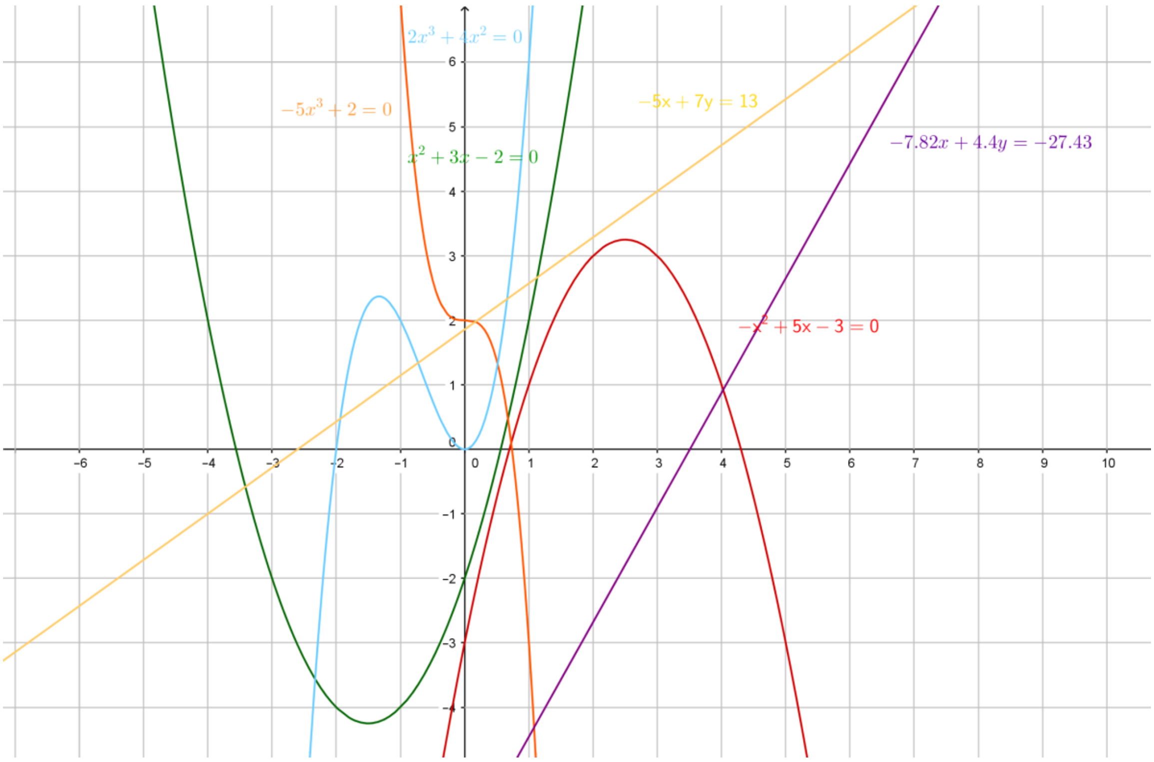
TREBALL DE RECERCA

L'EVOLUCIÓ DE L'ÀLGEBRA EN LES EQUACIONS POLINÒMIQUES

COM HA SORGIT L'ÀLGEBRA SIMBÒLICA A PARTIR DE L'ÀLGEBRA RETÒRICA EN LES EQUACIONS POLINÒMIQUES?



GIBRELA TIMALRÓS

2n Batxillerat A

Curs 2017-2018

Agraïments

A la meva tutora del treball de recerca, per la seva ajuda en tot moment, en especial en el transcurs del treball, tant pel que fa en la recerca d’informació com en transmetrem valors importants quotidians com l’esforç i la disciplina. No obstant, també pel suport i consells que m’ha donat sempre que ho he necessitat en algunes situacions complicades.

A la meva família que també m’ha ajudat a trobar la manera de superar les dificultats que m’han sorgit en diverses situacions del treball i per fer-me costat en tot moment .

A tots els companys i amics que s’han interessat pel treball de manera indirecta, donant-me els ànims necessaris per seguir endavant.

ÍNDEX GENERAL

ÍNDEX IL·LUSTRACIONS

1. INTRODUCCIÓ

Al llarg de la nostra vida hem de saber elegir entre la gran diversitat d'opcions que se'ns plantegen. El tema del treball de recerca és una de les nostres grans primeres eleccions, ja que hem de tenir en compte que a part d'intentar assolir una bona puntuació per facilitar el nostre futur i poder cursar la carrera que ens agrada, també hem d'intentar elegir un tema que ens provoqui un cert interès, per així aprendre i gaudir-lo mentre s'estigui duent a terme.

Des d'un primer moment sabia que el meu treball havia d'estar relacionat amb l'àmbit matemàtic ja que a part de ser la meva matèria preferida, també la trobo molt interesant i se'm plantegen molts dubtes que fins ara no hi he trobat resposta:

a) Quin va ser l'inici de la matemàtica i com es va originar?
b) Com s'ha produït l'evolució de la matemàtica al llarg del temps?
c) Com alguns matemàtics sabien que els procediments que s'utilitzaven eren poc precisos i els que ells formulaven no?
d) Com es van resoldre problemes en les antigues civilitzacions sense el recolzament de símbols i notacions actuals?
e) Quines van ser les dificultats, que es van trobar en l'antiguitat per passar de raonaments verbals a regles per poder utilitzar símbols?
f) Per què, per exemple en el Renaixement, va haver persones que van ser capaços de donar solucions a problemes que encara no s'havien fet en segles anteriors quan les capacitats intel·lectuals es consideren més o menys semblants?
g) L'àlgebra, és un estri indispensable en la ciència i tecnologia moderna?
h) L'estructura de les matemàtiques actuals és la definitiva o encara pot evolucionar i canviar?

Amb l'elecció del tema del treball de recerca me'n podria resoldre algunes de les qüestions anteriors.

En l’actualitat moltes situacions se’ns presenten des d’un primer moment solucionades, solament hem d’aplicar una fórmula o un procediment per arribar a resoldre un problema. Però darrere d’aquestes facilitats que avui en dia disposem s’han presentat moltes dificultats al llarg de molts segles per poder arribar a elles. Havia de tenir en compte que no podia investigar l’evolució de les matemàtiques des dels seus inicis fins al segle XXI ja que es tracta d’un àmbit molt ampli i necessitaria molt temps per fer-ho així que tenia que centrar més el tema. A partir d’uns dies de reflexió i una xerrada amb la meva professora de matemàtiques vaig trobar l’àlgebra com una de les branques de les matemàtiques on observava una evolució costosa i llarga durant molts segles, així que em vaig encaminar cap aquella part. Decidit, el tema del meu treball de recerca seria l’evolució de l’àlgebra en les equacions polinòmiques, com ha sorgit l’àlgebra simbòlica a partir de l’àlgebra retòrica en les equacions polinòmiques?

L’objectiu d’aquest treball és com s’ha desenvolupat l’àlgebra des dels seus inicis, una àlgebra retòrica, fins a l’actualitat, una àlgebra simbòlica, per així poder ressaltar les diferències i l’evolució que s’ha produït, així com també donar a conèixer els matemàtics que van produir aquesta evolució i l’explicació que donaven en cadascuna de les seves aportacions.

Aquest treball es troba distribuït en quatre parts, una de teòrica i tres de pràctiques.

La primera té a veure amb l’observació de diferents períodes de la història pel que fa a l’àmbit de l’àlgebra i així mateix, els matemàtics i civilitzacions pertinents que hi van fer aportacions i quines van ser aquestes.

La segona part fa un breu retrat de com s’ha desenvolupat l’àlgebra des de les antigues civilitzacions egípcies i babilòniques fins als nostres dies analitzant els diferents i diversos legats testimonials com per exemple els papirs d’antigues civilitzacions on s’observa la resolució que es feia en ells i en aquell període i també, com es resoldria en l’actualitat, així es pot recalcar la comparació.

En la tercera part s’observa l’evolució de les equacions polinòmiques d’una variable a partir de les aportacions del matemàtics estudiats en la primera part del treball des del segle IV aC fins al segle XX . També finalment he volgut introduir un últim apartat on es pogués observar una breu descripció de quins matemàtics van fer evolucionar els sistemes d’equacions lineals i no lineals.

Al planificar aquest treball, un treball amb qüestions poc conegudes o desconegudes, m’han sorgit una sèrie de dificultats que a continuació es recull: a l’haver quantitat considerable de fonts d’informació i documents, m’ha suposat un esforç considerable interpretar dades, les idees i informacions més significatives; classificar els coneixements de manera molt més clara i rigorosa utilitzant un llenguatge adequat, corregir els errors de base en les diferents expressions algebraiques, entre altres.

Per últim vull destacar l’aprenentatge assumit en relació a la normativa i requisits per redactar una memòria ben estructurada amb un adequat i correcte disseny de presentació.

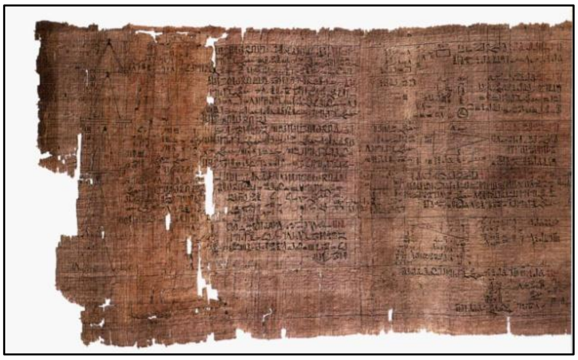
2. PERÍODES HISTÒRICS DE L'ÀLGEBRA

2.1 Època Prehel·lènica

L'època prehel·lènica fou el període anterior a la civilització grega clàssica. El trobàrem en el temps des del 4000 aC fins el 1000 aC. Van destacar dues civilitzacions on es va desenvolupar la majoria d'avenços matemàtics relacionats amb l'àlgebra: la civilització egípcia i la mesopotàmica.

2.1.1 Civilització egípcia

La civilització egípcia va néixer al riu Nil a la meitat del 4000 aC. Es va considerar el primer lloc on sorgí l'àlgebra. La quantitat d'informació matemàtica s'obtingué de les pedres tallades trobades a les tombes, en temples i en els calendaris, però fou molt limitada. Afortunadament es disposaren d'altres fonts d'informació; hi ha un cert nombre de papirs egipcis que han sobreviscut al llarg del temps on es va trobar un seguit de regles algebraiques. Es poguí destacar el papir més antic, el de Moscou, que conté la manera de determinar el volum d'una esfera. Però com a font principal fou l'anomenat *Rhind Papyrus* que va ser el més extens dels que contenen informació matemàtica. Fou un rotllo de papir d'uns 30 cm d'altura i uns 6 cm de llarg que va ser exposat en el British Museum de Londres. En general, en aquests papirs es van poder observar procediments de mesures i càlcul. Així, a partir d'aquesta informació, es va demostrar l'existència d'activitat matemàtica en períodes de temps superiors a l'any 4000 aC.



Il·lustració 1: Fragment del Papyrus Rhind (1650 aC)

2.1.1.1 Papyrus antics

a) Papyrus Rhind

Aquest papir estava format per quaranta fulles (cinc metres de longitud) a les quals es van trobar vuitanta-cinc problemes redactats en escriptura hieràtica[1] per l’escriba **Ahmes** (1660 - 1620 aC). Va ser creat durant el segon període intermedi i el baix regnat d’Apofis (1585 – 1542 aC) i, aproximadament tres segles després, durant l’imperi d’Amenemes III (1844 - 1797 aC), Ahmes va fer una còpia.

L’any 1855 dC a Tebas, l’actual Luxor, es va desenterrar el Papyrus Rhind, el papir egipci més important en aspectes matemàtics. Tres anys més tard (1858), Henry Rhind, el va comprar juntament amb altres papirs. El 1865, després de la mort d’Henry Rhind, va passar a mans del Museu Britànic de Londres i alguns fragments al Museu Brooklyn de Nova York.

Dels 85 problemes en consten 5 parts: l’aritmètica, l’estereometria , la geometria, el càlcul de piràmides i altres problemes pràctics amb la finalitat de cercar coneixements útils en la vida quotidiana com ara l’econòmica, la construcció, organització de camps.

Es va poder observar en els problemes 24, 39 i 63 la manera com es resolien les equacions en aquells temps.

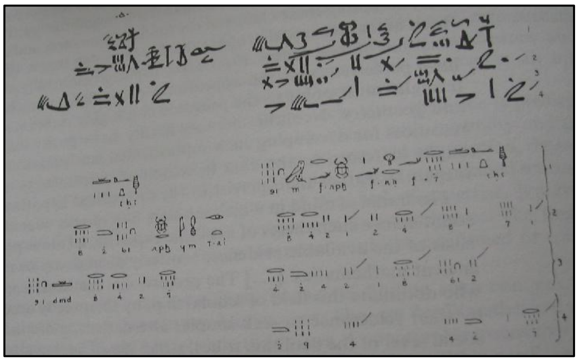
[1] **Escriptura hieràtica** : Va ser una nova forma d'escriptura que permetia als escribes de l'Antic Egipte escriure ràpid, simplificant els jeroglífics. Era molt difícil d'escriure hieràticament, ja que s'havia d'entendre i interpretar-la, ja que eren jeroglífics "desfigurats". Era una escriptura d’administració i d'ús religiós.

- Resolució del problema 24

- ***Una quantitat més una setena part de la mateixa quantitat es converteix en 19. Quina és la quantitat?***

1. Resolució en el Papyrus Rhind (s. XVII aC)

En el Papyrus Rhind el problema 24 es va resoldre recorrent al procediment de la ‘falsa posició’ i el mètode utilitzat per multiplicar es basava en la duplicació i partició (divisió entre 2) així com l’emprament de les fraccions unitàries.



Il·lustració 2: Problema 24 en el Papyrus Rhind

S’utilitzava com a falsa posició el 7 (era el nombre que permetia realitzar les operacions d’una forma més senzilla): Així $7+\frac{7}{7}=8$. Per tant es tractava d’una falsa posició. Llavors l’escriba procedia de la següent forma:

Tantes vegades com 8 havia de ser multiplicat per a que donés 19 era tantes vegades com 7 devia ser multiplicat per a què donés la quantitat correcta.

El resultat seria:

$8\cdot\ 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ =19$, es tenia que multiplicar 7 per $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ per obtenir el correcte valor de la quantitat demanada; la resposta correcta era:

$\mathbf{16}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$ ja que :

$$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ \cdot 7=\ 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ \cdot\ 4+2+1\ =\ 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ \cdot 4+\ 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ \cdot 2+$$

$$+\ 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ \cdot 1=9+\frac{1}{2}+4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=x \qquad \boldsymbol{x}=\mathbf{16}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$$

Es comprovava el seu resultat mostrant que si a $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ se li sumava un setè d'ell mateix, és a dir, $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, s'obtenia definitivament 19.

2. Resolució del problema 24 en l'actualitat:

$$x + \frac{1}{7} = 19$$

$$\frac{7x+x}{7} = \frac{19 \cdot 7}{7}$$

$$7x + x = 19 \cdot 7$$

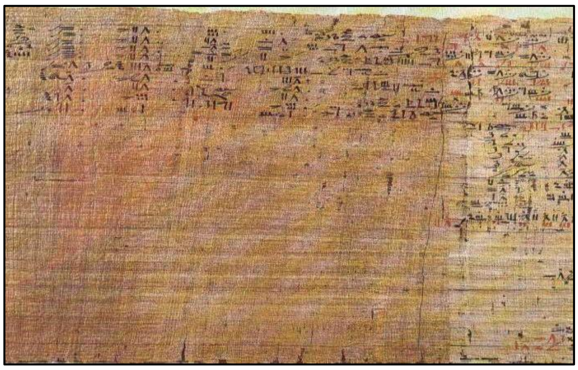
$$8x = 133$$

$$\boldsymbol{x = \frac{133}{8} = 16.625 = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}}$$

- Resolució del problema 39

➢ ***Entre 10 homes es reparteixen 100 pans: 50 pels 6 primers i 50 pels altres 4. Quina n'és la diferència?***

1. Resolució en el Papyrus Rhind (s. XVII aC)



Il·lustració 3: Problema 39 en el Papyrus Rhind

Es començava per la segona part de l'enunciat on es volia repartir 50 pans entre 4 homes. Es multiplicava per 4 diversos valors per tal d'aconseguir el nombre 50 sumant els resultats.

Valors	Resultat
1	4·1=4
10	4·10=40
2	4·2=8
$\frac{1}{2}$	4·$\frac{1}{2}$=2

Com 40+8+2=50 s'utilitzava els seus precedents, és a dir, els nombres que han estat multiplicats per 4 per obtenir 40,8 i 2. Llavors es sumava 10+2+ $\frac{1}{2}$ =12 + $\frac{1}{2}$

Seguidament es feia el mateix procediment amb la primera part de l'enunciat on es volia repartir 50 pans entre 6 homes. Es multiplicava per 6 diversos valors per tal d'aconseguir el nombre 50 sumant els resultats.

Valors	Resultat
1	1·6=6
2	2·6=12
4	4·6=24
8	8·6=48
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$·6=2

Com 48+2= 50 s'utilitzava els seus precedents, és a dir, els nombres que han estat multiplicats per 6 per obtenir 48 i 2. Llavors es sumava 8 + $\frac{1}{3}$.

Finalment es restaven els dos resultats:

$$12-8+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=4+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=4+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\mathbf{4}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

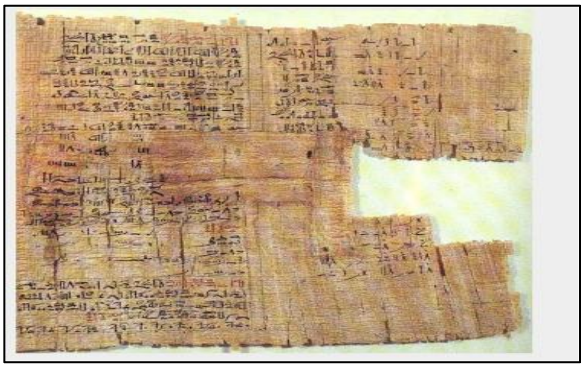
2. Resolució del problema 39 en l'actualitat:

$$x=\frac{50}{4}-\frac{50}{6}=\frac{50\cdot3-50\cdot2}{12}=\frac{50}{12}=4.1666\ldots=\mathbf{4}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

- Resolució del problema 63

➢ ***Repartir 700 fogasses de pa entre quatre homes en parts proporcionals de $\frac{2}{3}$ per al primer , $\frac{1}{2}$ per al segon, $\frac{1}{3}$ per al tercer i $\frac{1}{4}$ per al quart.***

1. Resolució en el Papyrus Rhind (s. XVII aC)



Il·lustració 4: Problema 63 en el Papyrus Rhind

1. Primerament es sumaven les fraccions donades:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

2. Es dividia 1 entre aquesta suma i seguidament es donava el resultat d'una manera més senzilla utilitzant fraccions irreductibles:

$$\frac{1}{\frac{7}{4}}=\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{7}{14}+\frac{1}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$$

3. Es multiplicava aquest nombre per 700:

$$\frac{1}{2}\cdot 700+\frac{1}{14}\cdot 700=400$$

4. S'aplicava a cada fracció:

- $\frac{2}{3}\ de\ 400=266+\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{2}\ de\ 400=200$
- $\frac{1}{3}\ de\ 400=133+\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{4}\ de\ 400=100$

2. Resolució del problema 63 en l’actualitat:

$$K = \frac{700}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}} = 400$$

$$P_1 = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$$

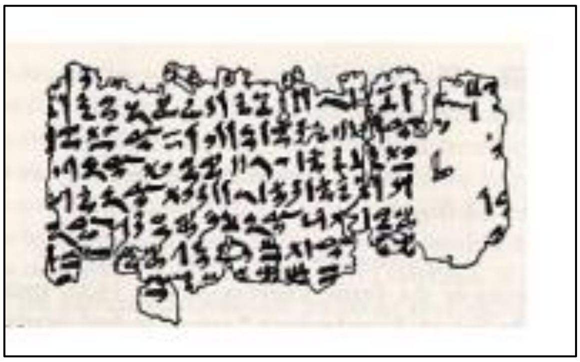
$$P_2 = 400 \cdot \frac{1}{3} = 133 + \frac{1}{3}$$

$$P_3 = 400 \cdot \frac{1}{4} = 100$$

$$P_4 = 400 \cdot \frac{2}{3} = 266 + \frac{2}{3}$$

b) Papyrus de Berlin

El papir de Berlín fou un conjunt de papirs de documents egipcis de l'Imperi Mitjà, datats entre 2160 i 1700 aC, que van ser trobats a principis del segle XIX a la necròpoli de Memfis, Saqqara i que estaven dedicats a l’àmbit matemàtic i mèdic. S’hi podien trobar problemes relacionats amb fraccions, equacions lineals, sistemes d’equacions amb dues incògnites i, dins d’aquestes últimes, una de segon grau.



Il·lustració 5: Papyrus de Berlin

A continuació s’estudiarà amb detall la resolució del problema que conté un sistema d’equacions amb dues incògnites, una d’elles de segon grau.

- Resolució del problema del Papyrus de Berlin

➢ ***L'àrea d'un quadrat de 100 colzes quadrats és igual a la suma de dos quadrats més petits. El costat d'un d'ells és $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ de l'altre. Troba els costats dels quadrats.***

1. Resolució en el Papyrus de Berlin (1500 aC):

Il·lustració 6: Problema en el Papyrus de Berlin

Es suposava que un dels quadrats tenia un costat d'1 colze. Conseqüentment, l'altre seria $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ de colze. Les àrees serien: 1 colze al quadrat pel primer i pel segon el resultat d'elevar al quadrat $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$:

1	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

S'aplicava el mètode de la multiplicació i seria: $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$

ja que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ +\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

La suma de les dues àrees seria: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ de colze.

L'arrel quadrada d'aquesta suma fou: $1+\frac{1}{4}$. Com l'arrel quadrada de 100 era 10, s'havia de buscar un nombre N que multiplicat per $1+\frac{1}{4}$ donés 10.

Valors N	**Resultat**
1	$1+\frac{1}{4}$
2	$2+\frac{1}{2}$
4	5
8	10

El nombre que es buscava era 8. Llavors $x = 8$, és a dir, un quadrat tindria un costat de 8 colzes. Per calcular l'altre quadrat es multiplicava per $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$:

1	8
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2

Llavors l'altre quadrat tindria un costat de 4+2= 6 colzes.

2. Resolució del problema en l'actualitat

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=100 \\ y=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})x \end{array}\right] \longrightarrow x^2+\left[\frac{3}{4}x\right]^2=100$$

$$x^2+\frac{9}{16}x^2=100$$

$$\frac{25}{16}x^2=100$$

$$x^2=\frac{100}{\frac{25}{16}}=64$$

$$x=\pm\sqrt{64}=\pm 8$$

$x=8$ (valor del colze positiu)

$$y=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot 8$$

$$y=\frac{3}{4}\cdot 8$$

$$y=\frac{24}{4}=6$$

R: Un costat val 8 colzes i l'altre 6 colzes.

c) *Papyrus de Moscou*

L’any 1833 **Golenishchev** (1856-1947), va comprar un papir que inicialment duia el seu nom però que, anys més tard, a partir del 1912 en que el va adquirir el Museu de Belles Arts de Moscou, s’anomenaria papir de Moscou.

Il·lustració 7: Papyrus de Moscou

El papir de Moscou, de cinc metres de llarg, contenia vint-i-cinc problemes redactats en escriptura hieràtica i importants dins l’àmbit matemàtic, encara que no se sabia qui el va elaborar i, per tant, tampoc la finalitat per la qual es va fer.

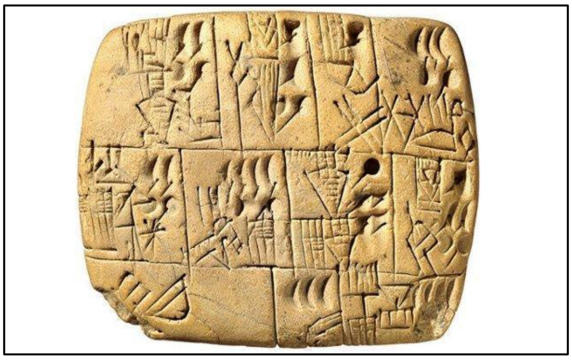
Alguns dels problemes que van mostrar la resolució d’aquelles equacions i per tant de l’àlgebra d’aquella època van ser el problema 19 i 25.

2.1.2 Civilització mesopotàmica

La civilització de mesopotàmia o també anomenada babilònica fou la zona de l'Orient Pròxim situada entre els rius Tigris i Èufrates. En Mesopotàmia, l’àlgebra va aconseguir un nivell considerablement més alt que l’egipci ja que els babilonis van solucionar tant equacions lineals com equacions quadràtiques sense dificultat alguna i algunes equacions cúbiques. El sistema de numeració utilitzat era el posicional i utilitzaven un sistema sexagesimal escrivint els nombres en cuneïforme[2].

[2] **Escriptura cuneiforme:** És un tipus d'escriptura logogràfica i els grafemes utilitzats eren principalment ideogrames, amb alguns pictogrames o signes esquemàtics derivats d'aquests.

Els documents matemàtics que es van conservar de l'època eren tauletes d'argila tova on era imprès el text en una vareta i a continuació eren cuinades en el forn per endurir-les. Aquests documents han estat menys vulnerables al pas del temps que els papirs egipcis, per aquest motiu actualment es disposa d'una major informació de la matemàtica mesopotàmica que de l'egípcia. La majoria de les tauletes amb contingut matemàtic foren exposades a les universitats de Colòmbia, Pennsilvanià i Yale, les quals van ser subministrades per uns jaciments arqueològics de l'antiga ciutat de Nipur.



Il·lustració 8: Tauleta amb contingut matemàtic de l'era mesopotàmica en escriptura cuneïforme

En conclusió podríem afirmar que aquests dos grans focus van ser originaris de l'àlgebra i d'altres avenços matemàtics que coneixem avui en dia i que han anat evolucionant al llarg del pas del temps.

2.2 Època Hel·lènica

Després de la pèrdua d'impuls de l'activitat matemàtica egípcia i mesopotàmica van sorgir noves civilitzacions al llarg de la costa Mediterrània que proporcionaven les seves aportacions i descobriments tant en temes culturals, matemàtics com en altres àmbits. Aquest canvi es va anomenar l'època hel·lènica i es va establir entre els anys 800 aC i 800 dC . A principis d'aquest període una civilització mediterrània va destacar excessivament, especialment en l'àmbit matemàtic, els hel·lènics.

La civilització grega va crear la matemàtica hel·lènica o també anomenada matemàtica grega que es va desenvolupar en quatre etapes que s'adjunten a continuació. Però no hi ha constància d'activitat matemàtica fins al s. VI aC tot i que la matemàtica hel·lènica va introduir el vigor matemàtic en les demostracions, és a dir, es va passar d’un raonament inductiu[3] a un raonament deductiu[4].

PERÍODES DE L’ÈPOCA HEL·LÈNICA

ÈPOCA HÈL·LENICA
800 aC-800 dC

- ÈPOCA JÒNICA (800 -500 aC)
- ÈPOCA HERÒICA (500 - 400 aC)
- ÈPOCA HELENISTA (400 - 325 aC)
- ÈPOCA ALEXANDRINA (325 aC- 800 dC)

2.2.1 Època Jònica (800 - 500 aC)

L’època jònica fou el primer període de l’època hel·lènica. Durant aquesta època van destacar dos grans matemàtics els quals van fer importants aportacions a les matemàtiques i a l’àlgebra i destacarem a continuació: Tales de Milet i Pitàgores de Samos.

Tales de Milet (635 - 545 aC) va ser el primer matemàtic en demostrar les seves afirmacions. Va destacar principalment en l’àmbit matemàtic tot i que també ho va fer en el filosòfic, en el físic i en el legislatiu. Les seves aportacions estaven relaciones amb la geometria deductiva de tal manera que va crear cinc teoremes geomètrics que encara s’utilitzen en l’actualitat.

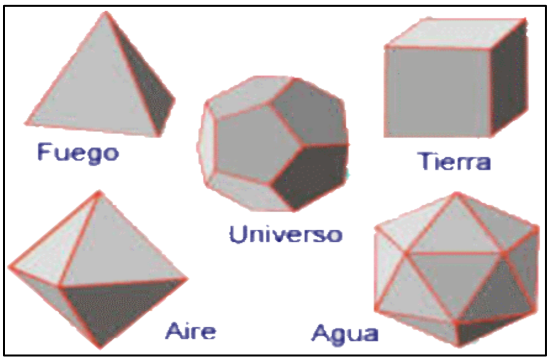
Pitàgores de Samos (580 - 507 aC) va ser un filòsof i matemàtic grec, considerat el primer matemàtic pur. Va contribuir de manera significativa en l'avenç de la matemàtica hel·lènica, la geometria i l'aritmètica derivada especialment de les relacions numèriques. Alguna de les seves aportacions va ser la creació de la taula de multiplicar, la creació del seu propi teorema, el descobriment dels nombres irracionals

[3] **Raonament inductiu:** Repetides observacions usades per establir reptes generals

[4] **Raonament deductiu:** Repetides observacions usades per establir un repte menys ampli o concret.

i la introducció de la demostració com un recurs matemàtic. També cal destacar el perfeccionament que van fer a l'àlgebra i va resoldre equacions mitjançant mètodes geomètrics (àlgebra geomètrica). La tradició matemàtica de l'escola pitagòrica va ser com utilitzar la Teoria de la Proporció com el mètode bàsic per a les seves demostracions i exposicions matemàtiques.

Un altre fet destacable del seu pas va ser la construcció de figures còsmiques, associava els quatre elements primaris: foc, terra, aire i aigua, amb els quatre poliedres: tetraedre, cub, octaedre i icosàedre, respectivament, mentre que el dodecaedre l'utilitzava com a símbol general de l'univers i feia una representació de l'univers harmònic.

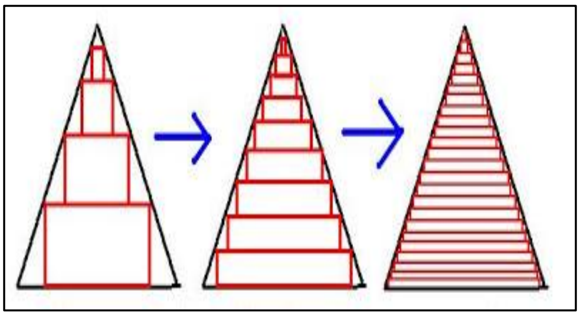


Il·lustració 9: Figures còsmiques

2.2.2 Època Heròica (500 - 400 aC)

En aquest període, Atenes va atreure a pensadors de tot el món grec fascinats per la recerca del coneixement. L'estudi no va respondre a la necessitat de resoldre problemes pràctics, sinó a la de desenvolupar una activitat intel·lectual en sí mateixa. Aquesta passió a la saviesa els va conduir a l'estudi de qüestions teòriques.

Un dels pensador que va destacar va ser el filòsof presocràtic i matemàtic grec **Demòcrit d'Abdera** (460 - 360 aC). La seva aportació va ser *'el mètode infinitesimal'* o *'el mètode de descompondre un problema en infinits passos'*. El càlcul infinitesimal va sorgit degut a què l'àlgebra era insuficient per resoldre certs problemes en l'àmbit científic i de l'enginyeria. Aquest càlcul es va construir a partir de l'àlgebra, la trigonometria i la geometria analítica i va incloure dos camps principals, el càlcul diferencial i el càlcul integral, que estaven relacionats pel teorema fonamental del càlcul.



Il·lustració 10: Càlcul infinitesimal

2.2.3 Època Hel·lenista (400 - 325aC)

En aquesta època tan breu hi van destacar dos personatges que van deixar una impremta en les matemàtiques i que encara se’ls coneix avui en dia: Plató i Aristòtil.

Plató (428 - 347 aC) un filòsof que aplicava l’estudi previ de les matemàtiques per poder estudiar la filosofia. Algunes de les seves aportacions van tenir a veure amb la lògica i amb el descobriment d’algunes àrees matemàtiques. El seu descobriment més important va ser un tractat on es relacionava la triangulació i els cossos còsmics. També va fer canvis en l’àlgebra per tal de millorar-la i modernitzar-la, aquest fet es va produir en la seva fomentació de l’educació geomètrica a les escoles ja que en aquesta època l’àlgebra era geomètrica.

Aristòtil (384 -322 aC) fou el primer i el més gran sistematitzador de la lògica en tota la història intel·lectual europea. Va destacar en l’àmbit lògic, matemàtic, filosòfic i biològic. Aquesta lògica la va aplicar a les matemàtiques i va donar lloc a la lògica matemàtica que fou la disciplina que tractava de mètodes de raonament. En un nivell elemental, la lògica proporcionava regles i tècniques per determinar si és o no valgut un argument donat. El raonament lògic s'emprava en matemàtiques per demostrar teoremes.

2.2.4 Època Alexandrina (325 aC – 800 dC)

L'època alexandrina fou l'últim període de l'època hel·lènica, tot i que va ser el període de temps més llarg ja que va tenir una durada d'uns 13 segles aproximadament. En aquest temps hi van haver molts matemàtics tot i que la majoria feien unes aportacions mínimes. A continuació destacarem els dos matemàtics que més van destacar: Euclides i Diofant d'Alexandria.

Euclides (330 -275 aC) fou un matemàtic grec, conegut avui en dia com "el pare de la geometria". Un dels factors que va condicionar que es fes conegut fou la creació del seu llibre '*Els Elements*'. Aquet llibre es va fer amb l'objectiu de reunir tota la informació matemàtica possible i posar-la junta de manera coherent i ordenada per a que es pogués utilitzar com a una referència. Aquest llibre es va dividir en tretze llibres la majoria dels quals parlen de geometria tant plana (relacionada amb els punts, segments, tipus de línies, angles, polígons i cercles) com d'espacial (poliedres i cossos redons). Els llibres II, V, VI, X tractaven sobre l'àlgebra i els VII, VIII, IX tractaven sobre l'aritmètica.

El llibre II era quasi completament algebraic però, a diferencia de l'àlgebra actual, que és simbòlica, l'àlgebra de *'Els Elements'* era una àlgebra geomètrica. En el contingut del llibre II de *'Els Elements'* s'estudiaren les transformacions d'àrees i àlgebra geomètrica grega de l'Escola Pitagòrica.

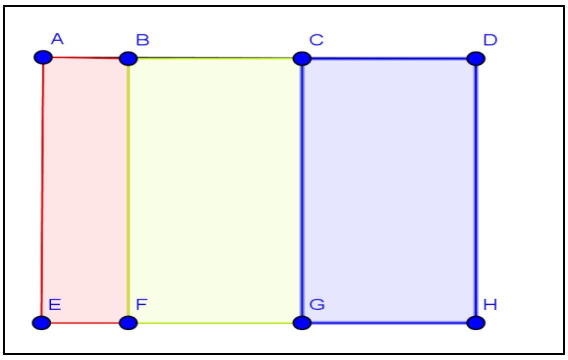
Il·lustració 11: Fragment de 'Els *Elements*' d'Euclides

Les onze primeres proposicions d'aquest llibre es van considerar propietats algebraiques, si en comptes de segments fossin quantitats. Aquestes proposicions del llibre II van ser:

<u>Proposició 1</u>: Si hi ha dues rectes i una d'elles es tallada per un nombre qualsevol de segments, el rectangle comprés per les dues rectes és igual als rectangles compresos per la recta no tallada i cada un dels segments.

- $a \;\; b+c+d \;\; = ab+ac+ad$

Avui en dia és coneguda com la propietat distributiva de la multiplicació respecte la suma.



Il·lustració 12: Proposició 1 del llibre II de *'Els Elements'* d'Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

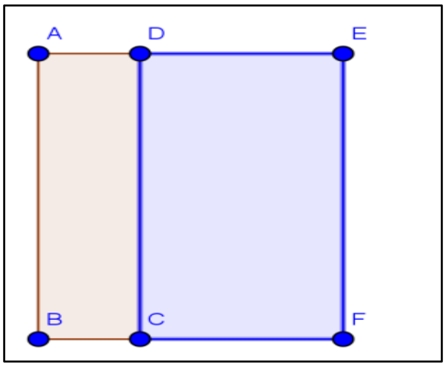
Sent AE=a; AB=b ; BC= c; CD=d

<u>Proposicio 2</u>: Si es talla a l'atzar una línia recta, el rectangle comprés per la recta sencera i cada un dels segments, és igual al quadrat de la recta sencera.

- $a+b \;\; a+ \;\; a+b \;\; b = (a+b)^2$

Es tracta sobre la identitat notable de $(a+b)^2$. Utilitzant l'àlgebra simbòlica inicial i segons la proposició 4:

- $a+b \;\; a+ \;\; a+b \;\; b = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$



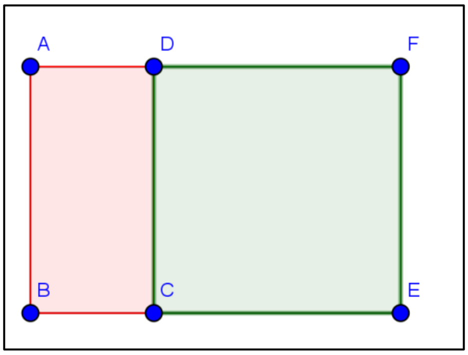
Il·lustració 13: Proposició 2 del llibre II de *'Els Elements'* d'Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

Sent AB=$a + b$; AD=a; DE=b

<u>Proposició 3</u>: Si es talla a l'atzar una línia recta, el rectangle comprés per la recta sencera i cada un dels segments, és igual al rectangle comprés pels segments i el quadrat del primer segment.

- $a + b \;\; a = a^2 + ab$

Propietat distributiva de la multiplicació respecte la suma.



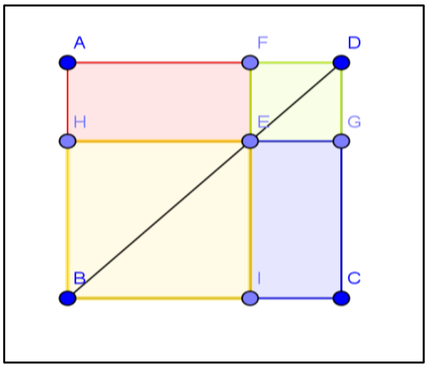
Il·lustració 14: Proposició 3 del llibre II de *'Els Elements'* d'Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

Sent AB=a ; AD=b ; DF=a

<u>Proposició 4</u>: Si es talla a l'atzar una línia recta, el quadrat de la recta sencera és igual als quadrats dels segments i dos vegades el rectangle comprés pels segments.

- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Es torna a repetir la identitat notable.



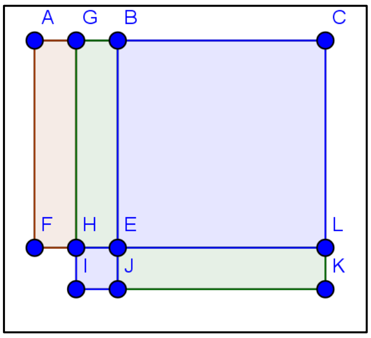
Il·lustració 15: Proposició 4 del llibre II de *'Els Elements'* d'Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

Sent AD= AB= $a + b$; FD=a; HB= b

<u>**Proposició 5**</u>: Si es talla una línia recta en segments iguals i desiguals, el rectangle comprés pels segments desiguals de la recta sencera junt amb el quadrat de la recta que està entre els punts de secció, és igual al quadrat de la mitat.

- $a + b \cdot a - b + b^2 = a^2$ ó $a + b \cdot a - b = a^2 - b^2$

Equival a passar de l'expressió retòrica a la identitat algebraica suma per diferència igual a diferència de quadrats.



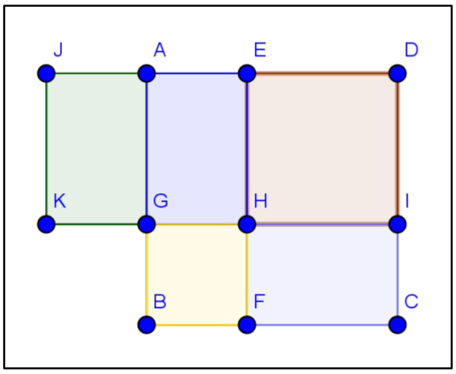
Il·lustració 16: Proposició 5 del llibre II de *'Els Elements'* d'Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

Sent GC=GI=a ; AG=HI= b

<u>Proposició 6</u>: Si es divideix en dues parts iguals una línia recta i s'afegeix, en la línia recta una altra recta; el rectangle comprés per la recta sencera amb la recta afegida i la recta afegida amb el quadrat de la meitat és igual al quadrat de la recta composta per la meitat i la recta afegida.

- $2a + b \;\; b + a^2 = (a + b)^2$

Es va resoldre el problema mitjançant la proposició 4 i la propietat distributiva de la multiplicació respecte la suma.



Il·lustració 17: Proposició 6 del llibre II de *'Els Elements'* d'Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

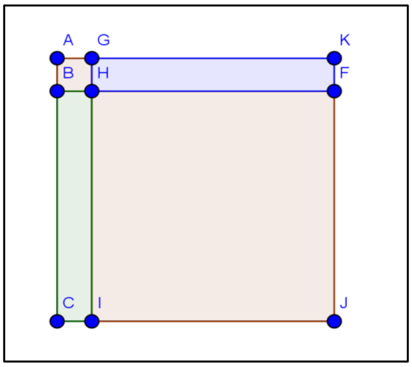
Sent JA=AE=GB=a ; ED=DI=b

<u>Proposició 7</u>: Si es talla a l'atzar una línia recta, el quadrat de la recta sencera i el d'un dels segments presos conjuntament són iguals a dos vegades el rectangle comprés per la recta sencera i el segment conegut més el quadrat del segment restant.

- $(a + b)^2 + a^2 = 2 \;\; a + b \;\; a + b^2$

Utilitzant l'àlgebra inicial i la proposició 4 (identitat notable):

$$2 \;\; a + b \;\; a + b^2 = 2a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (a + b)^2$$



Il·lustració 18: Proposició 7 del llibre II de *‘Els Elements’* d’Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

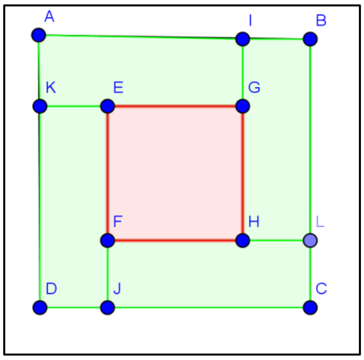
Sent AB=AG=a; GK=BC=b

<u>Proposició 8</u>: Si es talla a l’atzar una línia recta, quatre vegades el rectangle comprés per la recta sencera i un dels segments junt amb el quadrat del segment que queda és igual al quadrat construït a partir de la recta sencera i del segment ja conegut, presos com una sola recta.

- $4\,(a+b)\cdot a+b^2=\big((a+b)+a\big)^2$

Mitjançant l’àlgebra simbòlica inicial i segons la proposició 4:

$$\big((a+b)+a\big)^2=(a+b)^2+a^2+2\,(a+b)\,a=a^2+2ab+b^2+a^2+2a^2+$$
$$+2ab=4a^2+4ab+b^2=4\,(a+b)\,a+b^2$$



Il·lustració 19: Proposició 8 del llibre II de *‘Els Elements’* d’Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

Sent EK=AK=FJ=IB=a ; EG=b

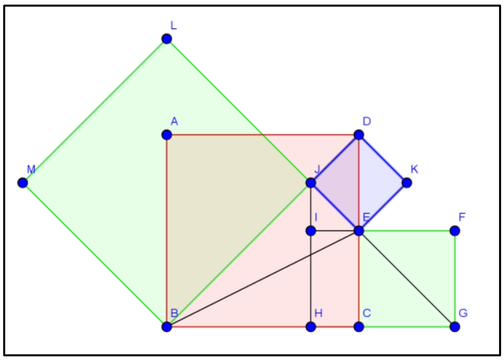
<u>Proposició 9</u>: Si es talla una línia recta en parts iguals i desiguals, els quadrats dels segments desiguals de la recta sencera són el doble del quadrat de la meitat més el quadrat de la recta situada entre els punts de secció.

Ens va ensenyar a resoldre un problema mitjançant el teorema de Pitàgores i bé la proposició 4 o bé mitjançant l'àlgebra simbòlica inicial i la proposició 4:

1. Mitjançant el teorema de Pitàgores i la proposició 4 ho van resoldre:

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2+(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2=\mathrm{a}^2+2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2+\mathrm{a}^2-2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2=2\mathrm{a}^2+2\mathrm{b}^2=2(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)$$



Il·lustració 20: Proposició 9.1 del llibre II de *'Els Elements'* d'Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

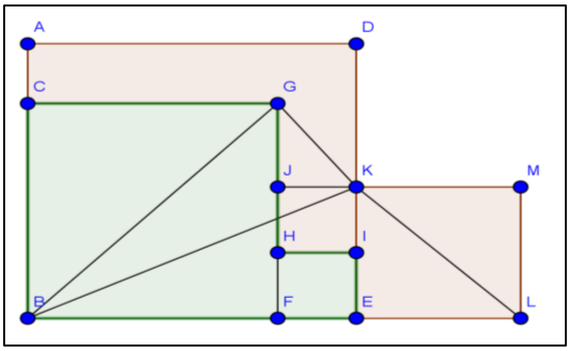
Sent BC=DC=a; JI=IE=b; LMBJ= $2a^2$; DKEJ=$2b^2$

2. Geomètricament segons el contingut de la proposició:

$$a^2+b^2=2\ \frac{a+b}{2}{}^{2}+\ \frac{a+b}{2}-b\ {}^{2}$$

Utilitzant l'àlgebra simbòlica inicial i la proposició 4:

$$2\ \frac{a+b}{2}{}^{2}+\frac{a+b}{2}-b\ {}^{2}\ =2\ \frac{(a+b)^2}{4}+\frac{(a-b)^2}{4}\ =2\ \frac{2a^2+2b^2}{4}\ =2\ \frac{2(a^2+b^2)}{4}\ =a^2+b^2$$



Il·lustració 21: Proposició 9.2 del llibre II de *'Els Elements'* d'Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

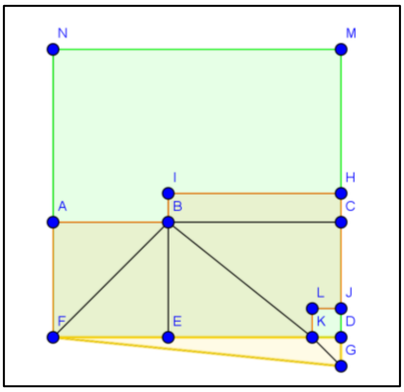
Sent BF=FL=a; FE=b $\longrightarrow$ 2CGFB+ 2HIEF=ADEB+KMLE

<u>Proposició 10</u>: Si una línia recta es divideix en dues parts iguals i se li afegeix a la línia recta, una altra recta; el quadrat de la recta sencera amb la recta afegida i el quadrat de l'afegida, presos conjuntament, són el doble del quadrat de la meitat i el quadrat constituït a partir de la recta composta per la meitat i la recta afegida, preses com una sola recta.

- $(2a+b)^2+b^2=2\ a^2+(a+b)^2$

Mitjançant l'àlgebra simbòlica inicial i la proposició 4.

$$2\ a^2+(a+b)^2\ =2\ a^2+a^2+2ab+b^2\ =4a^2+4ab+2b^2=4a^2+4ab+b^2+b^2=$$
$$=(2a+b)^2+b^2$$



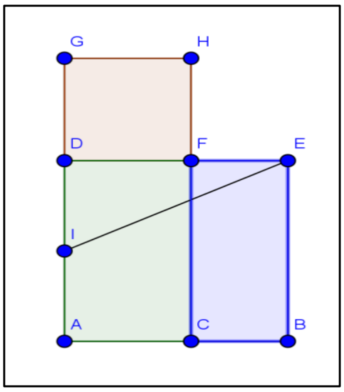
Il·lustració 22: Proposició 10 del llibre II de *'Els Elements'* d'Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

Sent FE=EK=a; KD=LK=b $\longrightarrow$ NMDF+ LJDK= 2ABEF+ 2IHDE

<u>Proposició 11</u>: Dividir una recta de tal forma que el rectangle comprés per la recta sencera i un dels segments sigui igual al quadrat del segment que queda.

La seva solució va ser aïllada a través del teorema de Pitàgores.

$a \;\; a-x \;\; = x^2$



Il·lustració 23: Proposició 11 del llibre II de *‘Els Elements’* d’Euclides (Dibuix fet amb Geo-gebra)

Sent AB=DA=a ; GD=DF= x→ GHFD= FEBC

Diofant d’Alexandria (200 - 284), un matemàtic grec que fou considerat el ‘pare de l’àlgebra’. Se’l va denominar d’aquesta forma perquè se li va atribuir la introducció del càlcul algebraic en les matemàtiques i la seva obra va influir notablement en els matemàtics europeus del s. XVII i va servir de base a tres importants corrents de la matemàtica superior: la geometria analítica, l’àlgebra moderna i la teoria dels nombres. També es va tenir en compte la seva superior habilitat en el càlcul, va aconseguir donar una col·lecció de problemes resolts sense recórrer a la presentació geomètrica emprada per Euclides. Va crear la seva pròpia àlgebra, anomenada ‘Àlgebra sincopada’. Aquesta va ser la segona fase de la historia de l’àlgebra, fou caracteritzada per abreviacions en les incògnites. Diofant només s’interessava en solucions racionals i exactes.

El seu llibre més important fou ‘*Aritmètica*’ que no fou pròpiament un text d’àlgebra sinó una col·lecció d’uns 189 problemes referents a aplicacions de l’àlgebra. Tot i que constava de tretze llibres només se n’han conservat sis. En aquesta obra va realitzar els seus estudis d'equacions amb variables que tenen un valor racional - (equacions diofàntiques) detallades en el capítol 3.2.3 - , encara que no fou una obra de caràcter teòric sinó una col·lecció de problemes. També va contribuir en l'àmbit de la notació ja que va introduir novetats en els símbols .

La diferència principal entre l'àlgebra sincopada de Diofant i la notació algebraica moderna era que la primera utilitzava una certa simbologia però, que no contia totes les característiques de l'àlgebra simbòlica; per exemple:

L'expressió algebraica: $x^3 - 2x^2 + 10x - 1 = 5$, Diofant l'hauria escrit de la forma següent: K^V āς τΨΔ^V βM āίσ Mε.

A continuació hi trobem la taula on relaciona els símbols utilitzats per Diofant i el seu significat:

Símbol	Representació
K^V	representa la tercera energia
Ā	Representa 1
ς	Representa una quantitat desconeguda
T	Representa 10
Ψ	Representa la substracció de tot el que segueixi fins ίσ
Δ^V	Representa la segona energia
β	Representa 2
M	Representa la energia zero, un terme constant
Ίσ	Representa 'igual'
E	Representa 5

S'observa que els coeficients es troben després de les variables i que la suma es representa per la juxtaposició de termes. Una traducció literal del símbol-para-símbol de l'equació sincopada de Diofant en una equació simbòlica moderna seria la següent:

$$x^3 1\, x 10 - x^2\, 2 x^0 1 = x^0 5$$

Si s'expressa amb parèntesi i el signe més de la suma, llavors l'equació anterior es podria escriure com:

$$x^3 1 + x 10 \; - \; x^2 2 + x^0 1 \; = x^0 5$$

En l'apartat 3.2.3 es detalla com Diofant va utilitzar condicions geomètriques i un llenguatge aritmètic per resoldre problemes d'equacions lineals i quadràtiques.

2.2.5 Final de l'Època Hel·lènica

La matemàtica grega no va mantenir un nivell matemàtic gaire alt ja que després d'aquest meravellós període (època alexandrina) es va produir una època de decadència que no es va recuperar fins a 'l'edat de plata' anomenada també l'edat alexandrina tardana que va tenir lloc entre els anys 250 i 350 dC .

2.3 Edat Potàmica

L'edat potàmica es va desenvolupar en tres àmbits diferents: a Aràbia, a Xina i a l'Índia. Tot i que aquestes civilitzacions van ser creades abans de les civilitzacions greges i romanes la informació que si va trobar era poc fiable. Per això podem dir que van ser conegudes a l'edat potàmica als segles del IX- XI on hi trobem personatges i avenços coneguts i la informació ja era fiable.

2.3.1 Civilització xina

El primer àmbit que va destacar va ser la Xina. El document que s'ha trobat més antic s'anomena '*Chou Pei Suan Ching'*. Va ser escrit entre els anys 1200 aC- 300 aC per diversos autors. En aquest llibre s'hi observaven demostracions del teorema de Pitàgores.

Il·lustració 24: Fragment de ‘*Chou Pei Suan Ching*’

També es va trobar una altra obra posterior ‘*Chui Chang Suan*’ *(‘els Nou llibres o Capitols vers l’Art matemàtic’)*(220 - 200 aC) on hi havia 246 problemes resolts que tractaven sobre diversos aspectes matemàtics, alguns d’ells algebraics.

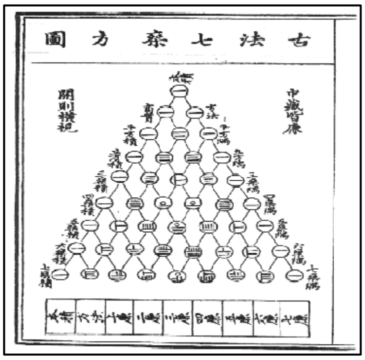
Il·lustració 25: Fragment de ‘*Chui Chang Suan*’

El sistema de numeració era posicional i de base 10. Les jerarquies de les operacions eren les habituals tot i que cal destacar que en la divisió de fraccions s’operaven per tal d’aconseguir un mateix denominador. Determinaven l’existència de nombres negatius tot i que segons ells mai van poder ser la solució d’una equació.

Una altra aportació important en l’àlgebra fou la regla de resolució de sistemes d’equacions lineals. Aquest mètode fou molt similar al que avui en dia es coneix com el mètode de Gauss. **Chou Shih- Chieh** va desenvolupar el "mètode de l'element celeste" on permetia trobar arrels no només senceres, sinó també racionals, i fins i tot aproximacions decimals per a equacions de quart grau o superiors. El mètode de l'element celeste va ser equivalent al que a Occident anomenem "mètode de

Horner".[5]En l'apartat 3.2.4 es detalla com va estudiar aquest matemàtic xinés el valor de la incògnita per resoldre una equació de segon grau.

Un altre gran descobriment va ser la suma de progressions desenvolupat per **Chon Huo** (s. XI) i **Yang Hui** (s.XIII). Aquests elements estaven col·locats en una forma d'arbre anomenat "mirall preciós" de manera similar al que avui coneixem com triangle de Tartàglia o Pascal.



Il·lustració 26: Mirall preciós

Després de tot aquest seguit d'aportacions, la Xina al s. XIV va sofrir un període d'estancament.

2.3.2 Civilització àrab

En el s. VIII l'àlgebra en la civilització àrab va introduir grans avenços com la introducció i la millora dels símbols del sistema numèric hindú i la notació posicional. També la utilització dels irracionals de la mateixa manera que ho feien els hindús. Per acabar van rebutjar els nombres negatius tot i que sabien sobre la seva existència i en van saber l'ús a traves de les seves regles d'operació.

Uns dels matemàtics més importants de l'àlgebra musulmana i sobre tot de l'àlgebra mundial va ser **Mohammed ibn-Musa Al-Khwariuzmi** (780-850) , que es pot dir va ser el pare de l'àlgebra i el matemàtic més important de la seva època.

[5] **Mètode Horner:** el mètode Horner és un alogaritme que proposa una manera d'avaluar els polinomis descrits com una suma de monomis. Anys més tard, es va convertir en el mètode Ruffini, el matemàtic que el va crear va viure 500 anys més tard i, aquest mètode consisteix en avaluar de manera eficient polinomis de forma monomial.

En la seva obra ‘*Al-jabr w´al muqâbala*’ o ‘*L’art per resoldre equacions*’, va intentar resoldre equacions de primer, segon i de grau major així com problemes algebraics i també va explicar les tradicions algebraiques babilòniques, gregues i índies i les influencies que van afectar a l’àlgebra. El llenguatge que va utilitzar va ser molt senzill i tothom ho podia entendre. En el llibre ‘*Algorithmi de numero indorum’,* Al-Khwariuzmi tenia una única finalitat, introduir el sistema de numeració posicional de l’Índia. En l’apartat 3.2.5 es detalla els estudis d’aquest matemàtic àrab.

Il·lustració 27: Fragments d’ ‘*Hisab Al-jabr w’al-muqabala*’

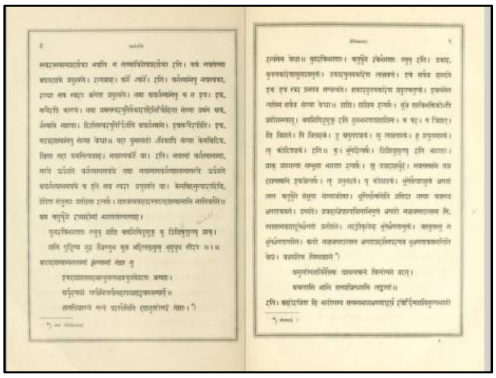
Després d’aquest període es va produir una petita decadència.

2.3.3 Civilització hindú

Es va desenvolupar diversos avenços algebraics, trigonomètrics, de càlcul, d’astronomia i d’escriptura. La primera aportació que van fer estava relacionada amb les multiplicacions, però es tenia molt poca informació ja que el paper que utilitzaven per escriure els seus coneixements era d’una material poc durable o ho feien amb petites pissarres o amb taules de farina.

L’obra matemàtica en l’Índia ha mostrat una manca de motivació i justificació ja que al realitzar els seus escrits mai es van preocupar pel rigor matemàtic, ni tan sols donaven el perquè s’arribava a un resultat determinat.

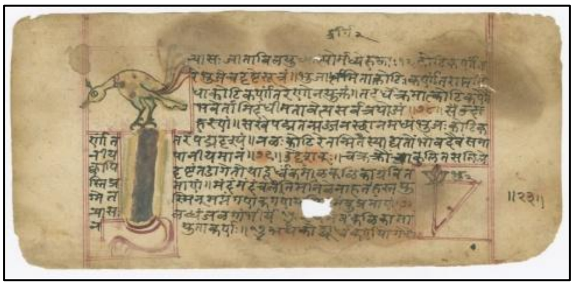
La forma algebraica hindú s'anomenava Bijaganitam que significava altra matemàtica. Un dels primers personatges va ser **Arybhata** (476 - 550) qui va escriure l'obra *'Arybhatiya'* on va fer una aproximació al nombre pi, parlava sobre la notació posicional però no atribuïa cap símbol al 0, tractava equacions indeterminades i pel que fa referent a l'àlgebra, donava resultats elegants en la suma de sèries matemàtiques de quadrats i cubs.



Il·lustració 28: Fragment de l' '*Aryabhatiya*'

Sridhara (s. X) va ser un matemàtic hindú i va escriure dos llibres d'aritmètica. Va descobrir la fórmula per resoldre l'equació de segon grau, és a dir, per extreure les arrels de l'equació.

Un altre matemàtic i astrònom hindú va ser el conegut **Bhaskara II** (1114 - 1185) qui va escriure diversos llibres però calia destacar el '*Bījagaṇita*' on es parlava d'àlgebra. Va demostrar el teorema de Pitàgores des de diferents perspectives i va donar solucions a equacions indeterminades lineals de segon, tercer i quart grau. Una altra aportació que va fer és que si es divideix u entre zero la solució serà infinit.



Il·lustració 29: Fragment del '*Bījagaṇita*'

2.4 Segles XII-XIII

En aquests segles cal destacar a un matemàtic de gran rellevància: Leonardo de Pisa.

Leonardo de Pisa (1170 - 1250) també va ser conegut com Leonardo Fibonacci. La seva principal aportació a les matemàtiques va ser la successió de Fibonacci, així com també van ser la creació d'un sistema de numeració o la peculiar manera d'operar diverses xifres per obtenir-ne el resultat.

En un dels seus llibres, '*Flor de solucions de certes qüestions relatives als números i a la geometria',* s'observen resolts tres problemes que li foren proposats per Teodoro, un matemàtic de la cort de Federic II.

Dos dels problemes que li van ser proposats a continuació es detallen:

- ***Trobar un número del qual el seu quadrat, al sumar-li o restar-li cinc, doni altres quadrats.***

Fibonacci ho va resoldre a partir de la seva identitat.

La identitat de Fibonacci era:

$$m^2+n^2 \quad \pm 4mn \quad m^2-n^2 \quad = (m^2-n^2 \pm 2mn)^2$$

Si m i n fossin dos nombres enters tal que $4mn(m^2-n^2)=5$ la solució seria entera, però no era així, no existeixen aquests nombres. A continuació es demostren les solucions racionals.

Es dividia ambdós membres de la igualtat per p^2:

$$\frac{m^2}{p}+\frac{n^2}{p} \quad {}^{2} \pm \frac{4mn\,(m^2-n^2)}{p^2} = \quad \frac{m^2}{p}-\frac{n^2}{p} \pm \frac{2mn}{p} \quad {}^{2}$$

Si $4mn(m^2-n^2)=5p^2$ necessàriament p^2 era múltiple de 4 per simplificar-ho i $p=2q$ ja que hi ha un 2 al numerador. Es resoldria d'aquesta manera:

$$4mn \quad m^2-n^2 \quad = 5\cdot 4q^2 \longrightarrow \quad mn \quad m^2-n^2 \quad = 5q^2$$

Un dels factors del primer membre havia de ser un múltiple de 5 per poder-ho simplificar. Per exemple $m = 5$, llavors es resoldria i quedaria $n\ 25 - n^2\ = q^2$ ja que els dos 5 van ser simplificats. El primer valor que compleix aquesta equació era $n = 4$: $4(25 - 16) = 36$. Conseqüentment, $q =\ 6\ i\ p = 12$. El nombre buscat era:

$$\frac{m^2}{p} + \frac{n^2}{p} = \frac{25}{12} + \frac{16}{12} = \frac{41}{12} = 3 + \frac{5}{12}$$

- ***Trobar un numero x on es compleixi x^3-2x^2+10x=20.***

Fibonacci va demostrar que les arrels de l'equació no es podien representar amb regle i compàs. Va trobar una solució aproximada a traves d'una fracció sexagesimal amb sis xifres que actualment seria $x = 1.368807874148$ i que fou la millor aproximació d'una arrel irracional d'una equació algebraica aconseguida fins aquell moment.

Però tot i això Fibonacci fou majoritàriament conegut per la successió que duu el seu nom i no per la resolució d'aquests problemes.

En conclusió, a partir d'aquesta edat potàmica s'havien afegit a les matemàtiques i l'àlgebra noves aportacions semblants a les que s'utilitzen el l'actualitat. A més a més podem veure la diferència entre la manera d'operar anterior i la que es produeix al s. XIII i sembla que sigui un altra cosa totalment diferent ja que no s'assembla en res.

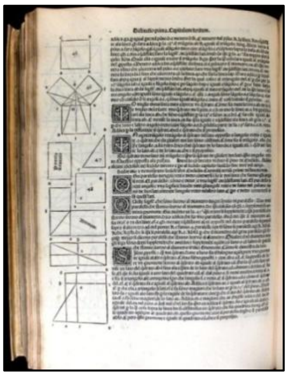
2.5 Època Moderna

Des de Leonardo de Pisa fins a finals del s. XV es va produir una època de decadència en l'àlgebra, tot i que alguns professors explicaven de manera pública aquesta ciència i es van produir les traduccions d'alguns llibres àrabs.

L'època moderna començà en el s. XV i en aquest segle sorgeix un moviment cultural, intel·lectual i científic que va marcar un pas de l'època medieval a l'època moderna anomenat Renaixement. Seguidament es van produir quatre segles on van destacar abundants aportacions que van convertir la ciència de l'àlgebra en una de les més destacades i evolucionades.

2.5.1 Segle XV

El matemàtic italià **Luca Pacioli** (1445-1514) va escriure el llibre '*La Summa'* que estava dividit en quatre parts. Una d'aquestes parts va ser l'àlgebra on hi estaven resoltes equacions de primer i segon grau amb la simbologia d'abreviatures de l'àlgebra sincopada (m restar i p sumar) tot i que utilitzava també una simbologia italiana (co= incògnita i ce=quadrat de la incògnita). Ell creia que les equacions de tercer grau no es podien resoldre de manera algebraica.

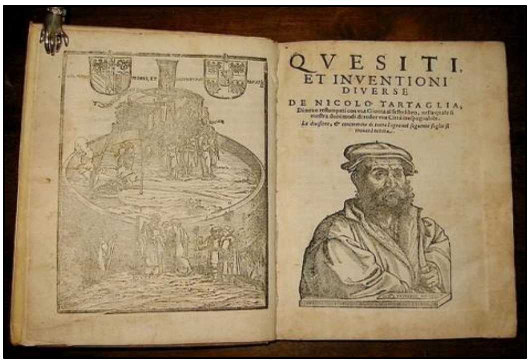


Il·lustració 30: Llibre *'La summa'* de Pacioli

2.5.2 Segle XVI

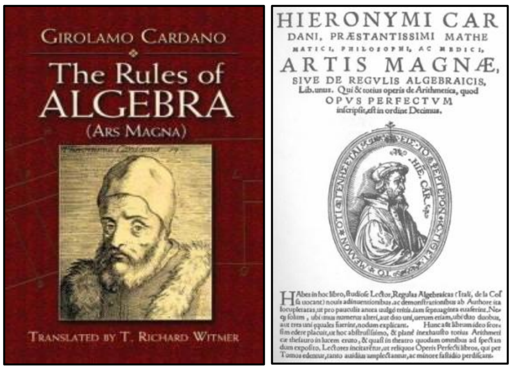
En el s. XVI es van produir importants canvis en la historia de l'àlgebra. Els personatges que van fer-les eren de l'oest d'Europa més concretament de França i d'Itàlia. Aquests foren: Scipione del Ferro –apartat 3.3.2-, Girolamo Cardano, Niccolo Tartàglia i Rafael Bombelli – apartat 3.3.2-.

Niccolo Fontana (Tartàglia) (1499-1557) fou un matemàtic italià. Va resoldre equacions de tercer grau i va aïllar la fórmula. Aquesta li fou comunicada a Cardano després d'un jurament de silenci, tot i que després ell el va trencar apropiant-se d'aquesta fórmula i el seu descobriment. A més a més, va participar en el descobriment del volum del tetraedre. L'obra que més va destacar en l'àmbit matemàtic fou '*La travagliata invenzione*' (1551) on es tractava les equacions cúbiques. Va crear el triangle de Tartaglia, un esquema matemàtic utilitzat per a resoldre binomis elevats a n mitjançant nombres combinatoris.



Il·lustració 31: 'La travagliata invenzione' Tartàglia

Girolamo Cardano (1501-1576) fou metge, astròleg, filòsof a part d'un conegut matemàtic italià. Fou el primer en publicar la manera de resoldre les equacions de tercer i de quart grau en el seu llibre '*Ars magna'* que fou publicat al 1545. El que va descobrir la solució per les equacions de tercer grau fou **Niccolo Tartaglia**, aquest li digué a Cardano de manera secreta però Cardano va trencar el pacte i va publicar el llibre amb el seu nom. La fórmula per resoldre l'equació cubica es detalla en l'apartat 3.3. Les equacions de quart grau també estaven resoltes però la solució l'havia aïllat **Lodovico Ferrari** (1522-1565), deixeble de Cardano. En l'apartat 3.3.2 es detalla el procés seguit per trobar la solució d'una equació de 4t grau i com va treballar quan la seva solució implicava l'arrel quadrada d'un nombre negatiu – capítol 3.4-.

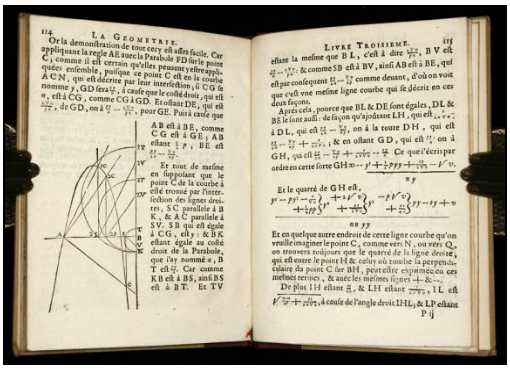


Il·lustració 32: *'Ars Manga'* de Cardano

2.5.3 Segle XVII

En aquest segle els matemàtics que van fer aportacions a l'àlgebra eren de Gran Bretanya i França. Els dos que més van destacar foren: René Descartes i Isaac Newton.

René Descartes (1596-1650) fou un filòsof, matemàtic i físic francès. Va establir una relació entre l'àlgebra i la geomètrica creant, així mateix, la geometria analítica. També va crear el sistema de coordenades cartesianes, on es podia representar qualsevol punt en el pla. A més a més, fou el primer en utilitzar una notació exponencial i utilitzar el signe infinit. Una aportació important de René Descartes a l'àlgebra estava relacionada amb els canvis dels símbols per representar les incògnites, les operacions i les potències algebraiques. Aquest fet es pot observar en el llibre III de '*La Géométrie'* (1637) i s'assemblava bastant a un text modern d'àlgebra. En aquest llibre es va veure reflectida la geometria analítica creada per ell, on hi havia una geometria en forma d'aritmètica i també la traducció de formes geomètriques en les equacions algebraiques.



Il·lustració 33: '*La* Géométrie' de Descartes

En aquest llibre va quedar establerta la regla dels signes de Descartes que fou un teorema que va determinar el número d'arrels positives i negatives. Segons aquesta regla s'havien de col·locar els coeficients de forma decreixent atenent al grau de cada coeficient. Llavors les arrels positives de l'equació era igual a la quantitat de canvis de signe que hi havia al llarg d'aquesta. Si l'equació era $x^3 + x^2 - x - 1$ es podia observar que només es produïa un canvi de signe, per tant només hi hauria una arrel positiva. Les arrels negatives es determinaven canviant de signe els coeficients amb un exponent imparell i observaven la quantitat de canvis de signe que s'havia fet al llarg d'aquesta. Si l'equació fos $x^3 + x^2 - x - 1$ es transformaria a $-x^3 + x^2 + x - 1$ per tant observaven dos canvis de signes i hi hauria dues arrels negatives.

Isaac Newton (1642- 1727) fou un físic, filòsof, teòleg, inventor, alquimista i matemàtic anglès. Va destacar sobretot en l'àmbit científic tot i que va fer una important aportació a l'àlgebra: va crear el binomi de Newton. Fou un algoritme que va permetre calcular una potència qualsevol d'un binomi, per a això s'utilitzaven els coeficients binomials $\binom{n}{k}$ i representava el nombre de vegades que aquest element k es agafat a partir d'un conjunt de n elements, que no eren més que una successió de nombres combinatoris. El teorema del binomi de Newton s'expressava:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

2.5.4 Segle XVIII

En aquesta època es van fer diverses aportacions a l'àmbit científic, filosòfic, astronòmic però calia destacar també importants novetats en l'àmbit matemàtic. El matemàtic més important va ser Leonhard Euler.

Leonhard Euler (1707-1783) fou un matemàtic i físic suís. Va destacar en l'àmbit matemàtic majoritàriament, va fer moltes aportacions i fins i tot va crear alguna branca de les matemàtiques.

Va ser el primer en utilitzar la lletra e per denotar la base dels logaritmes neperians. Euler va utilitzar la lletra e per referir-se al nombre del qual el seu logaritme hiperbòlic fou igual a 1. Tot i que ell no va descobrir el significat d'aquest símbol ja que feia un segle que aquesta idea era coneguda, però ningú el va saber representar.

També va popularitzar la utilització de la lletra π per denotar la relació entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre. Tot i que no fou el primer en utilitzar-lo però sí el que va propagar la utilització d'aquest.

Va introduir la notació de i per $\sqrt{-1}$. Li donà el significat d'infinit. No ho va utilitzar fins als últims manuscrits que va escriure i altres matemàtics posteriors li donaren el mateix significat.

Va utilitzar la lletra γ per donar un significat de constant. Aquesta notació no ha perdurat al llarg dels temps ja que després es van crear símbols semblants amb aquest i d'un significat molt diferenciat.

Altres fets importants foren la utilització de f(x) per denotar el valor d'una funció f a l'aplicar-li un valor a x; la utilització del símbol Σ per denotar sumatori i la utilització de $ln\ x$ per denotar logaritme en base e de x.

Va crear la identitat de Euler on relacionava cinc nombres molt utilitzats i que pertanyien a diverses branques de les matemàtiques. Fou considerada l'equació matemàtica més famosa.

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \text{ (Identitat d'Euler)}$$

Leonhard Euler va ser probablement un dels investigadors més fecund de les matemàtiques, fins al punt que el segle XVIII es coneix com l'època d'Euler.

2.6 Època Contemporània

El segle XIX fou el més revolucionari de la història de les matemàtiques. La recerca d'una matemàtica rigorosa i d'una classificació dels diferents tipus de construccions matemàtiques va portar a crear àrees de l'àlgebra abstracta durant aquest segle absolutament independents de nocions aritmètiques o geomètriques. En aquest segle diversos matemàtics van fer aportacions molt importants, aquests foren: Niel Henrik Abel, Hermann Grassmann i Charles Hermite.

Niel Henrik Abel (1802-1829) va ser un matemàtic noruec. La seva primera gran aportació va ser la prova de la impossibilitat de resolució algebraica de l'equació de cinquè grau mitjançant radicals. També va donar la solució a la primera equació integral. Va donar estabilitat a l'anàlisi matemàtic sobre unes bases rigoroses i a més a més va contribuir en trobar funcions el·líptiques a través de l’estudi de la funció inversa d’aquella funció.

Hermann Grassmann (1809-1877) fou un matemàtic, físic, humanista i editor alemany. L’obra *‘Ausdehnungslehre’*, publicat el 1862, fou un llibre llegendari en la història de les matemàtiques. Grassmann va introduir allí el càlcul de les magnituds extensives que era una de les arrels històriques de l'àlgebra lineal i multilineal moderna. Va definir també en la mateixa obra el producte exterior, que s’anomenava també "producte combinatori", l'operació clau en l'àlgebra que avui es coneix com àlgebra externa.

Il·lustració 34: ‘Ausdehnungslehre’ d’Hermann Grassmann

George Boole (1815-1864) va ser un matemàtic i lògic britànic que va crear l’àlgebra de Boole, que marcà els fonaments de l’aritmètica computacional moderna. L’àlgebra Boole fou una estructura algebraica que esquematitzava les operacions lògiques, així com les operacions d’unió, intersecció i complement. Foren tota classe o conjunt d'elements que podien prendre dos valors perfectament diferenciats que van designar per 0 i 1 o es podia veure a altres casos com v (veritable) i f (fals) que estaven relacionats per les dues operacions binàries denominades suma (+) i producte (·). Algunes de les propietats d’aquesta àlgebra de Boole que podríem destacar foren:

1- Propietat d’impotència: Quan es realitzava una operació varies vegades aquestes no influïen en el resultat ja que donava el mateix que si fessin l’operació un sol cop.

$$a \cdot a = a$$

$$a + a = a$$

2- Propietat d'involució: Si a una negació se li atribuïa una altra negació el resultat seria positiu.

$$\bar{\bar{a}} = a$$

3- Propietat commutativa: Si s'intercanviava l'ordre dels factors de la suma o de la multiplicació el resultat seria el mateix.

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

4- Propietat associativa: No importava com s'agrupaven els factors ja que el resultat seria el mateix.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

5- Propietat distributiva: La resposta era la mateixa si es sumaven els factors i després era multiplicat per un nombre que si els resultats de les multiplicacions eren sumades finalment.

$$a(b + c) = ab + ac$$

6- Propietat cancel·lativa: Quan es produïa una operació després d'un exercici, el terme independent era cancel·lat.

$$(a + b) \cdot a = a^2 + ab$$

7- Llei de Morgan: La suma de n variables negades era igual al producte d'aquestes n variables negades individualment i, inversament, el producte de n variables negades era igual a la suma d'aquestes n variables negades individualment.

$$\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$$

Charles Hermite (1822-1901) fou un matemàtic francès que va iniciar l'estudi en les funcions algebraiques i va comprovar que el nombre e no podia ser solució d'una equació algebraica de coeficients racionals, és a dir, va demostrar que el nombre e era transcendent.

3. HISTÒRIA DE LES EQUACIONS POLINÒMIQUES D’UNA VARIABLE

Després d’observar l’evolució de l’àlgebra es va poder determinar quina era la seva principal aplicació. L’àlgebra s’havia anat desenvolupat al llarg de la història principalment per l’interès en resoldre equacions i sistemes d’equacions.

Una equació és una igualtat entre dues expressions, denominades membres i separades pel signe igual, en què apareixen elements coneguts o dades i d’altres de desconeguts o incògnites, relacionats mitjançant operacions matemàtiques. Els valors coneguts poden ser nombres, coeficients o constants; també variables o fins i tot objectes complexos com funcions o vectors, els elements desconeguts poden ser establerts mitjançant altres equacions d'un sistema, o algun altre procediment de resolució d'equacions. Les incògnites, representades generalment per lletres, constitueixen els valors que es pretén trobar (en equacions complexes en lloc de valors numèrics podria tractar-se d'elements d'un cert conjunt abstracte, com succeeix en les equacions diferencials). Si les expressions de les equacions són polinomis, s’anomenen equacions polinòmiques i, el seu grau estarà donat pel grau del polinomi que resulta al simplificar l’equació (operar i igualar les expressions polinòmiques a cero).

El problema de trobar les arrels d’un polinomi amb coeficients reals va ocupar gran part de l’estudi dels matemàtics des dels àrabs en l’antiguitat, que van utilitzar mètodes aritmètic-geomètrics, passant pels grecs (especialment els pitagòrics i euclidians) i els seus raonaments geomètrics fins arribar al s. XVIII amb la solució general de les equacions de tercer i quart grau i la impossibilitat de resoldre l’equació de cinquè grau usant radicals.

A continuació s’investigarà com en cada època concreta determinats personatges o civilitzacions van resoldre aquestes equacions i així mateix, es podrà observar l’evolució d’aquestes al llarg del temps.

3.1 Equacions lineals o de primer grau

3.1.1 Civilització egípcia

Els egipcis es van veure amb la necessitat d’utilitzar l’àlgebra per satisfer alguns problemes que sorgien en les seves vides quotidianes. D’aquesta manera van començar a emprar les equacions lineals o de primer grau a través del mètode de la regula falsi. Els egipcis atribuïen un valor fals a la incògnita i per aproximacions es provocava corregir-ho per millorar el seu resultat.

Aquest fet va poder ser observat en els diferents papyrus que van perdurar al llarg del temps. Els dos papirs més importants van ser el Papyrus Rhind i el Papyrus de Moscou. En tots dos es trobaven equacions lineals a través d’una escriptura hieràtica en comptes d’una de jeroglífica que s’utilitzava en l’escriptura ornamental.

Les equacions lineals van ser desenvolupades majoritàriament a la civilització egípcia i l’algoritme de resolució era de la forma:

$$ax = b \qquad x + ax = b \qquad ax + b = 0 \qquad x + ax + bx = c \qquad ax + b = c$$

on a, b i c eren nombres coneguts i x la incògnita que els egipcis anomenaven aha.

Quan l’equació era de la forma $ax = b$ s’obtenia la solució exacta per l’estructura particular del problema.

Si el problema exigia la solució de les equacions $ax + b = 0$ i $ax + b = c$, s’emprava en aquests casos la regla de la doble falsa posició, que consisteix en el procediment de la forma següent:

a) Per aïllar x en les equacions d'estructura $ax + b = 0$, es van considerar dos valors falsos $x_1 \ i \ x_2$ i es van calcular així:

$$x_1 \ i \ x_2 \longrightarrow \quad \begin{array}{l} ax_1 + b = d_1 \\ ax_2 + b = d_2 \end{array}$$

restant $a \ x_1 - x_2 \ = d_1 - \ d_2$ (exp. 1)

Per una altra part:

$ax_1x_2 + bx_2 = d_1x_2$

$ax_2x_1 + bx_1 = d_2x_1$

que restant,

$b(x_2 - x_1) = \ d_1x_2 - d_2x_1$ (exp. 2)

i dividint ambdós resultats (exp 2 –exp 1)

$-\frac{b}{a} = \frac{d_1x_2 - d_2x_1}{d_1 - d_2} = x$

Ja que la igualtat que es complia al multiplicar ambdós membres per $''a''$ $\rightarrow$

$-\frac{b}{a} \cdot a = ax - b = ax \longrightarrow \quad ax + b = 0$

b) Per aïllar al x en $ax + b = c$, es van considerar dos valors falsos x_1 i x_2 i es calculaven:

$$x_1 \text{ i } x_2 \longrightarrow \quad \begin{array}{lll} ax_1 + b - c = d_1 & \rightarrow & c - b = -d_1 + ax_1 \\ ax_2 + b - c = d_2 & \rightarrow & c - b = -d_2 + ax_2 \end{array}$$

llavors es plantejava la igualtat

$-d_1 + ax_1 = -d_2 + ax_2 = c - b$

$d_1 - d_2 = ax_1 - ax_2 = \ a(x_1 - x_2) = \ c - b$ (exp.1)

Per una altra part:

$ax_1x_2 + bx_2 - cx_2 = d_1x_2$

$ax_2x_1 + bx_1 - cx_1 = d_2x_1$

que restant,

$(c - b)(x_1 - x_2) = d_1x_2 - d_2x_1$ (exp.2)

i dividint ambdós resultats (exp.2-exp.1)

$\frac{c-b}{a} = \frac{d_1x_2 - d_2x_1}{d_1 - d_2} = x$

Ja que la igualtat que es complia al multiplicar ambdós membres per $''a''$ $\rightarrow$ $\frac{c-b}{a} \cdot a = ax \rightarrow c - b = ax \rightarrow ax + b = c$

- ***Un exemple de la resolució d’una equació qualsevol d’aquet tipus com $3x + 2 = 14$ amb el mètode de la regula falsi seria:***

Es consideraven dos valors falsos $x_1 = 6$ i $x_2 = 5$. Llavors si s’aplicaven a l’equació seria:

$$d_1 = 18 + 2 - 14 = 6 \qquad d_2 = 15 + 2 - 14 = 3$$

Atenent a l’expressió determinada en l’apartat b:

$$x = \frac{d_1x_2 - d_2x_1}{d_{1-d_2}} = \frac{6\cdot5 - 3\cdot6}{6-3} = 4$$

c) Per aïllar x en $x + ax = b$, es consideraven els dos valors falsos x_1 i x_2 i es calculaven:

x_1 i x_2 $\longrightarrow$ $(1 + a)x_1 - b = d_1$

$(1 + a)x_2 - b = d_2$

restant $(1 + a) \cdot (x_1 - x_2) = d_1 - d_2$ (exp.1)

Per una altra part,

$$(1+a)x_1x_2 - bx_2 = d_1x_2$$

$$(1+a)x_2x_1 - bx_1 = d_2x_1$$

que restant,

$b\ \ x_1{-}x_2\ \ = d_1x_2 - d_2x_1$ (exp. 2)

i dividint ambdós resultats (exp.2-exp1):

$$\frac{b}{(1+a)} = \frac{d_1x_2 - d_2x_1}{d_1-d_2} = x$$

Ja que la igualtat es complia al multiplicar ambdós membres per "$1+a$", ($\frac{b}{(1+a)} \cdot\ \ 1+a\ \ =\ \ 1+a\ \ x \longrightarrow\ \ b = ax + x \longrightarrow\ \ x + ax = b$

- ***Calcular* $\boldsymbol{2x + x = 6}$**

Es consideraven dos valors falsos $x_1 = 4\ i\ x_2 = 3$, llavors:

$$d_1 = 8 + 4 - 6 = 6 \qquad d_2 = 6 + 3 - 6 = 3$$

$$x = \frac{d_1x_2 - d_2x_1}{d_1-d_2} = \frac{6\cdot 3 - 3\cdot 4}{6-3} = 2 \qquad\qquad x = 2$$

d) Per aïllar x en $x + ax + bx = c$ es consideraven dos valors falsos x_1 i x_2 i es calculaven:

$$x_1 \text{ i } x_2 \longrightarrow \begin{array}{l} (1+a+b)x_1 - c = d_1 \\ (1+a+b)x_2 - c = d_2 \end{array}$$

restant $(1+a+b)\cdot(x_1 - x_2) = d_1 - d_2$ (exp.1)

Per una altra part:

$$(1+a+b)x_1x_2 - cx_2 = d_1x_2$$

$$(1+a+b)x_2x_1 - cx_1 = d_2x_1$$

que restant,

$c(x_1 - x_2) = d_1x_2 - d_2x_1$ (exp.2)

i dividint ambdós resultats (exp.2 –exp.1)

$$\frac{c}{(1+a+b)} = \frac{d_1x_2 - d_2x_1}{d_1 - d_2} = x$$

Ja que la igualtat es complia al multiplicar ambdós membres per ''$1 + a + b$''

$$1 + a + b \cdot \frac{c}{(1+a+b)} = 1 + a + b\ x \longrightarrow c = x + ax + bx \rightarrow ax + bx + x = c$$

- ***Calcular*** $\boldsymbol{x + 2x + 4x = 21}$

Es consideraven dos valors falsos $x_1 = 5\ i\ x_2 = 4$, llavors:

$$d_1 = 5 + 10 + 20 - 21 = 14 \qquad d_2 = 4 + 8 + 16 - 21 = 7$$

$$x = \frac{d_1x_2 - d_2x_1}{d_1 - d_2} = \frac{14 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{14 - 7} = 3 \qquad x = 3$$

3.2 Equacions quadràtiques o de segon grau

3.2.1 Civilització egípcia

Eren moltes les gravacions jeroglífiques que es van trobar en pedres, tombes i temples, però, molt poca la informació matemàtica que es va poder obtenir d'elles. L’únic tipus d’equació de segon grau que apareixia en el Papyrus Rhind era el més senzill: $ax^2 = b$ i es va trobar resolta mitjançant varis processos aritmètics senzills.

3.2.2 Civilització mesopotàmica

Les característiques del territori van afavorir a que diverses poblacions envaïssin aquell territori però la seva cultura estava tan consolidada que va perdurar al llarg dels anys, particularment en la utilització de l’escriptura cuneïforme en les tauletes d’argila. Milers d’aquestes tauletes han perdurat al llarg del temps i gràcies a elles es va poder disposar de molta informació relacionada amb les matemàtiques.

Formulaven i resolien els problemes algebraics d'una forma completament verbal (àlgebra retòrica), sense la utilització de símbols especials. Sovint apareixien en les resolucions les paraules us (longitud), sag (amplada) i nansa (àrea) com a representació de les incògnites, encara que això no volia dir que aquestes incògnites representessin aquestes quantitats geomètriques. Es creia que gran part dels problemes algebraics van sorgir de situacions geomètriques per això s'utilitzava la simbologia geomètrica.

Els mesopotàmics van saber resoldre problemes que contenien equacions de primer i segon grau així com també de tercer i quart grau, tot i que en menor quantitat, i sistemes d'equacions lineals i no lineals.

En les equacions quadràtiques disposaven d'una fórmula per a resoldre-les , però com no coneixien els nombres negatius, no consideraven les arrels negatives. A més, van reduir mitjançant transformacions els problemes més complicats en altres de més senzills.

Les equacions quadràtiques que es trobaven en els textos babilònics més antics de fa uns 4000 anys queden reduïdes a les següents formes canòniques:

1) $x^2 + px = q$
2) $x^2 = px + q$
3) $x^2 + q = px$

   Les dues primeres es treballen a continuació i, la del tercer tipus apareixia en els textos sota la forma de problemes on es tractava com una equació equivalent a un sistema d'equacions,

$$\left.\begin{array}{l} x + y = p \\ x \cdot y = q \end{array}\right\}$$

   mitjançant el mètode de substitució de la incògnita s'aconseguia la forma canònica $x^2 + q = px$.

a) Segons els mesopotàmics la solució d'una equació quadràtica amb forma canònica $x^2 - px = q$ que seria el mateix que $x^2 = px + q$ s'havia de resoldre de la següent manera:

   1- Primerament es calculava $\frac{p}{2}$.

   2- Seguidament trobaven el quadrat de la solució obtinguda anteriorment, és a dir, $\frac{p}{2}^{2}$.

   3- Finalment calculaven amb tota la informació obtinguda $\frac{p}{2}^{2} + q$.

   A partir d'aquestes deduccions la fórmula a la qual s'arribava finalment era:

$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$ sent aquesta la fórmula quadràtica actual coneguda per tothom.

A continuació es detalla a partir de l'expressió anterior la fórmula quadràtica actual considerant el coeficient principal de valor unitari:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2+4q}{4}} + \frac{p}{2} = \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2} + \frac{p}{2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

b) L' equació quadràtica amb forma canònica $x^2 + px = q$ s'havia de resoldre de la següent manera:

   1.-Primerament es calculava $\frac{p}{2}$.

   2.- Seguidament trobaven el quadrat de la solució obtinguda anteriorment, és a dir, $\frac{p}{2}^{2}$.

   3.-Finalment calculaven amb tota la informació obtinguda l'expressió $\frac{p}{2}^{2} + q$.

A partir d'aquestes deduccions la fórmula a la qual s'arribava finalment era:

$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$ sent aquesta la fórmula quadràtica actual coneguda per tothom.

A continuació es detalla a partir de l'expressió anterior la fórmula quadràtica actual considerant el coeficient principal de valor unitari :

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2+4q}{4}} - \frac{p}{2} = \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2} - \frac{p}{2} \longrightarrow x = \frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

c) L'equació quadràtica del tipus $ax^2 + bx = c$ la resolien multiplicant per "a" per convertir-la en $(ax)^2 + b(ax) = ac$ i calculant "ax" en primer lloc. S'obtenia $y^2 + by = ac$ i l'equació quadràtica seria de la forma canònica de l'apartat b.

- ***En un altre text els babilonis van reduir l'equació $\mathbf{11x^2 + 7x = 6;15}$ a la forma canònica $\mathbf{x^2 + px = q}$.***

Multiplicant per 11 ambdós membres degut al coeficient que acompanya al membre de segon grau.

$(11x)^2 + 7\cdot(11x) = 68;45*$ $\quad *$(Sistema de numeració posicional i sexagesimal)

$$6;15 \cdot 11 = \left(6 + \frac{15}{60}\right) \cdot 11 = 66 + \frac{165}{60} = 66 + \frac{120}{60} + \frac{45}{60} = 68 + \frac{45}{60} = 68;45$$

que era la forma canònica, excepte que la solució era ara de $y = 11x$ i a partir d'aquest valor s'obtindria "x" .

$$68{,}45\ unitats \rightarrow 68u \cdot \frac{60\ parts}{1u} = 4080\ parts\ i\ \frac{45}{60}\ u \cdot \frac{60\ parts}{1u} = 45\ parts \rightarrow 4125\ parts$$

La solució d'aquest problema era equivalent a la resolució de l'equació quadràtica $(11x)^2 + 7\cdot(11x) = 4125$ amb $y = 11x$ de la forma següent: $y^2 + 7y = 4125$.

L'equació que es resolia era del tipus $x^2 + px = q$ i la solució que es donava era $y = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 4125} - \frac{7}{2} \rightarrow y = 60.821 \rightarrow x = 5.529$

3.2.3 Civilització grega

Posteriorment, els grecs van resoldre equacions de segon grau mitjançant mètodes geomètrics. Diferents matemàtics van fer més aportacions i van desenvolupar així mateix d'una forma ràpida la resolució d'aquestes equacions. Es donava una importància molt petita a l'àlgebra i la geometria en aquell temps, així que ho van unir per a que guanyés importància: van crear l'àlgebra geomètrica, s'explicava com la resolució d'una equació a partir d'una representació geomètrica, així s'entenia més fàcilment. Els grecs van aconseguir resoldre equacions de segon grau utilitzant el mètode de completar el quadrat amb l'aplicació d'àrees.

Diofant d'Alexandria, en el seu llibre *'Arithmetica'* no hi havia un desenvolupament axiomàtic ni feia cap esforç per calcular totes les solucions possibles, en el cas de les equacions de segon grau amb dues arrels positives va donar una fórmula per resoldre algunes d'aquestes equacions quadràtiques (tot i que només s'obtenia una solució i per a que es complís aquesta fórmula les dues solucions d'aquesta havien de ser enteres). Les equacions que resolia eren de tres tipus diferents:

$$ax^2 + bx = c \qquad ax^2 - bx = c \qquad ax^2 + c = bx$$

A continuació amb tres problemes que es trobaven en '*l'Arithmetica*' s'explicava en primer lloc el mètode que de forma sistemàtica utilitzava Diofant per calcular la solució sense utilitzar un sistema de dues equacions simultànies amb dues incògnites, de quina manera operava amb canvis enginyosos i, quines condicions geomètriques successives plantejava de manera que únicament hi hagués una incògnita o es reduïen el nombre d'indeterminades i el grau d'aquestes al llarg de tot el procés.

Els enunciats dels problemes proposaven una condició general que Diofant necessitava concretar. Per aquest motiu, va introduir una condició geomètrica que decidia la seva posterior resolució recercant una expressió escrita en funció de la incògnita amb la qual componia la seva primera igualtat. Una vegada ja establerta aquesta, finalitzava el procés utilitzant el llenguatge aritmètic.

Aquests problemes foren d'equacions lineals i quadràtiques però, sempre amb solució positiva i racional ja que en aquella època no tenien sentit els nombres negatius i encara menys els irracionals.

Els tres problemes es detallen a continuació:

➢ ***Calcular dos nombres, tal que la seva suma sigui 20 i la diferencia dels seus quadrats 80.***

a) Resolució de Diofant

- Condició geomètrica

Sempre era necessari que la diferència dels quadrats de dos nombres formaven dos rectangles d'igual àrea sent aquesta el producte de la semisuma per la diferència.

- Plantejament i deducció

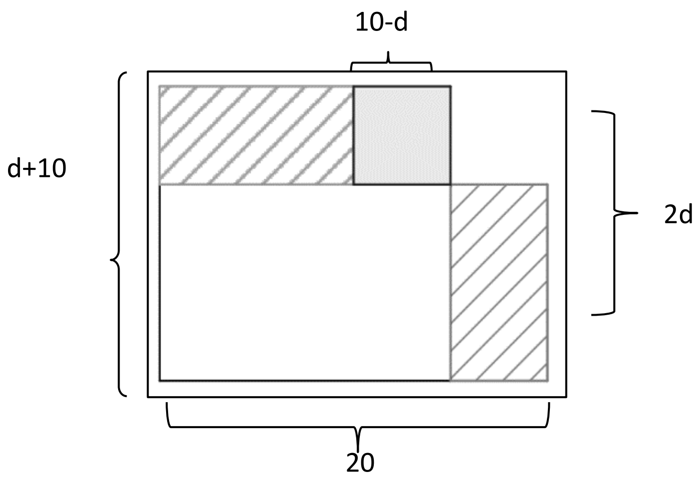
La diferència dels nombres era $2d$; la semisuma d'ambdós 10 unitats

Major: semisuma d'ambdós més la semidiferència d'aquests dos nombres:

$$10 + d = x$$

Menor: semisuma d'ambdós menys la semidiferència d'aquests nombres:

$$10 - d = y$$



Il·lustració 35: Resolució problema 1 de Diofant (Dibuix fet amb Geo-gebra)

Per confirmar la condició geomètrica s’utilitzarà l’àlgebra actual:

$$2d(10 + d) + 2d(10 - d) = 40d$$

- Expressió simbòlica

$$80 = 40d$$

$$d = 2$$

Nombre major: $10 + d = 12\ unitats$

Nombre menor: $10 - d = 8\ unitats$

b) Àlgebra actual

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ x^2 - y^2 = 80 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow x = 20 - y = 20 - 8 = 12 \\ \rightarrow (20 - y)^2 - y^2 = 80 \end{array}$$

R: La solució és (12,8)

$$400 - 40y + y^2 - y^2 = 80$$

$$320 = 40y$$

$$y = 8$$

➢ ***Calcular dos nombres, tal que la seva suma sigui 20 i la suma dels seus quadrats 208.***

a) Resolució de Diofant

- Condició geomètrica

Sempre era necessari que el doble de la suma dels quadrats dels nombres excedia en un quadrat al quadrat de la suma dels nombres.

- Plantejament i deducció

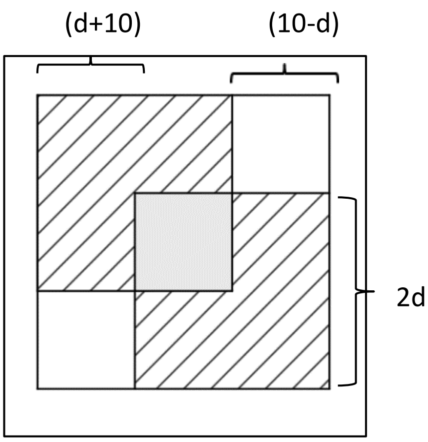
La diferència dels nombres era $2d$; la semisuma d’ambdós 10 unitats

Major: semisuma d’ambdós més la semidiferència d’aquests dos nombres:

$$10 + d = x$$

Menor: semisuma d’ambdós menys la semidiferència d’aquests nombres:

$$10 - d = y$$



Il·lustració 36 :Resolució problema 2 de Diofant (Dibuix fet amb Geo-gebra)

Per confirmar la condició geomètrica s’utilitzarà l’àlgebra actual:

$2d(10 + d) + 2d(10 - d) = 40d$

- Expressió simbòlica

$d = 2$

Nombre major: $10 + d = 12\ unitats$

Nombre menor: $10 - d = 8\ unitats$

b) Àlgebra actual

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 208 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow\ x = 20 - y \\ \rightarrow\ 400 - 40y + y^2 + y^2 = 208 \end{array}$$

$$2y^2 - 40y + 192 = 0$$

$$y^2 - 20y + 96 = 0$$

$$y = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 384}}{2} = \frac{20 \pm 4}{2}$$

$$y_1 = \frac{20+4}{2} = 12 \quad x_1 = 20 - 12 = 8$$

$$y_2 = \frac{20-4}{2} = 8 \quad x_1 = 20 - 8 = 12$$

R: Com en aquestes operacions no importa l'ordre les solucions podrien ser (8,12) o (12,8)

- ***Trobar dos nombres tal que la seva suma és 20 i el seu producte formen 96 unitats.***

a) Resolució de Diofant

- Condició geomètrica

Sempre era necessari que el quadrat de la semisuma dels nombres a trobar excedia en un quadrat al producte d'aquests nombres.

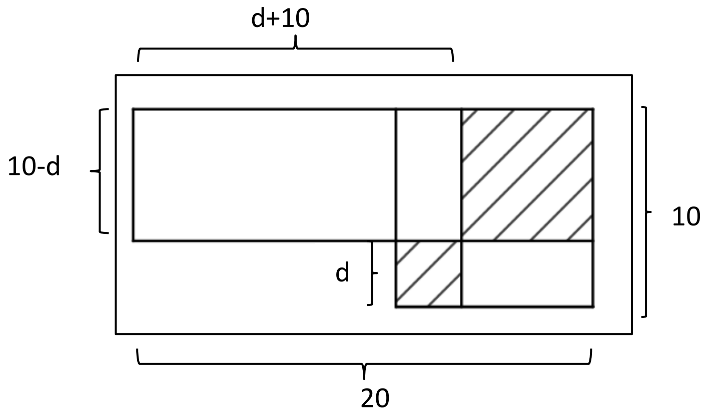
- Plantejament i deducció

La diferència dels nombres era $2d$; la semisuma d'ambdós 10 unitats

Major: semisuma d'ambdós més la semidiferència d'aquests dos nombres:

$$10 + d = x$$

Menor: semisuma d'ambdós menys la semidiferència d'aquests nombres:



Il·lustració 37: Resolució problema 3 de Diofant (Dibuix fet amb Geo-gebra)

$\square$ (sobre 10) – $\square$ (96) = $\square$ (sobre d); 100 – 96 = $\square$(sobre d)

Per confirmar la condició geomètrica s’utilitzarà l’àlgebra actual:

$2d(10+d)+2d(10-d)=40d$

- Expressió simbòlica

$d=2$

Nombre major: $10+d=12\ unitats$

Nombre menor. $10-d=8\ unitats$

b) Àlgebra actual

$$\left.\begin{array}{l} x+y=20 \\ x\cdot y=96 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x=20-y \\ \rightarrow (20-y)\cdot y=96 \end{array}$$

$$20y-y^2=96$$

$$y^2-20y+96=0$$

$y_1=\frac{20+4}{2}=12$ $\qquad x_1=\ 20-12=8$

$y_2=\frac{20-4}{2}=8$ $\qquad x_1=\ 20-8=12$

R: Com en aquestes operacions no importa l’ordre les solucions podrien ser (8,12) o (12,8)

3.2.4 Civilització xina

La civilització xina es va remuntar a l'edat potàmica, tot i que els registres cronològics no van ser gaire fiables ja que entre les diverses estimacions hi havia gairebé un milers d'anys.

El sistema de numeració xina era el decimal jeroglífic. Les operacions eren resoltes com ho feien els altres matemàtics antics tot i que cal destacar que en la resolució de fraccions utilitzaven la reducció d'aquestes a un comú denominador. Afirmaven l'existència de nombres negatius tot i que no els acceptaven com a solució d'una equació.

Un altre mètode que utilitzaven era 'ying bu zu shu' (regla del excés i del defecte), era similar a la regla de doble falsa posició utilitzada pels egipcis, tot i que no es va creure que sorgís d'influència occidental, sinó que era independent.

L'àlgebra va millorar de forma molt notable amb el llibre *''SSu-yüan yü- Chien''* o *''Mirall preciós dels quatre elements''* de Chou-Shin-Chieh on es va estudiar equacions de graus molt elevats (fins a 14). S'utilitzava un mètode de transformació d'equacions anomenat 'mètode de fan fa'. Es podia explicar com un mètode de canvi de variable per obtenir solucions aproximades d'equacions polinòmiques. Aquest mètode es coneix en occident com el nom de "mètode de Horner".

Il·lustració 38: Llibre *''SSu-yüan yü- Chien''*

- ***Un exemple que es trobava en el llibre de Chou- Shih-Chieh seria trobar la solució de l'equació $\boldsymbol{x^2+252x-5292=0}$.***

1. Primerament s'obtenia un valor aproximat per defecte, $x=19$. Això significa que té una arrel entre $x=19\ i\ x=20$.
2. Es produïa el canvi de variable (el fan fa): $y=x-19$ per obtenir aquesta nova equació:
   $y+19\ ^{2}+252\ \ y+19\ \ -5292=0 \rightarrow y^2+290y-143=0$, amb una arrel entre $y=0\ i\ y=1$.
3. Es trobava la solució aproximada d'aquesta equació quadràtica utilitzada com lineal, $y+290y-143=0$ que seria $y=\frac{143}{290}$.
4. Es desfeia el canvi de variable , la solució aproximada seria $x=19+\frac{143}{291}$.

3.2.5 Civilització àrab

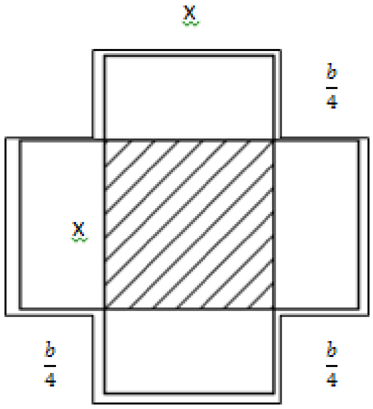
Entre els segles VIII i XIII es va començar a expandir les matemàtiques dins la cultura. Tot va sorgir quan el califa Al-Ma'mûn, va ordenar traduir alguns dels textos grecs a l'àrab. Es van crear diverses escoles on es traduïen i s'analitzaven diferents manuscrits que tractaven sobre l'àlgebra, l'astronomia i la geometria.

Mohammed ibn-Musa Al-Khwarizmi en el text del llibre *''Al-jabr w'al muqâbala''* va introduir equacions que constaven de tres tipus de quantitats: tresors, nombres multiplicats per x^2: arrels, nombres multiplicats per x (arrels del tresor) i nombres coneguts. A més a més, l'autor va denominar la quantitat desconeguda com 'shay' (cosa desconeguda). Els tipus d'equacions que s'observaven en aquest escrit eren:

- Tresors igual a arrels : $ax^2=bx$
- Tresors iguals a nombres: $ax^2=c$
- Arrels iguals a nombres: $bx=c$
- Tresors i arrels iguals a nombres: $ax^2+bx=c$
- Tresors i nombres iguals a arrels: $ax^2+c=bx$

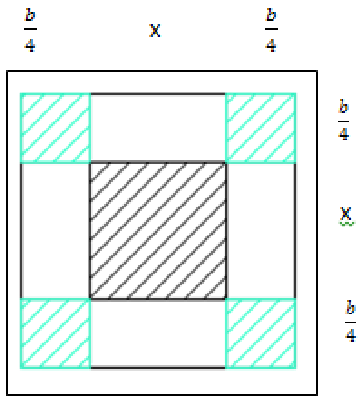
- Arrels i nombres iguals a tresors: $bx + c = ax^2$ on a, b i c nombres enters positius

Al-Khawarizmi va explicar els seus mètodes de resolució d'equacions quadràtiques recalçant-se en la geometria grega d'Euclides. Per resoldre l'equació $x^2 + bx = c$ va dibuixar un quadrat on el seu costat, era igual a "shay". Després va allargar cada costat en ambdues direccions una longitud igual a $\frac{b}{4}$.



Il·lustració 39: Resolució equació quadràtica de tipus $x^2 + bx = c$ Dibuix fet amb Geo-gebra)

D'aquesta manera es van formar quatre quadrats en les cantonades del quadrat inicial, un rectangle en cada costat i, un quadrat final, unió de totes les figures indicades.



Il·lustració 40: Resolució equació quadràtica de tipus $x^2 + bx = c$ ibuix fet amb Geo-gebra)

- Superfícies dels quadrats de les cantonades: $4 \cdot \left(\frac{b}{4}\right)^2$
- Quadrat gran (quadrat central més quatre rectangles $x \cdot \frac{b}{4}$ més quatre quadrats de les cantonades):

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{b}{4}\right) x + 4 \cdot \left(\frac{b}{4}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{4}\right)^2 \rightarrow x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4}$$

❖ Quadrat gran: $\left(x + 2 \cdot \frac{b}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

La igualtat de l'àrea del quadrat gran: $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$

Des d'aquesta igualtat s'arribava a la fórmula de l'equació de segon grau que actualment s'utilitza:

$$x = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2} \rightarrow x = \frac{\sqrt{b^2+4c} - b}{2} \qquad \text{(exp.1)}$$

A continuació es resolia una equació tipus $ax^2 + bx = c$ seguint el fonament lògic per a les solucions:

➢ ***Resoldre tresors i 10 arrels igual a 39.***

- En notació moderna, resoldre l'equació $x^2 + 10x = 39$

❖ Solució segons explicació d'Al-Khwarizmi:

1. Dividir per dos nombres el "nombre" d'arrels: Resultat 5.
2. Multiplicar això per si mateix: Resultat 25
3. Sumar això a 39: Resultat 64.
4. Extreure l'arrel quadrada a això: Resultat 8
5. Restar a 8 el resultat del pas 1: Resultat 3

   Aquesta és l'arrel del quadrat (el quadrat és 9)

❖ Explicació en notació moderna:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = \pm\sqrt{64}$$

$$x + 5 = \pm 8$$

$$x + 5 = 8 \qquad\qquad x + 5 = -8$$

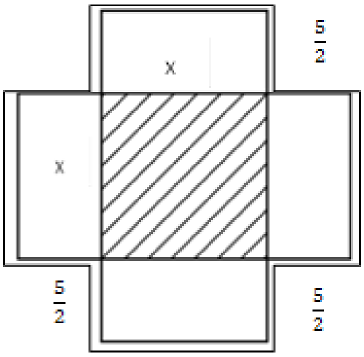
$$x = 3 \qquad\qquad x = -13$$

(La solució negativa, x = -13, s'ignora)

- Fonamentació geomètrica:

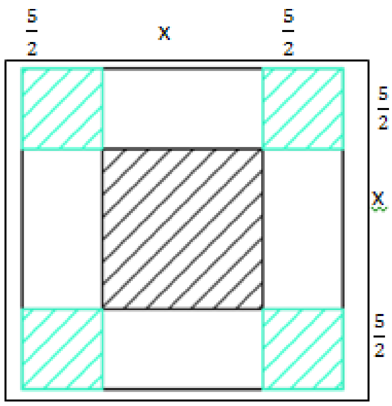
$\frac{b}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

La figura geomètrica amb les dades corresponents seria:



Il·lustració 41: Resolució equació quadràtica de tipus $x^2 + bx = c$ (Dibuix fet amb Geo-gebra)

Que després es convertiria en:



Il·lustració 42 Resolució equació quadràtica de tipus $x^2 + bx = c$ (Dibuix fet amb Geo-gebra)

- Superfícies dels quadrats de les cantonades: $4 \cdot \frac{b}{4}^{\,2} = 4 \cdot \frac{5}{2}^{\,2} = 25\ unitats^2$
- Quadrat gran (quadrat central més quatre rectangles $x \cdot \frac{b}{4}$ més quatre quadrats de les cantonades):

$$x^2 + 4 \cdot \frac{b}{4}\, x + 4 \cdot \frac{b}{4}^{\,2} = c + \frac{b}{4}^{\,2} \rightarrow x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4} \rightarrow$$

$$\longrightarrow x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \longrightarrow x^2 + 10x = 39$$

- Quadrat gran: $x + 2 \cdot \frac{b}{4}^{\,2} = x + \frac{b}{2}^{\,2} \longrightarrow x + 2 \cdot \frac{5}{2}^{\,2} \longrightarrow x + 5^{\,2}$

La igualtat de l'àrea del quadrat gran: $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = c+\frac{b^2}{4} \longrightarrow \left(x+5\right)^2 = 39+\frac{10^2}{4} \longrightarrow$

$\longrightarrow \left(x+5\right)^2 = 39+25 \longrightarrow \left(x+5\right)^2 = 64 \longrightarrow x+5=8 \longrightarrow x=3$ (La solució negativa -13 s'ignora)

Al-Khwarizmi, va quedar relegat al paper simple i fou intermediari entre la herència grega i hindú i l'Occident cristià medieval. L'absència d'una simbologia adequada va impedir el desenvolupament i generalització de mètodes, i els treballs es van centrar en la resolució d'equacions de primer i segon grau, i equacions cúbiques.

3.3 Equacions cubiques o de tercer grau

La fórmula que permet trobar les solucions de qualsevol equació de tercer grau o equació cúbica no es va trobar fins el s. XVI en Itàlia. Una equació cúbica era de la forma:

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ on a,b,c i d són nombres qualsevols i $a \neq 0$

S'ha de destacar que abans del s. XVI els matemàtics van intentar trobar una fórmula gràcies a la qual es podia determinar les solucions de qualsevol equació cubica, sense assoliment algun.

3.3.1 Civilització mesopotàmica

En relació a les equacions cúbiques, a Mesopotàmia es van trobar amb molts exemples on es donava testimoni de resolució d'aquest tipus d'equacions. Les equacions cúbiques reduïdes a les seves formes canòniques es classificaven en tres tipus:

1) $x^3 = a$
2) $x^3 + x^2 = a$
3) $ax^3 + bx^2 = c$

a) Els babilonis resolien les equacions cúbiques pures o del tipus 1 com $x^3 = a$ consultant directament les taules de cubs on podia llegir-se sense més la solució si apareixia a la taula, i per a valors que no apareixien en les taules s'utilitzava una simple interpolació lineal per aconseguir una aproximació.

Il·lustració 41: Taules d’arrels quadrades i cubiques

b) Les equacions cúbiques mixtes o de tipus 2 de la forma $x^3 + x^2 = a$ es resolien d'una manera semblant consultant les taules disponibles en les quals apareixien els valors de la suma $n^3 + n^2$ per a valors sencers de n d'1 a 30.

c) Les equacions cúbiques de tipus 3 de la forma $ax^3 + bx^2 = c$ es podien reduir a la forma canònica multiplicant ambdós membres per $\frac{a^2}{b^3}$ per obtenir $\frac{a}{b}x^{\ 3} + \frac{a}{b}x^{\ 2} = c \cdot \frac{a^2}{b^3}$ i així es tracta d’una cúbica de la forma tipus 2 amb la incògnita $\frac{a}{b}x$ i calculant $\frac{a}{b}x$ en primer lloc consultant les taules s’obtindrà dit valor i a continuació el valor de x.

- ***En un text, els babilonis reduïen l’equació $144x^3 + 12x^2 = 21$, emprant el seu mètode de substitució:***

Els babilonis multiplicaven per 12 ambdós membres $12^2x^3 \cdot 12 + 12x^2 \cdot 12 = 21 \cdot 12$ i prenent $y = 12x$ l’equació es convertia en $y^3 + y^2 = 4;12$ ja que:

$$21 \cdot 12 = 252\ parts \rightarrow \frac{252}{60} = \frac{240}{60} + \frac{12}{60} = 4;12$$

D’on $y = 6$ segons les taules disponibles. Per tant $x = \frac{1}{2}$ ó $x = 0;30$

Resposta de l’equació: $x = \frac{1}{2}$ d’una unitat ó $x = 30\ parts$

d) En canvi, no es sabia si els babilonis van ser o no ser capaços de reduir l’equació cúbica general $ax^3 + bx^2 + cx = d$ a la seva forma canònica; tot i que no hi havia cap tipus d'evidència documental disponible, pel nivell assolit fa probable que poguessin dur a terme aquesta reducció.

La resolució d'equacions cúbiques a Mesopotàmia va constituir un èxit notable que calia admirar no tant per l'alt nivell d'habilitat tècnica posada en joc sinó que pel nivell de maduresa i de flexibilitat dels conceptes algebraics que intervenen en el procés.

3.3.2 Renaixement (s. XVI)

El Renaixement fou un moviment cultural que es produí a l’Europa occidental durant els segles XV i XVI i pretenia innovar en diferents àmbits, un d’ells fou les matemàtiques. A Itàlia i França, al s. XVI es va produir una millora a l’àmbit de l’àlgebra a partir de la introducció de noves aportacions a les equacions cúbiques. Aquests matemàtics van ser Scipione del Ferro, Girolamo Cardano i Rafel Bombelli.

Scipione del Ferro (1465 - 1526) va ser un matemàtic italià que va descobrir la manera de resoldre les equacions de tercer grau amb aquesta estructura: $x^3 + bx = c$ sent b i c nombres positius, però ho va mantenir en secret i en el moment de la seva mort li va comunicar aquest descobriment als seus deixebles Antonio Maria Fiore i Annibale della Nave.

a) Mètode que va utilitzar Scipione del Ferro per resoldre equacions del tipus $x^3 + bx = c$ sent b i c nombres positius.

Sigui $x = y - z$, llavors $(y - z)^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3$

Extraient factor comú $(y - z)^3 = y^3 - 3yz(y - z) - z^3$ i passant al primer membre, s’obtenia $(y - z)^3 + 3yz(y - z) = y^3 - z^3$. En aquesta expressió es podien identificar els coeficients $b = 3yz$ i $c = y^3 - z^3$ (igualtat 1)

Com, $\frac{b}{3y} = z$, es podia substituir en l’altra igualtat 1→$c = y^3 - \frac{b^3}{27y^3}$

O sigui, $y^6 - cy^3 - \frac{b^3}{27} = 0$. Es feia un canvi de variable $t = y^3$, resolent l'equació quadràtica $t^2 - ct - \frac{b^3}{27} = 0$ sent:

$$t_1 = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{4b^3}{27 \cdot 4}} = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}$$

$$t_2 = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{4b^3}{27 \cdot 4}} = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}$$

Com: $t = y^3 \rightarrow y_1 = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$ i $y_2 = \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$

Sabent: a) $x = y - z$ b) $\frac{b}{3y} = z$ c) $y_1 = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$ d) $y_2 = \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$

Restant les expressions anteriors s'obtenia una solució real de l'equació cúbica reduïda (no es calculava encara l'arrel cúbica complexa i a més com b>0 sempre el discriminant era positiu). **Fórmula** avui en dia coneguda com **del Ferro-Tartàglia**:

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$$

Indicar que les tres solucions d'una equació cúbica tipus $x^3 + bx = c$ en notació moderna seria:

$$x_1 = A + B \qquad x_2 = Aw + Bw^2 \qquad x_3 = Aw^2 + Bw$$

amb $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, A= $\sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$ i B= $\sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$

sabent que :

a) Si $\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27} = 0 \rightarrow$ Tres arrels reals i dues d'elles eren iguals
b) Si $\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27} > 0 \rightarrow$ Tres arrels reals i diferents
c) Si $\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27} < 0 \rightarrow$ Una arrels era real i les altres dues imaginàries

La fórmula era coneguda amb el nom de Fórmula de Cardano, perquè Girolamo Cardano, va ser qui va estudiar amb més cura les solucions de Tartàglia i de del Ferro i, va ser qui va publicar per primera vegada la fórmula en un gran tractat vers la resolució d'equacions titulat ''*Ars Magna*''.

b) Scipione del Ferro va resoldre també l'equació tipus: $y^3 - by^2 + cy - d = 0$. Va reduir pel canvi lineal $y = x + \frac{b}{3}$ a l'equació cúbica reduïda amb els valors.

Demostració dels valors m i n:

Sent $y^3 - by^2 + cy - d = 0$ i el canvi $y = x + \frac{b}{3} \rightarrow$

$$\rightarrow \quad \mathrm{x} + \frac{b}{3}\ {}^{3} - b\ \ \mathrm{x} + \frac{b}{3}\ {}^{2} + c\ \ \mathrm{x} + \frac{b}{3}\ \ - d = 0$$

$$x^3 + bx^2 + \frac{b^2}{3}x + \frac{b^3}{27} - bx^2 - \frac{2b^2}{3}x - \frac{b^3}{9} + cx + \frac{cb}{3} - d = 0$$

$$x^3 + \ \ \frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} + c\ \ x + \frac{b^3}{27} - \frac{b^3}{9} + \frac{cb}{3} - d = 0$$

De l'equació reduïda: $x^3 + mx = n \rightarrow m = \ \frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} + c\ = c - \ \frac{b^2}{3} \ \rightarrow$

$$\longrightarrow \quad -n = \frac{b^3}{27} - \frac{b^3}{9} + \frac{cb}{3} - d \rightarrow \ n = -\frac{b^3}{27} + \frac{b^3}{9} - \frac{cb}{3} + d = d - \frac{cb}{3} + \frac{2b^3}{27}$$

A partir d'ara s'obtenia l'equació reduïda $x^3 + mx = n$ i es calculava una solució seguint la fórmula de del Ferro – Tartàglia i a aquest valor se li sumava $\frac{b}{3}(y = x + \frac{b}{3})$ i s'obtindrà un valor de y real (les arrels imaginàries encara no es consideraven):

$$y = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} + \frac{b}{3}$$

No es van conservar cap dels textos de Ferro ja que tenia els seus documents amagats per a que la gent no ho sàpigues però es va preveure que va escriure algun manuscrit que després de la seva mort algun familiar va conservar en secret.

Girolamo Cardano, el matemàtic italià que donà per primera vegada a conèixer el mètode per resoldre les equacions de tercer grau de tipus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ i també $x^3 + ax = b$. Tot i que a ell aquest mètode li fou comunicat per Tartàglia amb el qual havia fet una promesa per tal de no difondre aquesta informació però després ell el trencà. Aquesta havia estat descoberta abans ja per del Ferro però ningú ho va saber.

Aquestes equacions, que van ser resoltes mitjançant el mètode de Cardano, van ser publicades al llibre ''*Ars Magna*''. En aquest llibre també publicà el mètode Cardano on es va poder determinar la quantitat d'arrels que tindria un polinomi i com serien aquestes analitzant el discriminant de l'equació.

Cardano va voler reduir l'equació cubica de tipus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ a la forma $x^3 + px = q$ mitjançant un canvi de variable.

1- Es suposava que $x = y + r$.
2- La substitució a la fórmula general seria:

$$a(y + r)^3 + b(y + r)^2 + c(y + r) + d = 0$$

3- S'operava aquesta operació:

$$ay^3 + (3ar + b)y^2 + (3ar2 + 2br + c)y + (ar3 + br2 + cr + d) = 0$$

4- Es volia anular el terme de segon grau, per arribar a la forma $x^3 + px = q$:

$$3ar + b = 0$$

5- Per tant, es concloïa que el valor de r era:

$$r = -\frac{b}{3a}$$

6- S'obtenia que $x = y - \frac{b}{3a}$ i així l'equació es reduïa a:

$$y^3 + \frac{3ac-b^2}{3a^2}\ y = \frac{9abc-2b^3-27a^2d}{27a^3}$$

D'aquesta manera fou més senzilla l'equació i per tant podia ser resolta mitjançant la fórmula del Ferro-Tartaglia.

Girolamo Cardano va crear també una nova fórmula per trobar les solucions a les equacions cúbiques. Va partir de les equacions cubiques de tipus $x^3 + mx + n = 0$ va obtenir la forma següent:

Sigui $x = A + B$, llavors $x^3 = \ A + B\ ^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ i seguint el procediment explicat amb anterioritat es determinà les tres arrels de l'equació cúbica reduïda.

A continuació es detallen dos exemples de càlcul d'equacions cúbiques de les quals una arrel serà real y les altres dues imaginàries o bé que tingui les tres arrels reals.

- ***Calcular*** $\boldsymbol{x^3 - 6x - 4 = 0}$ ***sent*** $\boldsymbol{b = -6}$ ***i*** $\boldsymbol{c = 4}$**.**

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} \quad \text{(Fórmula del Ferro-Tartàglia)}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}}$$

Tant Cardano com del Ferro i Tartàglia no van saber que fer amb aquest tipus d'expressions. Va ser Bombelli el primer que va calcular una arrel cúbica complexa –sense saber molt bé allò que feia-.

Actualment es procedeix de la forma següent:

$x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$ ja que $\pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$\sqrt[3]{2 + 2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8_{45°}}} = \sqrt{2}_{\frac{45° + 360° K}{3}}$ per a k=0, 1, 2

Es procedeix a calcular el valor de $u_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1+i$ perquè és la més senzilla i seguidament els valors de $\sqrt[3]{2-2i}$=$\sqrt[3]{\sqrt{8_{315°}}} = \sqrt{2}_{\frac{315°+360°K}{3}}$ per a $k = 0,1,2.$

$v_1 = \sqrt{2}(\cos 105° + \sin 105° i)$

$v_2 = \sqrt{2}(\cos 225° + \sin 225° i)$

$v_3 = \sqrt{2}(\cos 275° + \sin 275° i)$

Ara es procedirà al càlcul de: $v_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1-i$ i com resultat final: $x^2 = -1+i-1-i = -2$

Les altres arrels es poden calcular de la mateixa forma però, una vegada s'obté una de les tres arrels i que en aquest cas val -2 llavors és més fàcil :

$$x^3 - 6x - 4 = (x+2)(x^2-2x-2) = 0$$

- ***Calcular* $\boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0}$**

Es reduïa pel canvi lineal x=1+t a l'equació cúbica $t^3 + 6t + 2 = 0$ del tipus $x^3 + mx + n = 0.$

$x = \sqrt[3]{-1+\sqrt{9}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{9}} + \frac{3}{3} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{-4} + 1$ era l'arrel real.

Les altres dues arrels eren imaginàries i, venien donades per:

$x = -\frac{u+v}{2} - \frac{b}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)$ sent $u = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$ i $v = \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$

segons el teorema Fonamental de l'àlgebra obtenint així les altres dues arrels imaginàries :

$$x = -\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{-4}}{2} + \frac{3}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{-4})i$$

Rafel Bombelli (1526-1572) fou un matemàtic i enginyer matemàtic. El seu llibre '*L'àlgebra'* (1572) estava dividit en cinc parts, les tres primeres estaven resoltes seguint el model dels matemàtics anteriors. Però després d'un llarg temps de treball i investigació va publicar la quarta i cinquena part on va introduir els nombres negatius i fins l'arrel quadrada d'un nombre negatiu. D'aquesta manera va rectificar les solucions posades per Tartàglia i Cardano per a les equacions algebraiques de tercer grau, aquest cop alguna solució d'aquestes era negativa o bé imaginària.

El treball de Bombelli va constituir el resultat més madur de l'àlgebra del s. XVI, transformant-se durant més d'un segle en el text d'àlgebra superior més autoritzat.

Il·lustració 42: *"L'àlgebra"* de Bombelli

3.4 Equacions biquadràtiques o de quart grau

Els matemàtics del s.XVI, un cop van resoldre el problema de l'equació de tercer grau, es van enfrontar a un nou desafiament: la resolució de l'equació de quart grau.

La primera equació de quart grau es va trobar resolta dins l'obra *Ars Magna* de Girolamo Cardano tot i que no va ser aquest qui la va resoldre. Cardano va educar i ensenyar al seu deixeble, **Ludovico Ferrari (**1522-1565). Aquest va investigar per a poder trobar el mètode per resoldre aquests tipus d'equacions i finalment ho va aconseguir seguint un model similar al de la resolució de l'equació cúbica. Ferrari va demostrar per primera vegada que les solucions d'una equació de quart grau podien ser negatives, irracionals i fins i tot podien implicar arrels quadrades de nombres negatius.

Aquest fet va provocar que diversos matemàtics de l'època el van desafiar per demostrar qui en sabia més i per tant, qui havia de tenir un major prestigi. Ferrari els va guanyar tots guanyant així un vida de èxit.

Ell va resoldre l'equació quadràtica de tipus $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ i s'havia de tenir en compte que a, b, c i d eren nombres reals. Llavors va pensar que aquesta equació es podia factoritzar en dos polinomis quadràtics i llavors mitjançant la resolució d'ells de forma separada va donar les quatre arrels que es volien cercar a l'inici.

Per trobar la solució d'una equació de quart grau es basava en la solució preliminar d'una equació cúbica auxiliar seguint el procés següent:

a) Sigui l'equació general de quart grau:

L'equació s'escrivia de la forma : $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

A ambdós membres es sumava l'expressió $\frac{a^2x^2}{4}$, el membre de l'esquerra era un quadrat perfecte:

$$x^4 + ax^3 + \frac{a^2x^2}{4} = -bx^2 - cx - d + \frac{a^2x^2}{4} \longrightarrow \quad x^2 + \frac{ax}{2} \quad ^2 = \quad \frac{a^2}{4} - b \quad x^2 - cx - d$$

A continuació a ambdós membres de l'equació es sumava els termes: $x^2 + \frac{ax}{2} \quad y + \frac{y^2}{4}$ on y era una variable, que desprès se li imposaria una condició necessària.

Obtenint novament, un quadrat perfecte en el membre esquerre i del membre dret extreure factor comú $x^2 \; i \; x$.

$$x^2 + \frac{ax}{2} \quad ^2 + \quad x^2 + \frac{ax}{2} \quad y + \frac{y^2}{4} \; = \; \frac{a^2}{4} - b \quad x^2 - cx - d \; + \; x^2 + \frac{ax}{2} \quad y + \frac{y^2}{4}$$

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} \quad ^2 \; = \; \frac{a^2}{4} - b + y \quad x^2 + \quad \frac{ay}{2} - c \quad x + \quad \frac{y^2}{4} - d \qquad \text{(equació 1)}$$

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} \quad ^2 = Ax^2 + Bx + C \text{ sent } A = \frac{a^2}{4} - b + y \quad , B = \quad \frac{ay}{2} - c \quad i \; C = \quad \frac{y^2}{4} - d$$

El problema havia quedat reduït a un altre amb dues incògnites. En el membre de la dreta de l'equació 1 hi havia un trinomi de segon grau en x, on els seus coeficients depenien de y.

S'elegia y de manera que el trinomi fos el quadrat d'un binomi de primer grau αx+β . Per a que el trinomi de segon grau $Ax^2 + Bx + C$ fos el quadrat del binomi αx+β era suficient que: $B^2 - 4AC = 0$, llavors $B = 2\sqrt{AC}$.

Per tant, $Ax^2 + Bx + C = Ax^2 + 2\sqrt{AC}\,x + C = \left(\sqrt{A}x + \sqrt{C}\right)^2 = (\alpha x + \beta)^2 \longrightarrow$

$\longrightarrow \alpha = \sqrt{A}$ i $\beta = \sqrt{C}$.

Si s'elegia y tal que: $B^2 - 4AC = \frac{ay}{2} - c\ ^{2} - 4 \cdot \ \frac{a^2}{4} - b + y \ \cdot \ \frac{y^2}{4} - d \ = 0.$

Desenvolupant el quadrat i els productes s'obtenia una equació en funció de y:

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - [d(a^2 - 4b) + c^2] = 0$$

Resolent aquesta equació cúbica auxiliar -fórmula de Cardano- es calculaven en funció de la seva solució α i β, és a dir, $x^2 + \frac{\alpha x}{2} + \frac{y}{2}\ ^{2} = (\alpha x + \beta)^2$

On $x^2 + \frac{\alpha x}{2} + \frac{y}{2} = \alpha x + \beta$ o bé $x^2 + \frac{\alpha x}{2} + \frac{y}{2} = -\alpha x - \beta$

A partir d'aquestes dues equacions de segon grau es podien trobar les quatre arrels de l'equació de quart grau donada.

3.5 Equacions polinòmiques d'una variable de grau superior a quatre

Després d'aquest període, el s. XVI, alguns matemàtics van voler millorar les resolucions de les equacions de grau inferior al quart i intentar cercar algun indici per començar a estudiar les de grau superior a quatre.

El prominent algebrista del s. XVII, **Tschimhausen** (1651-1708) va creure haver trobat un mètode general de solució. El seu mètode estava basat en la transformació d'una equació a una altra més simple però, aquesta transformació ja necessitava algunes equacions auxiliars.

Més tard, amb una anàlisi més profund es va demostrar que el mètode de transformació de Tschimhausen en efecte donava la solució d’equacions de segon, tercer i quart grau però, per a una equació de cinquè grau es necessitava resoldre primer una equació auxiliar de sisè grau, on la seva solució no era coneguda.

Solament dos personatges van poder influir en aquests canvis i aquests van ser: Joseph Louis de Lagrange i Paolo Ruffini.

Joseph Louis Lagrange (1736 -1813) fou un matemàtic, físic i astrònom francès. Es va fer conegut per diversos tractats relacionats amb el moviment, el soroll i l’astronomia. Tot i que també va ser conegut per les seves aportacions a la àlgebra. Va posar en dubte la manera de trobar les solucions de les equacions quadràtiques. Va trobar la solució completa d’una equació binominal de qualsevol grau i va crear un procés per aïllar les solucions d’una equació de qualsevol ordre tot i que en les equacions de grau superior a quatre fallava. Aquest procés tot i que no trobava les solucions de les equacions de grau superior al quart, va servir de base a altres matemàtics com Galois – apartat 3.6 - per trobar-la.

Lagrange va avançar bastant en la teoria de les equacions algebraiques descobrint noves relacions entre aquesta teoria i altres com la teoria de les permutacions però, a pesar dels seus persistents esforços el problema va continuar sense solució i constituïa, en paraules del mateix Lagrange:

‘’Un repte per a la ment humana’’

Paolo Ruffini (1765-1822) fou un matemàtic, filòsof i metge italià. La seva principal aportació va ser l'intent de demostrar que les equacions polinòmiques de grau superior al quart eren irresolubles per radicals, problema que romania obert des del s. XVI i que seria finalment resolt per Galois. Aquesta observació va ser publicada i desenvolupada en el seu llibre escrit al 1799 anomenat ‘*Teoria Generale delle Equazioni* ’.

Il·lustració 43: Obra *Teoria Generale delle Equazioni*

A més a més, va establir les bases de la teoria de les transformacions d'equacions tot i que va ser Galois qui ho va acabar d’ajustar. Va descobrir i formular la regla del càlcul aproximat de les arrels de les equacions, creant la regla de Ruffini que va permetre trobar els coeficients del resultat de la divisió d'un polinomi de qualsevol grau pel monomi $x - a$. Finalment, fou el primer a afirmar que les equacions de 5è grau no es podien resoldre per radicals.

En general quan el grau d’una equació era superior a dos, un mode numèric senzill per conèixer possibles arrels (particularment arrels enteres) era mitjançant la regla de Ruffini, que estava basada en la divisió entera de polinomis.

Si $p(x)$ era un polinomi existia un polinomi $q(x)\ i\ R(x)$ (amb grau de $R(x) < 1)$ tal que $p(x) = q(x).(x - a) + R(x)$.

Que en el cas particular de que a sigues una arrel, es tenia:

$$p(a) = q(a) \cdot 0 + R(a) = R(a) = 0$$

a més, si a fos una arrel del polinomi seria:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a)$$

És a dir, en el cas de que es recerquessin arrels enteres, si fos un nombre enter, es tindria que trobar-la entre els divisors enters del terme independent de $p\ (x)$.

Durant el s.XVIII es va continuar treballant en la teoria de les equacions i en 1799 el matemàtic, astrònom, físic alemany Carl Friedrich Gauss va publicar la demostració de que tota equació polinòmica té al menys una arrel en el pla complex (matrius).

En els temps de Gauss, l’àlgebra havia entrat en la seva etapa moderna. Des de llavors, l’àlgebra moderna –també anomenada abstracta- ha anat evolucionant; s’han obtingut importants resultats i s’han trobat aplicacions en totes les branques de les matemàtiques i en moltes altres ciències.

3.6 Quan existeix una fórmula per resoldre les equacions polinòmiques?

Resoldre una equació polinòmica mitjançant radicals significa trobar una fórmula per a les seves arrels de manera que l’única fórmula consisteix en les operacions de suma, resta, multiplicació, divisió i extracció d’arrels.

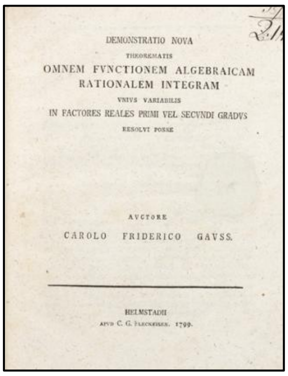
L’equació quadràtica o de segon grau era resolta mitjançant radicals ja des de l’època dels babilonis. L’equació cúbica fou resolta per radicals de Ferro, Tataglia i Cardano. Ferrari va resoldre l’equació de quart grau pels radicals i havien passat 250 anys sense que ningú fos capaç de resoldre les equacions de cinquè grau per radicals a pesar dels intents de molts matemàtics. Entre els que havien fet un seriós intent d’entendre el problema es coneix a Tschimhausen, Euler, Bézout, Vandermonde, Waring i de Lagrange.

Ningú abans de Ruffini creia que l’equació de cinquè grau no es pogués resoldre per radicals. Certament, cap matemàtic havia publicat tal afirmació i inclús Lagrange, en el seu famós document de reflexió sobre les equacions algebraiques va dir que va tornar a la qüestió de les solucions de cinquè grau i, encara tenia esperances de la seva resolució pels radicals.

En 1813, Ruffini va afirmar en el seu llibre “*Teoria general de les equacions*” que les equacions de cinquè grau no podien estar resoltes per radicals però, tampoc va arribar a demostrar-ho.

Durant el s. XIX van haver-hi dos matemàtics joves que van acabar de perfeccionar les imperfeccions que hi havia en aquell temps en l’àlgebra. A partir de grans estudis i coneixements van poder arribar a trobar fórmules i mètodes que van permetre trobar les solucions de qualsevol equació de qualsevol grau d’una manera senzilla i ràpida. Aquests dos matemàtics van ser: Niels Henrik Abel i Évariste Galois. Tot i que en va haver un altre que va fer una gran aportació a la historia de l’àlgebra i les equacions, aquest va ser Gauss.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) va ser un matemàtic, astrònom i físic alemany que va contribuir significativament en molts camps, un d’ells l’àlgebra. Va ser el primer en provar rigorosament el **teorema fonamental de l'àlgebra**- –Jean Le Rond D’Alembert 1717-1783- (dissertació per a la seva tesi doctoral en 1799), amb el títol: ‘*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*’ (‘Noves proves del teorema on cada funció integral algebraica d'una variable es pot resoldre en factors reals’) on afirmava que tot polinomi no constant de coeficients complexos i de grau $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$) tenia al menys una arrel complexa. Fou ben conegut que aquest teorema era equivalent a que cada polinomi no constant amb coeficients reals podia ser factoritzat en un producte de factors lineals i quadràtics.


DEMONSTRATIO NOVA
THEOREMATIS
OMNEM FVNCTIONEM ALGEBRAICAM
RATIONALEM INTEGRAM
VNIVS VARIABILIS
IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECVNDI GRADVS
RESOLVI POSSE

AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAVSS.

HELMSTADII
APVD C. G. FLECKEISEN. 1799.

Il·lustració 44: ‘*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi* posse’ de Gauss

Niels Henrik Abel (1802 -1829) fou un matemàtic noruec que va ser conegut per intentar trobar la solució a una equació de cinquè grau o superior i finalment deduí que no es va poder resoldre mitjançant radicals, per tant no podia tenir solució. Juntament amb Galois, se’ls va considerar els creadors de l’àlgebra moderna. La majoria de les seves publicacions estaven relacionades amb la resolució d’aquestes equacions tot i que arribava a un punt que segons ell, no es van poder continuar ja que no tenien solució.

Évariste Galois (1811-1832) fou un matemàtic francès que va resoldre equacions polinòmiques. En aquella època existien fórmules per resoldre equacions de tercer i quart grau, però Galois va treballar per trobar-n’hi una que resolgués les equacions de cinquè grau o majors. Va arribar a la conclusió que només es podien resoldre mitjançant tècniques de càlcul numèric. Tot i això, va descobrir que existien moltes equacions de cinquè grau que es podien resoldre amb radicals però, s’entenien casos particulars. Galois va formular i demostrar un teorema anomenat **teorema de Galois.** Aquest teorema permetia la identificació de les equacions afirmant el següent:

« Si en una equació polinòmica la potència més alta és un nombre primer i si, suposat que coneixem dos valors de la x, els altres es poden obtenir a partir d'ells fent servir únicament la suma, la resta, la multiplicació, la divisió, l’exponenciació i la radicació dels coeficients. Llavors l'equació pot ser resolta mitjançant radicals. »

Analitzant l’evolució de l’àlgebra al llarg del temps es pot arribar a la conclusió:

Existeixen fórmules que permeten resoldre les equacions de segon, tercer i quart grau. No existeix fórmula que permeti resoldre totes les equacions de cinquè grau o grau superior.

4 HISTÒRIA DELS SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS I NO LINEALS

Un sistema d'equacions algebraiques és un conjunt de dues o més equacions amb diverses incògnites que conformen un problema matemàtic que consisteix a trobar els valors de les incògnites que satisfan les operacions. Com es pot observar en aquesta definició l'evolució dels sistemes d'equacions està relacionat amb l'evolució de les pròpies equacions.

Els egipcis van deixar en els seus papirs, sobretot en el de Rhind i en el de Moscou, multitud de problemes matemàtics resolts. La majoria d'ells eren de tipus aritmètic i responien a situacions concretes de la vida diària; però van poder classificar alguns d'aquests com algebraics, ja que no es referien a cap objecte en concret.

Els babilonis gairebé no li van prestar atenció a les equacions lineals, potser per considerar-les massa elementals, i van treballar més en els sistemes d'equacions lineals i no lineals i les equacions de segon grau tal com:

$$\left.\begin{aligned} x \pm y &= a \\ x^2 \pm y^2 &= b \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x \pm y &= a \\ x \cdot y &= b \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} ax + y + cz &= d \\ mx + ny + pz &= h \\ rx + sy + qz &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Un exemple concret de cadascuna de les situacions anteriors ha arribat fins els nostres dies en una de les famoses taules babilòniques.

Els sistemes d'equacions van aparèixer també en els documents indis. No obstant això, no es van arribar a obtenir mètodes generals de resolució, sinó que van ser resolts com uns tipus especials d'equacions.

El matemàtics xinesos durant els s. IV i III aC van continuar la tradició dels babilonis arribant així els primers mètodes del pensament lineal. En el ''Tractat *Nou Capítols sobre l'Art Matemàtic*'', apareixia el sistema lineal següent, així com un mètode per a la seva resolució, el qual, en essència , és el mètode d'eliminació gaussiana dels nostres dies:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z = 39 \\ x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{aligned}\right\}$$

Seria interessant recordar el problema que va donar origen a aquest sistema lineal*:*

- ***Hi ha tres classes de gra: tres sacs de la primera classe, dos de la segona classe i un de la tercera fan 39 mesures; dos de la primera, tres de la segona i un de la tercera fan 34 mesures i; un de la primera, dos de la segona i tres de la tercera fan 26 mesures. Quantes mesures de gra estan contingudes en un sac de cada classe?***

Els matemàtics grecs no van tenir problemes amb les equacions lineals i, exceptuant a Diofant d'Alexandria, no es van dedicar molt a l'àlgebra, ja que la seva preocupació era major per la geometria. Diofant es va dedicar a l'estudi de les equacions de varies variables i com va ser un dels primers que va utilitzar simbolisme en aquestes les va anomenar equacions diofàntiques.

Una equació diofàntica és una equació algebraica on apareixen algunes variables sent les seves solucions nombres enters. Les equacions diofàntiques del tipus $ax + by = n$ amb $a, b, n \in Z$ es denominen equacions diofàntiques lineals i Diofant va demostrar un mètode per calcular les solucions enteres de l'equació.

Teorema:

Una equació lineal diofàntica de la forma $ax + by = n$ tenia solució entera sí i solament sí el màxim comú divisor de a i b era un divisor de n. Per obtenir el valor de l'equació era necessari conèixer l'algoritme d'Euclides per al càlcul del màxim comú divisor amb la identitat de Bezout.[6]

[6] Teoria de les funcions analítiques (1798)

En la civilització xina s. XIV es va destacar la resolució de sistemes lineals d'equacions on s'utilitzaven una regla per resoldre'ls anomenada 'fanchen' que era similar a la que es coneix avui en dia com el mètode de Gauss.

En el s. XIII Leonard de Pisa, en la seva obra *''Liber Quadratorum''* va estudiar el sistema no lineal:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + a &= y^2 \\ x^2 - a &= z^2 \end{aligned}\right\}$$

Dos esdeveniments en el desenvolupament de l'àlgebra importantíssims van ser: el descobriment del sistema dels nombres complexos, com una extensió del sistema R format pels nombres reals, amb les operacions usuals de suma i multiplicació i, la primera prova de l'anomenat **teorema fonamental de l'àlgebra** (Jean Le Rond D'Alembert 1717-1783).

Girolamo Cardano (s.XVI) va ser el precursor dels nombres complexos per ser aquest el primer en considerar expressions de la forma $a + \sqrt{-b}$ amb a i b nombres reals. Quan la solució implicava l'arrel quadrada d'un nombre negatiu (casos irreductibles), Cardano mostrava un mètode per obtenir les solucions de l'equació quadràtica en el seu llibre *''Ars Magna''.* Així els casos irreductibles eren els nombres imaginaris que avui en dia donen origen a un nou sistema de nombres que amplien el dels nombres reals.

Cardano en el capítol 37 del seu llibre *''Ars Magna''* planteja el següent problema:

- ***Dividir 10 en dues parts tal que el seu producte sigui igual a 40***.

Estava clar que aquest cas era impossible com solució real però, Cardano va treballar de la manera següent:

1.- Es dividia 10 en dues partes iguals, fent cadascuna de valor 5.

2.-Aquestes parts s'elevaven al quadrat i donaven 25.

3.- Es restava 40 del 25 així produïts, deixaven un residu de -15.

4.- L'arrel quadrada del residu sumada o restada de 5 donava les parts del producte el qual era 40.

5.- Aquestes solucions eren: $5+\sqrt{-15}$ i $5-\sqrt{-15}$.

Per resoldre sistemes d'equacions lineals era important conèixer també el llenguatge dels vectors, així com l'espai vectorial que impulsava l'estudi d'equacions lineals ja que des del s. XVII aquest coneixement va representar l'origen de la matemàtica moderna, en aquest camp era de gran rellevància els estudis dels següents matemàtics: Grassmann, Euler, Lagrange, Rowan Hamilton, Frobenius, entre altres.

El matemàtic Cayley va ser considerat el fundador de l'àlgebra de matrius encara que Sylvester, Jordan, Euler, Lagrange i Gauss també eren considerats els promotors d'aquest càlcul.

Els dos matemàtics que més van interferir en l'evolució i la resolució dels sistemes d'equacions lineals i no lineals van ser: Johann Carl Friedrich Gauss, Eugène Rouché i Ferdinand Georg Frobenius.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fou va ser un matemàtic, astrònom i físic alemany que va contribuir significativament en molts camps, incloent-hi la teoria de nombres, l'anàlisi matemàtica, la geometria diferencial, l'estadística, l'àlgebra, la geodèsia, el magnetisme i l'òptica.

Va idear el mètode de Gauss per resoldre sistemes d'equacions que fou una generalització del tradicional mètode de reducció. Consistia en treballar directament amb els coeficients del sistema escrits en un quadre, és a dir, una matriu, de manera que cada fila contenia els coeficients de les incògnites i del terme independent de cada equació i mitjançant les transformacions elementals per files es transformava en una matriu triangular superior (o inferior). D'aquesta forma s'obtenia un sistema equivalent a l'inicial que era molt més fàcil de resoldre.

A continuació s’il·lustrà la utilització del mètode de Gauss, un conjunt de n equacions lineals amb n incògnites reduint-lo a un sistema triangular equivalent –un sistema equivalent és un sistema que té iguals valors de la solució i triangular és que sigui esglaonat- i així arribar a obtenir les solucions.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ z-y-z=-1 \end{array}\right\}$$

El sistema en forma matricial → $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$

Si a la segona i tercera fila se li resta la primera, s’obté:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & -2 & -2 & | & -4 \end{pmatrix}$$

Si s’intercanvia la segona fila i la tercera, s’obté:

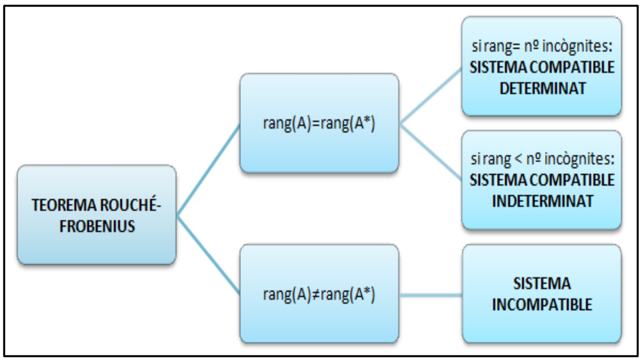
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -2 & -2 & | & -4 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 \end{pmatrix}$$

L’anterior matriu ampliada del sistema d’equacions és equivalent a l’inicial per tant el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ -2y-2z=-4 \\ -2z=-2 \end{array}\right\}$$

Se soluciona la tercera equació i s’obté el valor de z; $z=1$. Posteriorment $y=1$ i per últim $x=1$. La solució del sistema és: $x, y, z \;=\; 1,1,1$.

Eugène Rouché (1832-1910) fou un matemàtic francès que juntament amb **Ferdinand Georg Frobenius** (1849-1917) un matemàtic alemany van crear el teorema Rouché-Frobenius. Rouché el va crear i Frobenius va demostrar la validesa d'aquest. Aquest teorema, en àlgebra lineal, va permetre calcular el nombre de solucions d'un sistema d'equacions lineals en funció del rang de la matriu de coeficients i del rang de la matriu ampliada associades al sistema. El teorema establia que perquè un sistema d'equacions lineals sigui compatible era condició necessària i suficient que la matriu formada pels coeficients juntament amb l'ampliada pels termes independents posseïssin el mateix rang. A part d'això, el sistema constituït seria determinat si el seu rang coincidia amb el nombre d'incògnites o seria indeterminat si posseïa un valor menor a tal nombre.



Il·lustració 45: Teorema Rouché- Frobenius

5 CONCLUSIÓ

Fa gairebé nou mesos que el treball de recerca va anar entrant poc a poc a la meva rutina fins que es va instal·lar en ella. Tenia clar que el tema havia d’estar relacionat amb les matemàtiques i després d’un temps de reflexions i diverses propostes vaig elegir el tema del meu treball: l’evolució de l’àlgebra en les equacions polinòmiques. Des d’un primer moment em vaig adonar que seria un treball al qual se li hauria de dedicar bastant temps, cal destacar que a mi personalment m’ha passat molt ràpid degut que tractava un tema que m’agradava molt i tenia molt interès en ell.

Tot i que al principi el meu objectiu solament fos estudiar l’evolució de l’àlgebra, durant el transcurs del treball m’han sorgit de nous com a partir de les característiques de cada època poder entendre millor com eren aquells períodes. Un cop acabat aquest treball puc afirmar que aquests objectius s’han complert de manera satisfactòria.

Després de dur a terme aquest treball he pogut observar la importància de les matemàtiques en la vida quotidiana en diversos períodes històrics. M’han semblat molt interesants cadascun dels plantejaments i dels procediments que es duien a terme a cada període i encara més, com perduren alguns d’aquests avui en dia encara.

Malgrat haver tingut molta feina, estic molt satisfeta amb el treball que he fet. A part d’adquirir nous coneixements matemàtics també he millorat aspectes personals com l’organització, la disciplina i l’esforç. He d’admetre que hi havia moments que pensava que aquest tema em superava i no podia continuar, tot i així, vaig continuar cap endavant i estic orgullosa d’haver superat aquests entrebancs.

Al llarg d’aquest treball, s’ha intentat demostrar l’evolució que ha experimentat l’àlgebra des dels seus orígens que es troba en l’antiga civilització egípcia, fins al segle XX, ressaltant matemàtics de renom universal com: Al-Khawarizmi, Lagrange, Gauss, Galois, entre altres.

Efectivament, el present estudi mostra com els mètodes aritmètics-geomètrics que es van utilitzar en els inicis de les cultures, per arribar a obtenir el resultat en la resolució d'un problema, es van dirigint vers uns raonaments geomètrics euclidians presents, ja en el segle III. Conseqüentment, aquests raonaments van millorar notablement el rigor matemàtic en la resolució, basant-se en determinar una condició geomètrica general, demostrada per una sèrie de raonaments inductius, gràcies a la qual, es va poder recercar i analitzar l'expressió escrita més senzilla per poder així arribar a obtenir un resultat correcte.

Hem de destacar que la societat al llarg del temps ha estat i és dinàmica i, com a conseqüència, ha portat i porta, inevitables i grans canvis. Aquests canvis han fomentat la necessitat d'utilitzar símbols i signes específics per poder arribar a simular experiments, a elaborar conjectures, a comprovar i a validar les mateixes amb un llenguatge precís, concís i exacte que dedueixi amb un llenguatge formal la resposta del problema.

El llenguatge simbòlic utilitzat per l'àlgebra partir del segle XV ha servit d'estímul per impulsar l'àlgebra a formar part de nombroses aplicacions: aplicacions en totes les branques de les matemàtiques així com en altres ciències i tecnologies modernes com són la lògica; les ciències de la computació; la programació; la tecnologia de Microsoft Office; l'enginyeria, ...

Per últim m'agradaria destacar que m'ha semblat molt interesant, en la meva part pràctica, la resolució de les equacions quadràtiques segons Al-Khwarizmi i la fórmula Ferro-Tartàglia ja que tot i ser mètodes molt antics crec que són molt entretinguts i són una manera molt original i diferent d'aïllar les solucions a una equació de segon grau.

6 BIBLIOGRAFIA

Albendea, P. (2011). *La historia del álgebra en las aulas de secundaria.* Cantabria, España: Universidad de Cantabria.

Hergatacorzian, A & Alarcón, C. (2012). Resolución de la ecuación de segundo grado: una alternativa a Bhaskara.*V Curem*, 547-554.

Perramon, M. (2008). Matemàtiques de l’antic Egipte. Sant Adrià de Besos, España: Universitat Politècnica de Catalunya

Yuste, P. (2008). Ecuaciones cuadráticas y procedimientos algorítmicos. Diofanto y las matemáticas en Mesopotamia. *Theoria*, 62, 219-244.

7 WEBGRAFIA

<http://www.upct.es/seeu/concursos/Breve_Historia_Matematicas_contemporanea.pdf >

<https://es.slideshare.net/Thelyn/matematicas-en-egipto-y-mesopotamia >

<https://prezi.com/y7y3lpxcxa9q/aristoteles-y-la-matematica/ >

<https://prezi.com/gsilj24qjwut/24-periodo-helenico-o-epoca-alejandrina/>

<https://javierdelpino.wordpress.com/category/matematicas/la-aritmetica-de-diofanto/>

<https://es.slideshare.net/patriciolincovil1/algebra-desde-antigua-civilizacin-china-india-y >

<https://prezi.com/bq_ufecu529_/newton-y-sus-aportaciones-a-las-matematicas/>

<https://es.scribd.com/doc/80297875/MATEMATICOS-Y-APORTACIONES>

<https://es.slideshare.net/DAnderMaster/propiedades-del-algebra-de-boole>

<https://prezi.com/gkyriguvjctx/uso-de-representaciones-geometricas-para-resolver-ecuaciones-cuadraticas-a-traves-del-metodo-griego-experimento-de-ensenanza/ >

<https://es.slideshare.net/saldanaivanjorge/historia-sobre-las-ecuaciones-de-segundo-grado>

<file:///C:/Documents%20and%20Settings/anton/Mis%20documentos/Dialnet-SobreLaSolucionDeEcuacionesDeTercerYCuartoGrado-3994517%20(1).pdf>

<file:///C:/Documents%20and%20Settings/anton/Mis%20documentos/Capítulo%203.pdf>

<https://prezi.com/ay1bg0t57yj0/historia-y-desarrollo-de-los-sistemas-de-ecuaciones-lineales/>

<http://es.calameo.com/read/0044664077bbd5d4f86a9>

<https://es.slideshare.net/ilarrosa/frmula-de-cardano-para-cbicas>

<https://www.uv.es/ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf>

<http://matematicas.uclm.es/itacr/web_matematicas/trabajos/5/5_las_matematicas_en_el_islam.pdf>

<http://ficus.pntic.mec.es/mnaf0005/Historia.html >

<http://www.e-torredebabel.com/historia-filosofia-gonzalez/escuelajonica-h-filosofia-g.htm>

<http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Historia/Greciaheroica.htm>

<http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Platon-1.asp.htm >

<https://johanromero2.wordpress.com/2011/07/26/aportes-a-las-matematicas/>

<http://newton.matem.unam.mx/geometria/menulibro_m.html >

<https://sites.google.com/site/sonniabcastillo/6-diofanto-de-alejandria-el-padre-del-algebra

http://mathematika.org/vertexto.php?id=9>

<https://sites.google.com/site/historiadelamatematicaperu2016/matematica-china >

<http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte2/Cap09/Parte02_09.htm >

<http://marlyforeroblogspotcom.blogspot.com.es/2010/06/historia-de-las-matematicas-en-india.html>

<https://sites.google.com/site/leonardodepisafibonaccig1b18/3-4-aportes-a-la-matematica

https://www.ecured.cu/Paolo_Ruffini>

<http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/html/sigloxix/Carl%20Friedrich%20Gauss.htm>

<http://elpais.com/elpais/2016/10/24/ciencia/1477307484_183045.html>

<http://epistemologiasamuel.blogspot.com.es/2010/06/matematicas-en-la-era-moderna-en-la.html>

<http://matematicaseducativas.blogspot.com.es/2011/02/luca-pacioli.html>

<http://www.ugr.es/~eaznar/tartaglia.htm>

<http://smk1-girolamo.blogspot.com.es/2012/03/aportes-de-cardano-la-matematica.html>

<https://matematics.wordpress.com/2013/12/09/rafael-bombelli/>

<http://www.elresumen.com/autores/libros_de_rene_descartes.htm>

<http://www.lecturalia.com/autor/4031/rene-descartes>

<https://sites.google.com/site/tmbsirisaacnewtongrupo4npmmm/1-biografia/1-3-aportes-ala-matematica>

<https://matematicascercanas.com/2014/02/03/la-ecuacion-mas-famosa-de-la-matematica/>

<http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm>

<http://www.ehu.eus/aba/div/paseo-06-07.pdf>

<http://www.ugr.es/~eaznar/abel.htm>

<http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/otras_fuentes.htm>

<http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Las_matemáticas_en_Mesopotamia_y_antiguo_Egipto_(c._1800-500_a.C.)>

<https://metode.cat/revistes-metode/monografics/alguns-problemes-algebra.html>

<http://ieslagunatollon.blogspot.com.es/2011/11/la-matematica-en-mesopotamiael-algebra.html>

<http://www.ugr.es/~eaznar/ferro.htm>

<http://alejandralopezrodriguez.blogspot.com.es/2009/11/ecuacion-cubica.html>

<http://www.escuelasfrancesas.es/wp-content/uploads/alumno-descarga/lahistoriadelalgebra.pdf>

<http://matematicaseducativas.blogspot.com.es/2011/02/chu-shih-chieh.html>

<http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Historia/Mesopotamia.htm#interpolación>

<https://www.google.es/search?q=formula+cardano&client=opera&hs=ZqF&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwick66tjJ_VAhUkDcAKHQ3cD5MQ_AUICigB&biw=1326&bih=668#imgrc=7VfL2qQA4B9jkM>