al saber l'èxit de la solució de la quadratura de les lúnules, els aficionats van voler investigar per trobar la solució a la quadratura del cercle.

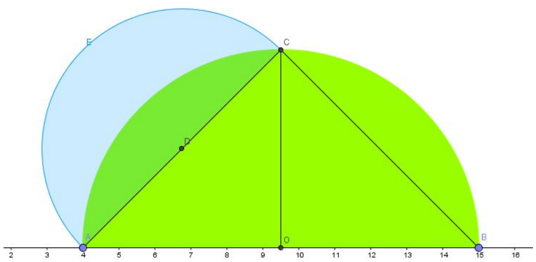
Hipòcrates de Quios va reduir el problema de la quadratura del cercle al problema de quadrar determinades lúnules i va demostrar que determinadas lúnules són quadrables. Una lúnula és qualsevol de les dues figures amb forma similar a la d'una lluna creixent obtinguda mitjançant la intersecció de dos cercles.

Les proposicions i demostracions d'Hipòcrates ens han arribat a través de la transcripció per Simplici de Cilícia.

Alexandre d'Afrodísies va exposar els següents resultats:

- La lúnula que s'obté al dibuixar una semicircumferència sobre un costat d'un quadrat inscrit en una circumferència és igual a la quarta part del quadrat.
- La lúnula que s'obté al dibuixar una semicircumferència sobre un costat d'un hexàgon regular inscrit en una circumferència és igual a la sexta part de la diferència entre l'hexàgon i un cercle el diàmetre del qual és un dels costats de l'hexàgon.

Concretament, el cas tractat per Hipòcrates de Quios és el de lúnula formada per el semicercle construït sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles ABC i el construït sobre un dels seus catets AC:



El teorema de Pitàgores ens diu que $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 2AC^2$,

$$\frac{\grave{A}rea(semicercleAEC)}{\grave{A}rea(semicercleACB)} = \frac{(AC)^2}{(AB)^2} = \frac{(AC)^2}{2(AC)^2} = \frac{1}{2},$$

Per tant,

$$\text{Àrea semicercle } AEC = \frac{1}{2}\text{Àrea semicercle ABC=Àrea quadrant } AFCO$$

I, en conseqüència, obtenim:

$$\text{Àrea lúnula } AECF\text{=Àrea triangle } ACO.$$

Per tant, hem quadrat la lúnula $AECF$ amb regle i compàs. La quadratura de la lúnula va donar optimisme a Hipòcrates i els seus seguidors, com a pas previ a la quadratura del cercle.

14.6 LA QUADRATRIU D'HÍPIES

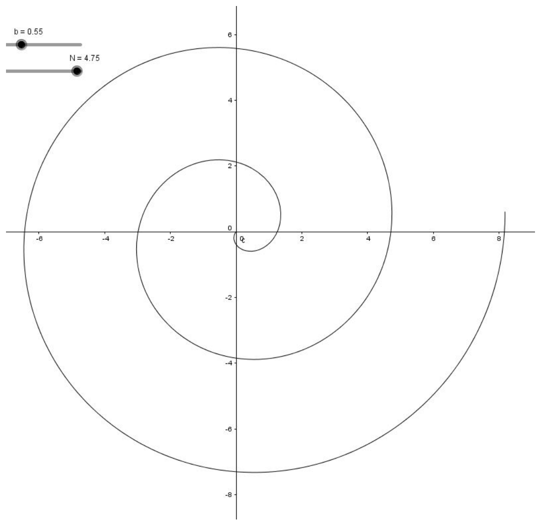
La quadratriu d'Hípies és una corba descoberta pels antics matemàtics grecs que resol dos dels problemes famosos de l'època: la trisecció de l'angle i la quadratura del cercle. En un principi la quadratriu es va utilitzar per trisecar angles, però també podia resoldre la quadratura del cercle. Bàsicament, el problema es redueix a construir, amb regle i compàs, un segment que tingui la mateixa longitud que la circumferència. No obstant això, no utilitzarem aquesta famosa corba en aquest precís instant per resoldre la quadratura del cercle, sinó que he considerat més important utilitzar-la pel que s'utilitzava principalment, per resoldre la trisecció de l'angle.

14.7 L'ESPIRAL D'ARQUÍMEDES

L'equació de l'espiral uniforme d'Arquímedes és la següent amb $a > 0$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

L'espiral d'Arquímedes és la següent:



Per tal de utilitzar aquesta espiral en la quadratura del cercle s'ha de construir un quadrat agafant com un dels seus punts l'origen de coordenades i aconseguir que el costat del quadrat mesuri $\sqrt{\pi}$, la seva àrea és igual a π, igual que l'àrea del cercle de radi 1. Tot i això, en el treball no ens centrem en la resolució de la quadratura del cercle mitjançant l'espiral d'Arquímedes ja que és més important la seva utilització en la trisecció de l'angle.

14.8 DEMOSTRACIÓ: π ÉS IRRACIONAL

En aquesta secció, ens endinsarem en la demostració que inclou M.Spivak en el seu llibre: Calculus. Si ens fixem amb la demostració present al llibre, veurem que és bastant complicada ja que és difícil seguir cada pas que realitza. El que farem nosaltres és adaptar aquesta demostració i refer-la d'una forma més lenta i més clara. Per tant, per escriure la demostració següent ens hem basat en [27]. Si es compara la demostració del llibre i la que hem fet, hi ha bastanta diferència ja que gràcies a l'estudi de la demostració de M.Spivak, he aconseguit fer la demostració que trobareu a continuació.

Primer de tot, recordarem què són els nombres *racionals* i *irracionals*. Si refresquem la memòria, els nombres com 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, -10, $\frac{-1}{2}$ o $\frac{1}{7}$ s'anomenen nombres racionals. Tots aquests nombres es poden escriure en forma de fracció com $\frac{a}{b}$, on els nombres a i b són enters. Els nombres racionals tenen la propietat que la seva representació decimal acaba (com $2,2$ o $1,41$) o que es repeteixen amb una periodicitat determinada (com $0,3333... = \frac{1}{3}$ o $0,142857... = \frac{1}{7}$).

Per contrast, un nombre irracional és un nombre que és impossible expressar-lo com una fracció $\frac{a}{b}$, on $a, b \in \mathbb{Z}$. Exemples famosos de nombres irracionals són $\sqrt{2}$, la constant $e = 2,71828...$ i la constant $\pi = 3,14159...$

Si bé podria semblar intuïtiu o obvi que π és un nombre irracional, sempre he sentit curiositat per demostrar que π és un nombre irracional.

Michael Spivak considera la demostració com elemental i fàcil. Però, el que els matemàtics anomenen *fàcil*, sovint ho considero tremendament complicat i crec que requereix una explicació més detallada. Per tant, anirem a demostrar que π és irracional d'una manera semblant a la de Spivak.

Abans de començar amb la demostració, hem d'advertir que aquesta demostració *elemental* inclou conceptes de càlcul com ara el binomi de Newton, càlcul diferencial, regla de la cadena, càlcul integral, teorema fonamental del càlcul, límits, teorema del sandvitx i demostració per reducció a l'absurd. Amb aquesta advertència present, anem a començar.

La demostració que π és irracional inclourà quatre passos:

1. Considerar que π és racional, per tant, pot ser representat com una fracció: $\pi = \dfrac{a}{b}$.

2. Definir una funció $f(x)$ que depèn de dues constants a i b.

3. El pas més important és demostrar que la integral de $f(x)\sin(x)$ avaluada des de 0 fins a π ha de complir les dues condicions següents: ha de ser un nombre enter i una fracció entre 0 i 1.

4. Això és una contradicció. Concloure que π és irracional.

El primer pas de la demostració és fàcil. Segons la definició de nombre racional. Si assumim que π és racional significa que $\pi = \frac{a}{b}$, per certs enters a i b. A partir d'aquí, caldrà definir una funció polinòmica de grau $2n$ que depengui de a i b.

Per tant, el següent pas és definir la funció $f(x)$ que depèn de a i b:

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

Sembla que sigui una funció complicada i pot recordar les funcions de les sèries de Taylor; a continuació, fiquem uns exemples de sèries de Taylor de funcions bàsiques per tal que ens centrem:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x; n \in \mathbb{N}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \forall x$$

La raó per la qual $f(x)$ ha estat definida d'aquesta manera, es veurà més clara quan aprenem algunes de les seves propietats. Per tant, anem a estudiar més a fons

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

La funció pot semblar estranya, però anem a veure les seves propietats que seran útils per a nosaltres:

1. $f(0) = 0$. Això ho podem comprovar substituint $x = 0$.

2. $f(\pi - x) = f(x)$. Aquesta propietat és un pèl més difícil de demostrar,

però pot ser provada per substitució directa.

$$\begin{aligned} f(\pi - x) &= f\left(\frac{a}{b} - x\right) \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left(a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n}{n!} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n (bx)^n}{n!} \\ &= \frac{x^n (a - bx)^n}{n!} = f(x) \end{aligned}$$

3. $f'(0), f''(0), ..., f^{(k)}(0)$ són tots enters. Totes les derivades (primera derivada, segona derivada, i continuant) evaluades a 0 seran un enter. Aquesta propietat, potser, requereix verificacó. Per veure això, tinguem en compte la funció polòmica $n!f(x) = x^n(a-bx)^n$. Pel binomi de Newton, el terme $(a - bx)^n$ es pot ampliar en un polinomi amb coeficients enters que té com a grau de 0 a n. Cada un d'aquests termes es multiplica pel terme x^n. Per tant, el polinomi resultant $n!f(x)$ és la suma dels termes que tenen de grau de n a $2n$. Si fem la derivada k vegades i $1 \leq k < n$, llavors $f^{(k)}(x)$ no té termes constants, per tant, $f^{(k)}(0) = 0$. De la mateixa manera, derivant més de $2n$ es destruirien tots els termes, per tant $f^{(k)}(0) = 0$. Quan derivem k vegades i $n \leq k < 2n$, llavors $f^{(k)}(x)$ tindrà un terme que no serà multiplicat per un grau de x. Es podria verificar aquest terme de la forma $(\frac{k!}{n!}) \cdot (constant)$, i com que $k > n$, el terme serà un enter. En resum, la raó per la qual és compleix és perquè $f(x)$ és una funció polinòmica amb coeficients enters.

4. $f'(\pi), f''(\pi), ..., f^{(k)}(\pi)$ són tots enters. Aquests resultats segueixen el fet que $f(\pi - x) = f(x)$ com hem vist anteriorment. Llavors, utilitzem la regla de la cadena per tal de derivar la funció en $x = \pi$. El valor de la derivada serà l'oposat al valor de la derivada quan $x = 0$ o el mateix valor. En resum, la raó per la qual la propietat sempre és certa és la següent: $f(\pi - x) = f(x)$ i per la regla de la cadena $f'(\pi - 0) = -f'(0)$, $f'(\pi - 0) = f''(0)$, i continuant...

5. Per la regla de la cadena, $f'(x) = -f'(\pi - x)$, $f^{(2)}(x) = f^{(2)}(\pi - x)$, i en general, $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$.

Ara que ja hem vist les quatre propietats útils de $f(x)$, continuarem amb la demostració i ho farem una mica més complicat.

Tot seguit, definirem una altra funció que serà la suma de diverses derivades de $f(x)$:

$$g(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) + ... + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

La raó per la qual arribem fins a $(2n)$ és perquè $f(x)$ és una funció polinòmica de grau 2 i més enllà d'aquí totes les derivades seran 0. Quin és el punt de definir aquesta funció $g(x)$ que serà la suma de totes aquestes derivades? Doncs ara veurem les propietats útils de $g(x)$:

1. $g(0)$ i $g(\pi)$ són enters. Per què és així? Fa poc, acabem de provar que $f(0)$ i totes les seves derivades són enters i $f(\pi)$ i totes les seves derivades són també enters avaluades entre 0 i π, i $g(x)$ és la suma d'aquests enters. En resum, la raó per la qual aquesta propietat es compleix és fixant-se en les propietats de $f(x)$ i les seves derivades.

2. $g^{(2)}(x) + g(x) = f(x)$. Aquesta propietat és molt fàcil de verificar. Es pot calcular la segona derivada de $g(x)$ i es cancel·laran tots els termes excepte per $f(x)$. En resum, la podem comprovar directmanet per la definició. La podem verificar perquè $g^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + ... + (-1)^n f^{(2n+2)(x)}$. Cal que ens fixem en l'últim terme, $(-1)^n f^{(2n+2)}(x)$ ha de ser igual a zero, com hem dit la derivada de $f(x)$ és zero per les derivades més grans que $2n$ vegades. Cada altra derivada té el signe oposat quan apareix en l'expressió de $g(x)$. Per tant, quan $g^{(2)}(x)$ i $g(x)$ se sumen, l'únic terme supervivent és $f(x)$. Per aquesta raó, $g(x) + g^{(2)}(x) = f(x)$.

3. Amb aquestes propietats en ment, veurem la propietat més divertida i interessant de $g(x)$:

$$\frac{d}{dx}(g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x)) = f(x)\sin(x)$$

Per demostrar aquesta propietat utilitzem el fet que la derivada d'aquesta funció serà igual a $f(x)\sin(x)$. La raó que hi ha darrere d'això és la regla de la cadena, si apliques la regla de la cadena i mantens la propietat explicada amb anterioritat, després de tot el càlcul, veurem que aquesta igualtat es compleix.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x))\\ &= g^{(2)}(x)\sin x + g'(x)\cos x - g'(x)\cos x + g(x)\sin x\\ &= g^{(2)}(x)\sin x + g(x)\sin x\\ &= (g^{(2)}(x) + g(x))\sin x = f(x)\sin x\end{aligned}$$

A l'últim pas, hem utilitzat $g^{(2)}(x) + g(x) = f(x)$.

Per què hem enunciat tantes propietats i no hem anat al gra amb la demostració? Doncs hem fet tot aquest treball perquè ara coneixem una funció la derivada del qual és $f(x)\sin(x)$. En altres paraules, hem encertat la forma de que la integral de $f(x)\sin(x)$ és la que està present al membre esquerre de la igualtat.

Doncs, tot seguit, ja podem passar al següent pas on està present el càlcul integral de $f(x)\sin(x)$. Quan integrem $f(x)\sin(x)$ amb límit superior π i límit inferior 0, tenim:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx \\
&\qquad = [g'(x)\sin x - g(x)\cos x]_0^\pi \\
&\qquad = g'(\pi)\sin\pi - g(\pi)\cos\pi - (g'(0)\sin 0 - g(0)\cos 0) \\
&\qquad = g(\pi) + g(0)
\end{aligned}$$

La raó per la qual hem pogut definir això és la següent: hem explicat l'última propietat de $g(x)$, per tant, hem provat que la integral de $f(x)\sin(x)$ és $g'(x)\sin(x) + g(x)\cos(x)$. Doncs això, està avaluat utilitzant el Teorema Fonamental del Càlcul.

Però, en realitat, per què és important aquesta integral? Doncs és important perquè com que $g(0)$ i $g(\pi)$ són enters, aleshores aquesta integral ha de tenir un valor enter.

Tot seguit, demostrarem que

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx\$$$

no sempre pot ser un nombre enter per a tots els valors de n. Considerem un valor de x que estigui entre 0 i π. Què podem dir sobre el valor de $f(x)\sin(x)$? Doncs, sabem qe sempre ha de ser positiu entre 0 i π. Treballarem per limitar aquesta funció des de dalt per crear la contradicció requerida.

Sabem que $\sin(x)$ és sempre positiu entre 0 i 1 quan $0 < x < \pi$. Per tant, podem concloure $f(x)\sin(x) < f(x)$. Ara retornem a la definició de $f(x) = \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$. Cal saber que $(a - bx) < a$ quan $0 < x < \pi$. Per tant, tenim $(a - bx)^n$ ha de ser menor que $(a)^n$. De la mateixa manera, el terme x^n es trobarà entre 0 i π^n quan $0 < x < \pi$. Si ho posem tot junt, tenim que

$$0 < f(x)\sin(x) < \frac{a^n\pi^n}{n!}$$

Ara el que podem fer és integrar els tres valors, per tant ens queda:

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin(x)dx < \frac{a^n\pi^{n+1}}{n!}$$

Per fer això, hem hagut d'integrar cada terme de la desigualtat (teorema del sandvitx). Per tant, ara ja podem dir que

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx$$

ha d'estar entre 0 (ha de ser positiu) i $\dfrac{a^n\pi^{n+1}}{n!}$.

Això significa que $f(x)\sin(x)$ és sempre un nombre positiu, però més petit que $\dfrac{a^n\pi^{n+1}}{n!}$. Però,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n\pi^n}{n!} = 0$$

Hi han moltes maneres de provar aquest límit (aquí no ens endinsarem perquè augmenta bastant el nivell de càlcul): una manera és si recordeu l'expansió de Taylor de e^x que hem escrit més a dalt quan feiem un incís a les sèries de Taylor. Si $x = a\pi$, llavors tindriem

$$e^{a\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a\pi)^n}{n!}$$

que és una sèrie convergent, per tant els seus termes tendeixen a 0,d'altra banda la sèrie s'aniria fent gran i més gran; però aquí no ens endinsem més. Hem d'arribar a la conclusió que

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx$$

s'anira fent petita a mesura que n es faci més gran. De fet, per algun suficient final llarg, tindrem que aquesta integral serà menys de 1, serà una fracció.

Fem un resum d'aquesta part més difícil d'entendre. Començarem el resum a partir d'haver integrat la desigualtat. En aquell moment, no haviem especificat cap valor de n. Què passa quan n tendeix a l'infinit? La fracció de la dreta de la desigualtat tendirà cap a 0. Per tant, per un valor suficientment llarg de n, la integral es trobarà entre 0 i 1. Ara s'acosta la part més difícil ja que hem de posar tot el que hem après junt per tal d'acabar amb la demostració.

Posan't-ho tot junt, si $\pi = \dfrac{a}{b}$ és racional, llavors hem de crear una funció $f(x)$ tal que

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx = g(0) + g(\pi)$$

aquesta integral és un enter.

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin(x)dx < \frac{a^n \pi^{n+1}}{n!}$$

en aquesta desigualtat, veiem que la integral és una fracció entre 0 i 1 (com que $n \to \infty$).

La integral no pot ser al mateix temps un enter i una fracció - això és una contradicció!

Ha portat una mica de treball, però crec que els passos són instructius i una bella demostració de diversos principis del càlcul.

Després de realitzar aquesta demostració, m'he adonat que la demostració realitzada és molt semblant a la demostracó que va realitzar Ivan Niven (Bull AMS 53 (1947), 509).

CAPÍTOL 15

TRISECCIÓ DE L'ANGLE

15.1 DEFINICIÓ DEL PROBLEMA

La trisecció de l'angle consisteix a construir, amb regle i compàs, un angle que mesuri un terç de la mesura d'un altre angle donat. Aquest problema no es pot realitzar en general. Tot i això, hi han alguns angles, com veurem, que sí que es poden trisecar amb regle i compàs i altres no. Bàsicament es basa en si el cos de l'angle és o no arrel d'un polinomi de grau una potència de 2.

15.2 DEMOSTRACIÓ DEL PERQUÈ NO ÉS POSSIBLE LA SEVA REALITZACIÓ AMB REGLE I COMPÀS

És impossible, en general, partir qualsevol angle en tres angles iguals.

És possible que per algun angle concret sí que sigui possible però es tracta de veure que és impossible per algun cas particular i llavors ja haurem demostrat que en general no es pot per qualsevol angle.

Prendrem un angle de $\frac{\pi}{3}$rad. Suposarem que si que es pot partir en tres trossos iguals i arribarem a una contradicció.

Per poder partir un angle de $\frac{\pi}{3}$rad en 3, hem de traçar dues rectes que tinguin angles de $\frac{\pi}{9}$rad entre ells i entre els extrems.

Si ens centrem en una recta, per poder-la dibuixar hem de poder dibuixar cada punt que la forma. Per exemple, centrem-nos en el punt $(\cos(\frac{\pi}{9}), \sin(\frac{\pi}{9}))$. Per tant, aquest punt hauria de ser construïble; en particular $\cos(\frac{\pi}{9})$ hauria de ser construïble.

Hem de tenir en compte aquestes identitats trigonomètriques:

$$\begin{gathered}
\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) \\
\sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{9}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) \\
&- \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\left(2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) \\
&= \cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \\
&= \cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \\
&= \cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\left(1 - cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) \\
&= \cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + 3cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) \\
&= 4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos 20
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{2} \\
\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{8} \\
\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \frac{1}{8} = 0
\end{gathered}$$

Tenim que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ és solució de l'equació:

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0$$

Veiem que és irreductible a $\mathbb{Z}$:

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$$
$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Possibles arrels: ± 1

$$8(1)^3 - 6(1) - 1 = 1 \neq 0$$
$$8(-1)^3 - 6(-1) - 1 = -3 \neq 0$$

NO té arrels i polinomi de grau 3 $\rightrightarrows$ Irreductible a $\mathbb{Z}[x]$.

A més $8x^3 - 6x - 1$ és primitiu ja que el contingut$= 1 \Rightarrow$ Irreductible a $\mathbb{Q}[x]$.

Tenim que $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0$ és irreductible a $\mathbb{Q}[x]$ i que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ és arrel.$\Rightarrow$ $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ no és construïble amb regle i compàs perquè té grau 3 (no és múltiple de 2), segons teorema de Wantzell.

Hem arribat a la conclusió que és impossible dibuixar amb regle i compàs, en general, la partició de qualsevol angle en tres parts iguals.

15.3 HISTÒRIA

El problema de la trisecció de l'angle és l'únic dels tres que no hi ha cap història real que expliqui la forma com el problema va arribar a ser estudiat per primera vegada ni quan es va començar a estudiar. Aquest problema és probablement el més especial dels tres, ja que sí que és possible trisecar alguns angles. Per exemple, hi ha un mètode directe per trisecar un angle recte. Tot i no saber la història del problema, probablement, els antics grecs es van trobar que havien de dividir angles en qualsevol proporció per tal de tenir la possibilitat de construir polígons de qualsevol nombre de cares. Per tant, una causa pot ser la construcció de polígons regulars amb regle i compàs però no va ser fins que es van produir els descobriments de Gauss que es van construir amb regle i compàs. Sabem que Hipòcrates va estudiar el problema de trisecar un angle. Com hem dit, és possible trisecar alguns angles amb regle i compàs. A partir d'ara i fins l'últim punt buscarem mètodes per trisecar angles qualssevol.

15.4 MATEMÀTICS FAMOSOS QUE HI HAN DEDICAT ESFORÇOS

Nicomedes va utilitzar la concoide per resoldre el problema de la trisecció de l'angle.

Es creu que **Arquimedes de Siracusa** va utilitzar el mètode neusis per resoldre el problema ja que en un manuscrit àrab anomenat *Liber Assumptorum* apareixen unes demostracions que es creu que va ser ell el que les va realitzar. Aquest problema també es pot resoldre amb la famosa espiral d'Arquímedes.

Hípies d'Elis va descriure un mètode per resoldre el problema utilitzant la quadratriu.

Apol·loni de Pèrgam va presentar una solució al problema consistent en utilitzar la hipèrbola per trisecar l'angle.

15.5 LA CONCOIDE

Nicomedes va néixer sobre l'any $280aC$ a Grècia. Es coneix molt poc sobre ell. Va criticar la duplicació del cub d'Eratòstenes. Es famós pel seu tractat *Les línies de la concoide* i va utilitzar la concoide per intentar solucionar els problemes clàssics de la trisecció de l'angle i la duplicació del cub. Sigui $y = b$ la directriu i k el radi de la circumferència utilitzada en la construcció, les equacions de la concoide són les següents:

- Equació cartesiana:

$$(x - b)^2(x^2 + y^2 - a^2x^2) = 0$$

- Equació polar:

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} \pm b$$

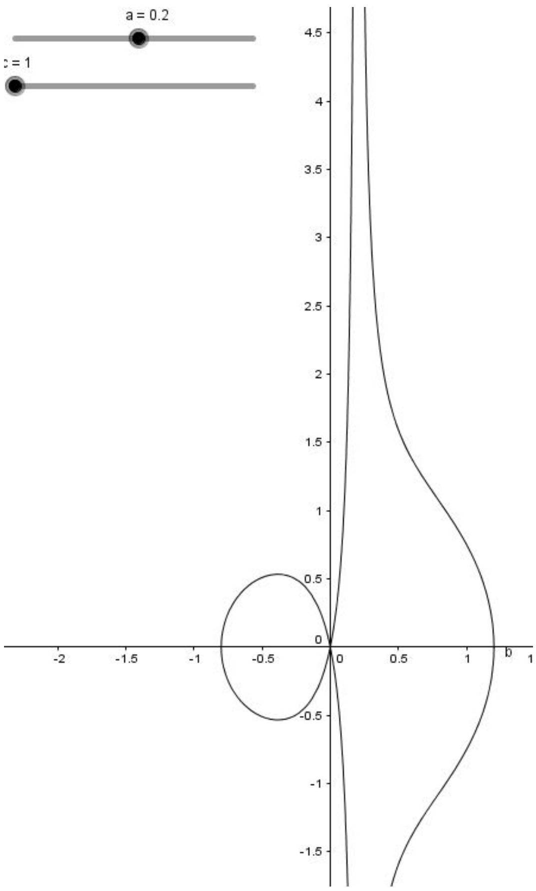
- Equacions paramètriques:

$$x = b + a\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$y = \frac{2t}{\dfrac{b}{1-t^2} + \dfrac{a}{1+t^2}}$$
$$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Per construir la concoide de Nicomedes he partit de les següents funcions:

$$f(x) = a + c\cos(x)$$
$$g(x) = a\tan(x) + c\sin(x)$$

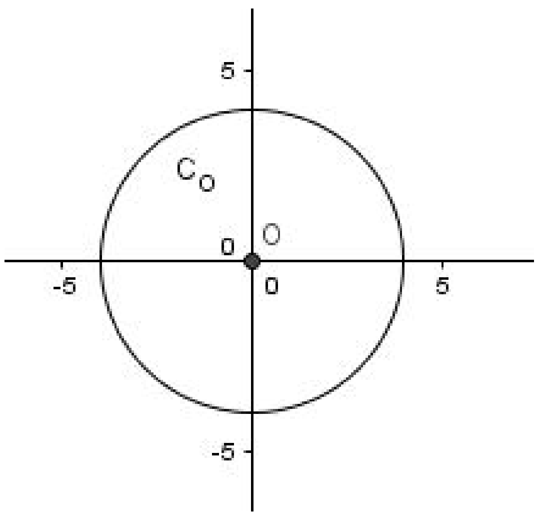
Tot seguit, he dibuixat la corba paramètrica d'aquestes corbes i el resultat és la concoide de Nicomedes. En l'arxiu GeoGebra, podem veure la creació d'aquesta corba mitjançant la barra que ens permet canviar els valors de la a i de la c.



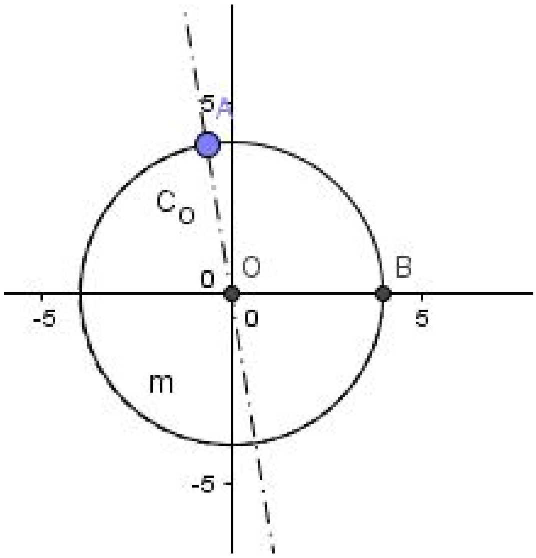
15.6 L'ESPIRAL D'ARQUÍMEDES

Ja hem parlat en una altra secció de l'espiral d'Arquímedes, però en aquesta secció veurem una altra manera de construir aquesta espiral que ens facilitarà la feina per solucionar el problema de la trisecció de l'angle. Per construir l'espiral d'Arquímedes, hem de seguir els següents passos:

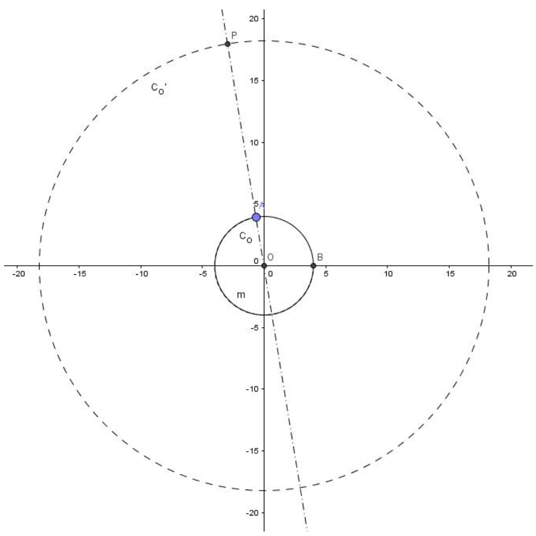
- Tracem una recta h horitzontal i agafem un punt O qualsevol de la recta h. Tot seguit, tracem la circumferència C_O de centre O i radi qualssevol.



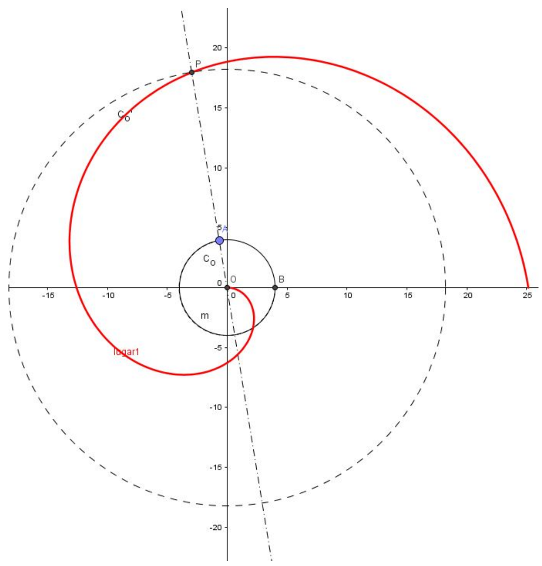
- Sigui B l'intersecció entre la circumferència i la recta h; i sigui A un punt qualsevol de la circumferència C_O, tracem la recta OA i l'arc BA.



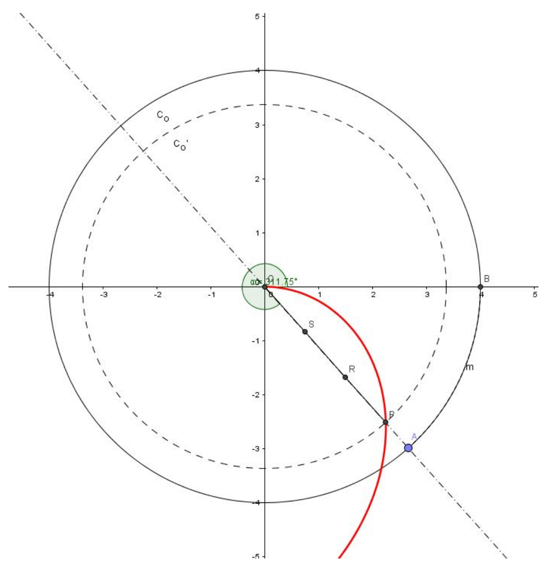
- Sigui m la mesura de l'arc BA, tracem una circumferència $C_{O'}$ de centre O i radi m.

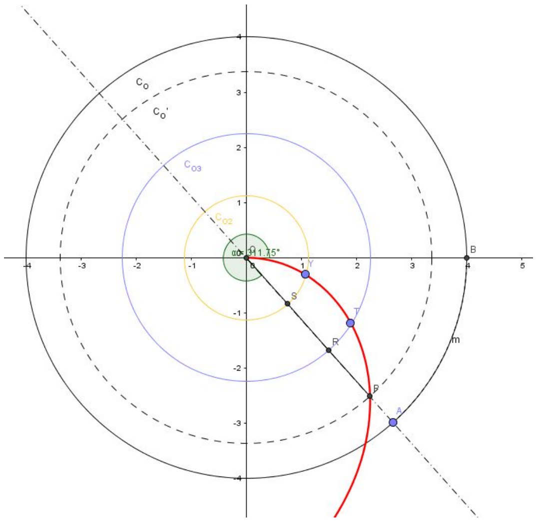


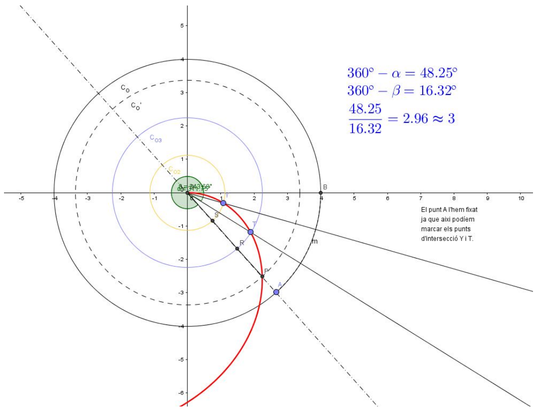
- Sigui P l'intersecció entre la recta OA i la circumferència $C_{O'}$, el lloc geomètric generat per P quan es mou A sobre la circumferència C_O és l'espiral d'Arquímedes.



Tot seguit, ens centrarem en la figura anterior i trissecarem l'angle BOA. Per fer-ho, primer trissecarem el segment OP i marcarem S i R com els punts de trisecció del segment OP. Tot seguit, traçarem les circumferències $C_{O''}$ i $C_{O'''}$ concèntriques en el centre O i radi OS i OR, respectivament. Siguin Y i T les interseccions entre les circumferències $C_{O''}$ i $C_{O'''}$ i l'espiral d'Arquímedes, tracem les semirectes OT i OY. La mesura de l'angle BOT serà la tercera part de la mesura de l'angle BOA. El procés seguit es veu en la següent sèrie d'imatges:





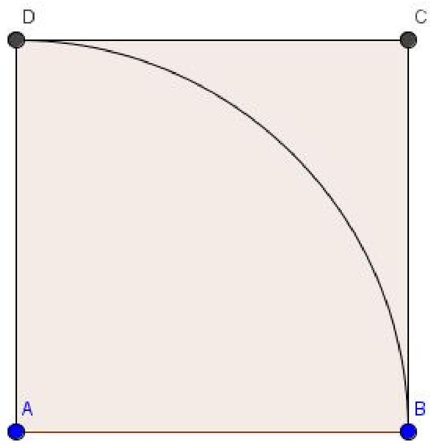


15.7 LA QUADRATRIU D'HÍPIES

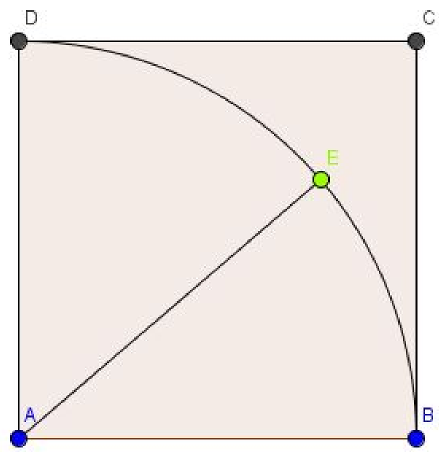
Procle i altres pensadors atribueixen a Hípies l'invenció d'aquesta cobra que tractarem, que rep el nom de **trisectriu d'Hípies**, que és una corba que permet realitzar la trisecció d'un angle i que posteriorment Dinòstrat la va utilitzar també per trobar la quadratura del cercle, anomenant-se: **quadratriu d'Hípies**.

Tot seguit, veurem com es construeix aquesta corba.

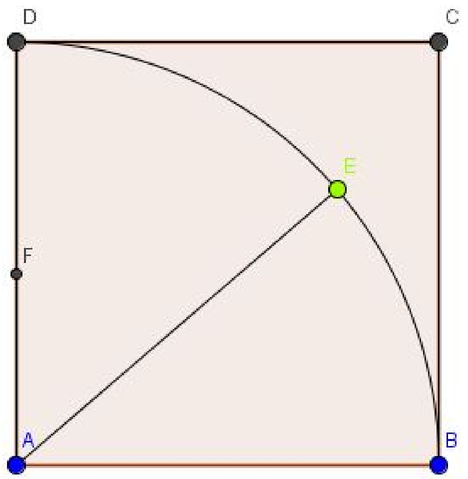
- Suposem inscrit en el quadrat $ABCD$ un arc de circumferència BD amb centre a A.



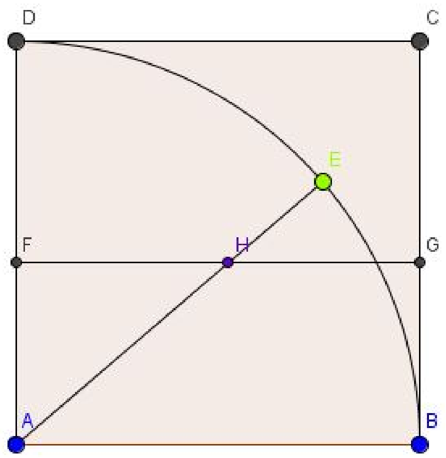
- Sigui E un punt que surt de D i es desplaça per l'arc BD a velocitat uniforme.

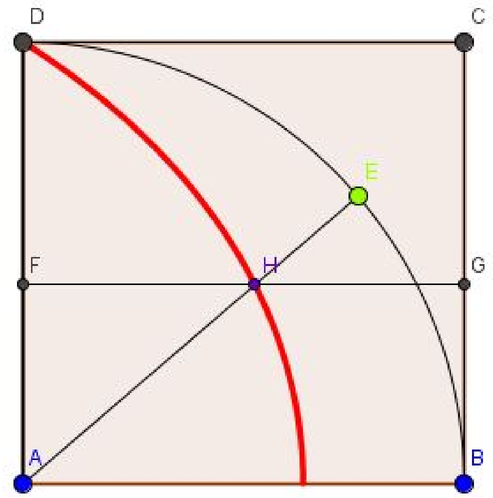


- Sigui F un punt que surt de D en el mateix moment que E i es desplaça pel segment AD a velocitat uniforme i de manera que el temps que tarda F a recórrer AD és el mateix que el que tarda E a recórrer l'arc BD. Llavors en cada instant, la longitud del segment FD és a la longitud del segment AD com la longitud de l'arc ED és a la longitud de l'arc BD.



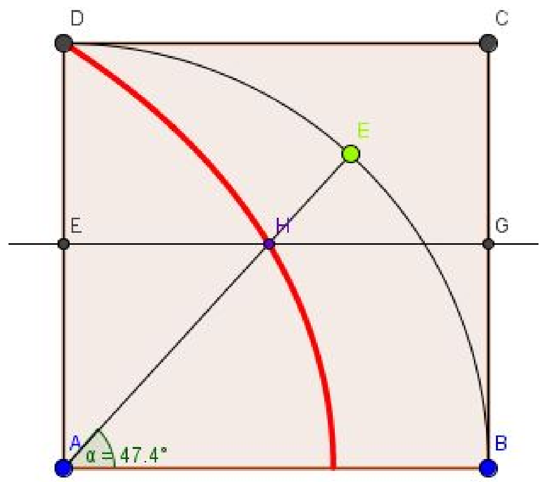
- El punt H, en el que es tallen la perpendicular a AD per F i la recta AE, descriu el lloc geomètric anomenat quadratriu dels punts E i H que té per equació cartesiana i polar, respectivament:



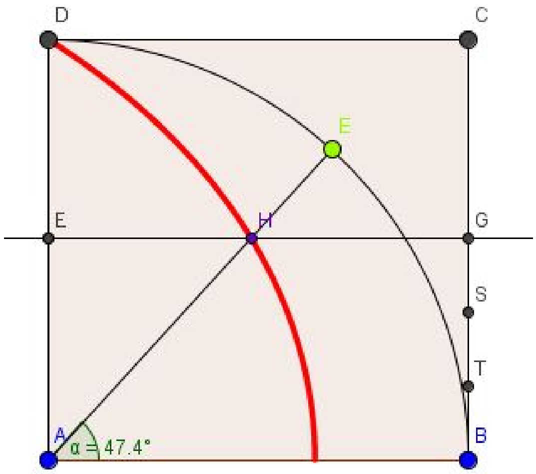


$$y = x \cdot \cot\left(\frac{\pi \cdot x}{2 \cdot a}\right)$$
$$\rho = \frac{2 \cdot a \cdot \theta}{\pi \cdot \sin\theta}$$

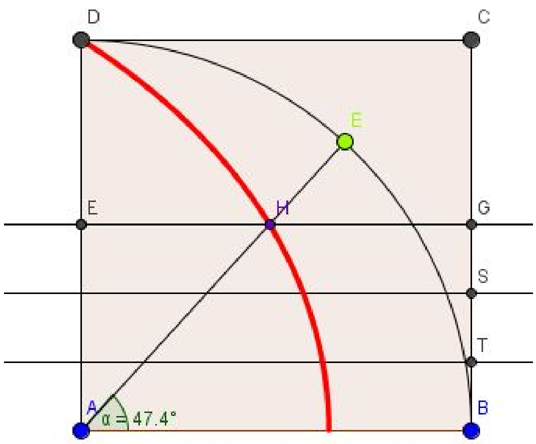
Per trissecar l'angle ens centrarem en la figura anterior. Per tant, per trisecar l'angle α (ABE) hem de marcar com a punt G la intersecció de la recta perpendicular que passa per F amb el segment BC.



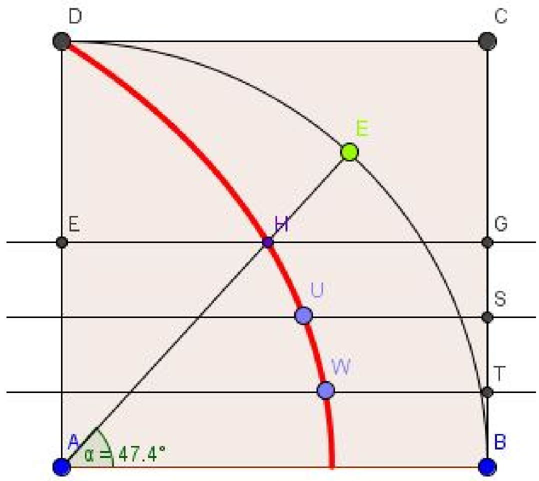
Dividim el segment BG en tres parts iguals utilitzant el teorema de Tales, conseguint els punts T i S.



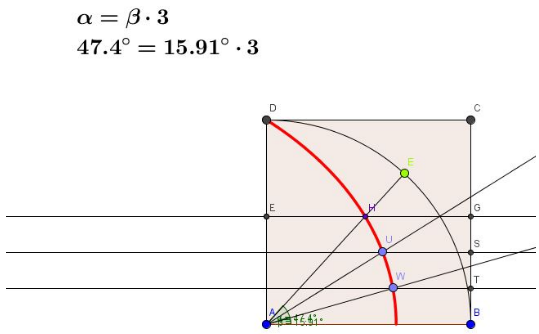
Tracem les rectes m i n, perpendiculars al segment BC i que passen pels punts S i T, respectivament.



Siguin U i W les interseccions de les rectes traçades amb la quadratriu.



Tracem les semirectes AW i AU i observem que l'angle BAW és un terç de la mesura de l'angle α.



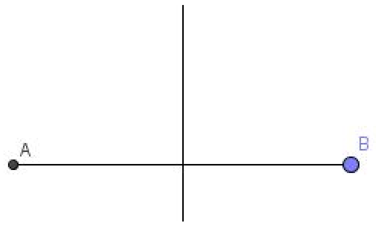
15.8 LA HIPÈRBOLA

Pappos d'Alexandria va resoldre la trisecció de l'angle utilitzant l'hipèrbola equilàtera. La seva equació cartesiana i polar són respectivament:

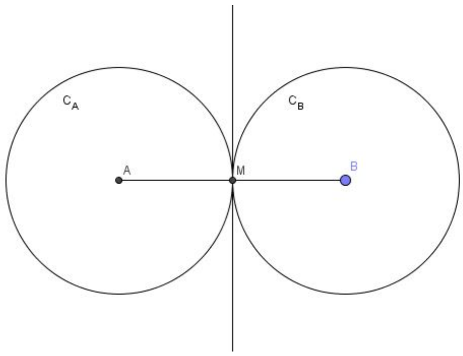
$$(3x^2 - y^2) = 4ax$$
$$\rho = 2a\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

Per construir l'hipèrbola hem de seguir els següents passos:

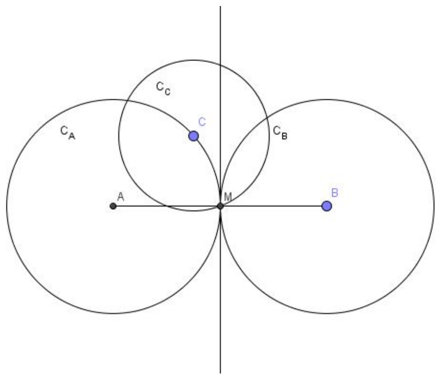
- Tracem un segment AB i tracem la recta m mediatriu del segment AB.



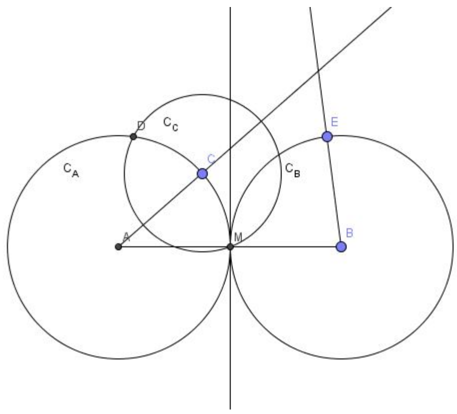
- Sigui M el punt d'intersecció del segment AB amb la mediatriu m, tracem la circumferència C_A amb centre a A i radi AM i tracem la circumferència C_B amb centre a B i radi BM.



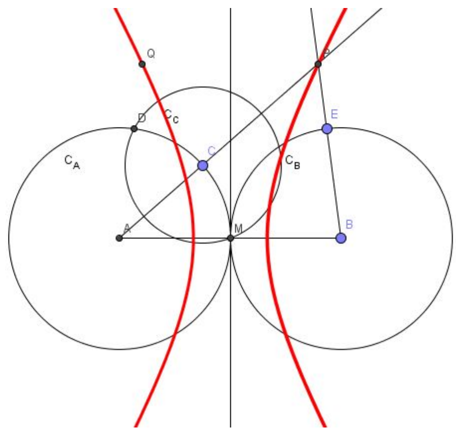
- Sigui C un punt sobre la circumferència C_A, tracem la circumferència C_C amb centre a C i radi CM.



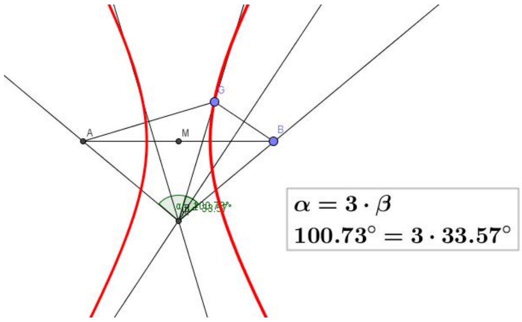
- Sigui D l'intersecció entre les circumferències C_C i C_A; i sigui E el simètric del punt D respecte la recta m, tracem les semirectes AC i BE. En aquest pas, si ens hi fixem tenim que la mesura de l'angle ABE és el doble que la mesura de l'angle BAC.



- Sigui P el punt d'intersecció entre les semirectes AC i BE; i sigui Q el simètric del punt P respecte la recta m, el lloc geomètric generat pels punts P i Q quan es mou C sobre la circumferència C_A és l'hipèrbola.



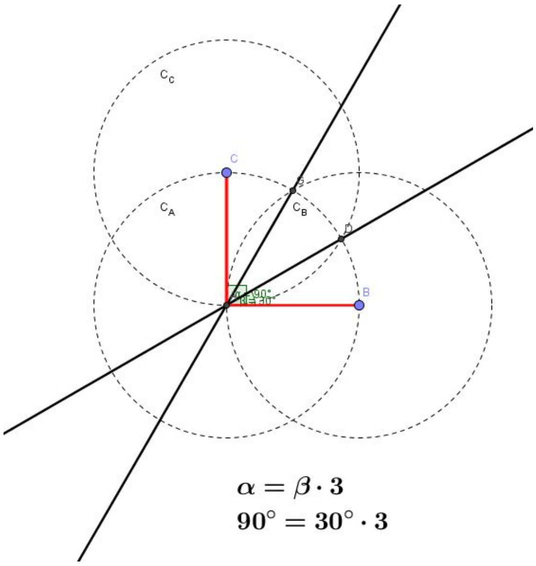
Tot seguit, ens fixarem en la figura anterior i veurem com s'utilitza aquesta corba per trissecar l'angle BHA. Sigui G un punt sobre la hipèrbola, tracem els segments AG i BG. Sigui l i n les mediatrius dels segments AG i BG, respectivament; i sigui H l'intersecció d'aquestes mediatrius, tracem les semirectes HA, HB i HG. I ja hem obtingut que la mesura de l'angle BHG és un terç de la mesura de l'angle BHA.



15.9 QUINS ANGLES ES PODEN TRISSECAR AMB REGLE I COMPÀS

Com havíem vist a la introducció del problema, alguns angles es poden trissecar amb regle i compàs (es poden dividir en tres parts iguals seguint les normes clàssiques), però la majoria no es poden. Per tant, busquem angles trissecables i construibles amb regle i compàs. Aquest fet es basa en si el cosinus de l'angle que volem trissecar és o no arrel d'un polinomi de grau una potència de 2.

Tot seguit, veurem un angle que es pot trissecar: el de $\frac{\pi}{2}$ rad. Donat l'angle de $\frac{\pi}{2}$ rad BAC, dibuixem les circumferències C_A de centre A i radi AB; C_B de centre B i radi AB; C_C de centre C i radi AC. Marquem els punts d'intersecció d'aquestes circumferències i observem que C_A i C_B es tallen en el primer quadrant en el punt G i C_A i C_C es tallen en el primer quadrant en el punt D. Tot seguit, cal dibuixar les rectes que passen per A i D i per A i G. Aquestes rectes divideixen l'angle inicial en tres angles de $\frac{\pi}{6}$ rad.



$$\alpha = \beta \cdot 3$$
$$90^\circ = 30^\circ \cdot 3$$

CAPÍTOL 16

LA CONSTRUCCIÓ DE POLÍGONS REGULARS

16.1 INTRODUCCIÓ

Per introduir el 'quart' problema clàssic de la construcció de polígons regulars cal que ens fixem en què tot polígon regular pot considerar-se inscrit en una circumferència. En efecte, per a construir un polígon regular de n costats tan sols, cal dibuixar una circumferència i en aquesta dibuixar angles centrals de mesura $\dfrac{2\pi}{n}$ radiants.

Tot seguit, cal donar un seguit de definicions d'alguns conceptes que els utilitzarem:

- **Polígon:** és una figura formada per la unió de segments de manera que no es tallin i solament es toquin en els extrems. Podem donar una definició més precisa: siguin P_1, $P_2, \cdots, P_n$ una successió de n punts diferents del pla amb $n \geq 3$. Suposem que els segments que formen aquests punts tenen les següents propietats:

  (i) Cap parell de segments es tallen, llevat dels seus punts extrems.

  (ii) Cap parell de segments amb un extrem comú són colineals.

  Si aquestes propietats es compleixen, llavors la unió de n segments s'anomena polígon. Els punts P_1, $P_2, \cdots, P_n$ són els vèrtexs del polígon i els segments d'aquests punts són els costats. Segons el nombre de costats els polígons es poden classificar en triangle (tres costats), quadrat (quatre costats), pentàgon (cinc costats), hexàgon (sis costats), heptàgon (set costats), octàgon (vuit costats)... Si un polígon té els seus angles interns congruents[1], és equiangle i si els seus costats són congruents[2], és equilàter. El segment els extrems del qual són dos vèrtexs no consecutius d'un polígon s'anomena DIAGONAL. En un polígon de n costats el nombre total de diagonals traçades des d'un vèrtex és $n-3$ i la suma de la mesura dels angles interiors d'un polígon de n costats és $(n-2)\pi$ rad.

- **Polígon regular:** és aquell polígon que és equilàter i equiangle, l'angle central del polígon regular és el format per dos vèrtexs consecutius del polígon i el centre del polígon (que és el centre la de la circumferència en el qual es pot inscriure el polígon regular). L'APOTEMA és el segment traçat perpendicularment des del centre del polígon a cada un dels seus costats i la seva longitud correspon a l'altura de cada un dels triangles en els quals es pot descompondre un polígon regular.

Aquest 'quart' problema clàssic es pot resoldre amb regla i compàs per alguns polígons de n costats, però per altres casos no és possible i en la següent secció veurem el per què.

16.2 ELS NOMBRES DE FERMAT I LA CONSTRUCCIÓ DE POLÍGONS REGULARS AMB REGLE I COMPÀS (TEOREMA DE GAUSS-WANTZELL)

Un polígon regular de n costats és construïble amb regle i compàs si i només si la descomposició en factors primers de n és de la forma:

$$n = 2^r \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_k,$$

amb

$$r \geq 0 \ \ i \ \ p_i \ \ primers \ \ diferents.$$

Més concretament, els p_i primers han de ser primers de Fermat. Per aquest motiu abans de res els hem de definir.

[1]Els angles conguents són aquells angles que mesuren el mateix.
[2]Els costats mesuren el mateix.

Definició: Els nombres primers de Fermat són nombres de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, començant des de $n = 0$. Per exemple:

$$\begin{aligned} F_0 &= 2^{2^0} + 1 = 3 \\ F_1 &= 2^{2^1} + 1 = 5 \\ F_2 &= 2^{2^2} + 1 = 17 \\ F_3 &= 2^{2^3} + 1 = 257 \\ F_4 &= 2^{2^4} + 1 = 65537. \end{aligned}$$

Com podem assegurar que aquests nombres són primers? Doncs de la següent manera: hem de fer l'arrel quadrada d'aquest nombre i després hem de comprovar si aquest nombre és divisible per algun nombre primer més petit que la seva arrel quadrada. Si ho és llavors el nombre és compost; si no, és primer.

Fermat va dir que tots aquests nombres eren primers, però uns anys més tard Leonhard Euler ho va contradir demostrant que F_5 no és primer. Els nombres primers de Fermat han de complir les següents propietats:

(i) $F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{n-1} = F_n - 2$.

(ii) Cap nombre primer de Fermat pot ser suma de dos nombres primers.

(iii) Dos nombres primers de Fermat són sempre primers entre sí.

(iv) Un polígon regular de n costats pot construire amb regle i compàs si n és igual a una potència de 2 o al producte d'una potència de 2 per nombres primers de Fermat diferents entre si.

Tot seguit, retornem als nombres de Fermat i a la construcció dels polígons regulars. Sabem que p_i són nombres primers de Fermat. Aquella equació escrita ens indicava que existeixen infinits polígons regulars construïbles amb regle i compàs. Per exemple, com que el triangle equilàter és construïble, llavors qualsevol polígon amb un nombre de costats igual a $2^k \cdot 3$ és construïble. No hi ha infinits polígons regulars construïbles perquè estan condicionats pels nombres primers de Fermat.

Perquè es compleixi el teorema sabem que tenim actualment 5 primers de Fermat. Hem de saber quantes combinacions podem fer entre aquests 5 nombres sense repeticions i sense que importi l'ordre dels 5 nombres. Primer de tot hem de saber que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Per tant per combinatòria tenim:

$$\binom{5}{5}+\binom{5}{4}+\binom{5}{3}+\binom{5}{2}+\binom{5}{1}=$$
$$=\frac{5!}{5!\,(0)!}+\frac{5!}{4!\,(1)!}+\frac{5!}{3!\,(2)!}+\frac{5!}{2!\,(3)!}+\frac{5!}{1!\,(4)!}=$$
$$=1+5+10+10+5=31$$

Per tant agafant aquests cinc nombres de Fermat tenim que hi han 31 polígons construïbles. A continuació, mostrarem un exemple amb aquests cinc nombres primers de Fermat citats anteriorment:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 3\\
F_1 &= 5\\
F_2 &= 17\\
F_3 &= 257\\
F_4 &= 65537\\
n &= 3 \cdot 5 = 15\\
n &= 3 \cdot 17 = 51\\
n &= 3 \cdot 257 = 771\\
n &= 3 \cdot 65537 = 196611\\
n &= 5 \cdot 17 = 85\\
n &= 5 \cdot 257 = 1285\\
n &= 5 \cdot 65537 = 327685\\
n &= 17 \cdot 257 = 4369\\
n &= 17 \cdot 65537 = 1114129\\
n &= 257 \cdot 65537 = 16843009\\
n &= 3 \cdot 5 \cdot 17 = 255\\
n &= 3 \cdot 5 \cdot 257 = 3855\\
n &= 3 \cdot 5 \cdot 65537 = 983055\\
n &= 3 \cdot 17 \cdot 257 = 13107\\
n &= 3 \cdot 17 \cdot 65537 = 3342387\\
n &= 3 \cdot 257 \cdot 65537 = 50529027\\
n &= 5 \cdot 17 \cdot 257 = 21845\\
n &= 5 \cdot 17 \cdot 65537 = 5570645\\
n &= 5 \cdot 257 \cdot 65537 = 84215045\\
n &= 17 \cdot 257 \cdot 65537 = 286331153\\
n &= 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 = 65535\\
n &= 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 65537 = 16711935\\
n &= 3 \cdot 5 \cdot 257 \cdot 65537 = 252645135\\
n &= 3 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537 = 858993459\\
n &= 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537 = 1431655765\\
n &= 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537 = 4294967295
\end{aligned}
$$

A part d'aquests polígons regulars, també es poden construir altres polígons amb regle i compàs ja que si descomposes el nombre amb factors primers i és de la forma de l'equació donada també es pot construir amb regle i compàs aquell polígon regular. Per tant, és possible construir molts polígons regulars amb regle i compàs.

CAPÍTOL 17

DIVERSES CONSTRUCCIONS DE POLÍGONS REGULARS AMB REGLE I COMPÀS

17.1 POLÍGON DE 3 COSTATS

3costats Primer de tot hem de demostrar que el polígon regular de 3 costats és construïble amb regle i compàs. Hem de saber que aquest polígon és el triangle equilàter ja que ha de tenir tots els angles interns iguals i la mesura dels costat iguals. Tot seguit, cal mirar si és de la forma:

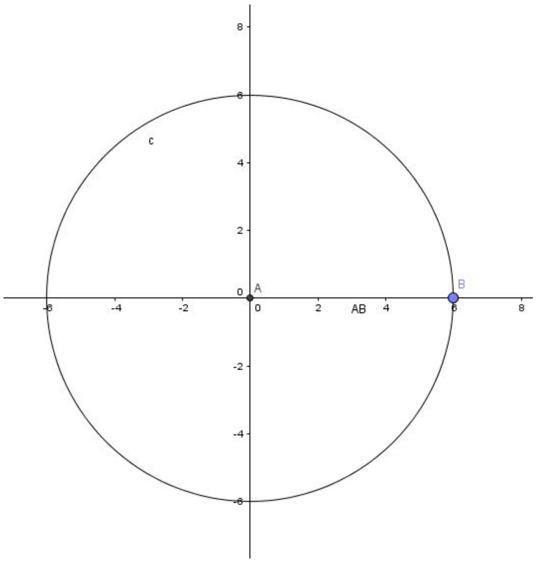
$$n = 2^r \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_k$$
$$n = 2^0 \cdot 3$$
$$n = 1 \cdot 3.$$

on p_i són primers diferents de Fermat.

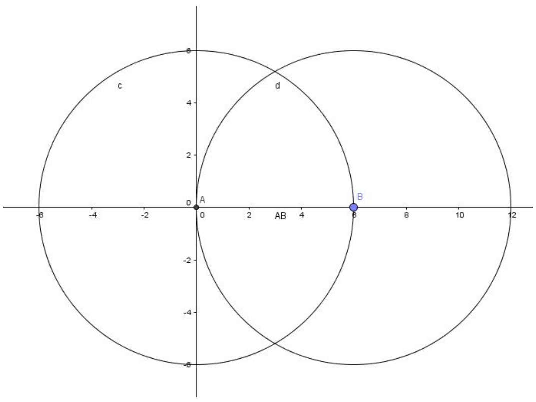
I veiem que 3 és primer de Fermat perquè $3 = 2^{2^0} + 1$.

Per tant, hem demostrat que el triangle equilàter és construïble amb regle i compàs. Per fer-ho, cal seguir els següents passos:

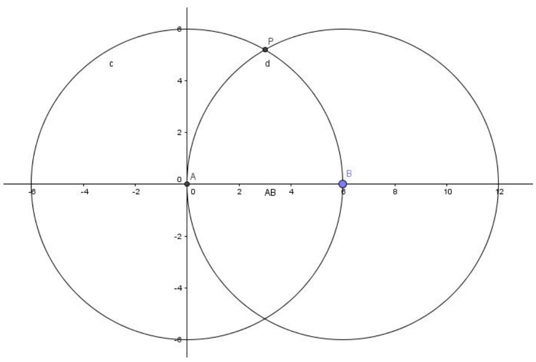
(i) Donat un segment AB que serà un costat del triangle, cal traçar una circumferència de centre A i radi AB.



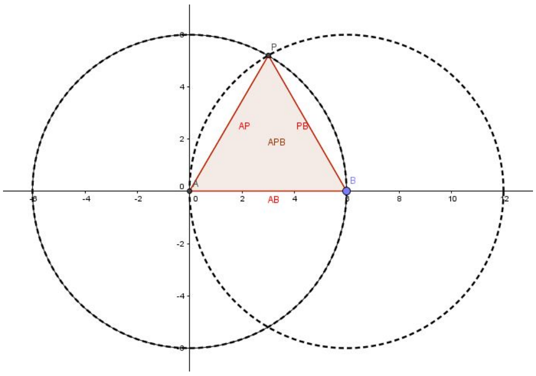
(ii) Tracem una altra circumferència amb centre a B i radi AB.



(iii) Aquestes dues circumferències es tallen en dos punts. Agafem un d'ells i l'anomenem P.



(iv) Finalment, tracem els segments AP i PB i obtenim el triangle equilàter APB.



17.2 POLÍGON DE 4 COSTATS

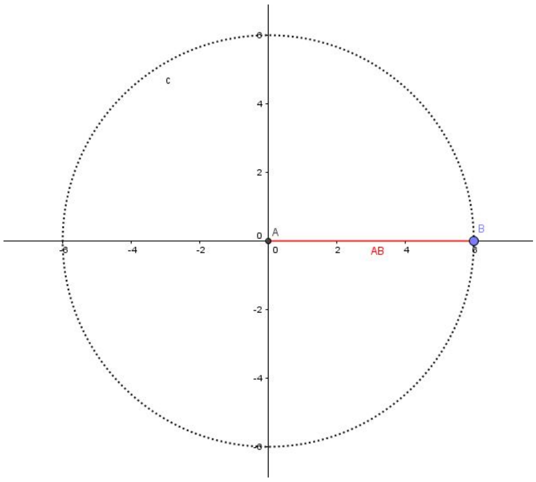
Observació: Es pot demostrar que els nombres de la forma $2^n + 1$ són nombres primers de Fermat.
Primer de tot hem de demostrar que el polígon regular de 4 costats (quadrat) és construïble amb regle i compàs. Per tant, hem de mirar si és de la forma:

$$n = 2^r \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_k$$
$$n = 2^2$$
$$n = 2 \cdot 2.$$

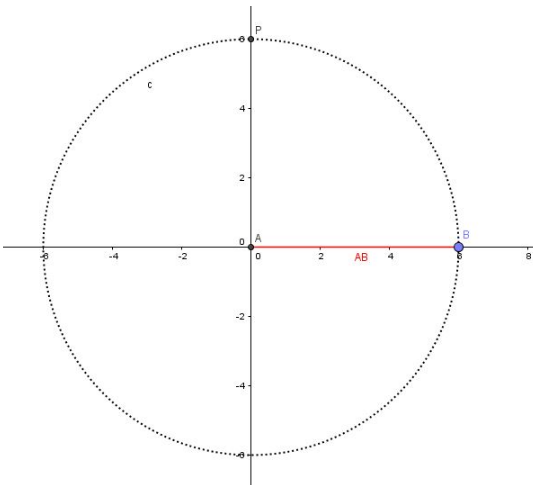
Per l'observació anterior, tenim que 2 és un nombre primer de Fermat perquè $2 = 2^0 + 1$.

Hem demostrat que el quadrat és construïble amb regle i compàs. Per fer-ho, cal seguir els següents passos:

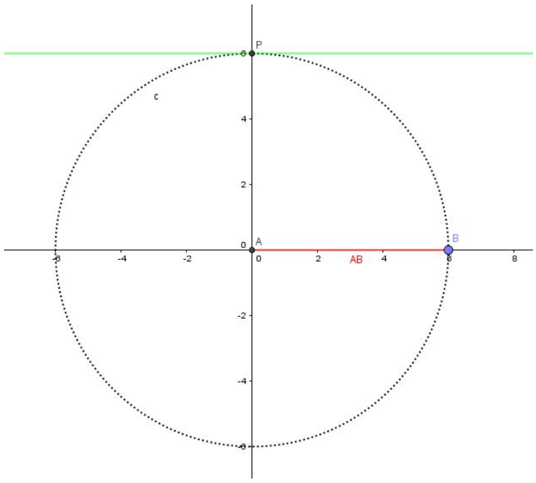
(i) Donat un segment AB que serà un costat del quadrat, cal traçar una circumferència de centre A i radi AB.



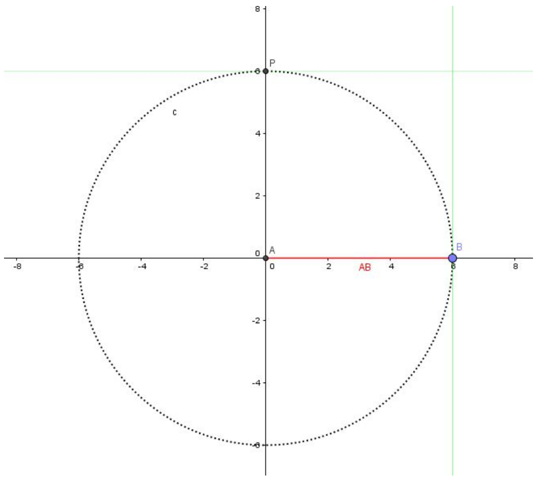
(ii) Aquesta circumferència talla amb l'eix OY en dos punts. N'agafem un i l'anomenem P.



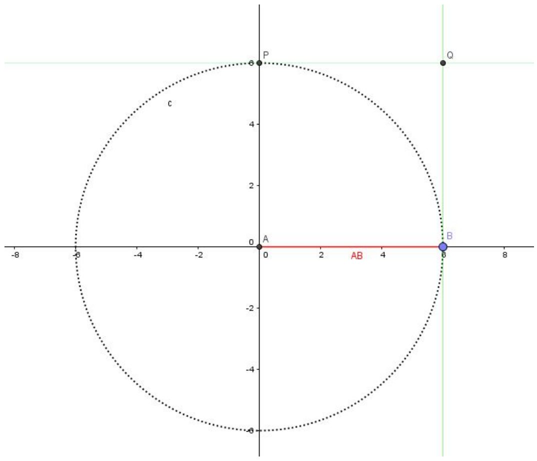
(iii) Tracem la recta paral·lela a l'eix OX que passi per P.



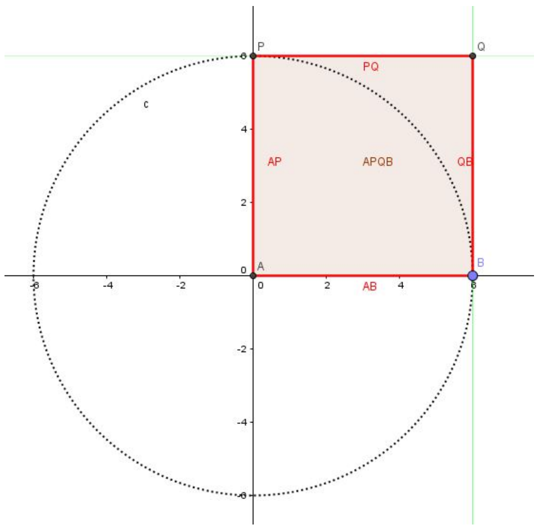
(iv) Tracem la recta paral·lela a l'eix OY que passi per B.



(v) La intersecció de les dues rectes paral·leles anomenat Q, és un vertex del quadrat.



(vi) Traçant els segments AP, PQ i QB obtenim el quadrat $APQB$.



17.3 POLÍGON DE 5 COSTATS

Primer de tot hem de demostrar que el polígon regular de 5 costats (pentàgon) és construïble amb regle i compàs. Per tant, hem de comprovar si és de la forma:

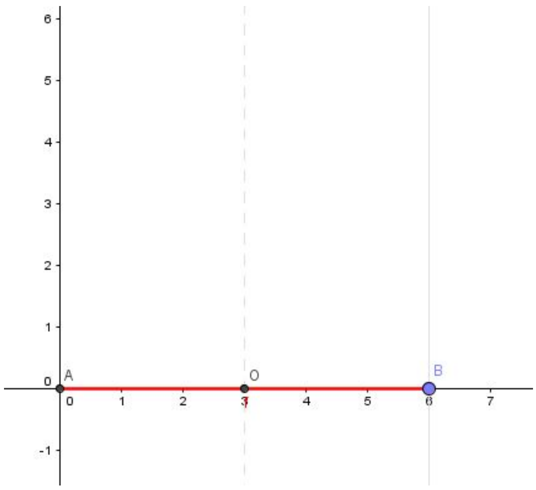
$$n = 2^r \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_k$$
$$n = 2^0 \cdot 5$$
$$n = 1 \cdot 5.$$

on p_i són primers diferents de Fermat.

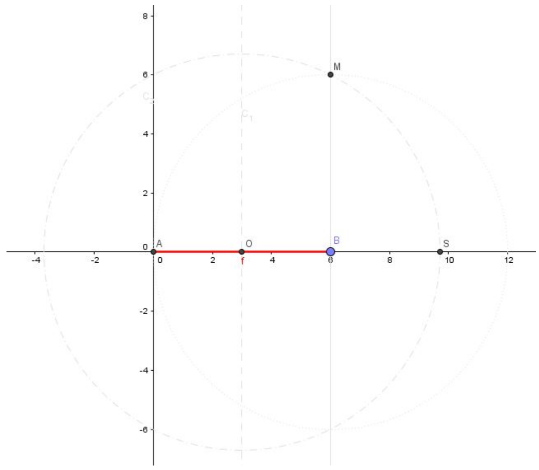
I veiem que 5 és primer de Fermat perquè $5 = 2^{2^1} + 1$.

Hem demostrat que el pentàgon és construïble amb regle i compàs. Per fer-ho, cal seguir els següents passos:

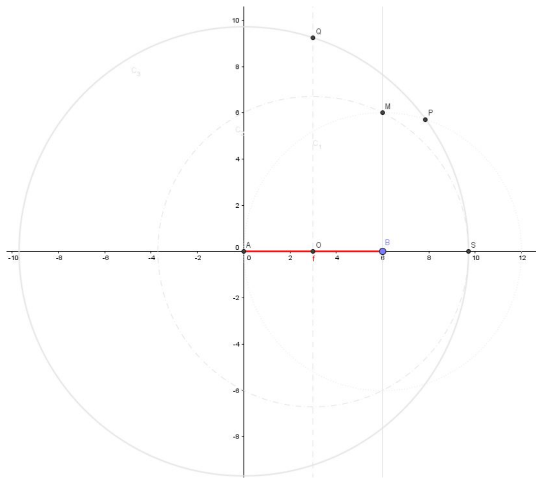
(i) Donat un segment AB que serà un costat del pentàgon, cal traçar la paral·lela r a l'eix OY que passi per B. Tot seguit, tracem la mediatriu del segment AB i obtenim el punt O com a intersecció entre la mediatriu i l'eix OX (punt mitjà del segment).



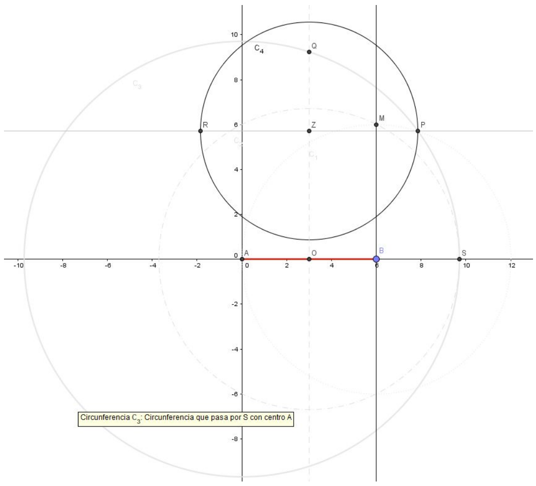
(ii) Tracem la circumferència de centre B i radi AB, anomenat C_1. Obtenim el punt M com a intersecció de C_1 amb la recta r. Tracem la circumferència C_2 de centre O i de radi OM, i obtenim el punt S com a intersecció de C_2 amb l'eix OX.



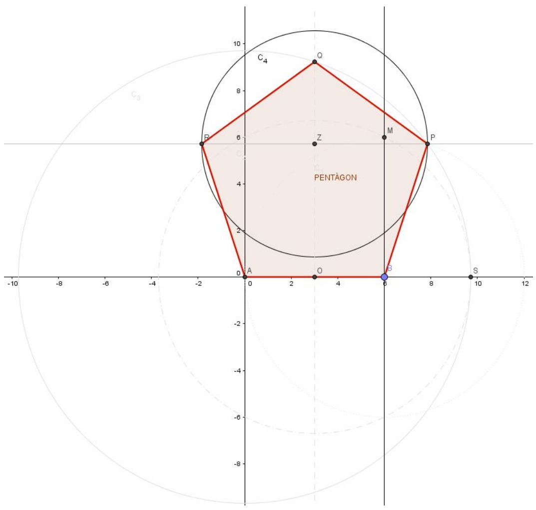
(iii) Tracem la circumferència C_3 de centre A i radi AS. Obtenim el punt P com a intersecció de C_3 i C_1; i el punt Q com a intersecció de la mediatriu de AB i de C_3.



(iv) Per obtenir l'últim vèrtex R que ens falta per construir el pentàgon, hem de construir el punt simètric a P respecte de la mediatriu del segment AB. (Per fer-ho amb el GeoGebra, cal construir la recta perpendicular a la mediatriu que passi per P i tracem una circumferència C_4 de centre l'intersecció Z de la mediatriu amb la perpendicular traçada; i de radi ZP El punt R que és intersecció de la circumferència i de la recta perpendicular traçada serà l'últim vèrtex del pentàgon)



(v) Finalment, unim els vèrtexs per obtenir el pentàgon regular.



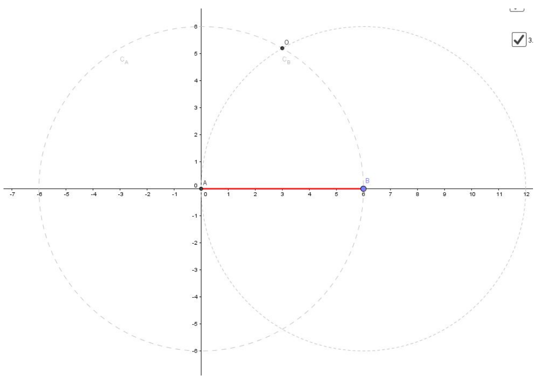
17.4 POLÍGON DE 6 COSTATS

Primer de tot hem de demostrar que el polígon regular de 6 costats (hexàgon) és construïble amb regle i compàs. Per tant, hem de comprovar si és de la forma:

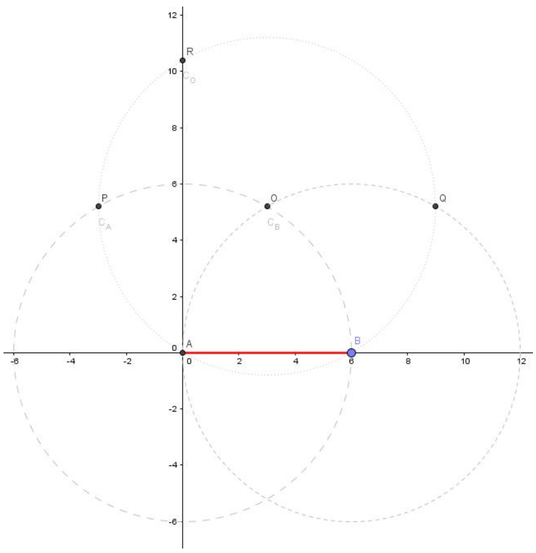
$$n = 2^r \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_k$$
$$n = 2^1 \cdot 3$$
$$n = 2 \cdot 3.$$

Ja hem vist que el 3 és primer de Fermat a l'apartat **??**. Hem demostrat que l'hexàgon és construïble amb regle i compàs. Per fer-ho, cal seguir els següents passos:

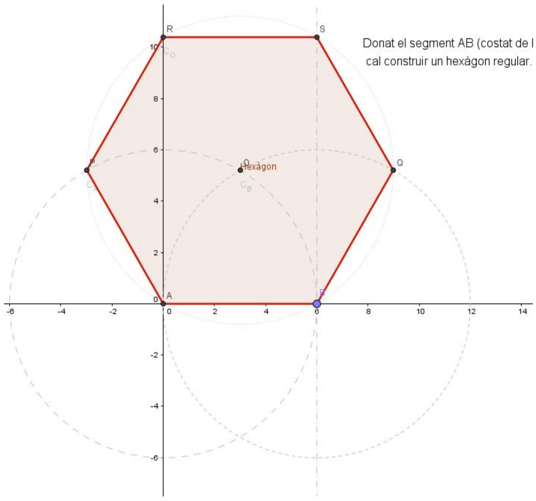
(i) Donat un segment AB que serà un costat de l'hexàgon, cal traçar dues circumferències C_A i C_B de radi AB i de centre A i B, respectivament. Agafem una intersecció O entre C_A i C_B. Aquest punt O és el centre de l'hexàgon.



(ii) Tracem la circumferència C_O de centre O i de radi OA. Obtenim els punts d'intersecció P i Q entre C_O i les dues circumferències C_A i C_B; i R que és la intersecció entre C_O i l'eix OY.



(iii) Tracem la paral·lela a l'eix OY que passi per B i obtenim l'últim vèrtex, S, com a intersecció d'aquesta recta paral·lela i la circumferència C_O. Unint els vèrtexs obtenim l'hexàgon regular buscat.



17.5 POLÍGON DE 8 COSTATS

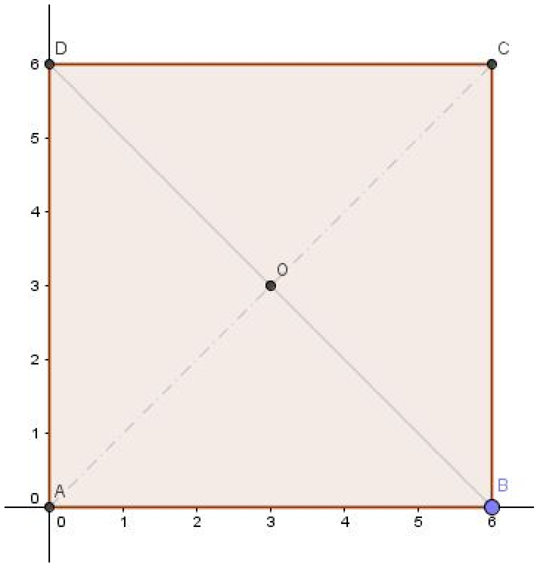
Primer de tot hem de demostrar que el polígon regular de 8 costats (octàgon) és construïble amb regle i compàs. Per tant, hem de comprovar si és de la forma:

$$
\begin{aligned}
n &= 2^r \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_k \\
n &= 2^2 \cdot 2.
\end{aligned}
$$

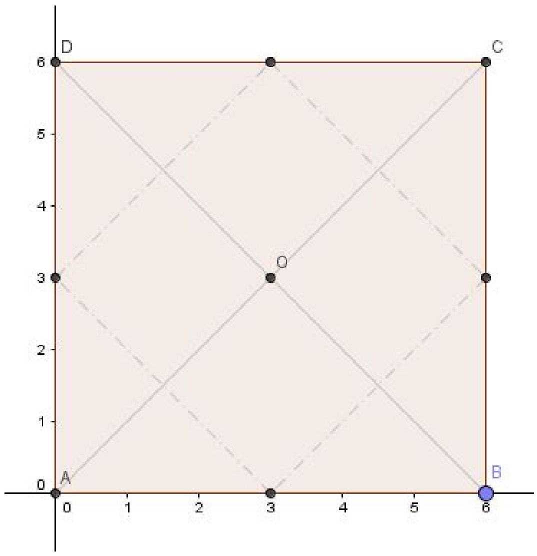
Tal com hem vist abans, 2 és de Fermat.

Hem demostrat que l'octàgon és construïble amb regle i compàs. Per ferho, cal seguir els següents passos:

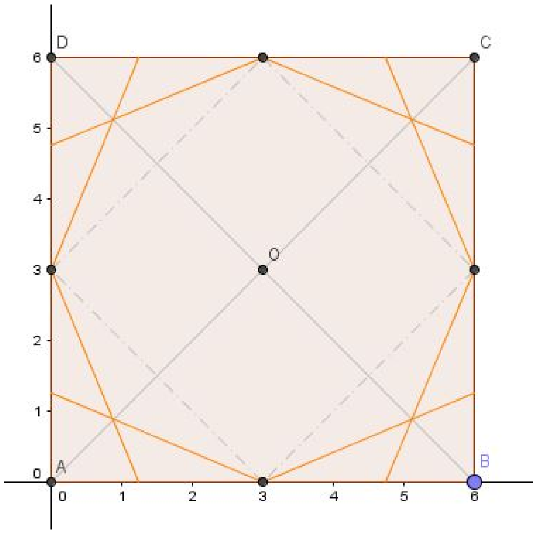
(i) Dibuixem un quadrat (que és construïble amb regle i compàs) de costat AB i després les seves dues diagonals que es tallen el centre O del quadrat.



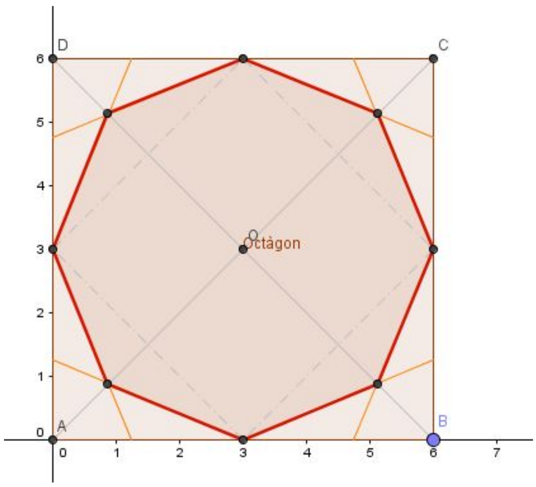
(ii) Dibuixem el punt mitjà de cada un dels quatre segments del quadrat i els unim formant un altre quadrat.



(iii) Per cada un dels punts mitjans trobats anteriorment, tracem la bisectriu de l'angle (construïble amb regle i compàs) que forma el segment del quadrat de la línia discontínua.



(iv) Aquestes bisectrius es tallen en quatre punts que juntament amb els quatre punts mitjanes dels costats del quadrat formen un octàgon regular.



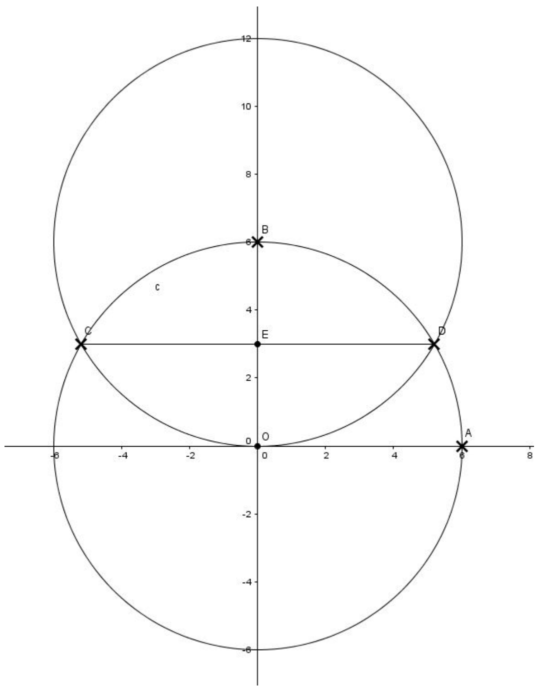
17.6 POLÍGON DE 17 COSTATS

Primer de tot hem de demostrar que el polígon regular de 17 costats (heptadecàgon) és construïble amb regle i compàs. Per tant, hem de comprovar si és de la forma:

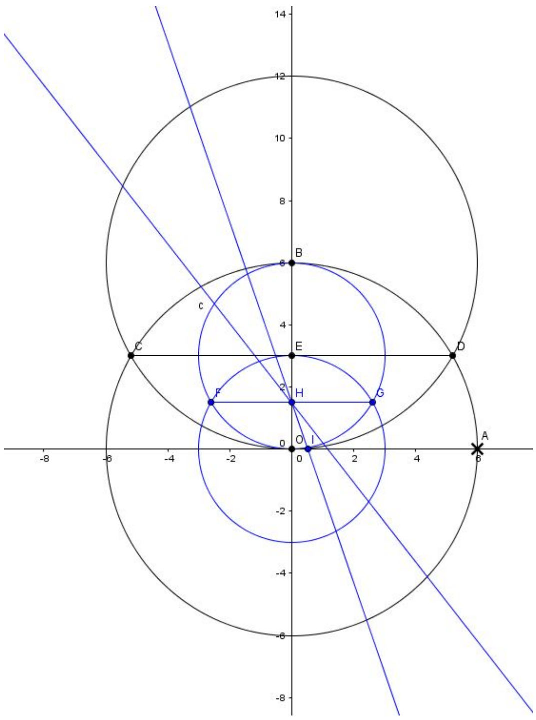
$$n = 2^r \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_k$$
$$n = 2^0 \cdot 17$$
$$n = 1 \cdot 17.$$

I 17 és un nombre de Fermat perquè $17 = 2^{2^2} + 1$. Hem demostrat que l'heptadecàgon és construïble amb regle i compàs. Per fer-ho, cal seguir els següents passos:

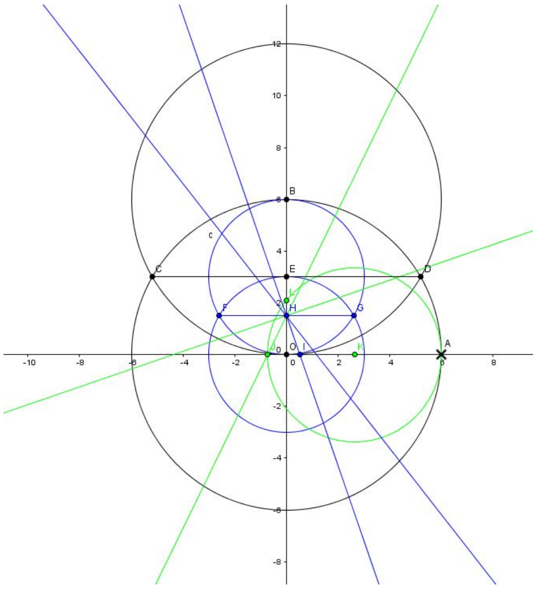
(i) Donat un eix de coordenades amb centre a O i un altre punt de l'eix OX que anomenem A. Tracem la circumferència c de centre O i radi OA. Anomenem B al punt de tall d'aquesta circumferència amb la part positiva de l'eix OY i tracem la circumferència de centre B i radi OB. Aquesta circumferència talla a c a dos punts als que anomenem C i D. Tracem el segment CD que talla a l'eix OY en un punt al que anomenem E.



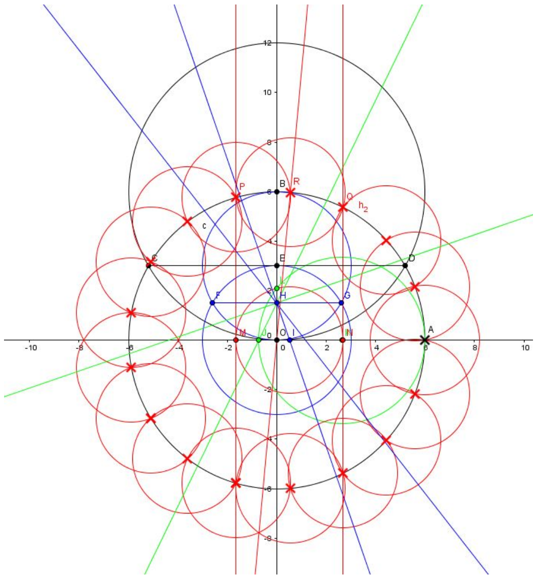
(ii) Tracem les circumferències de radi OE que tenen els seus centres a O i a E. Anomenem als dos punts de tall entre aquestes F i G. Tracem el segment FG que talla a l'eix OY en un punt al que anomenem H. Tracem la bisectriu de l'angle AHO i després la bisectriu d'aquesta amb l'eix OY. Anomenem I a la intersecció d'aquesta última bisectriu amb l'eix OX.



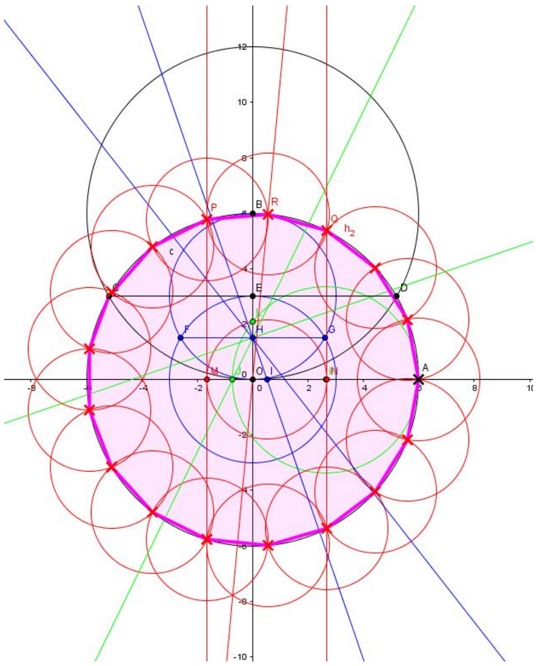
(iii) Tracem la perpendicular al segment HI que passa pel punt H i després la bisectriu d'aquesta recta amb la recta que passa per H i per I. Anomenem J al punt de tall amb l'eix OX. Construïm el punt mitjà del segment AJ i l'anomenem K. Tracem la circumferència de centre K i radi KA. Anomenem L al punt de tall d'aquesta circumferència amb la part superior de l'eix OY.



(iv) Tracem la circumferència de centre I i radi IL i anomenem M i N als punts de tall de la mateixa amb l'eix OX. Tracem las perpendiculars a l'eix OX que passen per M i per N. AQuestes perpendiculars tallen a la circumferència inicial c a P i Q, que són dos dels vèrtexs de l'heptadecàgon. Tracem la bisectriu de l'angle POQ que talla a la circumferència inicial c en el punt R, que es també un dels vèrtexs de l'heptadecàgon. De fet la longitud de cada un dels costats és tant la distància PR com la distància RQ. Traslladant aquesta distància per la circumferència inicial les vegades necessàries obtenim els vèrtexs que ens falten.



(v) Unint tots els vèrtexs obtenim la construcció de l'heptadecàgon.



PART IV

ANNEXOS

17.7 PROPOSICIÓ 47. ELEMENTS D'EUCLIDES

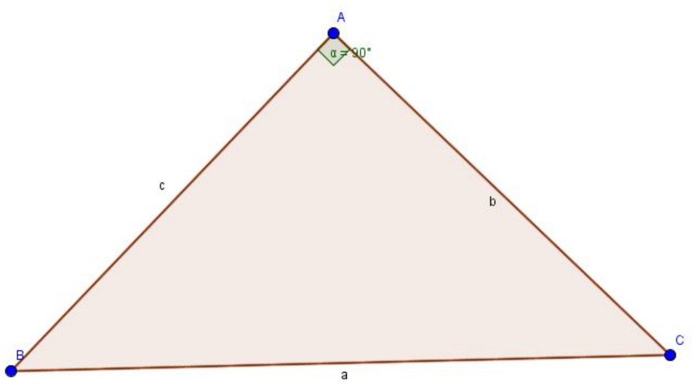
La Proposició 47 afirma que en els triangles rectangles el quadrat del costat oposat a l'angle recte és igual a la suma dels quadrats dels costats que comprenen l'angle recte.

Per realitzar el dibuix que està inclòs en la part d'història de la matemàtica grega, cal seguir els següents passos.

Primer de tot, hem de dibuixar un triangle rectangle coneixent els dos catets b i c:

- Situem el punt A i B en el lloc desitjat, i els unim mitjançant un segment.
- Seleccionem 'angle donada l'amplitud' a B i A, respectivament, i hi fiquem 90º. Tot seguit, ens haurà sortit un punt B' que li canviem el nom per C, i ja tindrem l'altre catet c. Només faltarà unir els punts B i C per formar la hipotenusa del triangle rectangle.
- Si movem el punt A, podem canviar el tamany del triangle rectangle.

El resultat és el següent:



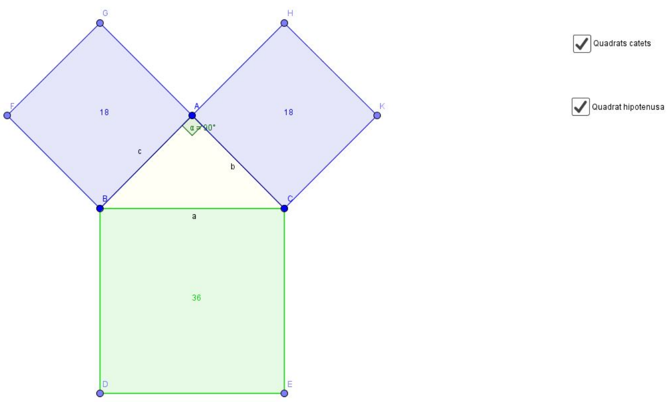
Tot seguit, hem de dibuixar els quadres dels catets i de la hipotenusa del triangle rectangle. Només ens fixarem en la representació gràfica d'un dels quadrats, perquè els altres es realitzen de la mateixa manera. Primer de tot, hem de tenir clar que ja tenim un costat de cada quadrat, catets i hipotenusa. Per tant, els passos que cal seguir són els següents:

- Hem de construir dues perpendiculars a cada extrem del costat ja que l'angle del quadrat és de $\frac{\pi}{2} rad$. Usem l'eina de perpendicular ja que un altre cas, ja veurem com es pot fer sense aquesta eina, però per estalviar-nos feina, hem decidit fer-ho amb l'eina que inclou el GeoGebra.

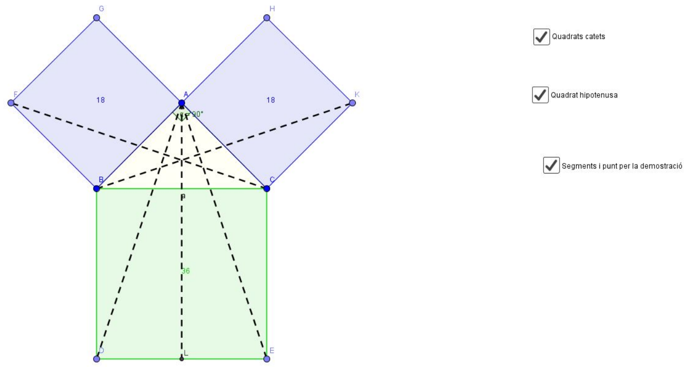
- Sobre les dues perpendiculars que hem traçat, hem de traslladar la distància del costat. Per a fer-ho, seleccionem l'arc de circumferència i traçem dos arcs amb la mesura del costat, i ja tindrem els dos punts restants.

- Finalment, unim els punts A, C, K i H i ja tindrem format el quadrat d'un costat del triangle rectangle. I amb el mateix procediment, hem de dibuixar els altres dos quadrats dels altres costats del triangle.

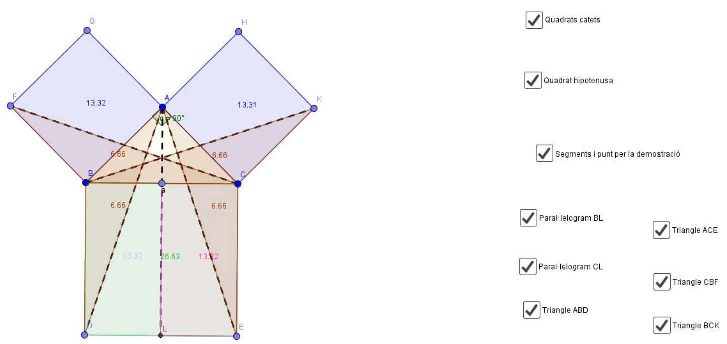
A continuació, hem canviat els colors dels quadrats per diferenciar amb facilitat els quadrats dels catets i el de la hipotenusa. Ho hem fet mitjançant l'opció personalitzar del polígon. També, he afegit unes caselles de verificació per tal d'ocultar o de mostrar els quadrats quan desitgem. El resultat és aquest:



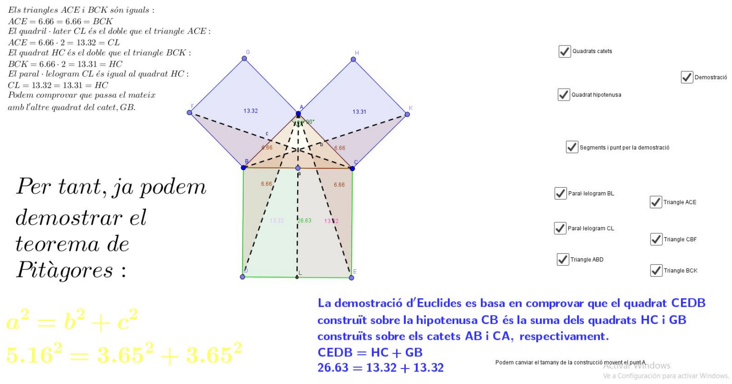
El següent que cal fer és confeccionar les rectes necessàries per tal de poder demostrar la proposició. Per fer-ho, cal realitzar els segments BK, CF, AD i AE. En aquests casos, hem d'unir els dos extrems per formar el segment. A més, cal realitzar una paral·lela a BD que passi per A, per tal de dibuixar el punt L que ens servirà per la demostració. Ho hem fet mitjançant l'eina de la recta paral·lela del GeoGebra, tot i que en una altra construcció, ho farem sense haver de usar-la. El resultat de realitzar tots aquests segments és el següent:



Tot seguit, hem de començar amb la demostració del teorema de Pitàgores. Com que hem de veure que els dos paral·lelograms BL i CL són iguals, anem a marcar aquests dos paral·lelograms com a polígons per a poder veure si l'àrea és la mateixa. També, hem de veure que la suma de l'àrea dels triangles ABD i ACE és igual a l'àrea d'un dels quadrats dels catets, com també és igual a l'àrea dels triangles CBF i BCK. El resultat és el següent:



Per acabar, hem afegit la demostració del teorema de Pitàgores segons Euclides. El resultat final és aquest:


Els triangles ACE i BCK són iguals :
ACE = 6.66 = 6.66 = BCK
El quadril · later CL és el doble que el triangle ACE :
ACE = 6.66 · 2 = 13.32 = CL
El quadrat HC és el doble que el triangle BCK :
BCK = 6.66 · 2 = 13.31 = HC
El paral · lelogram CL és igual al quadrat HC :
CL = 13.32 = 13.31 = HC
Podem comprovar que passa el mateix
amb l'altre quadrat del catet, GB.
Per tant, ja podem demostrar el teorema de Pitàgores :
a² = b² + c²
5.16² = 3.65² + 3.65²
13.32
13.31
6.66
6.66
26.63
Quadrats catets
Demostració
Quadrat hipotenusa
Segments i punt per la demostració
Paral·lelogram BL
Triangle ACE
Paral·lelogram CL
Triangle CBF
Triangle ABD
Triangle BCK
La demostració d'Euclides es basa en comprovar que el quadrat CEDB construït sobre la hipotenusa CB és la suma dels quadrats HC i GB construïts sobre els catets AB i CA, respectivament.
CEDB = HC + GB
26.63 = 13.32 + 13.32
Podem canviar el tamany de la construcció movent el punt A.
Activar Windows
Ve a Configuración para activar Windows.

PART V

CONCLUSIONS

CAPÍTOL 18

CONCLUSIONS

L'objectiu imprescindible del meu treball era demostrar el per què de la irresolubilitat dels tres problemes clàssics i treballar tot el que això comportava com ara les solucions mitjançant corbes o còniques. Tot i les dificultats que m'ha portat, que han estat bastants, finalment crec que m'ha sortit bastant bé i he assolit molts dels objectius que em plantejava.

He aconseguit investigar sobre els nombres construïbles amb regle i compàs i els que no ho són. M'interessava endinsar-me en aquest camp de la constructibilitat dels nombres ja que a l'institut sempre representes els nombres reals a la recta real, i ho fas d'una manera determinada. Però, en aquest treball he observat que hi han diverses estructures algebraiques i diversos conjunts de nombres com ara els complexos en els qual m'he endinsat. He pogut veure que els nombres complexos es poden representar gràficament, però no a la recta real. A aquest tema va relacionat tota la part de punts construïbles, figures construïbles i nombres construïbles que ha suposat una part molt important per poder entendre la resta del treball amb facilitat, ja que es basa en el concepte de construccions amb regle i compàs, bàsicament.

Una de les parts que vaig considerar més important és la de demostrar el per què de la irresolubilitat dels tres problemes clàssics de la geometria. És la part que m'ha agradat més del treball ja que penso que és el motiu pel qual vaig elegir aquest treball de recerca: volia demostrar per què no es podien resoldre amb regle i compàs ideal. En aquesta part, calia aplicar tots els conceptes teòrics que hem vist en el treball.

Després de la realització del treball de recerca, no he pogut respondre un objectiu que buscava des del principi: per què van trigar tant els matemàtics a demostrar que els tres problemes clàssics eren impossibles amb regle i compàs? Bàsicament, d'aquesta pregunta me n'he adonat que aquests problemes ens ensenyen que el seu origen ha portat a desenvolupar teories matemàtiques importants i fascinant des del punt de vista matemàtic. Per exemple, la història de les construccions de polígons regulars amb regle i compàs ens mostra que Gauss, molts segles després dels primers intents grecs, va ser capaç de construir el polígon de 17 costats amb regle i compàs.

El següent objectiu que apareix a l'apartat dels objectius ja l'he comentat anteriorment ja que ens parla del que és una construcció amb regle i compàs i perquè aquests problemes són irresolubles amb regle i compàs. Es relacionaria amb els conceptes bàsics de construccions amb regle i compàs, i de constructibilitat de nombres i figures.

Com hem vist al llarg del treball, molts matemàtics han resolt els tres problemes clàssics sense utilitzar les premisses gregues, però ho han aconseguit de moltes maneres diferents.

Una incògnita que tinc del treball i m'hagués agradat contestar ha estat la de les corbes i espirals en el món físic ja que considero que les matemàtiques es presenten de forma indirecta a la natura. Molta gent diu que les matemàtiques són molt abstractes, que sí que ho són, però si investigues a fons sobre aquesta ciència formal veuràs que hi han moltes representacions de les matemàtiques a la vida real. No he pogut experimentar sobre aquest apartat ja que no m'ha donat temps i m'interessava més centrar-me en els tres problemes clàssics.

A part de totes aquestes incògnites que he resolt, he pogut aprendre gràcies al treball a utilitzar el LaTeXque, per a mi, és una forma d'escriure treballs científics i tecnològics que t'aporta moltes facilitats, però també algun inconvenient. Aquest programa et fa aprendre a veure que les matemàtiques han d'estar escrites en un llenguatge formal i que no hi poden haver errors i que són molt precises. El GeoGebra, des que vaig començar batxillerat, em va agradar molt des del primer dia i per tant vaig decidir endinsar-m'hi i m'ha resultat molt profitós ja que ara domino les representacions amb $2D$.

Bàsicament, aquest treball de recerca m'ha servit per ampliar els coneixements que tenia sobre les matemàtiques.

CAPÍTOL 19

OPINIÓ PERSONAL

Les dificultats que he tingut són diverses. En un principi, vaig haver d'aprendre a utilitzar el programa LaTeXper tal de poder escriure amb més facilitat el treball. Tot i això, aquest programa també m'ha portat problemes ja que en un bon principi havia d'entendre el seu funcionament i a utilitzar-lo adequadament per poder fer el treball. Però un cop el vaig dominar, un seguit d'errors al programa em van sorgir i els vaig haver de solucionar amb els coneixements que tenia d'aquest processador de textos. Una altra dificultat del projecte va ser haver d'escriure el treball amb notació matemàtica ja que si em vull centrar en les demostracions, cal haver treballat amb notació matemàtica. Les demostracions van ser un problema a l'hora de realitzar-les ja que era la primera vegada que sense ajuda havia de demostrar el per què aquell problema no es podia solucionar amb regle i compàs ideals. Anem decreixent el grau de dificultat, m'he trobat amb alguns problemes realitzant representacions i dibuixos amb el GeoGebra que m'han fet millorar la resolució de problemes sense l'ajuda de ningú, tot i que a vegades la necessitava i la demanava.

Tot i aquestes dificultats, crec que el més important són tots els aspectes positius que m'ha aportat la realització d'aquest treball. M'ha donat una visió de les matemàtiques molt diferent de la que tenia; he observat que les matemàtiques són molt abstractes i deductives. He aprés que l'error en un petit càlcul no em feia que una demostració fos correcta; i el rigor en tot el que enuncies i escrius és imprescindible per tal de poder demostrar el que desitges. En la meva opinió, crec que el treball i la investigació de tots els matemàtics del món és imprescindible i fonamental per tal d'aplicar-les en altres ciències o en la tècnica. Per tant, tinc present que el que he fet en aquest treball no és cap innovació perquè tot el que explico es troba en molts llibres i articles. El més important per a mi ha estat endinsar-me en aquest món tan formal i descobrir moltes coses que desconeixia abans de realitzar el treball. He observat el geni i la gran imaginació que tenen els matemàtics i crec que aquesta ciència forma part del món on vivim i és imprescindible.

En aquest treball, hi ha moltes qüestions pendents ja que cada vegada que em rellegeixo el treball, em pregunto més aspectes sobre aquest, però no els puc resoldre per la manca de temps.

BIBLIOGRAFIA

[1] CASTRILLO GÓMEZ, Raül (2009) *Construccions amb regle i compàs.* Cerdanyola del Vallès: Treball de recerca.

[2] ELGUETA, Júlia *Sobre la impossibilitat d'algunes construccions amb regle i compàs.* Treball de recerca.

[3] GUITERAS, Josep M.; i altres (2012) *Matemàtiques 1 Batxillerat.* Aravaca (Madrid): McGraw-Hill, segona edició.

[4] CARREGA, Jean-Claude (1989) *Théorie des corps. La règle et le compas.* Paris: Hermann, nova edició.

[5] T L Heath, A history of Greek mathematics I (Oxford, 1931).

[6] M R Cohen and I E Drabkin (trs.), A source book in Greek science (Harvard, 1948).

[7] NOLLA, Ramon (2006). Estudis i activitats sobre problemas clau de la Història de la Matemàtica (Publicacions de la SCM). Barcelona: Publidisa, 1a edició.

[8] VERA, Francisco (1978) Científicos griegos. Madrid: Aguilar.

[9] J O'Connor i E F Robertson: Squaring the circle [en línia] ¡http:www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Squaring_the_circle.html¿.

[10] UNIVERSITY OF MINNESOTA: Squaring the Circle [en línia ¡http://web.archive.org/web/20020810213910/http://www.geom.umn.edu/docs/forum/square_circle/¿.

[11] J J O'Connor i E F Robertson: Doubling the cube [en línia] ¡http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Doubling_the_cube.html¿.

[12] UNIVERSITY OF MINNESOTA: Angle Trisection [en línia] ¡http://web.archive.org/web/20030212051111/http://www.geom.umn.edu/docs/forum/angtri/¿.

[13] Jim Loy: Trisection of an Angle [en línia ¡http://web.archive.org/web/20131104113041/http://www.jimloy.com/geometry/trisect.htm¿.

[14] NCTM: THE MATH FORUM: Regular Polygon Formulas [en línia] ¡http://mathforum.org/dr.math/faq/formulas/faq.regpoly.html¿.

[15] U. Dudley, The Trisectors, MAA, 1994.

[16] I. Thomas, Greek Mathematical Works, v. 1, Harvard University Press, 2006.

[17] E. E. White, On the Trisection of an Angle, Am Math Monthly, Vol. 14, No. 8/9.

[18] R. Courant and H. Robbins, What is Mathematics?, Oxford University Press, 1996.

[19] H. Dorrie, 100 Great Problems Of Elementary Mathematics, Dover Publications, NY, 1965.

[20] BOYER, Carl Benjamin (1968). A History of Mathematics. United States of America: John Wiley Sons INC, Wiley International Edition.

[21] BURTON, David M. (1999). The history of mathematics: An Introduction. New York: Mc-Graw Hill, 7a edició (2011)

[22] NOLLA, Ramon (2006). Estudis i activitats sobre problemas clau de la Història de la Matemàtica (Publicacions de la SCM). Barcelona: Publidisa, 1a edició.

[23] ORE, Oystein (1948). Number theory and its history. New York: McGraw-Hill Book Company INC, 1a edició.

[24] ROUSE BALL, Walter William (1892). Mathematical Recreations and Essays. New York: The Macmillan Company, 4a edició (1905).

[25] ROUSE BALL, Walter William (1908). A short account of the history of mathematics. New York: Dover Publications INC, 4a edició (1960).

[26] RUIZ, Ángel (2003). Historia y filosofía de las matemáticas. San José (Costa Rica): Ed. UNED, 1a edició.

[27] Spivak, Michael. Calculus. 3rd ed. Barcelona: Reverte, 2012. ISBN 84-291-5137-0.