



CÀLCUL DE L'ORTO I L'OCÀS SOLAR

EN QUALSEVOL PUNT DE LA SUPERFÍCIE
TERRESTRE AL LLARG DEL 2018
I A PARTIR DE L'ESFERA CELESTE



*Som el mitjà perquè el Cosmos
es conegui a si mateix.*

CARL SAGAN

ÍNDEX

0. INTRODUCCIÓ	4
1. EL MOVIMENT DIÛRN	8
1.1. GENERALITATS	8
1.2. COORDENADES GEOGRÀFIQUES	8
1.3. L'ESFERA CELESTE	11
1.4. MOVIMENT DIÛRN, EQUADOR, MERIDIANS I PARAL·LELS.....	11
1.5. VERTICAL, MERIDIANA I PERPENDICULAR	13
1.6. COORDENADES HORITZONTALS	16
1.6.1. <i>Coordenades cartesianes horitzontals</i>	16
1.6.2. <i>Coordenades esfèriques horitzontals</i>	17
1.6.3. <i>Relació entre coordenades horitzontals</i>	18
1.7. COORDENADES HORÀRIES.....	19
1.7.1. <i>Coordenades cartesianes horàries</i>	19
1.7.2. <i>Coordenades esfèriques horàries</i>	20
1.7.3. <i>Relació entre coordenades horàries</i>	21
1.8. CANVI DE COORDENADES HORITZONTALS A HORÀRIES I VICEVERSA.....	21
1.8.1. <i>Canvi de coordenades horitzontals a horàries</i>	22
1.8.2. <i>Canvi de coordenades horàries a horitzontals</i>	23
1.9. FENÒMENS CAUSATS PEL MOVIMENT DIÛRN DE L'ESFERA CELESTE.....	24
1.9.1. <i>Orto i ocàs d'un astre</i>	25
1.9.2. <i>Culminació superior i inferior d'un astre</i>	25
1.9.3. <i>Moviment diürn des de diferents latituds</i>	27
2. EL MOVIMENT ANUAL DEL SOL.....	29
2.1. L'ECLÍPTICA.....	29
2.2. COORDENADES EQUATORIALS.....	31
2.2.1. <i>Coordenades cartesianes equatorials</i>	32
2.2.2. <i>Coordenades esfèriques equatorials</i>	32
2.2.3. <i>Relació entre coordenades equatorials</i>	33
2.3. COORDENADES ECLÍPTIQUES.....	33
2.3.1. <i>Coordenades cartesianes eclíptiques</i>	34
2.3.2. <i>Coordenades esfèriques eclíptiques</i>	34
2.3.3. <i>Relació entre coordenades eclíptiques</i>	35
2.4. CANVI DE COORDENADES EQUATORIALS A ECLÍPTIQUES I VICEVERSA.....	35
2.4.1. <i>Canvi de coordenades equatorials a eclíptiques</i>	36
2.4.2. <i>Canvi de coordenades eclíptiques a equatorials</i>	37

2.5. EL MOVIMENT ANUAL DEL SOL	38
2.5.1. Variació de les coordenades del Sol durant el seu moviment anual	38
2.6. EL MOVIMENT DIÛRN DEL SOL.....	39
2.6.1. Duració del dia segons l'època de l'any	40
2.6.2. Moviment diürn del Sol des de diferents latituds	41
3. EL TEMPS.....	43
3.1. ANY SIDERI I ANY TRÒPIC	43
3.2. MESURA DEL TEMPS	44
3.2.1. Dia sideral.....	44
3.2.2. Dia sideri. Temps sideri.....	44
3.2.3. Dia solar veritable. Temps solar veritable.....	45
3.2.4. Dia solar mitjà. Temps solar mitjà.....	47
3.3. TEMPS LOCAL, TEMPS UNIVERSAL I TEMPS DEL FUS HORARI	48
3.4. TEMPS OFICIAL.....	50
4. MOVIMENTS DE LA TERRA I FENÒMENS SOLARS	51
4.1. PRECESSIÓ	51
4.2. NUTACIÓ.....	53
4.3. LA REFRACCIÓ ASTRONÒMICA	55
4.4. ELS CREPUSCLES.....	56
5. CÀLCUL DE L'ORTO I L'OCÀS SOLAR	58
5.1. ORTO I OCÀS SOLAR	59
5.2. LATITUD DEL LLOC.....	60
5.3. DECLINACIÓ SOLAR.....	60
5.3.1. Fórmula per calcular la declinació solar	65
5.4. Matriu de rotació i angle horari.....	70
5.5. TEMPS SOLAR VERITABLE: HORA DE L'ORTO I DE L'OCÀS.....	73
5.6. HORA DEL FUS HORARI I TEMPS OFICIAL	75
5.7. FÓRMULA COMPLETA PER AL CÀLCUL DE L'ORTO I L'OCÀS	76
5.8. COMPROVACIÓ DE LA FÓRMULA PER AL CÀLCUL DE L'ORTO I L'OCÀS	76
5.9. EXEMPLES DE CÀLCUL DE L'ORTO I L'OCÀS	82
6. CONCLUSIONS	89
BIBLIOGRAFIA.....	92
ANNEX I	94

0. INTRODUCCIÓ

Des de sempre he cregut que una de les coses més difícils de la vida és escollir, o més ben dit, escollir bé, fet que resulta força complicat si ets una persona altament indecisa, com ho soc jo. Prendre decisions mai ha estat una tasca fàcil per a mi, així que ja us podeu imaginar el que suposaria, en el meu cas, la tria d'un tema pel treball de recerca.

Igual que la gran majoria, no sabia per on començar, perquè les possibles temàtiques són infinites. Així, vaig centrar-me, primerament, en decidir quin àmbit volia estudiar i què era allò que realment m'agradava i m'interessava.

Respondre a la pregunta de "què m'agrada?" va resultar-me molt més fàcil perquè sempre ho he tingut bastant clar. La meva afició, allò que realment m'apassiona, és l'astronomia, i no és res nou, sinó que es remunta anys enrere, ja que des de ben petita he tingut molta curiositat per entendre què passava allà fora. Encara no sé què va ser el que va despertar-me aquest interès per intentar conèixer el perquè de tot el que hi ha a l'Univers i que m'ha portat, tants cops, a fer-me preguntes a les quals difícilment trobo resposta. Però el que si vaig saber ràpidament, va ser que el meu tema havia de girar al voltant de l'astronomia.

Després de la primera decisió presa, calia anar concretant una mica més sobre els aspectes que desitjava tractar en el meu treball, perquè l'astronomia és un tema considerablement ampli. La sort se'm va presentar quan van oferir-me la possibilitat de realitzar un tema anomenat *astronomia a través de l'esfera celeste*. Semblava bona opció, perquè tractava l'àmbit d'astronomia en el que volia enfocar el treball i em resolva la gairebé impossible missió de trobar un tema sobre el qual poder investigar. Així que vaig decidir que aquesta seria la temàtica escollida.

El que va portar-me a decidir-me per aquest tema crec que va ser que m'oferia la possibilitat d'aprendre moltíssim sobre un àmbit com l'astronomia pel que sempre havia tingut curiositat i del que coneixia ben poc. Es presentava com una temàtica difícil i de la que tenia pocs coneixements previs, però vaig pensar que si investigava sobre el que realment m'interessava, l'esforç valdria la pena. A més, tot i ser indecisa com he anomenat al principi, una cosa que tinc força clara és que vull estudiar física perquè m'ofereix la possibilitat d'obtenir respostes a totes aquelles preguntes que sempre m'he fet sobre el perquè de tot el que succeeix.

Així, tot i que aquest treball té una gran part matemàtica, com explicaré posteriorment, també em permet començar a endinsar-me en una de les branques de la física, fet que em va semblar molt positiu.

D'aquesta manera, vaig decidir tirar endavant amb aquesta opció que se'm proposava i que ara explicaré en què consisteix.

L'astronomia és una de les ciències més antigues que existeixen, ja que l'ésser humà sempre ha tingut la predisposició de mirar al cel i intentar entendre quin és el moviment dels objectes celestes que a simple vista veiem des de la Terra. Doncs bé, el meu treball de recerca es fonamenta precisament en aquesta idea, en la d'explicar el moviment aparent dels astres des del nostre planeta. Per fer-ho utilitzaré el concepte de l'*esfera celeste*, que ens l'hem d'imaginar com una gran cúpula que envolta el globus terraquí i sobre la qual es projecten tots els cossos celestes visibles des de la nostra posició.

D'aquesta manera, el primer objectiu del treball és la comprensió del moviment aparent dels astres sobre l'esfera celeste. En concret, em centraré en un de particular per la influència que té sobre la nostra vida; aquest astre és el Sol. Un cop entès el moviment d'aquest, la pregunta al voltant de la qual girarà la meua recerca serà: *Com podem calcular matemàticament l'hora de sortida i posta del Sol (l'orto i l'ocàs solar) en qualsevol lloc del món per a qualsevol dia de l'any?* L'objectiu de la recerca, per tant, serà donar resposta a aquesta pregunta.

Per resoldre-la, en primer lloc, el treball constarà d'un cos teòric, on apareixeran tots els tecnicismes necessaris per aprofundir en el tema. A continuació, passaré a la part matemàtica i de càlcul, on respondré a la pregunta formulada anteriorment. Aquesta part consistirà a elaborar, a partir de tot allò après al llarg del cos teòric, una fórmula que permeti calcular amb la màxima exactitud possible quan sortirà i es pondrà el Sol en qualsevol punt de l'esfera terrestre i durant qualsevol dia de l'any.

En el marc teòric definiré, primerament, què és l'esfera celeste i les seves parts principals. Posteriorment, passaré a explicar el seu moviment aparent al llarg d'un dia, a més de les conseqüències que aquest suposa. Després de l'explicació d'aquests conceptes bàsics, aprofundiré una mica més en el moviment del Sol sobre l'esfera, tant durant un dia, com al llarg de l'any. Durant l'exposició d'aquests termes, també introduiré l'explicació de quatre tipus de coordenades diferents per

a situar un punt sobre l'esfera celeste, a més dels canvis d'unes coordenades a unes altres a través de matrius de rotació, que resultaran imprescindibles per a la part de càlcul. Per continuar amb aquest primer bloc, parlaré del temps i les diferents formes de mesurar-lo, perquè encara que sembli mentida, no només n'hi ha una. Així, definiré quina d'elles és la que fem servir i quins avantatges suposa respecte de les altres formes de mesurament. En última instància, mencionaré alguns fenòmens solars i moviments terrestres, tot i que els seus efectes resulten menyspreables a l'hora del càlcul i per això no els considero al llarg del treball.

El segon bloc serà el de la part pràctica, on intentaré trobar una fórmula que realitzi la funció de calcular l'hora de sortida i posta del Sol verdadera en qualsevol lloc i qualsevol dia coneixent únicament dues dades: la declinació del Sol del dia pel qual es vol fer el càlcul i la latitud del lloc pel qual es vol fer. La latitud hauré d'obtenir-la a partir de programes d'Internet que proporcionen les coordenades de qualsevol punt terrestre. La declinació solar per a cada dia també l'extrauré d'Internet, de taules on ja ve donada. Tot i així, també intentaré aconseguir, paral·lelament, una fórmula aproximada que ens permeti trobar la declinació diària sense haver de recórrer a elles.

Després de trobar la fórmula de l'hora verdadera, trobaré una altra fórmula per a trobar l'hora de rellotge oficial coneixent dues dades més, que són la longitud i la franja horària del lloc pel qual s'estiguin fent els càlculs. Com es veurà, l'hora solar verdadera i l'hora oficial no coincideixen per a tots els punts d'una franja horària i per això és necessari establir la relació existent entre totes dues.

Com he mencionat anteriorment, aquesta fórmula es fonamentarà principalment en una matriu de rotació que em permet canviar del sistema de coordenades horàries al de coordenades horitzontals. Aquestes coordenades seran les necessàries per a situar la posició del Sol sobre l'esfera celeste i relacionar-les amb el mesurament del temps per a saber en cada instant la situació del Sol respecte de l'observador.

Per finalitzar amb el treball, utilitzaré la fórmula per calcular numèricament l'hora de sortida i posta del Sol de Barcelona i compararé les dades que jo he obtingut amb dades oficials. Amb això comprovaré si la fórmula que he trobat proporciona resultats el més correctes possibles i extrauré les conclusions pertinents respecte de la fiabilitat d'utilitzar-la per a calcular a quina hora surt i es

pon el Sol en a qualsevol lloc de la superfície terrestre. A més, també calcularé les hores de sortida i posta solar de cinc localitzacions diferents durant tot l'any per tal de comparar el moviment diürn en cadascuna d'elles.

Un aclariment que cal fer és que els resultats que obtindrè a partir de la fórmula seran vàlids només per a l'any 2018 perquè les declinacions solars varien d'un any a l'altre.

Per últim, amb aquest treball de recerca només pretenc descobrir i mostrar una petita part de la infinitat de l'Univers, intentar conèixer com funciona i respondre alguna de les moltes preguntes que porto fent-me des de sempre.

1. EL MOVIMENT DIÛRN

1.1. GENERALITATS

L'astronomia comprèn la investigació d'un espai infinit com és l'univers, però aquest treball es limitarà principalment a l'estudi de tot el que és observable des de la Terra, prenent-la com a centre. Tot aquest univers observable s'anomena esfera celeste. Més endavant explicaré el significat d'aquest concepte, però primer cal començar definint-ne altres de bàsics.

En primer lloc, cal dir que, d'entre tots els elements que formen l'Univers, nosaltres ens trobem situats en una galàxia espiral: la Via Làctia. Entre els milers d'estrelles que la formen, n'hi ha una situada en un dels braços de l'espiral que té un especial interès per a nosaltres. Estem parlant del Sol, el centre del Sistema Solar. Al voltant del Sol giren vuit planetes, un dels quals és la Terra.

La Terra interactua gravitatòriament amb altres objectes a l'espai, especialment el mateix Sol i la Lluna, el seu satèl·lit natural. D'aquesta última no en parlaré en aquest treball, ni del seu moviment ni influències sobre el nostre planeta. El que sí cal anomenar són els dos moviments principals propis de la Terra, que es produeixen simultàniament. El primer és la rotació, que consisteix en un gir al voltant del seu eix polar. El segon és la translació, que és el moviment del nostre planeta al voltant del Sol descrivint una òrbita el·líptica.

Aquests moviments descrits condicionen la visió que tenim del cel i la resta de cossos celestes que hi ha en ell, i seran un dels fonaments a tenir en compte al llarg del desenvolupament del treball.

1.2. COORDENADES GEOGRÀFIQUES

L'estudi de la posició dels astres observables des de la Terra és un dels objectius del treball, però per arribar-hi cal primer aprendre a situar un punt sobre la Terra per tal de definir la posició de l'observador. Per fer-ho s'utilitzen les *coordenades geogràfiques*, que són un sistema que permet situar qualsevol punt de la superfície terrestre mitjançant la utilització d'angles.

En el sistema de coordenades geogràfiques, per determinar la posició d'un punt qualsevol C sobre la superfície de l'esfera terrestre s'utilitzen dues coordenades: la latitud geogràfica ϕ i la longitud geogràfica l . Com a sistema de referència d'aquestes coordenades s'utilitzen unes línies imaginàries situades sobre la superfície terrestre anomenades *cercles màxims*. Cada un d'aquests cercles són la intersecció de l'esfera amb un pla que passa pel seu centre i tenen com a radi el radi de l'esfera (*fig. 1*).

L'eix de rotació de la Terra interseca la superfície terrestre en dos punts: el *pol nord* i el *pol sud geogràfics*. Per a un observador situat al pol nord geogràfic, el sentit de gir de la Terra és directe o antihorari. Per contra, per a un observador situat al pol sud és retrògrad o horari.

L'*equador geogràfic* és el cercle màxim perpendicular a l'eix de rotació de la Terra i que passa pel seu centre, per tant, és equidistant als dos pols. L'equador geogràfic divideix la Terra en dos hemisferis: l'*hemisferi nord*, que conté el pol nord geogràfic i l'*hemisferi sud*, que conté el pol sud geogràfic. Els cercles definits pels plans paral·lels a l'equador s'anomenen *paral·lels geogràfics*.

Els *meridians geogràfics* són els cercles màxims que uneixen els dos pols i són perpendiculars a l'equador geogràfic. Els pols divideixen cada meridià en dos *semimeridians*. El meridià que es pren com a referència, i com a *primer semimeridià*, és el que passa per l'observatori de Greenwich a Anglaterra (0°).

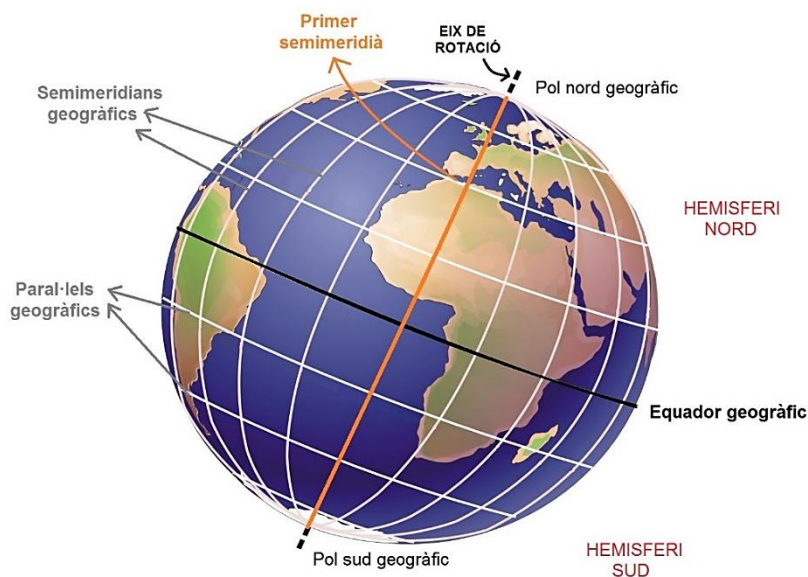


Fig. 1. Eix de rotació, pols geogràfics i cercles màxims

Un altre concepte a tenir en compte és la *vertical*. La vertical del lloc C es defineix com la recta que passa pel punt C i segueix la direcció de la plomada. La *direcció de la plomada* en un punt C de la superfície terrestre és la direcció del vector força de la gravetat que fa la Terra sobre una massa puntual situada a C. En considerar l'esfera terrestre com una esfera perfecta i amb una distribució homogènia de la seva massa, la vertical, en qualsevol punt de la superfície de la Terra, passa pel centre terrestre.

També cal tenir clar com establir la direcció est-oest sobre la superfície terrestre. Si estem sobre l'equador o un paral·lel geogràfic i ens movem en el sentit de la rotació terrestre, ens estem desplaçant a l'*est*, a l'*orient* o a l'*levant*. En canvi, si avancem en sentit contrari a la rotació de l'eix de la Terra, diem que ens movem a l'*oest*, l'*occident* o a l'*ponent*.

A partir d'això, la *latitud geogràfica* ϕ del punt C és l'angle que formen la vertical de C i l'equador geogràfic. La latitud ϕ pot adoptar els següents valors: $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$. Com a criteri de signes s'adopta com a positiu l'angle que forma amb l'equador qualsevol punt situat a l'hemisferi nord, i com a negatiu, qualsevol punt situat a l'hemisferi sud. D'aquesta manera, la latitud val 0° si el punt es troba sobre l'equador. Si s'avança cap al pol nord, la latitud va creixent fins a arribar a 90° i si es fa cap al pol sud, va decreixent fins a arribar al valor de -90° .

La *longitud geogràfica* l d'un punt C és la distància angular que hi ha del semimeridià geogràfic sobre el que està situat C fins al primer semimeridià. L'arc que forma aquest angle segueix un paral·lel geogràfic i pot tenir un mòdul igual o inferior a 180° . Així, els valors possibles de la longitud l són: $-180^\circ \leq l \leq 180^\circ$. Per tant, tenen longitud 0° els punts situats sobre el primer semimeridià. La longitud va augmentant de 0° fins a 180° si s'avança en direcció est i disminueix de 0° fins a -180° si ens dirigim a l'oest. Cal destacar que els punts del semimeridià exactament oposat al de Greenwich tenen a la vegada $l = \pm 180^\circ$ i que el pol nord i el pol sud geogràfic no tenen cap valor de longitud (*fig. 2*).

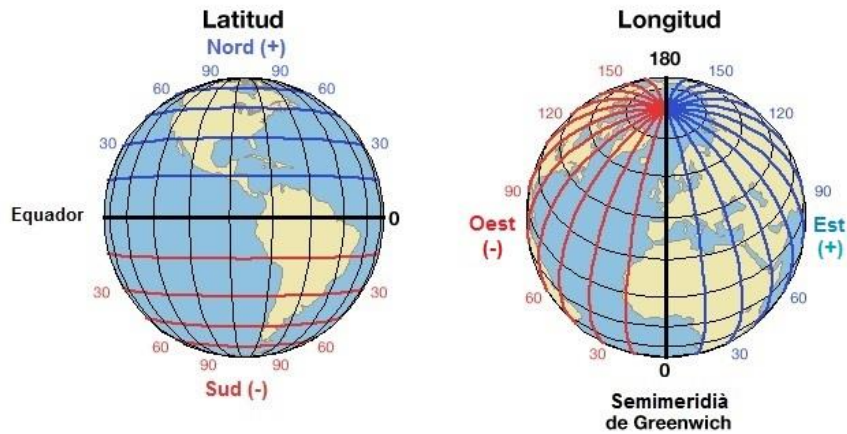


Fig. 2. Latitud i longitud

1.3. L'ESFERA CELESTE

A primera vista, des de la Terra, es veu el cel com una immensa esfera que envolta la Terra on tots els astres quedarien situats sobre la seva superfície, de manera que aquests astres semblen moure's seguint una rotació uniforme al voltant d'un eix. Aquesta esfera, en astronomia, rep el nom d'*esfera celeste*.

L'esfera celeste és una esfera imaginària que té com a centre l'observador i un radi indefinidament gran, sobre la qual es poden localitzar els cossos celestes tal com es veuen en cada instant de temps des del punt on es troba l'observador.

Es considera que el moviment de rotació de l'esfera celeste és de llevant a ponent, tot i que actualment se sap que aquest moviment és aparent i que el moviment real és el de rotació de la Terra sobre el seu eix de ponent a llevant. Tot i això, se segueix utilitzant el concepte d'esfera celeste perquè presenta certs avantatges a l'hora d'estudiar la localització d'objectes celestes: té en compte el moviment de rotació terrestre i que les distàncies als estels no són directament mesurables.

1.4. MOVIMENT DIÛRN, EQUADOR, MERIDIANS I PARAL·LELS

Si es mira al cel, els astres descriuen una rotació aparent al llarg de l'esfera celeste i al voltant d'un eix de rotació. Aquest eix imaginari s'anomena *eix del món*. L'eix del món és la recta que passa per l'observador i es pren com a paral·lela a l'eix de rotació terrestre (*fig. 3*). Per tant, els astres, al llarg d'un dia,

donen una volta sencera a l'esfera celeste de l'est cap a l'oest tenint com a centre del gir l'eix del món.

Aquest moviment aparent de l'esfera celeste és l'anomenat *moviment diürn*¹ i és causat pel moviment de rotació de la Terra.

Per entendre millor què és l'eix del món, en la Figura 3 es considera la Terra com una esfera de radi r que gira al voltant de l'eix PP' i l'esfera celeste com una altra esfera que envolta l'anterior i de radi R . Si un observador està situat a O , l'eix del món és la recta que passa per P i per O . La direcció de l'eix del món i l'angle que aquest forma amb PP' varia segons la latitud de l'observador. Com el radi de l'esfera celeste és indefinidament gran respecte al radi terrestre, l'angle PP' resulta tan petit que es considera que l'eix del món és paral·lel a l'eix de rotació de la Terra sense cometre cap error significatiu.

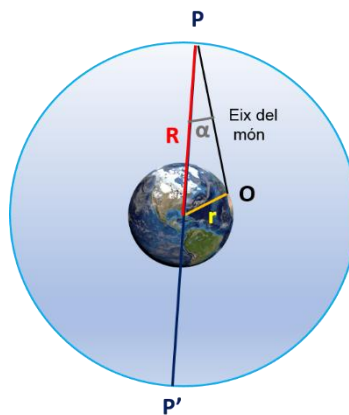


Fig. 3. La Terra envoltada per l'esfera celeste i representació de l'eix del món

L'eix del món talla l'esfera celeste en dos punts: el *pol nord celeste* i el *pol sud celeste*. Per establir quin és el pol nord i quin el pol sud celestes, es fa coincidir l'orientació nord-sud sobre l'eix del món amb l'establerta sobre l'eix de la Terra.

Els cercles màxims de l'esfera celeste que passen pels dos pols celestes s'anomenen *meridians celestes* (o *meridians*). Els pols celestes divideixen cadascun d'aquests meridians en dos *semimeridians*.

¹ Tot i que en aquest capítol s'estudiarà el moviment diürn de l'esfera celeste amb la precisió més gran possible, no es tindran en compte ni els fenòmens de la refracció astronòmica i els crepuscles, ni els efectes d'altres moviments com la precessió i la nutació (vegeu capítol 4) perquè resulten menyspreables en períodes curts de temps.

L'*equador celeste* (o *equador*) és el cercle màxim de l'esfera celeste perpendicular a l'eix del món i que passa per l'observador. L'equador divideix l'esfera en dues semiesferes idèntiques: l'*hemisferi nord celeste* (o *boreal*) que conté el pol nord celeste i l'*hemisferi sud celeste* (o *austral*), que conté el pol sud celeste.

Els cercles de l'esfera celeste paral·lels al pla de l'equador s'anomenen *paral·lels celestes*. Qualsevol punt fix de l'esfera celeste, al llarg del dia, segueix el recorregut d'un paral·lel celeste. Per tant, com els estels són punts fixos sobre l'esfera celeste, al llarg d'un dia descriuen aproximadament un paral·lel celeste (el Sol és una excepció d'aquest moviment, com es veurà més endavant).

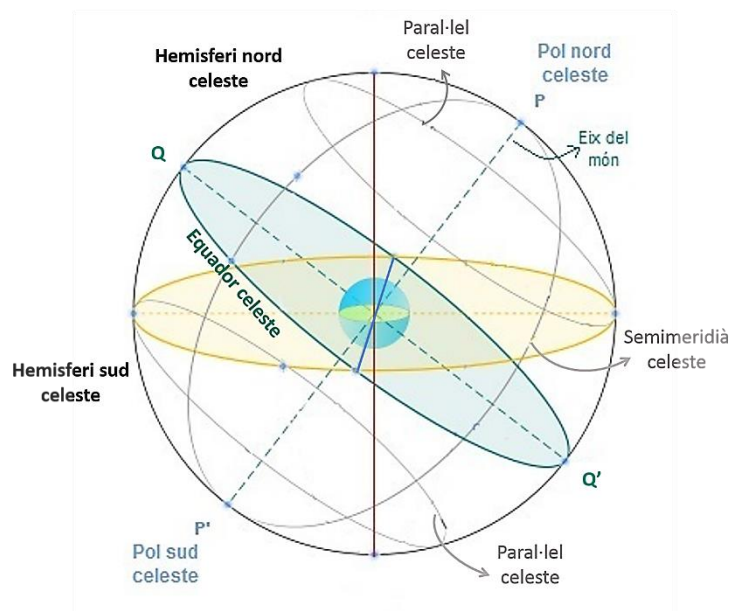


Fig. 4. Equador, paral·lels i semimeridians celestes

1.5. VERTICAL, MERIDIANA I PERPENDICULAR

Com ja s'ha dit al capítol 1.2, la vertical del lloc (entenen lloc com a posició de l'observador) és la recta que segueix la direcció de la plomada. Els talls de la vertical del lloc amb l'esfera celeste són els punts *zenit* (*Z*) i *nadir* (*Z'*). El zenit és el punt que es troba exactament sobre el cap de l'observador i el nadir, el punt oposat i justament sota els peus de l'observador.

El *pla de l'horitzó astronòmic* és un pla tangent a la Terra en la posició de l'observador i perpendicular a la vertical del lloc. La seva intersecció amb l'esfera celeste és un cercle màxim de nom *horitzó*. Des de qualsevol punt de la superfície

terrestre només tenim la visió de la meitat de l'esfera celeste, i l'horitzó és el cercle que separa la part d'esfera observable des del punt de l'observador i la que resulta "invisible". D'aquesta manera, els cossos celestes que es trobin en la semiesfera situada per sobre l'observador (i que conté el zenit) seran visibles i els que estiguin en l'altra semiesfera (que conté el nadir) no es podran visualitzar.

El *meridià del lloc* és un cercle màxim que passa pels dos pols celestes, per ser un meridià celeste, i a més pel zenit i el nadir. Per tant, la vertical del lloc talla aquest meridià diametralment.

L'horitzó i el meridià del lloc es tallen en dos punts de l'esfera celesta que corresponen als punts cardinals *nord* i *sud*. El nord s'estableix com el punt més proper al pol nord celeste i per tant, el sud és el més proper al pol sud celeste. Els punts nord i sud determinen una recta anomenada *meridiana*.

L'horitzó i l'equador celeste també tenen la seva intersecció en dos punts de l'esfera celeste que corresponen als punts cardinals *est* i *oest*. L'est és el punt que es troba a la dreta si l'observador mira al nord, llavors l'oest es troba a l'esquerra. La recta que ve donada pels punts est i oest és la *perpendicular* i rep aquest nom perquè es talla amb la meridiana formant un angle de 90° .

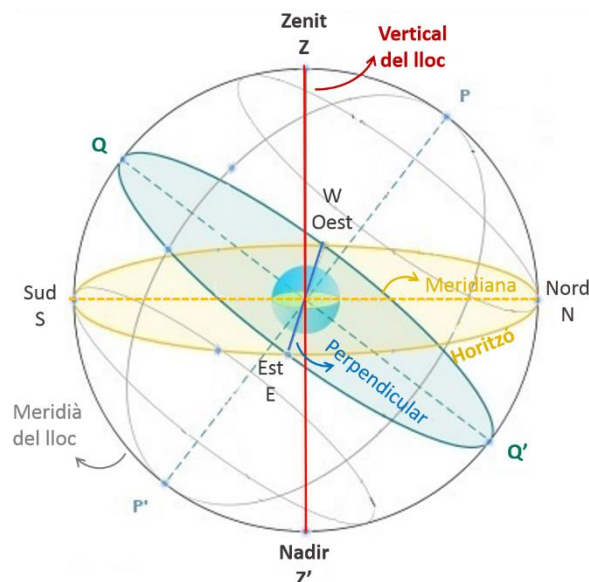


Fig. 5. Vertical, meridiana i perpendicular

D'aquesta manera queden definits els punts cardinals sobre l'esfera celeste i si ens hi fixem, la seva orientació coincideix amb l'establerta sobre la superfície terrestre. Per una banda, si es projecta la meridiana sobre la superfície de la Terra,

coincideix amb el semimeridià geogràfic sobre el qual està situat l'observador de manera que la direcció nord i sud es corresponen amb la fixada pel pol nord i sud geogràfics, respectivament. D'altra banda, si es projecta la perpendicular, aquesta seguirà el paral·lel geogràfic sobre el qual està l'observador i l'est i l'oest concordaran amb els definits pel sentit de rotació terrestre.

La figura 6 mostra els punts importants definits fins ara de forma abreujada: el pol nord celeste P , el pol sud celeste P' , el zenit Z , el nadir Z' , el nord N , el sud S , l'est E , l'oest W i l'observador O . Els punts Q i Q' són la intersecció de l'equador amb el meridià del lloc de manera que Q serà el punt més proper al zenit i Q' el més pròxim al nadir. Aquesta notació serà la que es farà servir d'ara endavant.

Un aspecte a destacar és que l'angle que relaciona l'esfera celeste amb la Terra és la latitud del lloc on es troba l'observador. Com s'ha vist al capítol 1.4, l'eix del món és paral·lel a l'eix de rotació terrestre i això suposa que el pla de l'equador celeste i el de l'equador geogràfic són paral·lels. D'aquesta manera, com l'angle que forma la vertical del lloc amb el pla de l'equador geogràfic és la latitud ϕ (capítol 1.2), l'angle que formarà la vertical del lloc amb el pla l'equador celeste també coincidirà amb la latitud ϕ de l'observador. A la vegada, la latitud del lloc ϕ també serà l'angle comprès entre la meridiana i l'eix del món. A partir d'aquí queda definida la colatitud del lloc com l'angle complementari a la latitud d'aquell mateix lloc, és a dir $90^\circ - \phi$. La colatitud és l'angle entre l'eix del món i el zenit.

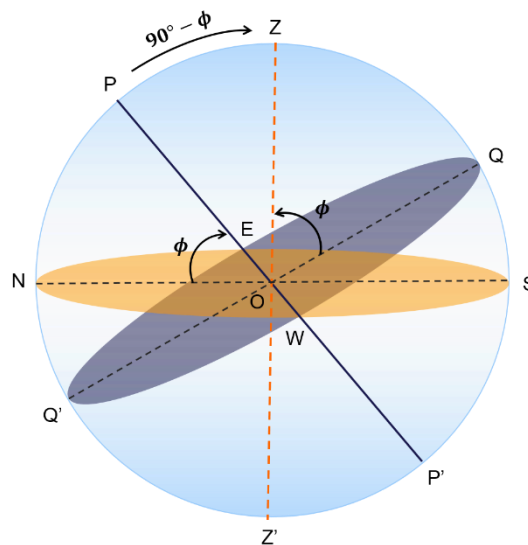


Fig. 6. Notació abreujada, latitud i colatitud

1.6. COORDENADES HORIZONTALS

Com s'ha explicat, per definir la posició d'un punt de la Terra s'utilitzen les coordenades geogràfiques; de la mateixa manera, per definir la posició d'un punt sobre l'esfera celeste es fan servir quatre sistemes de coordenades: les horitzontals, les horàries, les eclíptiques i les equatorials.

Les coordenades horitzontals i les horàries són coordenades locals, és a dir, depenen de la situació de l'observador en la superfície terrestre. Això vol dir que les coordenades d'un mateix astre, en un mateix instant de temps, tindran uns valors variables per observadors situats en punts diferents de la Terra. En canvi, les coordenades eclíptiques i les equatorials són globals i per tant, la posició que tingui l'observador sobre el globus terraquí no és significativa.

Les coordenades horitzontals tenen com a centre l'observador O , o el que és equivalent, el centre de l'esfera celeste. Aquest sistema de coordenades consta dels següents eixos:

- Eix x : és la recta meridiana en el sentit d' O cap al punt cardinal S .
- Eix y : és la recta perpendicular en el sentit d' O cap al punt cardinal W .
- Eix z : és la recta de la vertical del lloc en el sentit d' O cap a Z .

Cal destacar que el pla xy coincideix amb el pla de l'horitzó.

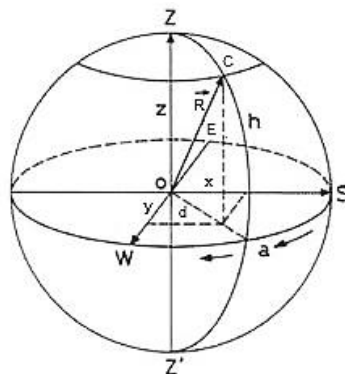


Fig. 7. *Coordenades cartesianes horitzontals (x,y,z)
i coordenades esfèriques horitzontals (a,h)*

1.6.1. Coordenades cartesianes horitzontals

Dins del sistema de coordenades horitzontals tenim dues maneres de definir la posició d'un punt sobre l'esfera celeste; la primera és a partir de les seves *coordenades cartesianes horitzontals*.

Si tenim un punt C sobre l'esfera celeste, les components del vector de posició de tal punt constituiran les seves coordenades cartesianes horitzontals:

$$C = (x, y, z)$$

El mòdul del vector de posició de C serà, a més, el radi R de l'esfera celeste:

$$|C| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$$

1.6.2. Coordenades esfèriques horitzontals

La segona manera de situar un punt és a través de les seves *coordenades esfèriques horitzontals*, que són l'*azimut* a i l'*alçada* h . Això és possible perquè cada punt de l'esfera celeste, diferent del zenit i del nadir, passen per un únic *semivertical* i un únic *almucantar*, conceptes que ara definiré.

S'anomena *almucantar* a cadascun dels cercles de l'esfera celeste paral·lels al pla descrit per l'horitzó.

Reben el nom de *verticals* cadascun dels cercles màxims de l'esfera celeste que passa pel zenit i el nadir. El zenit i el nadir divideixen cada vertical en dos *semiverticals*. Es prendrà com a referència i per tant, com a *primer semivertical*, el que passa pel punt W .

Sabent això es pot dir que l'*azimut* a , que es mesura sobre l'horitzó, és la distància esfèrica compresa entre el punt cardinal S (que es pren com a origen) i el punt J . Es dirà punt J a la intersecció entre el semivertical que passa per C i l'horitzó (*fig. 8*). Aquest angle es mesura en sentit horari i pot adoptar els valors de $0^\circ \leq a \leq 360^\circ$.

L'*alçada* h és la distància angular de l'horitzó a l'almucantar sobre que està situat C . És a dir, és l'angle que forma l'arc de semivertical comprès entre C i J . L'*alçada* pot valdre $-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$. És positiva si l'astre es troba a l'hemisferi visible (per sobre l'horitzó), negativa si està en l'invisible (per sota) i val 0° per a punts situats sobre l'horitzó.

Un altre concepte que cal introduir és la *distància zenital* z . Aquesta es correspon a l'angle complementari a l'alçada, o el que és el mateix, l'angle del zenit a C . Així, $z = 90^\circ - h$ i $0^\circ \leq z \leq 180^\circ$. D'aquesta manera, la distància zenital val 0° per a un punt situat al zenit, i 180° per un situat al nadir.

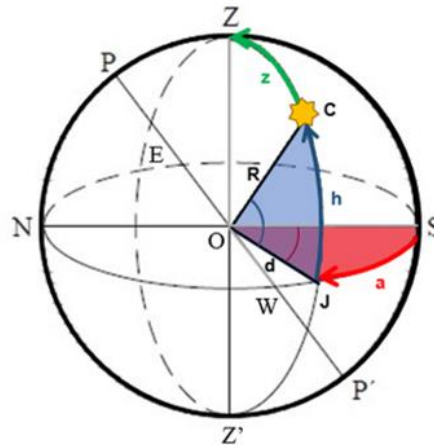


Fig. 8. Coordenades esfèriques horitzontals (a, h)
i distància zenital z

1.6.3. Relació entre coordenades horitzontals

Observant la figura 7 es poden establir una sèrie de relacions entre les coordenades cartesianes horitzontals i les coordenades esfèriques horitzontals. Aquestes són relacions trigonomètriques bàsiques que parteixen de la idea que R (el radi de l'esfera celeste) és la hipotenusa d'un triangle rectangle. A partir d'aquí es dedueix:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \\ \left. \begin{array}{l} \cos h = \frac{d}{R} ; d = R \cos h \\ \cos a = \frac{x}{d} ; x = d \cos a \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{x = R \cos h \cos a} \quad (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \\ \left. \begin{array}{l} \cos h = \frac{d}{R} ; d = R \cos h \\ \sin a = \frac{y}{d} ; y = d \sin a \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = R \cos h \sin a} \quad (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \\ \sin h = \frac{z}{R} \rightarrow \boxed{z = R \sin h} \quad (1) \end{array}$$

1.7. COORDENADES HORÀRIES

Les coordenades horàries són el segon tipus de coordenades locals que ens permeten situar un punt sobre l'esfera celeste.

Aquest sistema de coordenades té com a centre l'observador O , és a dir, el centre de l'esfera celeste i consta de tres eixos:

- Eix x' : és la recta que va d' O cap al punt Q .
- Eix y' : és la recta perpendicular en el sentit d' O cap al punt cardinal W .
- Eix z' : és la recta de l'eix del món en el sentit d' O cap a P .

Cal destacar que el pla $x'y'$ es correspon amb el pla de l'equador celeste.

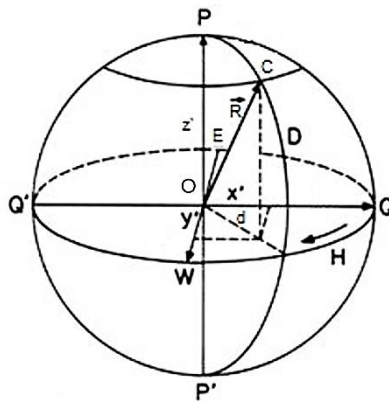


Fig. 9. *Coordenades cartesianes horàries (x',y',z')
i coordenades esfèriques horàries (H,D)*

1.7.1. Coordenades cartesianes horàries

La primera manera de situar un punt qualsevol C de l'esfera celeste mitjançant el sistema de coordenades horàries és a través de les seves *coordenades cartesianes horàries*.

Les coordenades cartesianes horàries d'un punt C seran les components del vector de posició de tal punt, és a dir:

$$C = (x', y', z')$$

A més, el mòdul del vector de posició de C serà el radi R de l'esfera celeste:

$$|C| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = R$$

1.7.2. Coordenades esfèriques horàries

Per determinar la posició d'un punt sobre l'esfera celeste també s'utilitzen les *coordenades esfèriques horàries*: l'*angle horari* H i la *declinació* D . Aquestes coordenades poden definir-se gràcies al fet que cada punt, diferent dels pols celestes, passa per un únic paral·lel i meridià celeste.

L'*angle horari* H és l'angle que hi ha entre Q i la intersecció de l'equador amb el semimeridià sobre el que està C (punt K). Aquest angle es mesura sobre l'equador i en sentit horari o retrògrad. Es mesura en hores, per tant, $0^h \leq H \leq 24^h$ prenent com a origen el punt Q , que equival a 0^h . Tot i això, hi ha una equivalència en graus, ja que 24^h es corresponen a 360° .

La *declinació* D és la distància angular de l'equador al paral·lel sobre el qual està C ; o el que és el mateix, l'arc de semimeridià comprès entre C i K . Pot valdre $-90^\circ \leq D \leq 90^\circ$, considerant-se positiva per a punts situats a l'hemisferi nord celeste i negativa per als situats a l'hemisferi sud celeste. De la mateixa manera, val 0° si el punt es troba sobre l'equador celeste.

L'angle complementari a la declinació s'anomena *distància polar* P i és, per tant, la distància de C al pol nord celeste. Així, $P = 90^\circ - D$ i val $0^\circ \leq P \leq 180^\circ$. La distància polar valdrà 0° per a un punt situat al pol nord celeste i anirà augmentant fins a 180° , valor que es correspon amb el pol sud celeste.

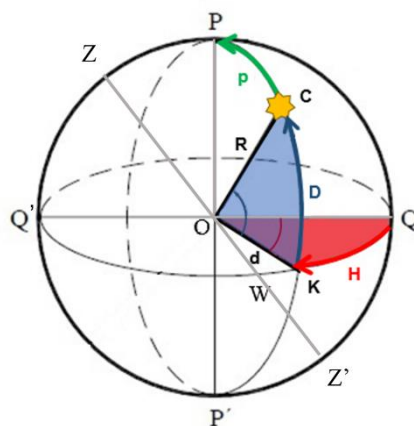


Fig. 10. Coordenades esfèriques horàries (H, D)

i distància polar p

1.7.3. Relació entre coordenades horàries

A partir de la figura 9, es poden establir diverses relacions trigonomètriques entre les coordenades cartesianes horàries i les coordenades esfèriques horàries:

$$\text{a) } \boxed{x' = R \cos D \cos H} \quad (2)$$

$$\text{b) } \boxed{y' = R \cos D \sin H} \quad (2)$$

$$\text{c) } \boxed{z' = R \sin D} \quad (2)$$

Cal fixar-se que les relacions per passar de coordenades cartesianes a esfèriques coincideixen per a les coordenades horitzontals i les horàries. Per això, en aquestes últimes no s'ha tornat a desenvolupar la deducció seguida per arribar a les relacions, sinó que s'han escrit directament les fórmules pertinents.

1.8. CANVI DE COORDENADES HORIZONTALS A HORÀRIES I VICEVERSA

Els sistemes de coordenades horitzontals i horàries tenen en comú un dels seus eixos, que és el que segueix la recta perpendicular en el sentit d'O cap a W. A més, tots dos estan orientats en sentit retrògrad, de manera que es pot efectuar el canvi d'un sistema a l'altre a partir d'un gir al voltant de l'eix $y=y'$.

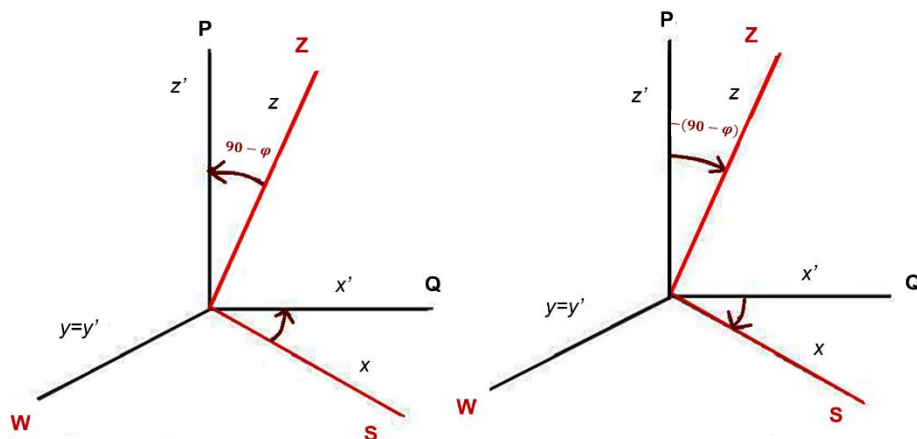


Fig. 11. A l'esquerra, canvi de coordenades horitzontals a horàries.

A la dreta, canvi d'horàries a horitzontals

Com s'ha dit al capítol 1.5, l'angle que hi ha entre la vertical del lloc i l'eix del món és la colatitud ($90^\circ - \phi$). Precisament, els eixos z i z' de les coordenades horitzontals i horàries són la vertical del lloc i l'eix del món, respectivament. Per tant, el gir que s'haurà d'efectuar per canviar de coordenades serà una rotació de $90^\circ - \phi$ on ϕ serà la latitud del lloc de l'observador.

Existeix una matriu de rotació que defineix el gir al voltant de l'eix $y=y'$ d'un angle i . La matriu corresponent és:

$$R_2(i) = \begin{bmatrix} \cos i & 0 & -\sin i \\ 0 & 1 & 1 \\ \sin i & 0 & \cos i \end{bmatrix}.$$

Aquesta matriu té dues propietats. Primerament, és ortogonal, el que vol dir que la seva matriu inversa coincideix amb la seva matriu transposada:

$$R_2^{-1} = R_2^T.$$

En segon lloc, la matriu transposada també coincideix amb la matriu de rotació de l'angle $-i$:

$$R_2(-i) = R_2^T(i).$$

1.8.1. Canvi de coordenades horitzontals a horàries

Per passar de coordenades horitzontals a horàries $i = \phi - 90^\circ$, ja que l'angle està comptat en sentit contrari al de l'orientació del triedre, per tant:

$$R_2(\phi - 90^\circ) = \begin{bmatrix} \cos(\phi - 90^\circ) & 0 & -\sin(\phi - 90^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi - 90^\circ) & 0 & \cos(\phi - 90^\circ) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Si tenim en compte la segona propietat que s'ha anomenat d'aquesta matriu es pot afirmar que:

$$R_2(\phi - 90^\circ) = R_2^T(90^\circ - \phi) = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - \phi) & 0 & \sin(90^\circ - \phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(90^\circ - \phi) & 0 & \cos(90^\circ - \phi) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

i aplicant les relacions trigonomètriques entre angles complementaris es dedueix:

$$R_2(\phi - 90^\circ) = \begin{bmatrix} \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Un cop trobada la matriu de rotació necessària, per passar a coordenades horàries només s'ha de multiplicar les coordenades horitzontals per la matriu:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_2(\phi - 90^\circ) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad (3.4)$$

i si operem, s'obté:

$$\begin{aligned} x' &= x \sin \phi + z \cos \phi \\ y' &= y \\ z' &= -x \cos \phi + z \sin \phi \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si a continuació es combina (3.5) amb les igualtats (1) i (2) i se simplifica R , s'arriba a les següents fórmules:

$$\text{a) } \boxed{\cos D \cos H = \sin \phi \cos h \cos a + \cos \phi \sin h} \quad (4.1)$$

$$\text{b) } \boxed{\cos D \sin H = \cos h \sin a} \quad (4.2)$$

$$\text{c) } \boxed{\sin D = -\cos \phi \cos h \cos a + \sin \phi \sin h} \quad (4.3)$$

1.8.2. Canvi de coordenades horàries a horitzontals

Per passar de coordenades horàries a horitzontals s'ha d'aplicar la matriu inversa a (3.1), aleshores:

$$R_2^{-1}(\phi - 90^\circ) = R_2^T(\phi - 90^\circ) = R_2(90^\circ - \phi), \quad (5.1)$$

i si es desenvolupa la matriu:

$$R_2(90^\circ - \phi) = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - \phi) & 0 & -\sin(90^\circ - \phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(90^\circ - \phi) & 0 & \cos(90^\circ - \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Per passar a coordenades horitzontals només cal multiplicar les coordenades horàries per la matriu que s'acaba d'obtenir:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_2(\phi - 90^\circ) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

i si operem:

$$\begin{aligned} x &= x' \sin \phi - z' \cos \phi \\ y &= y' \\ z &= x' \cos \phi + z' \sin \phi \end{aligned} \quad (5.4)$$

Si de nou es combinen les igualtats (1) i (2) amb (5.4) i se simplifica R , s'arriba a les fórmules:

$$\text{a) } \boxed{\cos h \cos a = \sin \phi \cos D \cos H - \cos \phi \sin D} \quad (6.1)$$

$$\text{b) } \boxed{\cos h \sin a = \cos D \sin H} \quad (6.2)$$

$$\text{c) } \boxed{\sin h = \cos \phi \cos D \cos H + \sin \phi \sin D} \quad (6.3)$$

1.9. FENÒMENS CAUSATS PEL MOVIMENT DIÛRN DE L'ESFERA CELESTE

Els astres es consideren punts fixos sobre l'esfera celeste i per tant, al llarg d'un dia, descriuen un paral·lel celeste. Tenint en compte això s'estudiarà el seu moviment en funció de la declinació i la latitud de l'observador.

1.9.1. Orto i ocàs d'un astre

L'orientació del paral·lel celeste descrit per un cos celeste respecte de l'horitzó varia en funció de la latitud de l'observador. Per això, un astre, durant el seu moviment diürn, pot tallar o no l'horitzó.

Imaginem que cert cos celeste sí talla l'horitzó en dos punts. S'anomenarà *orto* o *punt de sortida de l'astre* al punt on l'astre travessa el pla de l'horitzó passant a l'hemisferi visible. És la intersecció del paral·lel celeste descrit per l'astre amb el semicercle d'horitzó que va del punt cardinal *N* al *S* passant per *E*. L'*ocàs* o *punt de posta de l'astre* és el punt en el qual travessa l'horitzó i passa de l'hemisferi visible al no visible. Aquest punt és l'altra intersecció del paral·lel celeste de l'astre amb l'horitzó, però en aquest cas, amb el semicercle d'horitzó que va del punt *S* al *N* passant per *W*.

L'angle horari de l'ocàs s'anomena *arc semidiürn* *H*. El seu oposat és l'angle horari de l'orto. Si l'arc semidiürn és *H*, $2H$ serà el temps que l'astre estarà per sobre l'horitzó (des de l'orto a l'ocàs).

Tant en el moment de l'orto com en el de l'ocàs, l'alçada de l'astre és $h = 0^\circ$. Després de l'orto, la seva alçada passarà a ser positiva, i després de l'ocàs, negativa.

Com ja he dit, no tots els cossos celestes tallen l'horitzó. Perquè un astre tingui un orto i un ocàs s'ha de complir que $|D| \leq 90^\circ - |\phi|$, sent *D* la seva declinació i ϕ la latitud del lloc de l'observador.

Si $|D| \geq 90^\circ - |\phi|$ l'astre no tallarà l'horitzó i estarà sempre per sota o per sobre d'aquest. Els astres que al llarg del seu moviment diürn estan contínuament per sobre l'horitzó s'anomenen *astres circum-polars* i sempre són visibles. En canvi, els que estan constantment per sota l'horitzó resulten invisibles per a l'observador en tot moment.

1.9.2. Culminació superior i inferior d'un astre

La culminació superior i inferior corresponen als dos punts d'intersecció del meridià del lloc amb el paral·lel descrit qualsevol l'astre.

La culminació superior correspon al punt situat entre P i P' passant per Q . En aquest moment l'astre assoleix la seva màxima alçada h i la seva distància zenital z és mínima. El seu azimuth valdrà $\alpha = 0^\circ$ si culmina al sud del zenit o $\alpha = 180^\circ$ si culmina al nord del zenit.

La culminació inferior correspon al punt que es troba entre P i P' però passant per Q' . En l'instant de culminació inferior l'alçada h de l'astre és mínima i la seva distància zenital z màxima. El seu azimuth tindrà un valor d' $\alpha = 180^\circ$ si culmina al nord del nadir o d' $\alpha = 0^\circ$ si culmina al sud del nadir.

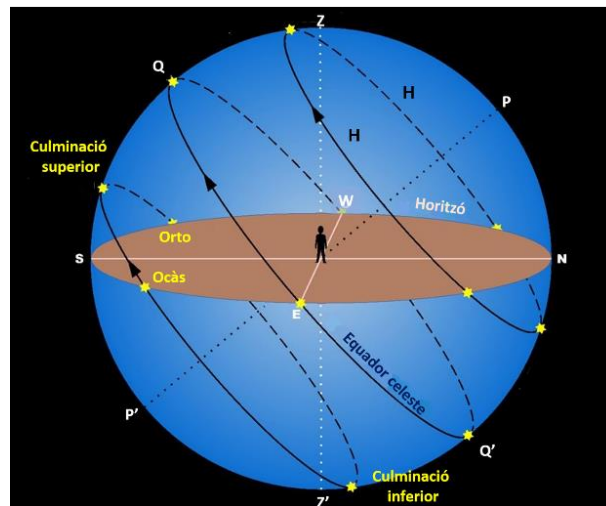


Fig. 12. Orto i ocàs, culminació superior i inferior
i arc semidiürn H

Els valors de l'alçada h i la distància zenital z d'un astre en els instants de culminació superior i inferior depenen de la latitud del lloc ϕ de l'observador i la declinació D de l'astre. D'aquesta manera tenim que si:

- $D < \phi$: l'astre culmina al sud del zenit amb una distància zenital $z = \phi - D$ i una alçada $h = 90^\circ - \phi + D$.
- $D = \phi$: l'astre culmina al zenit amb $z = 0^\circ$ i $h = 90^\circ$.
- $D > \phi$: l'astre culmina al nord del zenit amb $z = D - \phi$ i $h = 90^\circ + \phi - D$.

L'angle horari H de l'astre en els moments de la culminació superior i la culminació inferior és $H = 0^h$ i $H = 12^h$, respectivament. Per tant, l'arc semidiürn de l'astre és l'arc de paral·lel comprés entre la culminació superior i l'ocàs, que serà equivalent al que hi ha entre la culminació inferior i l'orto.

L'angle horari H d'un astre, com es mesura respecte de l'equador celeste, varia de forma constant. És a dir, augmentarà de forma proporcional a l'angle girat per l'esfera celeste al llarg del seu moviment diürn uniforme.

L'alçada h i azimut a (i també z), en canvi, no variaran uniformement sinó periòdicament. Això es deu al fet que aquestes coordenades es mesuren sobre l'horitzó i aquest està inclinat cert angle respecte de l'equador depenent de la latitud ϕ de l'observador (excepte als pols). Així, l'alçada h i la distància zenital z d'un astre variaran més lentament a prop de les seves culminacions, mentre que en aquests moments l'azimut ho farà més ràpidament.

Encara que certes coordenades variïn periòdicament, en considerar els astres punts fixos i amb declinacions invariables, les seves coordenades en els moments de les culminacions superior i inferior o en l'orto i l'ocàs, seran les mateixes al llarg de tot l'any. L'excepció d'aquesta definició són els planetes, la Lluna i el Sol, que tenen declinacions variables al llarg de l'any.

1.9.3. Moviment diürn des de diferents latituds

- Observador a l'equador ($\phi = 0^\circ$)

L'eix del món coincideix amb la meridiana, per tant el pol nord celeste coincidirà amb el punt cardinal sud i el pol sud celeste, amb el sud. De la mateixa manera, el pla de l'equador celeste i el del primer vertical seran el mateix.

La trajectòria dels astres són cercles perpendiculars a l'horitzó i paral·lels al primer vertical. Tots els astres romanen el mateix temps per sobre i per sota de l'horitzó, és a dir 12h. Tots els astres poden ser vistos al llarg de l'any, ja que no existeix cap paral·lel que estigui per sota l'horitzó.

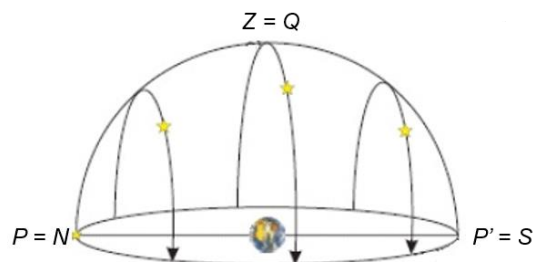


Fig. 13. Moviment diürn dels astres en una latitud $\phi = 0^\circ$ (equador)

- *Observador al pol nord ($\phi = 90^\circ$):*

La vertical del lloc i l'eix del món coincideix, per tant, també ho fan el pol nord i sud celestes amb el zenit i el nadir, respectivament. A la vegada, el pla l'horitzó es correspon amb el de l'equador celeste.

Tots els astres descriuen un almucantarats al llarg del seu moviment diürn, que coincideix amb un paral·lel celeste, i la seva alçada és igual a la seva declinació. Els astres situats al mateix hemisferi de l'observador resten 24 h sobre de l'horitzó (són astres circum-polars). Els que es troben a l'hemisferi oposat, en canvi, mai són visibles perquè estan per sota l'horitzó en tot moment.

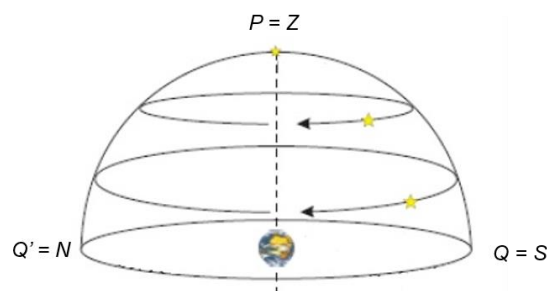


Fig. 14. *Moviment diürn dels astres en una latitud $\phi = 90^\circ$ (pol nord)*

- *Observador en una latitud intermèdia ($0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$):*

Alguns astres tallen l'horitzó i tenen un orto i un ocàs. D'altres, romanen sempre per sobre o sota de l'horitzó. Els cercles que descriuen aquests astres tenen una certa inclinació en relació a l'horitzó, la qual depèn de la latitud del lloc.

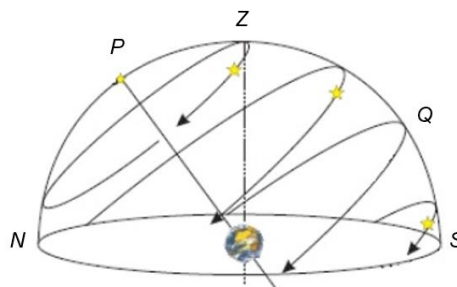


Fig. 15. *Moviment diürn dels astres en una latitud intermèdia $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$*

2. EL MOVIMENT ANUAL DEL SOL

2.1. L'ECLÍPTICA

Com he mencionat anteriorment, no es considerarà el Sol com un punt fix sobre l'esfera celeste, ja que durant l'any es desplaça al llarg de l'eclíptica.

El moviment aparent del Sol és el resultat de dos moviments: el moviment diürn de rotació de la Terra d'est a oest, i el moviment anual de translació en sentit directe de la Terra al voltant del Sol. Si la Terra no girés sobre si mateixa, es veuria com a causa d'aquest últim, el Sol es desplaça de ponent a llevant. Però com el moviment anual és 365 més lent que el diürn, resulta inapreciable aquest desplaçament i el que veritablement veiem al llarg d'un dia, és el Sol movent-se de llevant a ponent.

La trajectòria aparent que el Sol descriu al llarg del seu moviment anual és una el·lipse amb la Terra en un dels seus focus. La projecció d'aquest pla sobre l'esfera celeste rep el nom de *l'eclíptica*. El cercle descrit per l'eclíptica, actualment, està inclinat respecte de l'equador celeste un angle aproximat de $\varepsilon = 23^{\circ}26'$. Aquest angle es coneix com a *l'obliqüitat de l'eclíptica* i es deu a la inclinació de l'eix de rotació terrestre, però veurem que no és constant i varia lleugerament al llarg del temps.

La recta perpendicular al pla de l'eclíptica que passa pel centre de l'esfera celeste s'anomena *eix de l'eclíptica*. Els seus extrems tallen l'esfera celeste en dos punts: el *pol nord* i *pol sud de l'eclíptica*, que s'abreuen com a P_e i P_e' , respectivament. El pol nord de l'eclíptica és el més proper al pol nord celeste, i el pol sud de l'eclíptica, el més proper al pol sud celeste.

L'eclíptica talla l'equador celeste en dos punts coneguts com a *equinoccis*, que són diametralment oposats. L'*equinocci de primavera* o *punt Àries* γ és el punt de l'eclíptica en el qual el Sol passa de l'hemisferi sud celeste a l'hemisferi nord celeste. L'*equinocci de tardor* o *punt Libra* Ω és el punt sobre l'eclíptica en el qual el Sol passa de l'hemisferi nord celeste a l'hemisferi sud celeste. Els dos equinoccis determinen una recta coneguda com la *recta dels equinoccis*.

La recta perpendicular a la dels equinoccis i situada sobre el pla de l'eclíptica s'anomena *recta dels solsticis*. Aquesta recta talla l'esfera celeste en dos punts: els

solsticis. El *solstici d'estiu* o *punt Càncer C* és el punt situat a l'hemisferi nord celeste i el paral·lel celeste que passa per aquest punt rep el nom de *tròpic de Càncer*. El *solstici d'hivern* o *punt Capricorn C'*, per contra, és el situat a l'hemisferi sud celeste i el paral·lel que passa per ell s'anomena *tròpic de Capricorn*.

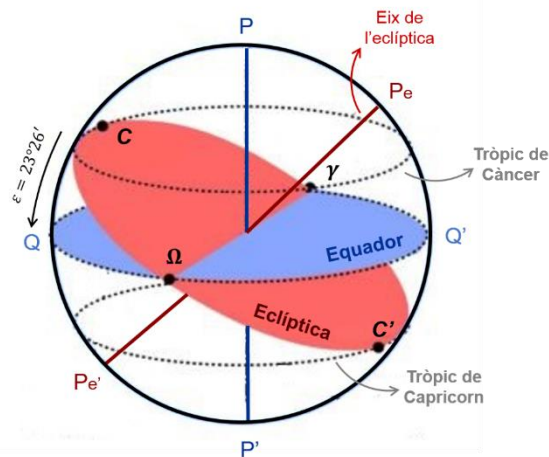


Fig. 16. Eclíptica i eix de l'eclíptica

Els paral·lels que passen pels pols de l'eix de l'eclíptica s'anomenen *cercle polar boreal* (el que passa per P_e) i *cercle polar austral* (el que passa per P_e').

Els cercles màxims de l'esfera celeste que passen pels pols de l'eclíptica s'anomenen *màxims de longitud* i els dos pols parteixen cada màxim en dos *semimàxims de longitud*. Els cercles perpendiculars als màxims de longitud i paral·lels a l'eclíptica són els *menors de latitud*.

Hi ha una regió especial de l'esfera celeste anomenada *zodíac*. Té una amplada d'uns 17° i es troba entre dos menors de latitud que estan, cadascun, a $8,5^\circ$ de l'eclíptica. Sobre el zodíac s'observen els planetes del nostre sistema solar i les *constel·lacions zodiacals*.

El zodíac va ser dividit pels grecs en 12 regions idèntiques, de 30° d'amplada cada una i cada regió va ser anomenada segons la constel·lació zodiacal situada sobre ella. Les regions van ser mesurades sobre l'eclíptica a partir del punt Àries i en sentit directe i encara avui mantenim els noms que van ser establerts. El nom de les regions, seguint l'ordre que s'acaba de mencionar són: *Aries, Taurus, Geminis, Cancer, Leo, Virgo, Libra, Scorpio, Sagittarius, Capricornus, Aquarius* i *Piscis*. Paral·lelament, els noms que s'han adoptat en català són: *Àries, Taure,*

Bessons, Cranc, Lleó, Verge, Balança, Escorpió, Sagitari, Capricorn, Aquari i Peixos.

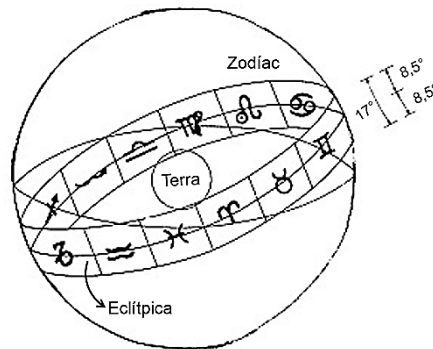


Fig. 17. El zodíac

Fa uns 2.000 anys els signes del zodíac es corresponien amb les constel·lacions homònimes però, a causa del fenomen de precessió dels equinoccis (*capítol 4.1*), aquesta correspondència ja no es dona. La precessió provoca que cada any el punt Àries es desplaci uns 50,26" sobre l'eclíptica en sentit retrògrad i per tant, que en 2000 anys hagi retrocedit uns 30°. En aquell moment l'equinocci de primavera es trobava sobre la constel·lació d'Àries, mentre que actualment es projecta en la de Piscis. Així, es pot dir que els signes del zodíac "han retrocedit" una posició respecte la que tenien inicialment establerta.

2.2. COORDENADES EQUATORIALS

En el capítol anterior ja s'han explicat les coordenades horitzontals i horàries; els dos tipus de coordenades locals que existeixen per situar un punt sobre l'esfera celeste. Les altres coordenades, ambdues globals perquè no depenen de la posició de l'observador, són les coordenades equatorials i eclíptiques, que es defineixen partint del moviment anual del Sol.

Primerament, explicaré les coordenades equatorials, que tenen com a origen el centre de la Terra T . Aquest sistema de coordenades consta dels següents eixos:

- Eix x : és la recta dels equinoccis en el sentit de T al punt Àries γ .
- Eix y : és una recta situada sobre el pla de l'equador celeste que s'obté girant la recta dels equinoccis 90° en sentit directe.

- Eix z : és l'eix del món en el sentit de T al pol nord celeste P .
Cal remarcar que el pla xy és el pla de l'equador celeste.

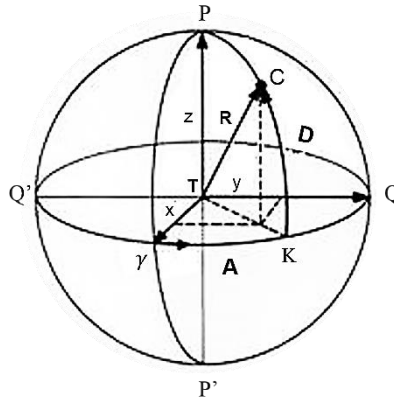


Fig. 18. *Coordenades cartesianes equatorials (x,y,z)
i coordenades esfèriques equatorials (A,D)*

2.2.1. Coordenades cartesianes equatorials

La primera manera de definir un punt sobre l'esfera celeste dins del sistema de coordenades equatorials és a partir de les seves *coordenades cartesianes equatorials*.

Si tenim un punt C sobre l'esfera celeste, les components del vector de posició del punt seran les seves coordenades cartesianes horitzontals:

$$C = (x, y, z)$$

El mòdul d'aquest vector serà, a més, el radi R de l'esfera celeste:

$$|C| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$$

2.2.2. Coordenades esfèriques equatorials

La segona manera de situar la posició d'un punt mitjançant el sistema de coordenades equatorials és a partir de les seves *coordenades esfèriques equatorials*, que són la *declinació* D i l'*ascensió recta* A .

Com he explicat, la *declinació* D és la distància esfèrica des de l'equador fins al paral·lel que es troba C . Pot valdre $-90^\circ \leq D \leq 90^\circ$. És positiva si el punt es troba en l'hemisferi nord celeste i negativa si està al sud.

L'ascensió recta A és l'angle que hi ha entre el punt Àries γ i la intersecció de l'equador amb el semimeridià sobre el que està C (punt K). Aquest angle es mesura sobre l'equador i en sentit directe o antihorari. Comprèn els valors de $0^h \leq H \leq 24^h$, tenint com a origen el punt γ , que es correspon amb 0^h .

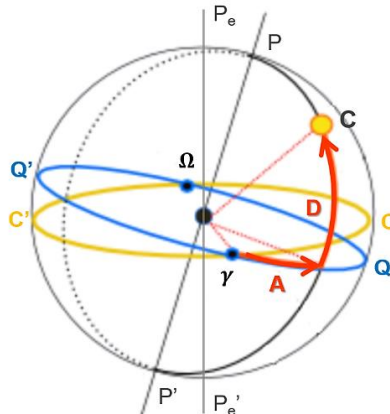


Fig. 19. Coordenades esfèriques equatorials (A, D)

2.2.3. Relació entre coordenades equatorials

De la figura 18, s'estableixen diverses relacions trigonomètriques entre les coordenades cartesianes equatorials i les coordenades esfèriques equatorials. Aquestes relacions són les mateixes que les deduïdes en els capítols 1.6.3 i 1.7.3, així que no es tornarà a repetir el procediment pertinent per arribar a elles i escriuré directament les fórmules que s'obtidrien:

$$a) \quad x = R \cos D \cos A \quad (7)$$

$$b) \quad y = R \cos D \sin A \quad (7)$$

$$c) \quad z = R \sin D \quad (7)$$

2.3. COORDENADES ECLÍPTIQUES

En segon lloc, parlaré de l'altre tipus de coordenades globals per situar un punt en l'esfera celestria, que són les coordenades eclíptiques. Aquest sistema té com a centre el centre de la Terra T i consta dels següents tres eixos:

- Eix x' : és la recta dels equinoccis en el sentit de T al punt Àries γ .

- Eix y' : és la recta dels solsticis en el sentit de T al punt Càncer C .
- Eix z' : és l'eix de l'eclíptica en el sentit de T al pol nord de l'eclíptica P_e .

El pla $x'y'$, a més, es correspon amb el pla de l'eclíptica.

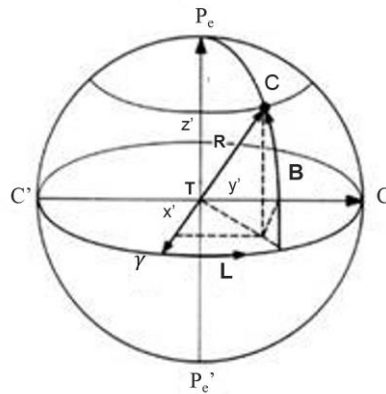


Fig. 20. *Coordenades cartesianes eclíptiques (x',y',z') i coordenades esfèriques eclíptiques (L,B)*

2.3.1. Coordenades cartesianes eclíptiques

Dins el sistema de coordenades eclíptiques, es pot situar un punt qualsevol C de l'esfera celeste mitjançant les seves *coordenades cartesianes eclíptiques*.

Les coordenades cartesianes eclíptiques d'un punt C seran les components del seu vector de posició:

$$C = (x', y', z')$$

i el seu mòdul serà igual a R :

$$|C| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = R$$

2.3.2. Coordenades esfèriques eclíptiques

També és possible establir la posició d'un punt C mitjançant les seves *coordenades esfèriques eclíptiques*, que es corresponen amb la *longitud celeste* L i la *latitud celeste* B .

La *longitud celeste* L és l'angle comprès entre el punt Àries γ i el semimàxim de longitud que passa per C . L'angle està mesurat sobre l'eclíptica i en sentit directe o antihorari. Pot valdre $0^\circ \leq L \leq 360^\circ$, sent 0° el punt Àries γ .

La *latitud celeste* B és la distància angular de l'eclíptica al menor de latitud sobre el que està situat C . Comprèn els valors de $90^\circ \leq B \leq -90^\circ$. Serà positiva

quan el punt es trobi a l'hemisferi nord eclíptic, negativa quan aquest estigui a l'hemisferi sud eclíptic i valdrà 0° si el punt està exactament sobre l'eclíptica.

2.3.3. Relació entre coordenades eclíptiques

De la figura 20 resulten, de nou, les següents relacions trigonomètriques entre les coordenades cartesianes eclíptiques i les coordenades esfèriques eclíptiques:

$$\text{a) } \boxed{x' = R \cos B \cos L} \quad (8)$$

$$\text{b) } \boxed{y = R \cos B \sin L} \quad (8)$$

$$\text{c) } \boxed{z = R \sin B} \quad (8)$$

2.4. CANVI DE COORDENADES EQUATORIALS A ECLÍPTIQUES I VICEVERSA

Els sistemes de coordenades equatorials i eclíptiques tenen en comú un eix, que és el de la recta dels equinoccis en el sentit de T cap a γ . A més, tots dos sistemes estan orientats en sentit directe. Això permet efectuar una rotació al voltant de l'eix $x = x'$ per canviar d'un sistema de coordenades a l'altre.

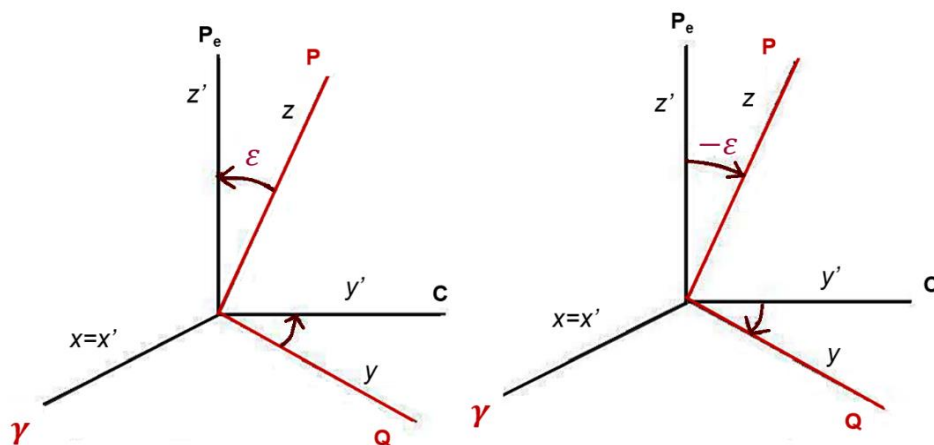


Fig. 21. A l'esquerra, canvi de coordenades equatorials a eclíptiques.

A la dreta, canvi d'eclíptiques a equatorials

L'angle que hi ha entre l'equador celeste i l'eclíptica és l'obliquïtat de l'eclíptica ε . Aquest angle és el mateix que hi ha entre l'eix y i l'eix y' . Així, l'obliquïtat de l'eclíptica serà l'angle de gir necessari per a efectuar el canvi de coordenades.

La matriu que defineix una rotació al voltant de l'eix $x = x'$ d'un angle i és:

$$R_1(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}.$$

Com és una matriu ortogonal, comparteix les mateixes propietats que les descrites al capítol 1.8 sobre la matriu R_2 :

$$R_1^{-1} = R_1^T \quad ; \quad R_1(-i) = R_1^T(i)$$

2.4.1. Canvi de coordenades equatorials a eclíptiques

Per passar de coordenades equatorials a eclíptiques $i = \varepsilon$, per tant:

$$R_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

A continuació, per passar a coordenades eclíptiques s'ha de multiplicar les coordenades equatorials per la matriu anterior:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_1(\varepsilon) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \tag{9.2}$$

i en operar, en resulta que:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon \\ z' &= -y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon \end{aligned} \tag{9.3}$$

Per últim, en combinar (9.3) amb (7) i (8) i simplificar R , s'obtenen les següents fórmules:

$$\text{a) } \boxed{\cos B \cos L = \cos D \cos A} \quad (10.1)$$

$$\text{b) } \boxed{\cos B \sin L = \cos \varepsilon \cos D \sin A + \sin \varepsilon \sin D} \quad (10.2)$$

$$\text{c) } \boxed{\sin B = -\sin \varepsilon \cos D \sin A + \cos \varepsilon \sin D} \quad (10.3)$$

2.4.2. Canvi de coordenades eclíptiques a equatorials

Per passar de coordenades eclíptiques a equatorials, $i = -\varepsilon$, aleshores:

$$R_1(-\varepsilon) = R_1^T(\varepsilon),$$

resultant que:

$$R_1(-\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varepsilon) & \sin(-\varepsilon) \\ 0 & -\sin(-\varepsilon) & \cos(-\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

Per passar a coordenades eclíptiques s'ha de multiplicar les coordenades equatorials per la matriu obtinguda, és a dir:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_1(-\varepsilon) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (11.2)$$

trobant que:

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \cos \varepsilon - z' \sin \varepsilon \\ z &= y' \sin \varepsilon + z' \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (11.3)$$

De nou, al combinar (7) i (8) amb (11.3) i simplificar R , s'obtenen les fórmules:

$$\text{a) } \boxed{\cos D \cos A = \cos B \cos L} \quad (12.1)$$

$$\text{b) } \boxed{\cos D \sin A = \cos \varepsilon \cos B \sin L - \sin \varepsilon \sin B} \quad (12.2)$$

$$\text{c) } \boxed{\sin D = \sin \varepsilon \cos B \sin L + \cos \varepsilon \sin B} \quad (12.3)$$

2.5. EL MOVIMENT ANUAL DEL SOL

2.5.1. Variació de les coordenades del Sol durant el seu moviment anual

A continuació, s'estudiarà com varien les coordenades eclíptiques (L, B) i equatorials (A, D) al llarg del moviment anual del Sol (*capítols 2.2 i 2.3*).

Al llarg d'un any tròpic el Sol descriu l'eclíptica i per tant, es considera que la seva latitud celeste B és nul·la: $B = 0^\circ$. D'aquesta manera, la seva longitud celeste L creix de 0° a 360° . Tot i això, aquesta variació no és uniforme perquè, segons la segona Llei de Kepler, la velocitat de translació d'un planeta (en aquest cas la Terra) no és constant. Aquesta llei ens diu que el radi vector que uneix un planeta i el Sol recorre àrees iguals en temps iguals. Això provoca que, quan el planeta està més allunyat del Sol, la seva velocitat és menor que quan hi està més proper.

Durant el moviment anual, l'ascensió recta A , és sempre creixent i també variarà de 0° a 360° (*fig. 19*).

Pel que fa a la declinació D , val 0° en el punt Àries γ on l'eclíptica talla l'equador. A partir d'aquí, la declinació D va creixent fins a arribar al seu màxim en el punt Càncer C o solstici d'estiu, on és igual a l'obliquïtat de l'eclíptica ε . A continuació, comença a decreixer, i quan el Sol es troba en el punt Libra Ω , de nou val 0° . Des d'aquest punt, segueix decreixent fins al solstici d'hivern o punt Capricorn C on la declinació adopta el seu valor mínim, igual a $-\varepsilon$. Finalment, torna a augmentar fins a l'equinocci de primavera, on altra vegada es torna nul·la.

Aquests punts són els que donen inici a les *estacions*. La *primavera*, l'*estiu*, la *tardor* i l'*hivern* comencen en els punts Àries (equinocci de primavera), Càncer (solstici d'estiu), Libra (equinocci de tardor) i Capricorn (solstici d'hivern), respectivament. O de forma equivalent, quan la longitud celeste L del Sol val 0° , 90° , 180° i 270° . Segons l'any sigui comú o de traspàs, les estacions s'iniciaran en les següents dates:

- Primavera: 20 o 21 de març.
- Estiu: 21 o 22 de juny.
- Tardor: 22 o 23 de setembre.
- Hivern: 21 o 22 de desembre.

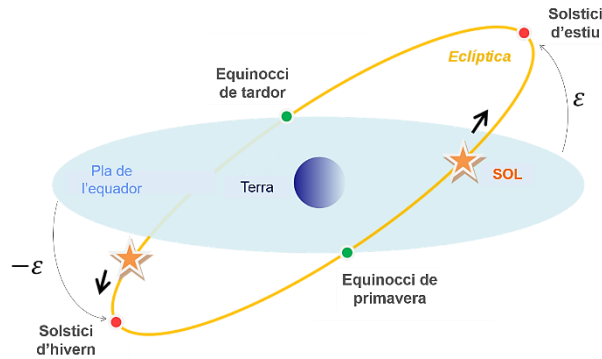


Fig. 22. Solsticis i equinoccis al llarg de l'eclíptica

Tot el definit sobre les estacions és vàlid per l'hemisferi nord. El que a l'hemisferi nord són la primavera, l'estiu, la tardor i l'hivern, a l'hemisferi sud són la tardor, l'hivern, la primavera i l'estiu.

Cal destacar que no totes les estacions tenen la mateixa durada a causa del fenomen que explica la segona Llei de Kepler sobre la velocitat d'un planeta. A més, aquestes durades varien lentament amb el transcurs dels anys a causa de la precessió que provoca el retrocés del punt Àries i que l'inici de la primavera es vagi desplaçant al llarg de l'òrbita terrestre de forma retrògrada.

També cal dir que es considera com a inici de l'any el moment on l'ascensió recta del Sol val 280° , el que equival a l'1 de gener.

2.6. EL MOVIMENT DIÛRN DEL SOL

Seguidament, explicaré com varia el moviment diürn del Sol depenent de la posició on es trobi sobre l'eclíptica.

El Sol, en un any, recorre l'eclíptica i la seva declinació varia de ε a $-\varepsilon$. Això vol dir que la seva declinació varia, aproximadament:

$$\frac{4 \cdot 23,43^\circ}{365 \text{ dies}} \approx 0,25^\circ/\text{dia}.$$

De la mateixa manera, la variació de la seva ascensió recta serà:

$$\frac{360^\circ}{365 \text{ dies}} \approx 1^\circ/\text{dia}.$$

Per a estudiar el moviment diürn del Sol se suposarà que les seves coordenades no varien al llarg d'un dia i que, per tant, la seva posició és fixa. Es prendrà com a posició la mitjana de les seves posicions durant un gir al voltant de l'esfera celeste.

2.6.1. Duració del dia segons l'època de l'any

Com he dit al capítol 1.9, els astres tenen una culminació superior i inferior, i el Sol no n'és una excepció. També, tindrà un orto i un ocàs si es verifica que $|D| \leq 90^\circ - |\phi|$. Si se suposa que aquesta condició es compleix, s'anomena:

- *matí* al temps que transcorre des de l'orto del Sol a la culminació superior,
- *migdia* a l'instant de la culminació superior,
- *tarda* al període de la culminació superior a l'ocàs,
- *mitjanit* al moment de la culminació inferior.

La duració del matí i la tarda varia al llarg de l'any, de la mateixa manera que els instants del migdia i la mitjanit.

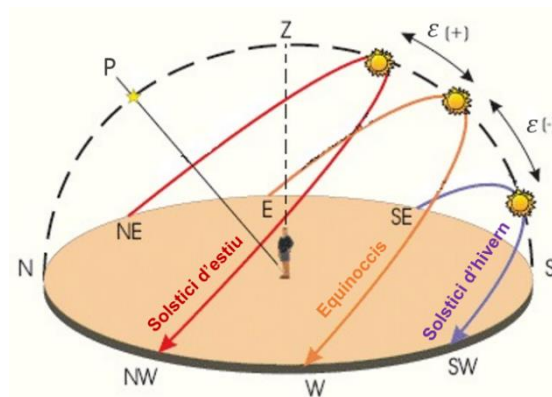


Fig. 23. Moviment diürn del Sol durant els solsticis i els equinoccis

En l'equinocci de primavera, el Sol es troba al punt Àries γ i té una declinació $D = 0^\circ$. En aquest dia, el Sol sortirà exactament per l'est, tindrà la culminació superior a Q , es posarà per l'oest i culminarà inferiorment en Q' . La durada del dia de llum serà la mateixa que la durada de la nit, i el Sol romandrà 12 hores per sobre i 12 hores per sota de l'horitzó.

En els dies posteriors al seu pas pel punt Àries γ , la declinació del Sol va augmentant. Llavors, el Sol sortirà i es posarà cada vegada més a prop del nord.

Quan el Sol arriba al punt Càncer C i té lloc el solstici d'estiu, la declinació és màxima i val ε . Aquest dia, el Sol descriu el tròpic de Càncer. El seu arc semidiürn adopta el valor màxim. Per tant, el dia serà el més llarg de l'any i la nit, la més curta. A més, serà el dia que la culminació superior tindrà lloc més amunt.

Des del punt Càncer C al punt Libra Ω la declinació del Sol disminueix, sortint i posant-se cada cop menys al nord, fins a arribar a sortir una altra vegada per l'est i posar-se per l'oest. En aquest moment, es donarà l'equinocci de tardor, on la durada del dia coincideix amb la de l'equinocci de primavera.

Quan el Sol avança cap al punt Capricorn C' , el Sol surt i es posa cada vegada més cap al sud fins a arribar al solstici d'hivern (o punt Capricorn C'), on la declinació és mínima i val $-\varepsilon$. Aquest dia el Sol recorre el tròpic de Capricorn. El seu arc semidiürn és mínim i per tant, el dia serà el més curt de l'any i la nit la més llarga. A més, serà el dia que el Sol culminarà superiorment més avall.

Des d'aquest punt fins a Àries, el moviment diürn del Sol avança cap al nord fins a arribar a sortir i posar-se, de nou, per l'est i l'oest.

2.6.2. Moviment diürn del Sol des de diferents latituds

En el capítol 1.9.3 s'ha definit quin era el moviment diürn de qualsevol astre per a observadors situats en diferents latituds. A continuació, tornaré a explicar el moviment diürn en diferents punts de la superfície terrestre, però concretament del Sol i tenint en compte que es mou aparentment al llarg de l'any seguint l'eclíptica.

- *Observador a l'equador ($\phi = 0^\circ$)*

El Sol descriu una trajectòria perpendicular a l'horitzó cada dia de l'any. El dia de llum té sempre la mateixa durada que la nit. El dia dels equinoccis, el Sol recorre el primer vertical. El dia del solstici d'estiu l'amplitud val ε i el del solstici d'hivern val $-\varepsilon$ (l'amplitud és l'angle comprés entre l'orto i l'est o l'ocàs i l'oest).

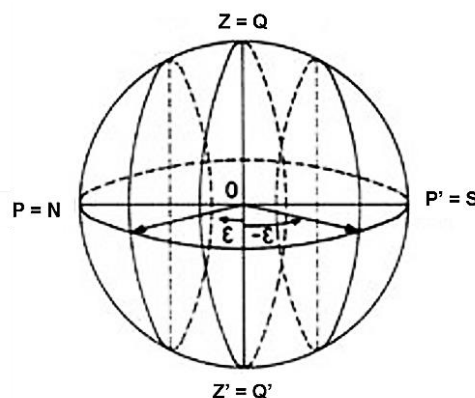


Fig. 24. *Moviment diürn del Sol en una latitud $\phi = 0^\circ$ (equador)*

- Observador al pol nord ($\phi = 90^\circ$):

El Sol en el seu moviment diürn descriu paral·lels celestes i la seva alçada és igual a la seva declinació. En els equinoccis el Sol descriu l'horitzó. El dia del solstici d'estiu, arriba a l'alçada màxima ε i el dia del solstici d'hivern a la mínima, $-\varepsilon$. De l'equinocci de primavera al de tardor, tots els dies seran de llum. Per contra, de l'equinocci de tardor al de primavera, sempre serà de nit.

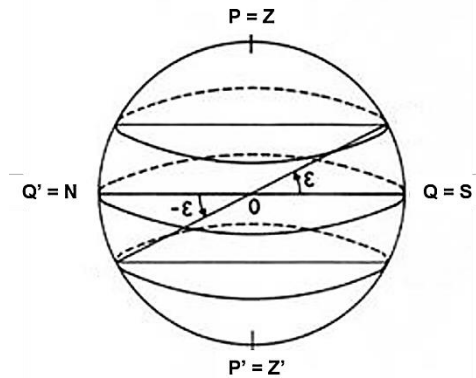


Fig. 25. Moviment diürn del Sol en una latitud $\phi = 90^\circ$ (pol nord)

- Observador en una latitud intermèdia ($0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$):

Si es verifica que $|D| \leq 90^\circ - |\phi|$, el Sol tindrà un orto i un ocàs i la variació dels dies serà com la descrita en el capítol anterior. Si no es compleix, hi haurà dies que el Sol sempre estarà per sobre o per sota l'horitzó.

3. EL TEMPS

3.1. ANY SIDERI I ANY TRÒPIC

La primera unitat de mesura del temps, i utilitzada per a grans fraccions de temps és l'any. Se sap que el moviment anual del Sol és el moviment aparent del Sol al llarg de l'esfera celeste observat en el transcurs d'un any, és a dir, el temps que tarda a tornar a un mateix punt de l'esfera celeste després d'haver donat una volta completa a aquesta. Però, partint d'aquesta afirmació, es poden definir dos tipus d'anys diferents: l'*any sideri* i l'*any tròpic*.

L'*any sideri* és el temps que transcorre des que la Terra està en un punt en l'espai respecte al Sol fins que torna a estar exactament en la mateixa posició. O el que és el mateix, és el temps que el Sol² tarda a recórrer l'eclíptica i tornar al mateix punt fix d'aquesta. Aquest punt de partida de l'any es determina prenent com a referència les estrelles. Quan el Sol es projecta sobre un cert fons d'astres s'inicia l'any, i quan el Sol torna a projectar-se sobre el mateix fons, l'any finalitza.

L'*any tròpic* és el temps comprès entre dos passos consecutius del Sol pel punt Àries γ . En el punt Àries γ l'eclíptica i l'equador celeste coincideixen, per tant, un any tròpic haurà transcorregut quan, després que el Sol recorri l'eclíptica, aquesta torni a coincidir amb l'equador celeste.

Com he dit en capítols anteriors, la posició del punt Àries retrocedeix 50,26" a causa del moviment de precessió dels equinoccis (*capítol 4.1*). Per això, després d'un any tròpic, quan el Sol torni al punt Àries, aquest es trobarà desplaçat en sentit retrògrad 50,26". Per això, l'any tròpic resulta més curt que l'any sideri.

L'any que es pren com a referència és l'any tròpic. Si, per contra, es fixés l'any sideri per establir el nostre calendari, quan arribés el moment de l'equinocci de primavera, l'eclíptica i l'equador no es tallarien i les estacions s'anirien desplaçant progressivament. Això faria que cada època de l'any no coincidís amb

² El Sol no es correspon amb un punt a l'espai, sinó que des de la Terra es visualitza com un objecte de superfície circular. Això fa que no tots els punts de la seva superfície tinguin les mateixes coordenades. Per això, es prendrà com a punt de referència el centre del disc solar i quan es parli del moviment del Sol, veritablement es farà referència al desplaçament d'aquest punt.

la seva estació corresponent. Per exemple, la primavera, al llarg del temps, podria arribar a començar a gener.

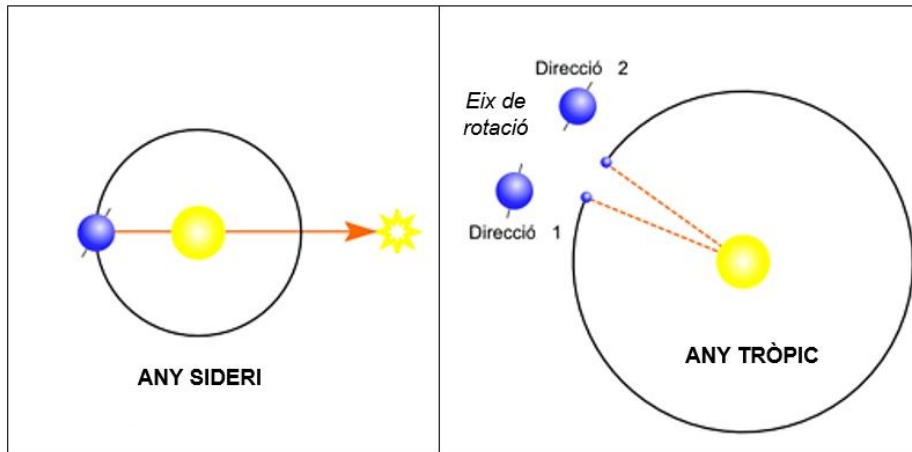


Fig. 26. Diferència entre l'any sideral i l'any tròpic

3.2. MESURA DEL TEMPS

La principal unitat de mesura del temps és el *dia*. Per mesurar-lo, es té en compte el temps que hi ha entre dues culminacions superiors o inferiors d'un punt concret de l'esfera celeste. Depenent de quin sigui aquest punt, es defineixen diferents tipus de dies i diferents unitats per mesurar-los.

3.2.1. Dia sideral

El *dia sideral* es correspon amb el temps que tarda la Terra a donar una volta completa al voltant del seu eix, prenent com a referència la posició d'una estrella llunyana. D'aquesta manera, es diu dia sideral a l'interval de temps transcorregut entre dues culminacions consecutives d'aquesta estrella pel mateix semimeridià. La seva duració aproximada és de 23^h 56^m 4^s.

3.2.2. Dia sideral. Temps sideral

S'anomena *dia sideral* al temps comprès entre dues culminacions successives del punt Àries γ per un mateix semimeridià.

Com s'ha mencionat anteriorment, el punt Àries es mou de forma retrògrada a causa del moviment de precessió dels equinoccis (*capítol 4.1*). Això suposa que el dia sideri sigui més curt que el sideral.

Existeix un altre fenomen que provoca que el dia sideri sigui més curt que el dia sideral. Aquest és el moviment de nutació de l'eix de rotació de la Terra, que fa fluctuar el punt Àries una semiamplitud de 1° cada 18,6 anys al voltant de la posició donada pel moviment de precessió (*capítol 4.2*). Com la influència d'aquest moviment és mínima, es menysprearà com s'ha fet fins ara.

La unitat de mesura del dia sideri és el *temps sideri* θ i es correspon amb l'angle horari H del punt Àries γ . L'angle horari H forma part de les coordenades horàries, que són locals. Això vol dir que el temps sideri θ també serà local i dependrà del lloc de l'observador.

El temps sideri θ , tot i que pot ser útil en certes ocasions, no resulta un bon sistema per a mesurar el temps de la nostra vida quotidiana, ja que aquesta es fonamenta en la sortida i posta del Sol i no pas en el punt Àries. Com veurem a continuació, les culminacions d'ambdós no coincideixen, el que suposa un inconvenient. Per això, s'explicaran altres sistemes de mesura del temps més pràctics pel dia a dia humà.

3.2.3. Dia solar veritable. Temps solar veritable

Un *dia solar veritable* és el temps comprès entre dues culminacions (inferiors o superiors) successives del Sol. O el que és el mateix, és el temps emprat per un punt qualsevol de la superfície terrestre per trobar-se de nou, després d'una rotació, exactament en la mateixa posició respecte del Sol.

Aquest dia correspon a una rotació terrestre i escaig. La Terra, a la vegada que gira sobre si mateixa, es desplaça seguint una òrbita al voltant del Sol. Aproximadament, es pot suposar que aquest desplaçament és de:

$$\frac{360^{\circ}}{365 \text{ dies}} \approx 1^{\circ}/\text{dia}.$$

Suposem que observem en un moment concret el Sol i aquest té una determinada posició. Si després que la Terra hagi efectuat una rotació completa sobre el seu eix tornem a observar-lo, no estarà en la mateixa posició del dia

anterior. A causa del moviment de translació, la Terra s'haurà desplaçat 1° respecte al Sol i, per tant, el Sol s'haurà desplaçat cap a l'est. Així, faltará 1° de rotació addicional perquè el Sol quedi en la mateixa posició en el que vam observar-lo inicialment. Aquest grau addicional és igual a:

$$1^\circ \cdot \frac{24^h}{360^\circ} \cdot \frac{60^m}{1^h} = 4^m.$$

Així, el dia solar veritable serà 4 minuts més llarg que els dos dies definits anteriorment.

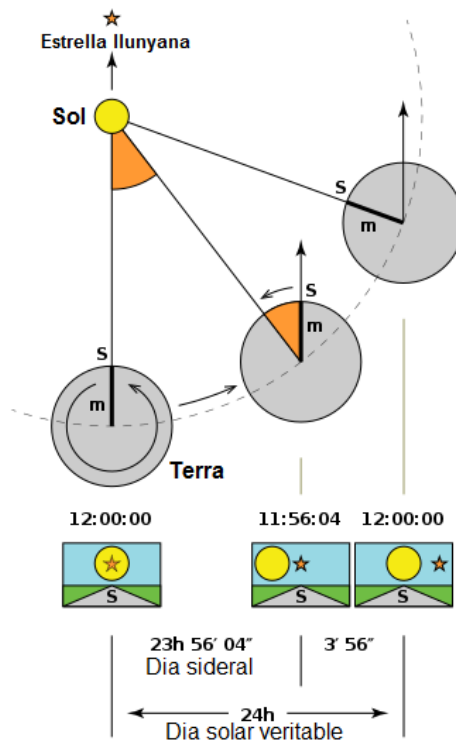


Fig. 27. Diferència entre el dia sideral i el dia solar veritable

En la figura 27 es comparen el dia solar veritable i el dia sideral. Com es veu, el dia sideral també es basa en la rotació de la Terra, però en aquest cas es pren com a referència una estrella llunyana (sideral ve del llatí *sidus* que vol dir "astre"). Les estrelles estan a tal distància que els moviments de la Terra perden, comparativament, tota importància. En conseqüència, només caldrà una rotació completa de la Terra perquè el punt de referència torni a trobar-se exactament enfront de la mateixa estrella. La proximitat del Sol, en canvi, fa que el moviment de translació de la Terra sí que influeixi sobre el dia solar veritable.

També cal fer una comparació entre el dia sideri i el dia solar veritable. Imaginem que, a l'inici d'un dia, el punt Àries i el Sol coincideixen en la mateixa posició. Quan, després d'una rotació terrestre, el punt Àries torni a la seva posició inicial, al Sol encara li faltaran 4 minuts per arribar-hi. Després d'una altra rotació, ja seran 8 minuts els que el Sol portarà de retard. I així successivament, el que demostra la incomoditat d'utilitzar com a mesura el dia sideri.

La unitat de mesura del dia solar veritable és el *temps solar veritable* T_v , que és igual a l'angle horari H_v del Sol en qualsevol instant més 12^h :

$$\boxed{T_v = H_v + 12^h} \quad (13)$$

S'ha de sumar 12^h a l'angle horari H perquè es pren com a $H = 0^h$ l'instant de culminació superior del Sol i en canvi, s'estableix com a hora zero el moment de culminació inferior del Sol.

Tot i que la utilització del dia solar veritable com a mesura resulta més pràctica, també presenta inconvenients. En primer lloc, el moviment del Sol és sobre l'eclíptica, pel que l'angle horari H_v no creixerà proporcionalment. I en segon lloc, el seu moviment sobre l'eclíptica no és constant, sinó que la seva velocitat varia segons explica la segona Llei de Kepler. Això provoca que la duració de cada dia solar veritable no sigui igual i no pugui adoptar-se com a unitat de temps.

3.2.4. Dia solar mitjà. Temps solar mitjà

Per evitar els inconvenients que presenta el dia solar veritable i poder utilitzar les observacions del Sol per a la mesura del temps, es defineix un Sol imaginari: el *Sol mitjà*. Aquest, descriu l'equador celeste en sentit directe amb una velocitat constant en un temps igual al que triga el Sol en recorre l'eclíptica, és a dir, en un any tròpic.

S'anomena *dia solar mitjà* al temps transcorregut entre dues culminacions (inferiors o superiors) successives del sol mitjà. Cada dia solar mitjà tindrà una duració igual a la mitjana de la duració de tots els dies solars veritables d'un any tròpic. A més, per definició, com el sol mitjà gira al voltant de l'eix del món, l'angle horari d'aquest creixerà proporcionalment en el temps.

El *temps solar mitjà* T_m és la unitat de mesura del dia solar mitjà i es correspon a l'angle horari H_m en qualsevol instant del Sol mitjà més 12^h :

$$\boxed{T_m = H_m + 12^h} \quad (14)$$

Se sumen 12^h perquè quan el Sol mitjà es troba en la culminació superior, $H_v = 0^h$ però $T_v = 12^h$. Això es deu al fet que es pren com a hora zero l'instant de la seva culminació inferior, on $H_v = 12^h$.

Com el Sol mitjà no és un punt real sobre l'esfera celeste, no pot mesurar-se directament el seu angle horari H_v i només s'obindrà a partir de càlculs previs del temps solar veritable.

3.3. TEMPS LOCAL, TEMPS UNIVERSAL I TEMPS DEL FUS HORARI

El *temps local* és el temps d'un semimeridià geogràfic concret. En tots els punts d'un mateix semimeridià, l'angle horari del Sol mitjà és igual. Per tant, al llarg d'un semimeridià també serà igual el temps solar mitjà T_m . Així, la diferència entre dos temps locals de dos semimeridians qualssevol, serà la diferència de longitud l entre aquests semimeridians:

$$\boxed{T_{m_2} - T_{m_1} = l_2 - l_1} \quad (15)$$

Per a propòsits de càlcul astronòmic, navegació, enregistrament de fenòmens, etc., va ser convenient establir un temps de referència per a tota la Terra. Aquest és el temps universal coordinat (UTC), que és equivalent al temps solar mitjà del primer semimeridià, el de Greenwich. D'aquesta manera, les zero hores UTC, és a dir, l'inici d'un dia estàndard per a la Terra, ocorre quan el Sol travessa el semimeridià $\pm 180^\circ$, que està totalment oposat al de Greenwich.

A partir d'aquí, el temps solar mitjà T_m de qualsevol punt terrestre serà igual al temps universal T_u coordinat menys la longitud l d'aquest punt:

$$\boxed{T_m = T_u - l} \quad (16)$$

El principal problema tant del temps local com del temps universal és que la quantitat de semimeridians que existeixen és indefinida i no resulta possible establir un temps local per a cada semimeridià. Per resoldre aquest inconvenient es va establir el sistema dels *fusos horaris*.

En primer lloc, es van establir només *24 semimeridians geogràfics bàsics* per definir el temps local de qualsevol punt de la Terra. Aquests semimeridians bàsics estan numerats de 0 a 23 i es troben separats 15° els uns dels altres, el que és igual a 1^h . S'ha seleccionat com a semimeridià bàsic zero al de Greenwich. El número u és el situat a 15° a l'est d'aquest i el semimeridià bàsic 23 és el que es troba 345° a l'est del de Greenwich.

A partir dels semimeridians geogràfics bàsics s'han fixat els fusos horaris. Els *fusos horaris* són 24 regions, de 15° cada una, en les que queda dividida la superfície terrestre. Els fusos horaris queden dividits per semimeridians frontera que es troben a $7,5^\circ$ dels semimeridians bàsics. Cadascuna d'aquestes regions s'anomena franja horària i té un horari específic assignat. És a dir, cada franja horària té al centre un semimeridià bàsic que estableix l'hora de tota la franja. D'aquesta manera, el temps solar mitjà T_m només coincideix amb el temps del fus horari T_f en els semimeridians bàsics. En la resta de punts d'una franja horària pot haver-hi fins a una diferència de $\pm 30^m$ entre el temps del fus horari T_f i el temps solar mitjà T_m .

Totes les franges horàries es defineixen en relació amb el temps universal coordinat i es denoten tradicionalment mitjançant les sigles UTC i la suma o resta corresponent de les hores enteres de separació respecte al semimeridià bàsic zero de Greenwich. Aquestes hores es prendran com a positives de Greenwich cap a l'est i negatives cap a l'oest.

En general, les franges horàries només se segueixen amb rigor en els mars i oceans o en zones no poblades. Els semimeridians frontera solen ser irregular i acostumen a seguir els límits dels estats per així establir la mateixa hora al llarg de tot l'estat. Tot i així, alguns països de gran extensió no poden mantenir l'hora unificada per a tot el seu territori, per la qual cosa han de dividir-lo en diverses franges horàries.

També cal destacar que s'ha fixat com a línia de canvi de data el semimeridià $\pm 180^\circ$, que és l'oposat al de Greenwich.



Fig. 28. Fusos horaris i semimeridians bàsics

3.4. TEMPS OFICIAL

Certs països estableixen durant uns mesos de l'any l'anomenada hora d'estiu amb la finalitat d'estalvi energètic i aprofitament de la llum solar tenint en compte que el Sol s'oculta més tard a l'estiu. El que es fa és avançar tots els rellotges 1^h, la qual cosa equival a adoptar l'hora del fus contigu situat a l'est. De la mateixa manera, a l'hivern es torna al fus horari original per aprofitar al màxim possible la lluminositat del Sol. Aquest canvi dona lloc a l'anomenat *temps oficial*.

En altres casos, per raons geopolítiques certs països adopten de manera permanent l'hora corresponent a la franja horària veïna. Per exemple, Espanya, situada en la franja 0, va canviar la seva hora per la de la franja 1 a fi de facilitar les relacions amb la part occidental i central de la Unió Europea. Així, va tot l'any avançada 1^h respecte de la seva franja horària, menys en els mesos d'estiu, on va 2^h avançada.

4. MOVIMENTS DE LA TERRA I FENÒMENS SOLARS

En els capítols anteriors s'ha comentat el moviment diürn de l'esfera celeste però s'han menyspreat diversos moviments terrestres que influeixen en aquest. De la mateixa manera que quan es defineix el moviment solar no es tenen en compte certs fenòmens que l'alteren.

Ambdós fets no es tenen en compte perquè a l'hora de realitzar el càlcul de l'orto i l'ocàs solar, finalitat del treball, gairebé no tenen influència, i si hagués d'incloure els seus efectes en el càlcul, resultaria pràcticament impossible realitzar-lo. Tot i això, resulta interessant mencionar-los i explicar quina és la seva influència.

En primer lloc parlaré de dos moviments terrestres que ja han aparegut anteriorment al treball, que són la precessió i la nutació. Posteriorment, passaré a comentar els crepuscles i la refracció astronòmica, fenòmens que van directament lligats al Sol.

4.1. PRECESSIÓ

A més dels ja coneguts moviments de rotació i translació efectuats per la Terra, hi ha un tercer moviment que el nostre planeta duu a terme: la *precessió*.

La Terra no és una esfera perfecta, sinó que és un el·lipsoide de forma irregular, aixafada pels seus pols i que a més, pateix l'atracció gravitatòria del Sol, la Lluna i, en menor mesura, dels planetes. Tot això provoca una espècie de lentíssim balanceig de l'eix de rotació del nostre planeta que es coneix amb el nom de precessió i que s'efectua en sentit invers al de rotació, és a dir en sentit retrògrad o horari.

La precessió suposa que l'eix de rotació terrestre descriu al voltant de l'eix de l'eclíptica un doble con, que té el vèrtex situat al centre de la Terra i té una base de 47° de diàmetre. Aquest gir tarda, aproximadament, 26000 anys en completar-se.

El moviment de precessió és comú a tots els cossos que giren al voltant de si mateixos i es desplacen al mateix temps en presència d'un camp gravitatori i s'ha d'imaginar com el moviment que realitza una baldufa.

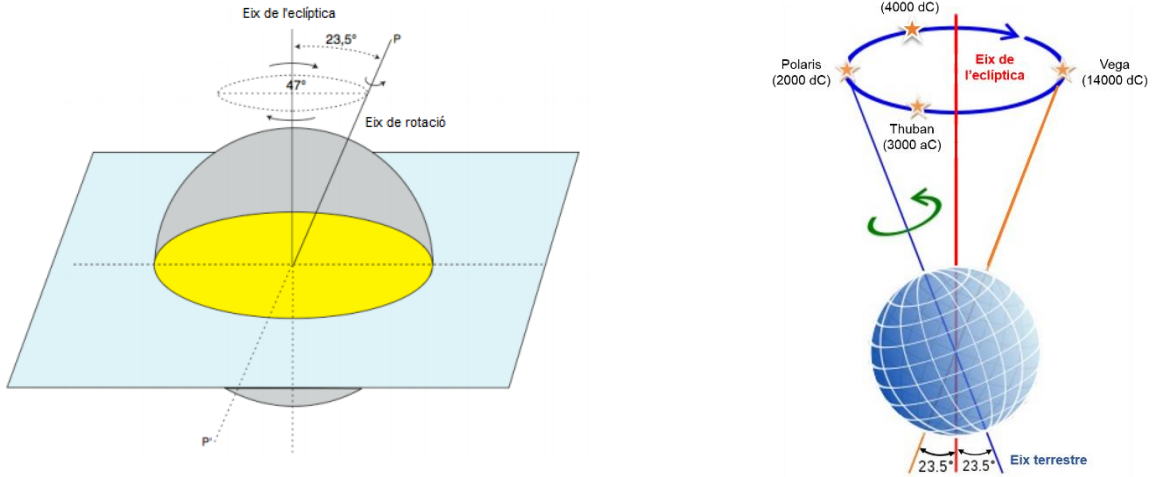


Fig. 29 i 30. Doble con descrit per l'eix de rotació terrestre al voltant de l'eix de l'eclíptica

A causa de la precessió es donen les següents conseqüències:

- La posició dels pols va canviant a través dels segles. L'estrella Polar (Alfa Ursa Minor) rep aquest nom perquè actualment és l'estrella més propera al pol nord. Encara que avui en dia ambdós gairebé coincideixen, s'aniran allunyant a poc a poc descrivint un gran cercle fins a tornar a ocupar una posició similar a l'actual d'aquí a 26000 anys.

Si es projecta l'eix de gir de la Terra sobre el fons estrellat, el con de la precessió s'observa com una gegantina espiral, que busca tancar-se cada 26000 anys. Actualment, l'eix apunta a l'estrella Polar però fa 5000 anys, cap a l'any 3000 aC, l'estrella que estava més a prop del pol nord era Alfa Draconis (Thuban). De la mateixa manera, cap a l'any 4000 dC, l'estrella més propera a l'eix de rotació serà Gamma Cephei (Alrai).

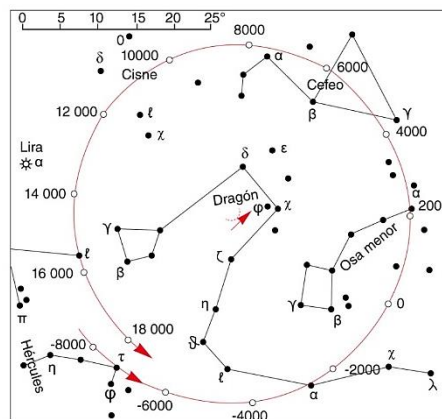


Fig. 31. Posició del pol nord al llarg dels segles

- El punt Àries varia de posició. El lentíssim balanceig del nostre planeta fa que l'eix de rotació de la Terra canviï la seva orientació i com l'eix és perpendicular a l'equador, aquest també variarà. Això provoca que quan l'eix de rotació apunti a P , l'equador sigui E i quan apunti a P' , l'equador sigui E' . Ja que se suposa que el pla de l'eclíptica està fix, el punt d'intersecció d'aquest pla amb el de l'equador també es mourà de forma retrògrada donant lloc als punts γ i γ' (fig. 32). Aquest retrocés del punt Àries és de $50,26''$ per any, aproximadament.

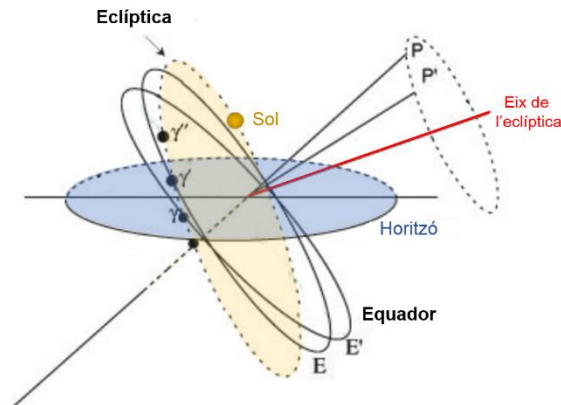


Fig. 32. Retrocés del punt Àries sobre l'eclíptica

- També es produeix un desplaçament de les constel·lacions i els signes del Zodíac, com he explicat al capítol 2.1. En l'època de l'Imperi Romà el Sol era a la constel·lació d'Àries al començament de la primavera i en l'actualitat, la primavera comença quan el Sol està a Peixos. Això farà que d'aquí a 13.000 anys a les nits d'hivern s'observin les constel·lacions que ara veiem a l'estiu i viceversa.

- La variació de les coordenades equatorials i eclíptiques a causa del moviment del punt Àries. Encara que aquesta variació és imperceptible, els desplaçaments són significatius en períodes llargs de temps, el que requereix corregir constantment les coordenades celestes.

4.2. NUTACIÓ

Existeix un altre moviment terrestre que se superposa al de precessió: la *nutació*. Aquesta és l'oscil·lació periòdica de l'eix de rotació de la Terra al voltant de la seva posició mitjana; com si fos una espècie de petit vaivé de l'eix terrestre.

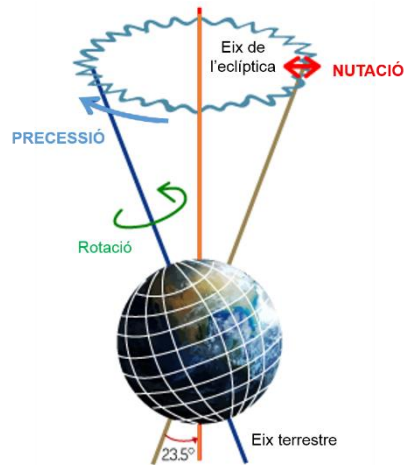


Fig. 33. Moviments terrestres de rotació, precessió i nutació

Com la Terra no és esfèrica, l'atracció de la Lluna sobre l'equador del nostre planeta és la que provoca el moviment de nutació.

Per fer-nos una idea d'aquest moviment, es pot suposar que mentre l'eix de rotació de la Terra descriu el moviment cònic de precessió, descriu al seu torn unes petites semiel·lipses o bucles sinusoidals. D'aquesta manera, els teòrics cons que dibuixaria la projecció en l'espai del desplaçament de l'eix de la Terra a causa del moviment de precessió no són regulars sinó ondulats.

El període de cada un d'aquests bucles és de 18,6 anys i cadascun d'ells té una amplitud de 9,2 segons d'arc. En una volta completa de precessió, la Terra realitza més de 1.300 bucles de nutació.

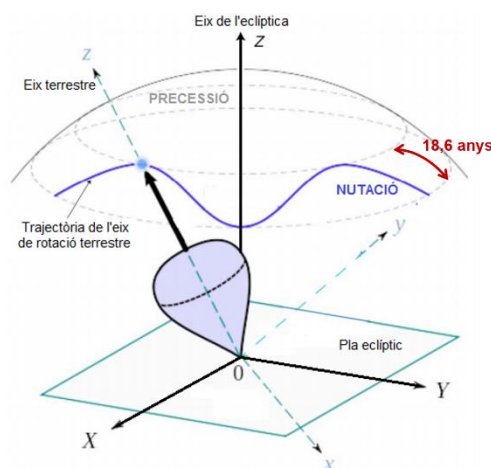


Fig. 34. Moviments de precessió i nutació de l'eix terrestre

Tant el moviment de precessió com el de nutació, provoquen que el moviment diürn dels astres, el moviment anual del Sol, etc. no sigui regular. Però com aquesta variació resulta tan insignificant en períodes curts de temps, es menysprea per facilitar els càlculs del treball. A llarg termini, sí que tindrien una influència prou important sobre el moviment de l'esfera celeste, però la nostra vida és massa curta per arribar a apreciar-la.

4.3. LA REFRACCIÓ ASTRONÒMICA

La llum es propaga en línia recta en el buit o en medis homogenis. Com que l'atmosfera terrestre no és homogènia, en propagar-s'hi, la llum experimenta una desviació. L'angle que es forma entre la direcció on s'observa el Sol i la direcció en on s'hauria d'observar si no existís el fenomen de la refracció, s'anomena *refracció astronòmica*.

Per refracció s'entén el canvi que experimenta una ona en passar d'un medi a un altre amb diferent índex de refracció. L'índex de refracció ve donat per la relació entre la velocitat de l'ona en el buit i la del medi que es tracta. Els canvis que experimenta la llum en passar per medis diferents són canvis de velocitat i també de direcció.

La refracció provoca que les coordenades solars que s'observen no coincideixin amb les veritables coordenades d'aquest, és a dir, que la posició que es veu del Sol sigui aparent. Així, aquest fenomen fa que el Sol (i les estrelles, però en menor mesura) es vegi sempre per sobre de la seva posició real.

Per determinar la refracció astronòmica cal comparar l'alçada real i l'aparent del Sol. Si l'anomenem R ,

$$\boxed{R = h' - h = h_{\text{aparent}} - h_{\text{real}}} \quad (17)$$

Com se sap que $z = 90^\circ - h$ i $z' = 90^\circ - h'$, es pot expressar la refracció astronòmica en funció de la distància zenital:

$$R = (90^\circ - z') - (90^\circ - z) = 90^\circ - z' - 90^\circ + z \quad \rightarrow \quad \boxed{R = z - z'} \quad (18)$$

Per a $z = 0^\circ$ tenim que $R = 0'$, i per a $z = 90^\circ$, $R \approx 35'$ i és màxim. La refracció astronòmica, per tant, dependrà de l'angle en que incideixin els rajos solars.

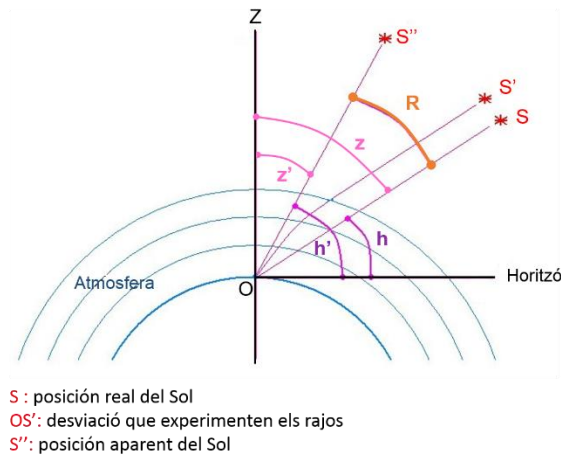


Fig. 35. Refracció astronòmica del Sol

Si s'hagués de tenir en compte la refracció astronòmica, s'hauria de considerar que els astres es veuen abans que es produeixi el seu orto i que, un cop han superat la línia de l'horitzó i s'han post, encara se segueixen veient. La refracció astronòmica, per tant, és la causa que en ocasions s'observi un canvi de forma en el disc solar.

4.4. ELS CREPUSCLES

El *crepuscle* és el temps entre el dia i la nit on el Sol està per sota de l'horitzó, però els seus raigs il·luminen el cel. Els crepuscles es produeixen quan la part superior de l'atmosfera terrestre difon i reflecteix la llum solar, que il·lumina la baixa atmosfera. La duració del crepuscle depèn de la latitud; les regions equatorials i tropicals solen tenir crepuscles més curts que als llocs de latituds més elevades.

Es defineixen tres etapes del crepuscle segons l'elevació del Sol, és a dir segon l'angle que hi ha entre el centre del Sol i l'horitzó:

- *Crepuscle civil*: es produeix quan el Sol es troba entre 0° i 6° sota l'horitzó. Aquest és el més brillant de tots els crepuscles.
- *Crepuscle nàutic*: quan el centre del disc solar està entre 6° i 12° sota l'horitzó. La seva intensitat és menor que els de l'anterior.

- *Crepuscle astronòmic*: quan el Sol és entre 12° i 18° sota l'horitzó. Al matí, el cel és completament fosc abans de l'inici del crepuscle astronòmic i, al vespre, el cel es fa completament fosc al final d'aquest.

A causa dels crepuscles el temps de llum solar és major que el dia solar veritable. En el treball, a l'hora de realitzar els càlculs, aquest fenomen és irrellevant i per tant no es considera, tot i que abans que de l'orto i després de l'ocàs hi hagi llum solar encara que el Sol no es vegi.

5. CÀLCUL DE L'ORTO I L'OCÀS SOLAR

Aquesta part serà la part pràctica del meu treball. Com he explicat a la introducció, el que pretén aquesta secció és calcular matemàticament l'orto i l'ocàs solar per a qualsevol punt de la superfície terrestre durant qualsevol dia de l'any 2018. El càlcul es farà a partir d'una fulla de càlcul d'Excel on s'introduiran les fórmules i dades pertinents per a realitzar el càlcul.

Cal dir que, la idea en que m'he basat per realitzar tots els càlculs pertinents és la de l'esfera celeste i el moviment del Sol al llarg d'aquesta, tant anual com diürn, a més de les coordenades necessàries per situar un punt sobre aquesta.

Al llarg d'aquest capítol es desenvoluparan per apartats tots els passos necessaris per aconseguir arribar al resultat que es desitja. Tots els càlculs i les explicacions realitzades es fonamentaran en la base teòrica explicada al llarg dels capítols anteriors. Així, cada cop que es faci referència a un d'aquests termes ja explicats, mencionaré el capítol en el qual apareix per no haver de repetir la seva definició.

Després d'això, s'arribarà a una fórmula definitiva que serà el resum de tots els passos previs explicats i que permetrà calcular l'orto i l'ocàs a partir de 4 dades: la latitud i longitud del lloc on es vol realitzar el càlcul, el dia de l'any pel qual ens interessa fer-ho (que servirà per trobar la declinació solar d'aquell dia) i el fus horari on pertany la longitud seleccionada.

Un cop aconseguida la fórmula precisa, s'utilitzarà per calcular l'orto i l'ocàs de cinc latituds diferents al llarg de tot l'any.

- Les latituds seran les de:
 - l'Equador, $\phi_E = 0^\circ$;
 - el tròpic de Càncer, $\phi_{T.C} = 23,4372^\circ$;
 - Barcelona, $\phi_{BCN} = 41,3818^\circ$;
 - Glasgow, $\phi_G = 55,8650^\circ$;
 - el Cercle Polar Àrtic $\phi_{C.P.A} = 66,5628^\circ$.

He escollit aquestes latituds perquè com es veurà en els resultats, permeten una fàcil i clara comparació entre elles i serveixen per comprendre com va variant el moviment diürn i les hores de l'orto i l'ocàs a mesura que la latitud

augmenta. Especialment, he triat les latituds de l'Equador i del Cercle Polar Àrtic perquè són "extremes" i això permetrà veure les peculiaritats del moviment diürn en aquests punts.

- Un cop seleccionades les latituds, es trobarà l'orto i l'ocàs en aquests punts i es compararan entre ells per veure com varia la duració del dia i de la nit durant cada dia de l'any en funció de la latitud. Caldrà fixar-se, especialment, en els dies dels equinoccis i solsticis, perquè són els dies on el Sol es troba en la seva alçada màxima, mitjana i mínima i, per tant, són els moments que resulten més interessant d'estudiar:
 - o l'equinocci de primavera (20 de març),
 - o el solstici d'estiu (21 de juny),
 - o l'equinocci de tardor (22 de setembre),
 - o el solstici d'hivern (21 de desembre).³

Com s'ha dit, el que es vol fer amb tots els resultats obtinguts és compararlos entre ells. Contrastaré els resultats entre les diferents latituds i, a la vegada, dins d'una mateixa latitud, compararé l'orto i l'ocàs al llarg de l'any. Això em servirà, paral·lelament, per comprovar si el moviment diürn i anual del Sol que s'ha estudiat de forma teòrica també es compleix si s'arriba a ell a partir d'una fórmula matemàtica. És a dir, per veure si realment la teoria i la pràctica coincideixen.

Per finalitzar, extrauré les conclusions pertinents sobre la utilitat de la fórmula trobada i la fiabilitat que té en funció de si els resultats que proporciona són força propers a la realitat o, per contra, l'error és gran i no resulta precís calcular l'orto i l'ocàs solar d'aquesta manera.

5.1. ORTO I OCÀS SOLAR

Com s'ha explicat al capítol 1.9.1, l'orto i l'ocàs són els punts d'intersecció de l'horitzó amb el paral·lel descrit per un astre, en aquest cas el Sol. O com més

³ Per veure la definició d'equinocci i solstici vegeu el capítol 2.1 i la seva correspondència amb els pertinents dies de l'any aneu al capítol 2.5.1. Se sap que aquesta correspondència es compleix en aquest cas perquè les latituds es troben a l'hemisferi nord i l'any 2018 és comú, no de traspàs.

comunament són dits, són els punts de sortida (orto) i posta (ocàs) del Sol i són el que interessa calcular en aquesta part.

La principal característica a tenir en compte de l'orto i l'ocàs és que en ambdós moments l'alçada del Sol respecte de l'horitzó és zero, $h = 0^\circ$. Aquesta serà una dada imprescindible posteriorment.

Una altra idea a tenir present és que el Sol no sempre pot tenir orto i ocàs, és a dir, de vegades pot no tallar l'horitzó i trobar-se sempre per sota o per sobre d'aquest. Això succeeix quan $|D| \geq 90^\circ - |\phi|$, sent D la declinació solar i ϕ la latitud del lloc. Així, sabent només la declinació i la latitud ja es podrà deduir si serà possible calcular l'hora i sortida del Sol o pel contrari, no podrà fer-se perquè no tallarà l'horitzó.

5.2. LATITUD DEL LLOC

La primera dada necessària per a poder calcular l'hora veritable a la qual surt i es posa el Sol en un lloc qualsevol és, precisament, la latitud ϕ de tal lloc.

Com s'ha mencionat, tots els càlculs es faran en funció de la posició solar sobre l'esfera celeste. Al capítol 1.5 s'ha explicat que la latitud és l'angle que es forma entre la vertical del lloc i l'equador i també entre l'eix del món i l'horitzó, per tant, de la latitud depèn la inclinació d'un astre respecte de l'horitzó.

D'aquesta manera, el moviment diürn de qualsevol cos celeste, en aquest cas del Sol, variarà en funció de la latitud. Així, segons quin sigui el valor d'aquesta, el Sol pot descriure una trajectòria perpendicular a l'horitzó, inclinada respecte d'aquest o fins i tot paral·lela i no arribar a tallar-lo mai (*capítol 1.9.3*).

Per tant, la latitud és el primer a tenir en compte per saber com es mou el Sol en un punt concret de la superfície terrestre.

5.3. DECLINACIÓ SOLAR

Dins del sistema de coordenades horàries estudiades en el capítol 1.7, n'hi ha una que és la declinació, que proporciona l'altura que té un astre respecte de l'horitzó. El Sol té la particularitat de tenir una declinació variable, ja que al llarg del

seu moviment anual es desplaça sobre l'esfera celeste descrivint l'eclíptica. Com la declinació D solar canvia contínuament i també ho fa al llarg d'un dia, es prendrà per cada dia una declinació diferent i que sigui invariable al llarg d'aquest (*capítol 2.1*).

Per saber com es desplaça el Sol ens cal, a més de la latitud del lloc, la declinació D del dia concret pel qual interressi realitzar qualsevol càlcul. Així, per cada dia de l'any que es vulgui calcular l'orto i l'ocàs, s'ha d'utilitzar una declinació diferent.

Existeixen diverses formes d'obtenir la declinació solar de cada dia de l'any, concretament quatre. A continuació explicaré quines són cadascuna d'elles i els inconvenients que presenten.

1. La primera de totes és a partir de taules que proporcionen les coordenades solars de cada any sense necessitat de realitzar cap càlcul. Les prediccions que jo he trobat, s'han obtingut utilitzant el *JPL DE405 planetary and lunar ephemerides*, Aquesta és l'abreviació del *Jet Propulsion Laboratory Development Ephemeris (JPL DE)*, que designa una sèrie de models informàtics per determinar la posició i velocitat de cossos del Sistema Solar produïts al *Jet Propulsion Laboratory* a Pasadena, Califòrnia, principalment per a propòsits de navegació i astronomia. El programa *DE405*, creat el maig del 1997, a més, inclou les nutacions.

Tots els càlculs de les declinacions diàries del 2018 que hi ha continuació han estat calculats a partir d'aquest programa per Fred Espenak, astrofísic estatunidenc, qui assumeix la responsabilitat de la seva exactitud.

Data 00:00 UTC ⁴	Declianció solar	Data 00:00 UTC	Declianció solar	Data 00:00 UTC	Declianció solar	Data 00:00 UTC	Declianció solar
Gener 01	-23,0191	Abril 01	4,4355	Juliol 01	23,1206	Octubre 01	-3,0806
Gener 02	-22,9350	Abril 02	4,8209	Juliol 02	23,0518	Octubre 02	-3,4681
Gener 03	-22,8432	Abril 03	5,2050	Juliol 03	22,9763	Octubre 03	-3,8551
Gener 04	-22,7439	Abril 04	5,5875	Juliol 04	22,8941	Octubre 04	-4,2413
Gener 05	-22,6371	Abril 05	5,9684	Juliol 05	22,8052	Octubre 05	-4,6268
Gener 06	-22,5228	Abril 06	6,3476	Juliol 06	22,7098	Octubre 06	-5,0113

⁴ Totes les declinacions han estat mesurades per a les 00:00 h del temps universal coordinat (UTC).

Gener 07	-22,4011	Abril 07	6,7249	Juliol 07	22,6077	Octubre 07	-5,3948
Gener 08	-22,2720	Abril 08	7,1004	Juliol 08	22,4992	Octubre 08	-5,7771
Gener 09	-22,1356	Abril 09	7,4739	Juliol 09	22,3841	Octubre 09	-6,1583
Gener 10	-21,9920	Abril 10	7,8454	Juliol 10	22,2626	Octubre 10	-6,5381
Gener 11	-21,8413	Abril 11	8,2146	Juliol 11	22,1347	Octubre 11	-6,9164
Gener 12	-21,6834	Abril 12	8,5816	Juliol 12	22,0005	Octubre 12	-7,2932
Gener 13	-21,5185	Abril 13	8,9462	Juliol 13	21,8600	Octubre 13	-7,6683
Gener 14	-21,3467	Abril 14	9,3084	Juliol 14	21,7132	Octubre 14	-8,0417
Gener 15	-21,1681	Abril 15	9,6679	Juliol 15	21,5603	Octubre 15	-8,4132
Gener 16	-20,9826	Abril 16	10,0249	Juliol 16	21,4013	Octubre 16	-8,7827
Gener 17	-20,7905	Abril 17	10,3790	Juliol 17	21,2361	Octubre 17	-9,1501
Gener 18	-20,5918	Abril 18	10,7304	Juliol 18	21,0650	Octubre 18	-9,5153
Gener 19	-20,3866	Abril 19	11,0787	Juliol 19	20,8880	Octubre 19	-9,8781
Gener 20	-20,1750	Abril 20	11,4240	Juliol 20	20,7051	Octubre 20	-10,2386
Gener 21	-19,9571	Abril 21	11,7662	Juliol 21	20,5164	Octubre 21	-10,5965
Gener 22	-19,7330	Abril 22	12,1051	Juliol 22	20,3219	Octubre 22	-10,9518
Gener 23	-19,5028	Abril 23	12,4406	Juliol 23	20,1218	Octubre 23	-11,3043
Gener 24	-19,2665	Abril 24	12,7728	Juliol 24	19,9161	Octubre 24	-11,6540
Gener 25	-19,0244	Abril 25	13,1014	Juliol 25	19,7049	Octubre 25	-12,0007
Gener 26	-18,7764	Abril 26	13,4263	Juliol 26	19,4883	Octubre 26	-12,3444
Gener 27	-18,5228	Abril 27	13,7476	Juliol 27	19,2662	Octubre 27	-12,6849
Gener 28	-18,2636	Abril 28	14,0650	Juliol 28	19,0389	Octubre 28	-13,0222
Gener 29	-17,9989	Abril 29	14,3786	Juliol 29	18,8063	Octubre 29	-13,3561
Gener 30	-17,7288	Abril 30	14,6882	Juliol 30	18,5686	Octubre 30	-13,6865
Gener 31	-17,4535	Maig 01	14,9938	Juliol 31	18,3259	Octubre 31	-14,0134
Febrer 01	-17,1730	Maig 02	15,2952	Agost 01	18,0781	Novembre 01	-14,3365
Febrer 02	-16,8875	Maig 03	15,5924	Agost 02	17,8254	Novembre 02	-14,6559
Febrer 03	-16,5971	Maig 04	15,8853	Agost 03	17,5678	Novembre 03	-14,9713
Febrer 04	-16,3018	Maig 05	16,1739	Agost 04	17,3055	Novembre 04	-15,2827
Febrer 05	-16,0019	Maig 06	16,4580	Agost 05	17,0385	Novembre 05	-15,5899
Febrer 06	-15,6973	Maig 07	16,7376	Agost 06	16,7669	Novembre 06	-15,8929
Febrer 07	-15,3882	Maig 08	17,0125	Agost 07	16,4907	Novembre 07	-16,1915
Febrer 08	-15,0748	Maig 09	17,2827	Agost 08	16,2101	Novembre 08	-16,4856
Febrer 09	-14,7570	Maig 10	17,5481	Agost 09	15,9252	Novembre 09	-16,7751
Febrer 10	-14,4352	Maig 11	17,8086	Agost 10	15,6360	Novembre 10	-17,0598
Febrer 11	-14,1093	Maig 12	18,0642	Agost 11	15,3426	Novembre 11	-17,3397
Febrer 12	-13,7794	Maig 13	18,3148	Agost 12	15,0451	Novembre 12	-17,6146

Febrer 13	-13,4458	Maig 14	18,5602	Agost 13	14,7436	Novembre 13	-17,8845
Febrer 14	-13,1085	Maig 15	18,8004	Agost 14	14,4383	Novembre 14	-18,1491
Febrer 15	-12,7677	Maig 16	19,0353	Agost 15	14,1291	Novembre 15	-18,4085
Febrer 16	-12,4234	Maig 17	19,2648	Agost 16	13,8161	Novembre 16	-18,6624
Febrer 17	-12,0758	Maig 18	19,4889	Agost 17	13,4996	Novembre 17	-18,9108
Febrer 18	-11,7250	Maig 19	19,7075	Agost 18	13,1794	Novembre 18	-19,1536
Febrer 19	-11,3711	Maig 20	19,9205	Agost 19	12,8558	Novembre 19	-19,3906
Febrer 20	-11,0142	Maig 21	20,1278	Agost 20	12,5289	Novembre 20	-19,6218
Febrer 21	-10,6545	Maig 22	20,3293	Agost 21	12,1986	Novembre 21	-19,8471
Febrer 22	-10,2920	Maig 23	20,5250	Agost 22	11,8652	Novembre 22	-20,0663
Febrer 23	-9,9269	Maig 24	20,7148	Agost 23	11,5286	Novembre 23	-20,2794
Febrer 24	-9,5594	Maig 25	20,8987	Agost 24	11,1891	Novembre 24	-20,4863
Febrer 25	-9,1894	Maig 26	21,0765	Agost 25	10,8466	Novembre 25	-20,6869
Febrer 26	-8,8172	Maig 27	21,2483	Agost 26	10,5012	Novembre 26	-20,8811
Febrer 27	-8,4428	Maig 28	21,4139	Agost 27	10,1531	Novembre 27	-21,0688
Febrer 28	-8,0663	Maig 29	21,5733	Agost 28	9,8023	Novembre 28	-21,2499
Març 01	-7,6879	Maig 30	21,7265	Agost 29	9,4489	Novembre 29	-21,4244
Març 02	-7,3078	Maig 31	21,8734	Agost 30	9,0930	Novembre 30	-21,5922
Març 03	-6,9258	Juny 01	22,0140	Agost 31	8,7347	Desembre 01	-21,7531
Març 04	-6,5422	Juny 02	22,1482	Setembre 01	8,3740	Desembre 02	-21,9070
Març 05	-6,1571	Juny 03	22,2759	Setembre 02	8,0111	Desembre 03	-22,0540
Març 06	-5,7706	Juny 04	22,3972	Setembre 03	7,6460	Desembre 04	-22,1939
Març 07	-5,3827	Juny 05	22,5120	Setembre 04	7,2788	Desembre 05	-22,3267
Març 08	-4,9936	Juny 06	22,6202	Setembre 05	6,9096	Desembre 06	-22,4523
Març 09	-4,6034	Juny 07	22,7218	Setembre 06	6,5385	Desembre 07	-22,5706
Març 10	-4,2122	Juny 08	22,8167	Setembre 07	6,1656	Desembre 08	-22,6815
Març 11	-3,8201	Juny 09	22,9050	Setembre 08	5,7910	Desembre 09	-22,7850
Març 12	-3,4272	Juny 10	22,9866	Setembre 09	5,4148	Desembre 10	-22,8811
Març 13	-3,0336	Juny 11	23,0614	Setembre 10	5,0370	Desembre 11	-22,9696
Març 14	-2,6394	Juny 12	23,1295	Setembre 11	4,6578	Desembre 12	-23,0506
Març 15	-2,2447	Juny 13	23,1908	Setembre 12	4,2773	Desembre 13	-23,1239
Març 16	-1,8497	Juny 14	23,2453	Setembre 13	3,8955	Desembre 14	-23,1896
Març 17	-1,4544	Juny 15	23,2930	Setembre 14	3,5126	Desembre 15	-23,2476
Març 18	-1,0589	Juny 16	23,3338	Setembre 15	3,1287	Desembre 16	-23,2978
Març 19	-0,6634	Juny 17	23,3678	Setembre 16	2,7438	Desembre 17	-23,3403
Març 20	-0,2680	Juny 18	23,3948	Setembre 17	2,3580	Desembre 18	-23,3749
Març 21	0,1273	Juny 19	23,4150	Setembre 18	1,9715	Desembre 19	-23,4018

Març 22	0,5524	Juny 20	23,4283	Setembre 19	1,5843	Desembre 20	-23,4208
Març 23	0,9171	Juny 21	23,4347	Setembre 20	1,1965	Desembre 21	-23,4320
Març 24	1,3112	Juny 22	23,4341	Setembre 21	0,8083	Desembre 22	-23,4354
Març 25	1,7048	Juny 23	23,4267	Setembre 22	0,4197	Desembre 23	-23,4309
Març 26	2,0978	Juny 24	23,4124	Setembre 23	0,0308	Desembre 24	-23,4186
Març 27	2,4899	Juny 25	23,3912	Setembre 24	0,3584	Desembre 25	-23,3984
Març 28	2,8812	Juny 26	23,3632	Setembre 25	0,7476	Desembre 26	-23,3704
Març 29	3,2714	Juny 27	23,3283	Setembre 26	-1,1369	Desembre 27	-23,3346
Març 30	3,6607	Juny 28	23,2866	Setembre 27	-1,5261	Desembre 28	-23,2910
Març 31	4,0487	Juny 29	23,2380	Setembre 28	-1,9152	Desembre 29	-23,2396
		Juny 30	23,1827	Setembre 29	-2,3040	Desembre 30	-23,1804
				Setembre 30	-2,6925	Desembre 31	-23,1135

Fig. 36. Efemèride de les declinacions solar diàries de l'any 2018.

2. Per a la determinació de la declinació pot consultar-se una taula d'efemèrides com l'anterior, però també existeixen fórmules i expressions que donen el seu valor de forma aproximada. Una de les més importants és la de *Spencer (1971)*, calculada en radians:

- Angle diari: $\tau_d = \frac{2\pi(d-1)}{365}$

- Declinació solar:

$$D = 0,006918 - 0,399912 \cos \tau_d + 0,070257 \sin \tau_d - 0,006758 \cos 2\tau_d + 0,000907 \sin 2\tau_d - 0,002697 \cos 3\tau_d + 0,00148 \sin 3\tau_d.$$

(19)

o d : número del dia

$d = 1$ l'1 de gener i $d = 365$ el 31 de desembre.

Es pren que febrer té 28 dies.

3. Existeix una segona fórmula per a determinar la declinació solar menys precisa que la de Spencer però més senzilla. Aquesta és la fórmula de *Cooper (1969)*, expressada en graus:

$$D = 23,45 \sin \left[\frac{360}{365} (d + 284) \right]$$

(20)

on d és el nombre del dia de l'any, prenent com a dia u l'1 de gener.

4. Existeix una última forma de trobar la declinació solar de cada dia de l'any. Aquesta manera consisteix en una fórmula que he deduït a partir de les relacions trigonomètriques que es poden establir entre el pla de l'eclíptica i el pla de l'equador celeste que ens proporcionen l'angle de la declinació. La deducció d'aquesta fórmula l'explicaré en el capítol que apareix a continuació.

5.3.1. Fórmula per calcular la declinació solar

- Objectiu:

Deducir una fórmula matemàtica que permeti calcular la declinació de qualsevol dia de l'any a partir de les relacions trigonomètriques que existeixen entre el pla de l'equador celeste i el pla de l'eclíptica.

- Dades⁵:

- L'angle que forma el pla de l'equador amb el pla de l'eclíptica és igual a l'obliqüitat de l'eclíptica $\varepsilon = 23,43^\circ$.
- El moviment anual del Sol té una durada aproximada de 365 dies en els quals recorre 360° al llarg de l'eclíptica. Això suposa que el seu desplaçament mitjà diari és de $\frac{360^\circ}{365 \text{ dies}}$.
- En els equinoccis de primavera i tardor la declinació ha de ser igual a 0° .
- Del solstici d'hivern al solstici d'estiu, passant per l'equinocci de primavera, la declinació és positiva. Per contra, del solstici d'estiu al d'hivern passant per l'equinocci de tardor, és negativa.

⁵ Vegeu capítol 2 per a entendre l'origen d'aquestes dades.

- **Procediment:**

La fórmula la deduiré a partir de les següents tres figures (*fig. 37, 38 i 39*) on es representen el pla de l'equador i l'eclíptica i els diversos triangles que es poden formar entre aquests dos plans.

○ En primer lloc, se sap que el Sol al llarg d'un dia es desplaça sobre l'eclíptica i descriu un angle concret al voltant d'aquesta. Aquest angle, que he projectat sobre el pla de l'equador, és el que anomenaré angle de translació θ .

De la figura 37 se sap que:

$$\cos \theta = \frac{l}{R} \quad \rightarrow \quad \boxed{l = \cos \theta R}$$

(21)

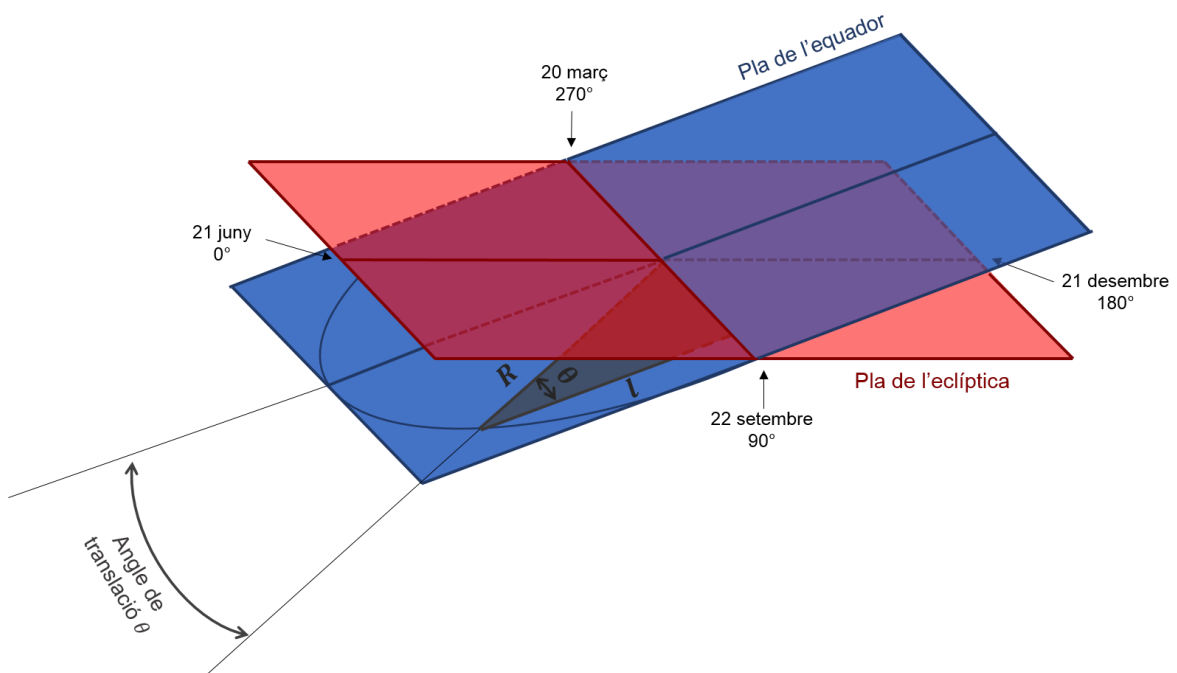


Fig. 37. Angle de translació θ

Per fer coincidir els valors del cosinus de θ amb els de la declinació, he considerat que el dia 21 de juny, corresponent al solstici d'estiu, l'angle de translació és 0° . En aquest punt la declinació és màxima i positiva i, per tant, el cosinus també haurà de ser-ho i valdre 1.

D'altra banda, el dia dels equinoccis, com la declinació és nul·la, el cosinus ha de ser zero, fet que es dona en els angles de 90° i 270° .

Finalment, en el solstici d'hivern l'angle és de 180° i el cosinus mínim (-1). Així, la declinació també serà mínima en aquest punt.

○ Aquest angle de translació, a més, es pot escriure en funció del dia de l'any en el qual ens trobem.

Com prenc com a angle 0° el 21 de juny, l'1 de gener es correspondrà amb el dia 194 comptat des del solstici d'estiu. Sabent això, i que l'angle que recorre el Sol cada dia és aproximadament $\frac{360^\circ}{365 \text{ dies}}$, pot dir-se que l'angle de translació serà:

$$\theta = (193 + d) \frac{360^\circ}{365 \text{ dies}}$$

(22)

sent d el nombre de dies enters que hi ha entre qualsevol dia de l'any i l'1 de gener (que es pren com a $d = 1$).

○ A la vegada, tal com he dit a les dades, es coneix l'angle que es troba entre l'equador i l'eclíptica. Formant un angle entre aquests dos plans, pot afirmar-se que la seva obertura serà igual a l'obliquïtat de l'eclíptica ε , com mostra la figura 38. Aleshores:

$$\sin \varepsilon = \frac{h}{l} \quad \rightarrow \quad h = \sin \varepsilon l = \sin 23,43 l$$

(23)

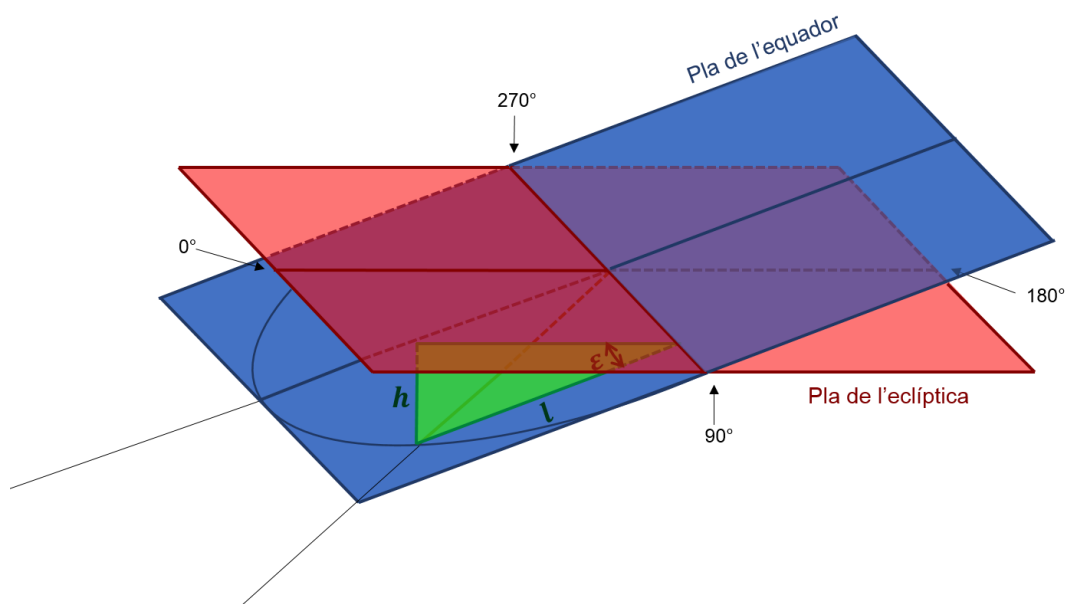


Fig. 38. Obliquïtat de l'eclíptica

- Per últim, es pot formar un últim triangle, l'angle del qual és la declinació solar. Per tant:

$$\sin D = \frac{h}{R}$$

(24)

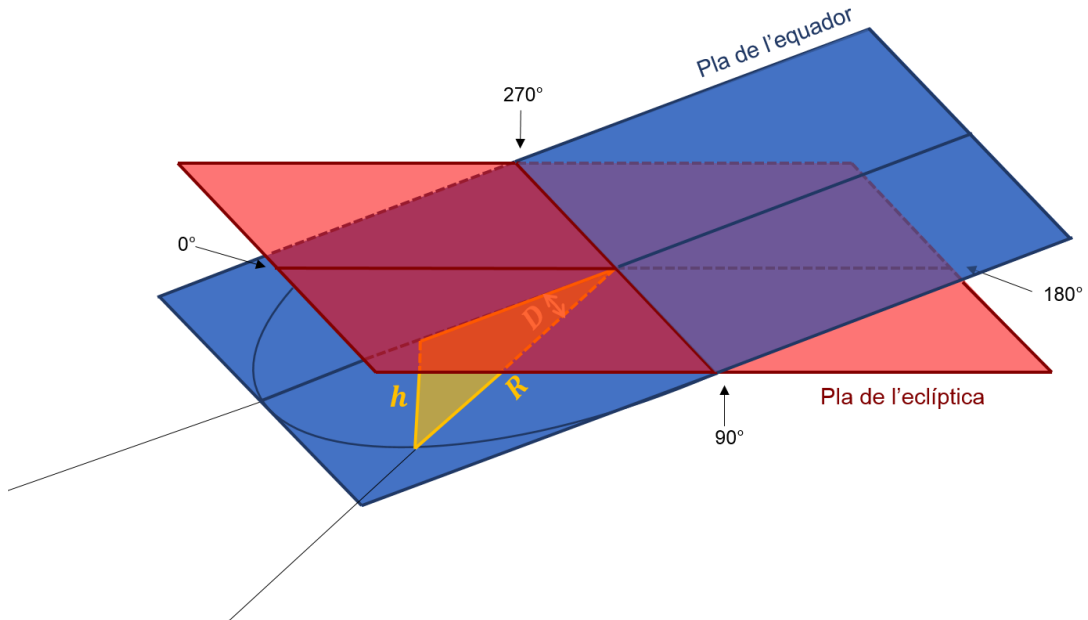


Fig. 39. Declinació solar

- Combinant les igualtats 21, 22, 23 i 24 s'extreu que:

$$\sin D = \frac{h}{R} = \frac{\sin 23,43l}{R} = \frac{\sin 23,43 \cos \theta R}{R} \quad \rightarrow \quad \sin D = \sin 23,43 \cos \theta \quad \rightarrow$$

$$\sin D = \sin 23,43 \cos \left[\left(193 + d\right) \frac{360}{365} \right] \quad \rightarrow$$

$$D = \arcsin \left\{ \sin 23,43 \cos \left[\left(193 + d\right) \frac{360}{365} \right] \right\}$$

(25)

on D és la declinació d'un dia qualsevol de l'any (en graus) i d el nombre de dia de l'any prenent l'1 de gener com a $d = 1$ i el 31 de desembre com a $d = 365$.

- **Resultat:**

Com s'ha vist anteriorment, a partir de l'angle de translació i de l'obliquïtat de l'eclíptica he aconseguit arribar a una fórmula (25) que proporciona l'angle corresponent a la declinació solar D en funció del dia de l'any d pel qual es desitja calcular.

- **Anàlisi dels resultats:**

○ Per començar, cal dir que la fórmula és aproximada. En ella he suposat que el Sol recorre cada dia el mateix angle sobre l'eclíptica, però això no es compleix perquè la seva velocitat no és constant, sinó que es mou segons diu la segona Llei de Kepler.

○ De l'afirmació anterior dedueixo que hi haurà una variació entre els resultats que s'obtinguerien amb aquesta fórmula que he trobat i els veritables resultats que proporciona l'efemèride de les declinacions solars. Per veure aquesta diferència, s'ha elaborat una gràfica on es representen els valors de la declinació al llarg de l'any obtinguts de l'efemèride i a partir de les altres tres fórmules.

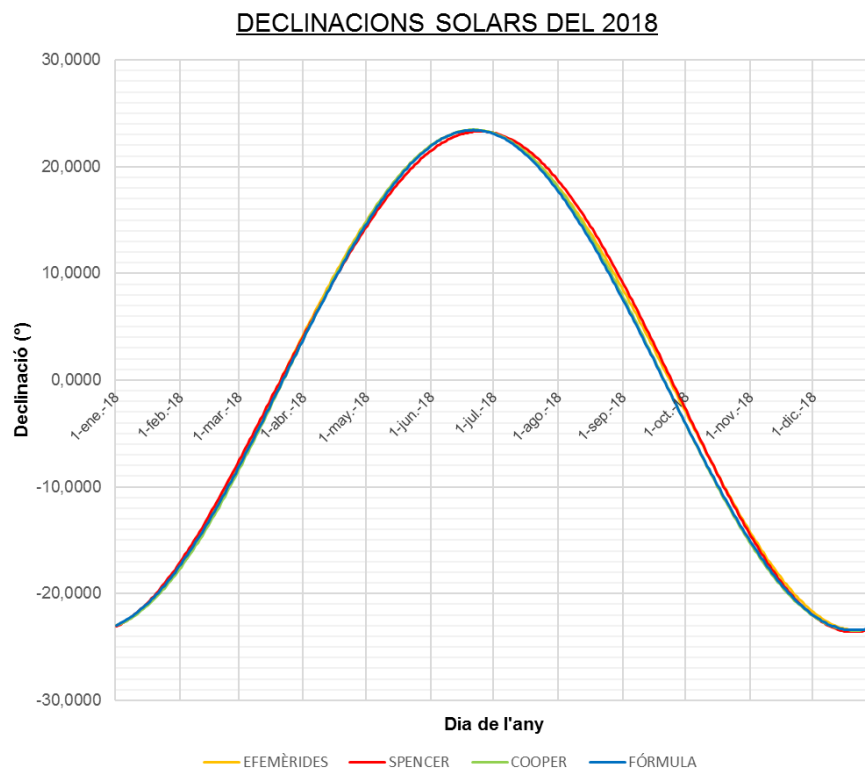


Fig. 40. Variacions de la declinació solar

En observar la gràfica, però, es veu que la diferència de resultats segons si els obtenim de l'efemèride, de les fórmules de Spencer i Cooper o de la fórmula trigonomètrica, no varien gaire. Tot i això, perquè els càlculs posteriors del treball siguin més precisos, utilitzaré com a declinació diària per a calcular l'orto i l'ocàs la de l'efemèride, perquè els resultats que aquesta proporciona, gràcies al mètode pel qual han estat trobats, seran els més propers a la veritable declinació del Sol al llarg de cada dia.

- En última instància cal remarcar de nou que els resultats que apareixeran en aquest treball només resultaran vàlids per al 2018. Això es deu al fet que la declinació solar de cada any és variable. L'obliquïtat o inclinació de l'eix de rotació de la Terra, que és l'angle comprés entre l'equador i el pla orbital terrestre varia entre $22,1^\circ$ i $24,5^\circ$ amb un període de 40.000 anys, pel que l'obliquïtat de l'eix de l'eclíptica no és constant. Actualment té un valor de $23,43^\circ$, però aquest va disminuint progressivament. Encara que a curt termini els seus efectes siguin negligibles, es creu que aquest moviment, junt amb altres, és el causant de fenòmens meteorològics aparentment cíclics, com les èpoques glacials (teoria de Milankovitch).

5.4. MATRIU DE ROTACIÓ I ANGLE HORARI

En els capítols anteriors he desenvolupat les dades necessàries per a calcular l'orto i l'ocàs. A continuació, el que cal explicar és com a partir d'aquestes dades arribaré al resultat desitjat: l'hora que surt i es pon el Sol.

- Objectiu:

Trobar l'angle horari H del Sol en el moment de l'orto i l'ocàs, perquè a partir d'aquest podré arribar a l'hora de posta i sortida del Sol.

- Dades:

En primer lloc, cal recordar que les dades que es coneixen, explicades en els capítols anteriors, són:

- la latitud del lloc ϕ ;

- l'alçada h del Sol en el moment de l'orto i l'ocàs ($h = 0^\circ$);
- la declinació solar D corresponent a cada dia de l'any.

La nostra incògnita, que es trobarà combinant les dades anteriors, és:

- l'angle horari H (capítol 1.7.2), que és l'angle que es compta sobre la línia de l'equador i a partir del punt Q. En el moment que l'alçada del Sol es fa zero, aquest angle adoptarà un valor concret que és el que interessa trobar perquè com ja diu el seu nom, és l'encarregat de proporcionar l'hora en la qual un astre es troba en un determinat punt.

- **Procediment:**

S'observa que les dades que intervindran en el càlcul pertanyen a sistemes de referència diferents:

- la latitud del lloc ϕ és una coordenada geogràfica;
- l'alçada h del Sol és una de les coordenades horitzontals;
- la declinació D i l'angle horari H són els dos angles del sistema de coordenades horari.

Així, l'única manera de relacionar-les és a partir d'una matriu de rotació que permet canviar de coordenades horitzontals a horàries, o viceversa, i a partir de la qual s'aconsegueixen relacionar totes les variables.

- Com s'ha vist al capítol 1.8, la matriu que efectua una rotació al voltant de l'eix y és:

$$R_2(i) = \begin{bmatrix} \cos i & 0 & -\sin i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin i & 0 & \cos i \end{bmatrix}.$$

- Per una banda, si es vol passar de coordenades horitzontals a horàries, la matriu es converteix en l'expressió 3.3 ⁶:

$$R_2(\phi - 90^\circ) = \begin{bmatrix} \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \end{bmatrix},$$

⁶ Per entendre amb detall com s'han desenvolupat les matrius i s'han arribat a les igualtats pertinents, vegeu capítol 1.8.

que multiplicada per les coordenades horitzontals, proporciona les horàries i a partir de la qual s'obtenen les igualtats 4.1, 4.2, 4.3:

$$4.1) \quad \cos D \cos H = \sin \phi \cos h \cos a + \cos \phi \sin h$$

$$4.2) \quad \cos D \sin H = \cos h \sin a$$

$$4.3) \quad \sin D = -\cos \phi \cos h \cos a + \sin \phi \sin h$$

○ Per altra banda, per passar de coordenades horàries a horitzontals s'utilitza la matriu 5.2:

$$R_2(90^\circ - \phi) = \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix},$$

a partir de la qual s'obtenen les igualtats 6.1, 6.2, 6.3:

$$6.1) \quad \cos h \cos a = \sin \phi \cos D \cos H - \cos \phi \sin D$$

$$6.2) \quad \cos h \sin a = \cos D \sin H$$

$$6.3) \quad \sin h = \cos \phi \cos D \cos H + \sin \phi \sin D$$

○ De totes les igualtats, la que conté totes les dades mencionades anteriorment és la 6.3. Les altres es descarten perquè en elles també intervé l'azimut a , angle que no interessa pel càlcul que s'està realitzant.

○ En aquesta expressió 6.3 s'ha de substituir l'alçada h per zero (perquè se sap que en l'orto i l'ocàs adopta aquest valor):

$$\sin 0 = \cos \phi \cos D \cos H + \sin \phi \sin D \quad \rightarrow \quad 0 = \cos \phi \cos D \cos H + \sin \phi \sin D$$

i a continuació s'ha d'aïllar l'angle horari H (que és la incògnita):

$$\cos H = -\frac{\sin \phi \sin D}{\cos \phi \cos D} \rightarrow \boxed{H = \arccos(-\tan \phi \tan D)}$$

(26)

- **Resultats:**

Finalment, després de combinar les dades dels diferents sistemes de coordenades, s'arriba a l'expressió 26. Si en ella se substitueix la latitud d'un lloc concret i la declinació del dia de l'any que interressi, s'obtindrà un angle horari determinat.

- **Conclusió:**

Aquest angle horari obtingut no és el resultat definitiu de l'hora de l'orto i l'ocàs. En primer lloc, perquè el resultat serà en graus i s'haurà de convertir en hores i en segon lloc, perquè el sistema de referència de l'angle horari H i la forma que es té de comptar les hores no coincideix. En el pròxim capítol explicaré les transformacions necessàries que cal dur a terme.

5.5. TEMPS SOLAR VERITABLE: HORA DE L'ORTO I DE L'OCÀS

Com s'ha dit, l'angle horari que resulta de la fórmula 26 està en graus, aleshores, s'haurà de fer un simple factor de conversió per passar-lo a hores:

$$\boxed{H_v = H \times \frac{24^h}{360^\circ}}$$

(27)

Un cop trobat aquest angle, s'ha de tenir present que $H = 0^h$ es pren com a l'instant de culminació superior solar però l'hora zero de rellotge és la de culminació inferior del Sol. Per entendre això, cal fixar-se en la figura 41:

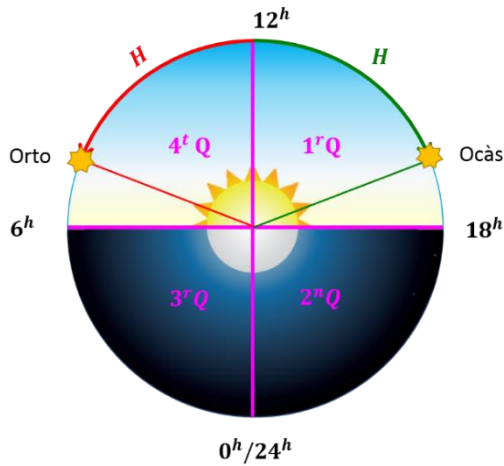


Fig. 41. Angle horari de l'orto i l'ocàs

Com es pot observar, l'angle horari H es comença a comptar des de les 12^h del migdia, que es correspon a $H = 0^h$ i avança en sentit horari. Per això, el temps solar veritable T_v és igual a l'angle horari H_v del Sol en qualsevol instant més 12^h :

$$T_v = H_v + 12^h \quad (13)$$

També es pot veure (fig. 41) que existeixen dos angles horaris H . El de l'orto, que es correspon a l'angle del 4t quadrant i el de l'ocàs, que pertany al 1r quadrant. Això prové del fet que de la fórmula 26 s'obté només un cosinus, però del que se'n deriven dos angles, ja que el cosinus de l'angle horari és positiu en dos quadrants: el primer i el quart.

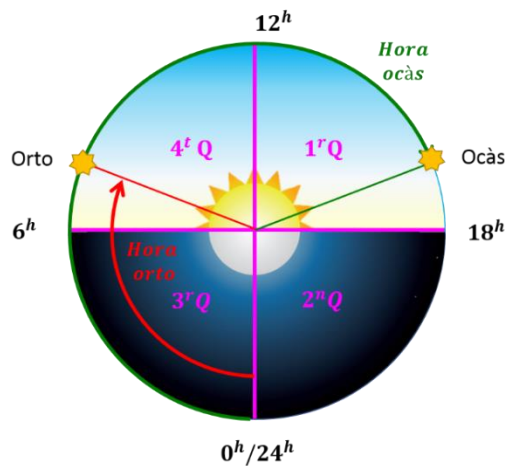


Fig. 42. Hora de l'orto i l'ocàs

Sabent tot això i a partir de la figura 42, es dedueix que les hores de l'orto i l'ocàs són:

$$\text{a) } \boxed{T_{v \text{ orto}} = 12^h - H_v} \quad (28.1)$$

$$\text{b) } \boxed{T_{v \text{ ocàs}} = 12^h + H_v} \quad (28.2)$$

5.6. HORA DEL FUS HORARI I TEMPS OFICIAL

En el capítol anterior he trobat l'hora veritable de l'orto i de l'ocàs solar, la qual no coincideix amb l'hora de rellotge, ja que aquesta última s'estableix segons l'hora dels fusos horaris (*capítol 3.3*).

La diferència entre l'hora veritable i l'hora del fus es correspon a la diferència entre:

- la longitud geogràfica del punt del qual s'han trobat l'orto i l'ocàs (l_1)
- i la longitud geogràfica del semimeridià del fus horari al qual pertany el punt anterior (l_2).

Per tant, l'hora "de rellotge" de l'orto i l'ocàs serà:

$$\text{a) } \boxed{T_{m \text{ orto}} = T_{v \text{ orto}} + \frac{(l_2 - l_1)}{15}} \quad (29.1)$$

$$\text{b) } \boxed{T_{m \text{ ocàs}} = T_{v \text{ ocàs}} + \frac{(l_2 - l_1)}{15}} \quad (29.2)$$

Cal remarcar que les longituds es divideixen entre 15 per convertir-les de graus a hores, ja que 1 hora es correspon a 15° .

També cal tenir en compte a l'hora de calcular l'orto i l'ocàs que alguns països adopten "l'hora d'estiu" i avancen els rellotges 1^h durant diversos mesos de l'any. Així, caldrà sumar una hora al resultat final de l'orto i l'ocàs durant tots els dies que estigui establert aquest horari.

5.7. FÓRMULA PEL CàLCUL DE L'ORTO I L'OCÀS SOLAR

Anteriorment s'ha desenvolupat per passos com calcular l'orto i l'ocàs. Si es combinen les expressions 26, 27, 28.1, 28.2, 29.1 i 29.2, s'arriba a les expressions:

$$a) \quad T_{m \text{ orto}} = 12^h - \left[\arccos(-\tan \phi \tan D) \times \frac{24^h}{360^\circ} \right] + \frac{(l_2 - l_1)}{15} \quad (30.1)$$

$$b) \quad T_{m \text{ ocàs}} = 12^h + \left[\arccos(-\tan \phi \tan D) \times \frac{24^h}{360^\circ} \right] + \frac{(l_2 - l_1)}{15} \quad (30.2)$$

Aquestes permeten trobar l'hora de l'orto i l'ocàs en funció de:

- la latitud ϕ i la longitud l_1 geogràfica d'un punt terrestre concret,
- la declinació solar D de qualsevol dia de l'any,
- la longitud del semimeridià del qual adopta l'hora el punt anterior.

5.8. COMPROVACIÓ DE LA FÓRMULA PER AL CàLCUL DE L'ORTO I L'OCÀS SOLAR

- Objectiu:

Comprovar la precisió dels resultats obtinguts a partir de la fórmula de l'orto i l'ocàs comparant-los amb els valors reals de l'orto i l'ocàs al llarg de l'any d'un determinat lloc, que en aquest cas serà Barcelona.

- Dades:

- $\phi_{BCN} = 41.3887901^\circ$
- $l_{1 \text{ BCN}} = 2.1589899^\circ$
- $l_2 = 15^\circ$
- Horari d'estiu: del 25 de març al 28 d'octubre.
- Declinacions: extrems de la figura 36.
- Hores reals de l'orto i l'ocàs de Barcelona del 2018 extrems del *Ministeri de Foment* espanyol i proporcionades per l'*Observatori Astronòmic Nacional* i l'*Institut Geogràfic Nacional*.

- Procediment:

Per trobar els resultats de l'orto i l'ocàs a partir de la fórmula, simplement substituiré les dades en les expressions 30.1 i 30.2. El que s'haurà d'anar variant serà la declinació de cada dia, per a obtenir els valors de l'orto i l'ocàs durant cada dia de l'any. A més, s'haurà d'afegir 1^h als resultats compresos en la franja de l'horari d'estiu.

Com he dit, els valors reals de l'orto i l'ocàs els obtindrè de les dades proporcionades per l'*Observatori Astronòmic Nacional*.

- Resultats:

Els resultats que he obtingut queden recollits en les taules que hi ha a continuació.

- La figura 43 mostra les hores de l'orto i l'ocàs de Barcelona durant tots els dies de l'any 2018, expressada en hores i minuts i calculades a partir de les fórmules 30.1 i 30.2 que he trobat anteriorment.

- La figura 44 recull les dades que s'han extret del *Ministeri de Foment* espanyol i que representen l'hora veritable de sortida i posta del Sol, també expressada en hores i minuts, per a la localitat de Barcelona i l'any 2018.

- Perquè sigui possible la seva comparació, he fet una gràfica dels resultats d'ambdues taules (*fig. 45*).

Les línies de color vermell són les corresponents a les dades de la figura 43, és a dir, les calculades per mi, que he anomenat *ORTO F* i *OCÀS F*. La ratlla taronja (*DIA F*) representa la diferència entre *ORTO F* i *OCÀS F*, o el que és el mateix, la duració que tindria el dia solar calculat amb les fórmules anteriors.

Les línies blaves plasmen les dades de la taula 44 de l'*Observatori Astronòmic Nacional*, a les que he dit *ORTO T* i *OCÀS T*. La línia verda (*DIA T*) mostra, per tant, la diferència entre *ORTO T* i *OCÀS T*, que és sinònim de la duració verdadera del dia solar al llarg de tot el 2018 a Barcelona.

Un aclariment que cal fer sobre la gràfica és que els salts de la corba de l'orto i l'ocàs es deuen al canvi d'hora de l'horari d'estiu.

HORA DE L'ORTO I L'OCÀS SOLAR DE BARCELONA PER L'ANY 2018
(Dades calculades)

GÈNER	FEBRER		MARÇ		ABRIL		MAIG		JUNY		JULIOL		AGOST		SETEMBRE		OCTUBRE		NOVEMBRE		DESEMBRE								
	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS							
1	8 19	17 23	1	7 55	17 48	1	7 19	18 24	1	6 57	20 46	1	6 28	21 15	1	6 23	21 20	1	7 22	20 21	1	8 2	19 40	1	7 43	17 59	1	8 14	17 29
2	8 19	17 24	2	7 53	17 49	2	7 17	18 25	2	6 56	20 47	2	6 27	21 15	2	6 23	21 19	2	7 23	20 20	2	8 4	19 39	2	7 45	17 58	2	8 14	17 28
3	8 18	17 24	3	7 52	17 50	3	7 16	18 27	3	6 54	20 48	3	6 27	21 16	3	6 24	21 19	3	7 24	20 18	3	8 5	19 38	3	7 45	17 57	3	8 15	17 28
4	8 18	17 25	4	7 51	17 52	4	7 15	18 28	4	6 53	20 49	4	6 26	21 16	4	6 24	21 19	4	7 25	20 17	4	8 6	19 36	4	7 47	17 56	4	8 16	17 27
5	8 18	17 25	5	7 50	17 53	5	7 13	18 30	5	6 52	20 51	5	6 26	21 17	5	6 24	21 18	5	7 27	20 16	5	8 8	19 35	5	7 48	17 54	5	8 16	17 26
6	8 17	17 26	6	7 49	17 54	6	7 12	18 31	6	6 51	20 52	6	6 25	21 17	6	6 25	21 18	6	7 28	20 15	6	8 9	19 34	6	7 49	17 53	6	8 17	17 26
7	8 17	17 26	7	7 47	17 55	7	7 10	18 32	7	6 50	20 53	7	6 25	21 18	7	6 25	21 17	7	7 29	20 13	7	8 10	19 32	7	7 51	17 52	7	8 17	17 25
8	8 16	17 27	8	7 46	17 56	8	7 9	18 34	8	6 49	20 54	8	6 24	21 18	8	6 26	21 17	8	7 31	20 12	8	8 12	19 31	8	7 52	17 51	8	8 18	17 25
9	8 15	17 27	9	7 45	17 58	9	7 8	18 35	9	6 48	20 55	9	6 24	21 19	9	6 26	21 16	9	7 32	20 10	9	8 13	19 30	9	7 53	17 50	9	8 18	17 24
10	8 15	17 28	10	7 44	17 59	10	7 6	18 36	10	6 47	20 56	10	6 24	21 19	10	6 27	21 16	10	7 34	20 9	10	8 15	19 28	10	7 54	17 49	10	8 19	17 24
11	8 14	17 29	11	7 43	18 0	11	7 5	18 36	11	6 46	20 57	11	6 23	21 19	11	6 27	21 15	11	7 35	20 8	11	8 16	19 27	11	7 55	17 47	11	8 19	17 24
12	8 13	17 29	12	7 41	18 1	12	7 3	18 36	12	6 45	20 58	12	6 23	21 20	12	6 28	21 15	12	7 36	20 6	12	8 17	19 25	12	7 56	17 46	12	8 19	17 23
13	8 13	17 30	13	7 40	18 3	13	7 2	18 41	13	6 44	20 59	13	6 23	21 20	13	6 29	21 14	13	7 38	20 5	13	8 19	19 24	13	7 57	17 45	13	8 20	17 23
14	8 12	17 31	14	7 39	18 4	14	7 1	18 42	14	6 42	21 0	14	6 22	21 20	14	6 29	21 13	14	7 39	20 4	14	8 20	19 23	14	7 58	17 44	14	8 20	17 23
15	8 11	17 32	15	7 37	18 5	15	6 59	18 43	15	6 42	21 1	15	6 22	21 20	15	6 30	21 13	15	7 40	20 2	15	8 21	19 21	15	7 60	17 43	15	8 20	17 22
16	8 10	17 32	16	7 36	18 7	16	6 58	18 45	16	6 41	21 2	16	6 22	21 21	16	6 31	21 12	16	7 42	20 1	16	8 23	19 20	16	8 1	17 42	16	8 21	17 22
17	8 9	17 33	17	7 35	18 8	17	6 56	18 46	17	6 40	21 3	17	6 22	21 21	17	6 31	21 11	17	7 43	19 60	17	8 24	19 19	17	8 2	17 41	17	8 21	17 22
18	8 9	17 34	18	7 33	18 9	18	6 55	18 48	18	6 39	21 4	18	6 22	21 21	18	6 32	21 11	18	7 44	19 58	18	8 25	19 17	18	8 3	17 40	18	8 21	17 22
19	8 8	17 35	19	7 32	18 11	19	6 54	18 49	19	6 38	21 5	19	6 22	21 21	19	6 33	21 10	19	7 46	19 57	19	8 27	19 16	19	8 4	17 39	19	8 21	17 22
20	8 7	17 36	20	7 31	18 12	20	6 52	18 50	20	6 37	21 6	20	6 22	21 21	20	6 34	21 9	20	7 47	19 56	20	8 28	19 15	20	8 5	17 38	20	8 21	17 22
21	8 6	17 37	21	7 29	18 13	21	6 51	18 52	21	6 36	21 7	21	6 22	21 21	21	6 34	21 8	21	7 48	19 54	21	8 29	19 13	21	8 5	17 37	21	8 21	17 22
22	8 5	17 38	22	7 28	18 15	22	6 49	18 53	22	6 35	21 8	22	6 22	21 21	22	6 35	21 6	22	7 50	19 53	22	8 31	19 12	22	8 6	17 36	22	8 21	17 22
23	8 4	17 39	23	7 27	18 16	23	6 48	18 55	23	6 34	21 9	23	6 22	21 21	23	6 36	21 7	23	7 51	19 51	23	8 32	19 11	23	8 7	17 35	23	8 21	17 22
24	8 3	17 40	24	7 25	18 17	24	6 47	18 56	24	6 33	21 9	24	6 22	21 21	24	6 37	21 6	24	7 53	19 50	24	8 33	19 9	24	8 8	17 34	24	8 21	17 22
25	8 2	17 41	25	7 24	18 19	25	7 45	19 57	25	6 33	21 10	25	6 22	21 21	25	6 38	21 5	25	7 54	19 49	25	8 35	19 8	25	8 9	17 34	25	8 21	17 22
26	8 1	17 42	26	7 23	18 20	26	7 44	19 58	26	6 32	21 11	26	6 22	21 21	26	6 39	21 4	26	7 55	19 47	26	8 36	19 7	26	8 10	17 33	26	8 21	17 22
27	8 0	17 43	27	7 21	18 21	27	7 43	20 0	27	6 31	21 11	27	6 22	21 21	27	6 40	21 3	27	7 57	19 45	27	8 37	19 6	27	8 11	17 32	27	8 21	17 22
28	7 59	17 44	28	7 20	18 23	28	7 41	20 1	28	6 30	21 12	28	6 22	21 20	28	6 41	21 2	28	7 58	19 44	28	8 38	18 4	28	8 11	17 31	28	8 20	17 22
29	7 58	17 45				29	7 40	20 3	29	6 30	21 13	29	6 22	21 20	29	6 41	21 1	29	7 59	19 43	29	8 39	18 3	29	8 12	17 30	29	8 20	17 22
30	7 57	17 46				30	7 38	20 4	30	6 29	21 14	30	6 23	21 20	30	6 42	21 0	30	8 1	19 42	30	8 40	18 2	30	8 13	17 30	30	8 20	17 23
31	7 56	17 47				31	7 37	20 5	31	6 28	21 14	31	6 23	21 20	31	6 43	20 59	31	7 42	18 1	31	8 41	18 1	31	8 14	17 30	31	8 20	17 23

Fig. 43. Hora de l'orto i l'ocàs de Barcelona per l'any 2018
calculades a partir de les fórmules 30.1 i 30.2

HORA DE L'ORTO I L'OCÀS SOLAR DE BARCELONA PER L'ANY 2018
(Dades de l'Observatori Astronòmic Nacional)

GENR	ORTO		OCÀS		ORTO		OCÀS		ORTO		OCÀS		ORTO		OCÀS		ORTO		OCÀS		ORTO		OCÀS		ORTO		OCÀS		ORTO		OCÀS				
	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m			
1	8 17	17 32	1	8 03	18 07	1	7 26	18 42	1	7 35	20 16	1	6 49	20 49	1	6 20	21 18	1	6 22	21 29	1	6 46	21 09	1	7 17	20 25	1	7 48	19 33	1	7 23	17 47	1	7 58	17 23
2	8 17	17 33	2	8 02	18 09	2	7 25	18 43	2	7 33	20 17	2	6 48	20 50	2	6 20	21 19	2	6 22	21 28	2	6 47	21 07	2	7 18	20 23	2	7 49	19 32	2	7 24	17 45	2	7 59	17 22
3	8 18	17 34	3	8 01	18 10	3	7 23	18 44	3	7 31	20 18	3	6 46	20 51	3	6 19	21 20	3	6 23	21 28	3	6 48	21 06	3	7 19	20 21	3	7 50	19 30	3	7 25	17 44	3	8 00	17 22
4	8 18	17 35	4	8 00	18 11	4	7 21	18 45	4	7 30	20 20	4	6 45	20 52	4	6 19	21 20	4	6 23	21 28	4	6 49	21 05	4	7 20	20 20	4	7 51	19 28	4	7 26	17 43	4	8 01	17 22
5	8 18	17 36	5	7 59	18 12	5	7 20	18 46	5	7 28	20 21	5	6 44	20 53	5	6 19	21 21	5	6 24	21 28	5	6 50	21 04	5	7 21	20 18	5	7 52	19 27	5	7 27	17 42	5	8 02	17 22
6	8 17	17 37	6	7 58	18 14	6	7 18	18 48	6	7 26	20 22	6	6 43	20 54	6	6 18	21 22	6	6 24	21 27	6	6 51	21 03	6	7 22	20 16	6	7 53	19 25	6	7 29	17 41	6	8 03	17 22
7	8 17	17 38	7	7 56	18 15	7	7 17	18 49	7	7 25	20 23	7	6 41	20 55	7	6 18	21 22	7	6 25	21 27	7	6 52	21 01	7	7 23	20 15	7	7 54	19 23	7	7 30	17 40	7	8 04	17 22
8	8 17	17 39	8	7 55	18 16	8	7 15	18 50	8	7 23	20 24	8	6 40	20 56	8	6 18	21 23	8	6 26	21 27	8	6 53	21 00	8	7 24	20 13	8	7 55	19 22	8	7 31	17 39	8	8 04	17 22
9	8 17	17 40	9	7 54	18 17	9	7 13	18 51	9	7 22	20 25	9	6 39	20 57	9	6 18	21 24	9	6 26	21 26	9	6 54	20 59	9	7 25	20 11	9	7 56	19 20	9	7 32	17 38	9	8 05	17 22
10	8 17	17 41	10	7 53	18 19	10	7 12	18 52	10	7 20	20 26	10	6 38	20 58	10	6 18	21 24	10	6 27	21 26	10	6 55	20 58	10	7 26	20 09	10	7 57	19 19	10	7 33	17 37	10	8 06	17 22
11	8 17	17 42	11	7 52	18 20	11	7 10	18 53	11	7 18	20 27	11	6 37	20 59	11	6 17	21 25	11	6 28	21 26	11	6 56	20 56	11	7 27	20 08	11	7 58	19 17	11	7 35	17 36	11	8 07	17 22
12	8 16	17 43	12	7 50	18 21	12	7 08	18 54	12	7 17	20 28	12	6 36	21 00	12	6 17	21 25	12	6 28	21 25	12	6 57	20 55	12	7 28	20 06	12	8 00	19 15	12	7 36	17 35	12	8 08	17 22
13	8 16	17 44	13	7 49	18 22	13	7 07	18 55	13	7 15	20 29	13	6 35	21 01	13	6 17	21 26	13	6 29	21 25	13	6 58	20 54	13	7 29	20 04	13	8 01	19 14	13	7 37	17 34	13	8 09	17 22
14	8 16	17 45	14	7 48	18 24	14	7 05	18 57	14	7 14	20 30	14	6 34	21 02	14	6 17	21 26	14	6 30	21 24	14	6 59	20 52	14	7 30	20 03	14	8 02	19 12	14	7 38	17 33	14	8 09	17 22
15	8 15	17 47	15	7 46	18 25	15	7 03	18 58	15	7 12	20 31	15	6 33	21 03	15	6 17	21 26	15	6 31	21 23	15	7 00	20 51	15	7 31	20 01	15	8 03	19 11	15	7 39	17 32	15	8 10	17 23
16	8 15	17 48	16	7 45	18 26	16	7 02	18 59	16	7 10	20 32	16	6 32	21 04	16	6 17	21 27	16	6 32	21 23	16	7 01	20 49	16	7 32	19 59	16	8 04	19 09	16	7 41	17 31	16	8 11	17 23
17	8 14	17 49	17	7 44	18 27	17	7 00	19 00	17	7 09	20 34	17	6 31	21 05	17	6 17	21 27	17	6 32	21 22	17	7 02	20 48	17	7 33	19 57	17	8 05	19 08	17	7 42	17 30	17	8 12	17 23
18	8 14	17 50	18	7 42	18 29	18	6 58	19 01	18	7 07	20 35	18	6 30	21 06	18	6 17	21 27	18	6 33	21 21	18	7 03	20 45	18	7 34	19 56	18	8 06	19 06	18	7 43	17 29	18	8 12	17 24
19	8 13	17 51	19	7 41	18 30	19	6 57	19 02	19	7 06	20 36	19	6 29	21 07	19	6 18	21 28	19	6 34	21 21	19	7 04	20 45	19	7 35	19 54	19	8 07	19 05	19	7 44	17 29	19	8 13	17 24
20	8 13	17 52	20	7 40	18 31	20	6 55	19 03	20	7 04	20 37	20	6 28	21 08	20	6 18	21 28	20	6 35	21 20	20	7 05	20 43	20	7 36	19 52	20	8 09	19 08	20	7 45	17 28	20	8 13	17 24
21	8 12	17 54	21	7 38	18 32	21	6 53	19 04	21	7 03	20 38	21	6 27	21 09	21	6 18	21 28	21	6 36	21 19	21	7 06	20 42	21	7 37	19 51	21	8 10	19 02	21	7 47	17 27	21	8 14	17 25
22	8 11	17 55	22	7 37	18 33	22	6 52	19 05	22	7 01	20 39	22	6 27	21 10	22	6 18	21 28	22	6 37	21 18	22	7 07	20 40	22	7 39	19 49	22	8 11	19 00	22	7 48	17 27	22	8 14	17 25
23	8 11	17 56	23	7 35	18 35	23	6 50	19 07	23	7 00	20 40	23	6 26	21 11	23	6 18	21 29	23	6 38	21 17	23	7 08	20 39	23	7 40	19 47	23	8 12	18 59	23	7 49	17 26	23	8 15	17 26
24	8 10	17 57	24	7 34	18 36	24	6 48	19 08	24	6 58	20 41	24	6 25	21 12	24	6 19	21 29	24	6 39	21 17	24	7 09	20 37	24	7 41	19 45	24	8 13	18 57	24	7 50	17 26	24	8 15	17 26
25	8 09	17 59	25	7 32	18 37	25	7 47	20 09	25	6 57	20 42	25	6 24	21 13	25	6 19	21 29	25	6 39	21 16	25	7 10	20 36	25	7 42	19 44	25	8 14	18 56	25	7 51	17 25	25	8 16	17 27
26	8 08	18 00	26	7 31	18 38	26	7 45	20 10	26	6 56	20 43	26	6 24	21 13	26	6 19	21 29	26	6 40	21 15	26	7 11	20 34	26	7 43	19 42	26	8 15	18 54	26	7 52	17 25	26	8 16	17 28
27	8 07	18 01	27	7 29	18 39	27	7 43	20 11	27	6 54	20 44	27	6 23	21 14	27	6 20	21 29	27	6 41	21 14	27	7 12	20 33	27	7 44	19 40	27	8 17	18 53	27	7 53	17 24	27	8 16	17 28
28	8 07	18 02	28	7 28	18 41	28	7 41	20 12	28	6 53	20 45	28	6 22	21 15	28	6 20	21 29	28	6 42	21 13	28	7 13	20 31	28	7 45	19 39	28	8 18	18 52	28	7 54	17 24	28	8 17	17 29
29	8 06	18 04	29	7 40	20 13	29	6 51	20 46	29	6 51	20 46	29	6 22	21 15	29	6 21	21 29	29	6 43	21 12	29	7 14	20 29	29	7 46	19 37	29	8 19	18 51	29	7 56	17 23	29	8 17	17 30
30	8 05	18 05	30	7 38	20 14	30	6 50	20 48	30	6 50	20 48	30	6 21	21 17	30	6 21	21 29	30	6 44	21 11	30	7 15	20 28	30	7 47	19 35	30	8 20	18 50	30	7 57	17 23	30	8 17	17 31
31	8 04	18 06	31	7 36	20 15	31	6 21	21 18	31	6 21	21 18	31	6 21	21 18	31	6 21	21 29	31	6 45	21 10	31	7 16	20 25	31	7 48	19 34	31	8 21	18 49	31	7 57	17 23	31	8 17	17 31

Fig. 44. Hora de l'orto i l'ocàs reals de Barcelona per l'any 2018 obtingudes de l'Observatori Astronòmic Nacional

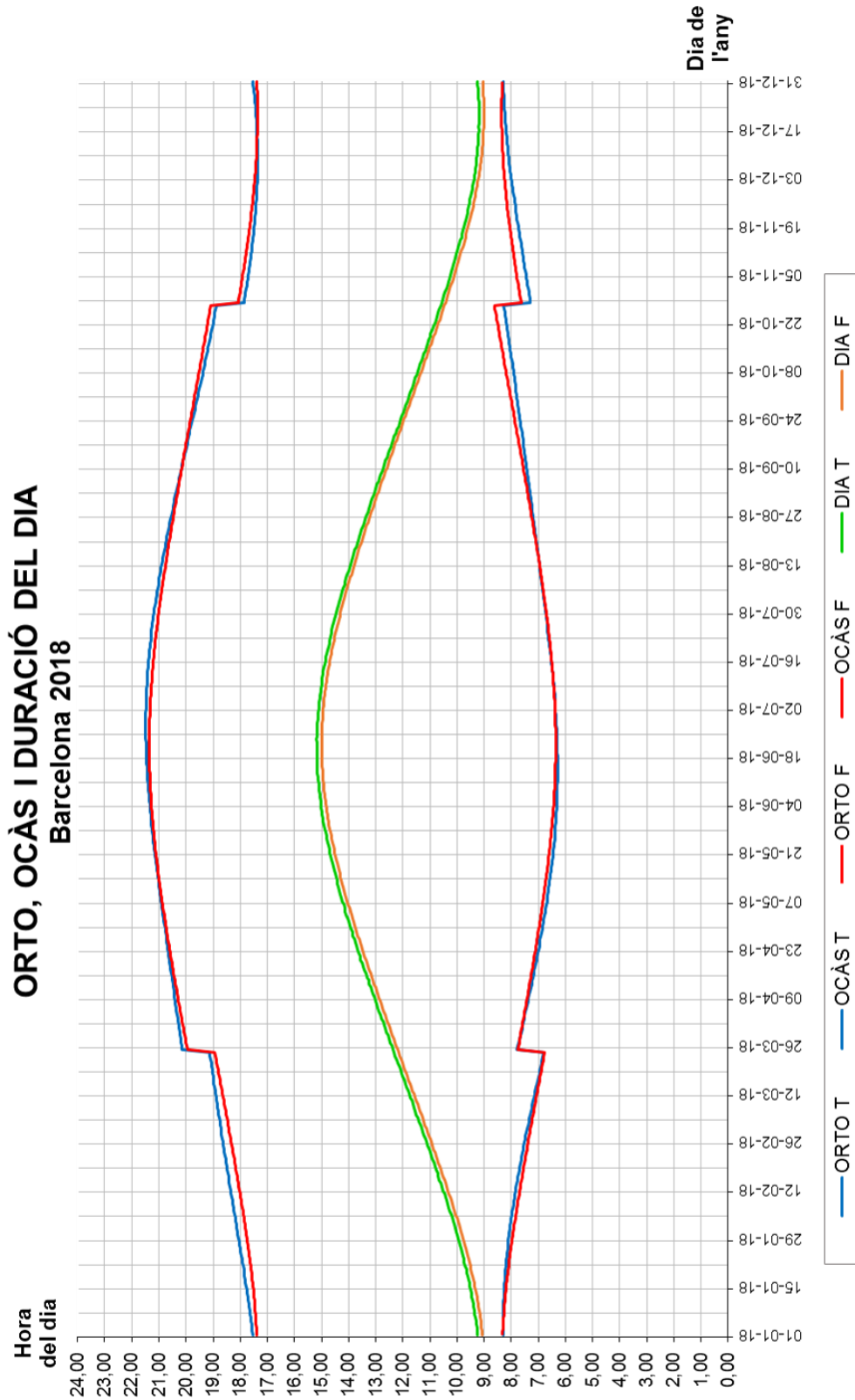


Fig. 45. Comparació de l'hora real de l'orto i l'ocàs i la calculada matemàticament per Barcelona durant el 2018, i variació de la duració del dia solar

- **Anàlisi dels resultats:**

En observar la figura 45, es pot veure que la diferència entre les dades obtingudes de les fórmules i les dades reals de l'orto i l'ocàs és considerablement petita. La diferència màxima entre tots dos valor és d'uns 20^{min} .

Aquestes diferències poden ser degudes a diferents motius, que a continuació mencionaré, tot i que són simples hipòtesis.

En primer lloc, en tots els càlculs que he realitzat, el que trobo és una posició concreta del centre del disc solar. Per tant, considero que el moment de l'orto i l'ocàs són els instants en els quals el centre del disc solar creua l'horitzó. Això suposa que hi hagi una diferència entre les hores reals de l'orto i l'ocàs (que es donen quan creua l'horitzó l'extrem del disc solar) i les calculades. Aquesta diferència es correspon al radi del disc solar i és d'aproximadament $1,067^{min}$ (perquè el semidiàmetre aparent del Sol és de 16 minuts d'arc.) Així, si es volgués que els càlculs fossin més exactes, s'hauria de restar aquest valor a l'angle horari de l'orto i sumar-lo a l'angle horari de l'ocàs.

Un altre fet que influeix és que les declinacions que s'utilitzen per als càlculs també es corresponen als valors del centre del disc solar i són mesurades a les 00:00h UTC. Per tant, tot i que la variació de la declinació al llarg d'un dia és poca, per a ser precisos s'hauria d'agafar com a declinació aquella que el Sol té en els instants de l'orto i l'ocàs. Però no es pot saber la declinació en els instants de l'orto i l'ocàs perquè aquestes són precisament les dues incògnites. Sí que és veritat que podria trobar una declinació hipotètica propera a les hores de sortida i posta del Sol, però la finalitat d'aquest treball no és l'alta precisió dels resultats, sinó trobar una fórmula de calcular-los, com s'ha vist.

L'últim fenomen que pot afectar els resultats és la refracció astronòmica, explicada al capítol 4.3. Aquesta provoca, a causa de la desviació dels raigs solars quan creuen l'atmosfera, que veiem el Sol en una posició diferent de la verdadera. Així, no coincidiran les coordenades visibles solar amb les seves verdaderes coordenades, el que suposa que l'hora que surt i es pon el Sol sigui aparent.

És possible que existeixin més efectes que influeixin en els resultats, però no se'n té constància, per tant, no se'n donarà més importància.

Després d'analitzar tots els factors que podrien millorar els càlculs, cal dir que, pels mitjans dels quals es disposava en aquest treball per a poder calcular l'orto i l'ocàs en qualsevol punt de la superfície terrestre i qualsevol dia de l'any 2018, els resultats s'acosten força a la realitat.

Una altra manera d'afirmar que els resultats són prou bons és fixant-se de nou en la figura 45, on s'observa que la duració del dia solar és pràcticament idèntica en tots dos casos.

Per concloure, cal dir que la valoració que faig dels càlculs és positiva. Com ja he dit, el treball s'ha realitzat amb els mitjans bàsics per a trobar les dades de la declinació, la latitud, etc. Per tant, partint d'aquesta base, trobo que les fórmules 30.1 i 30.2, que apareixen bàsicament de situar el Sol sobre l'esfera celeste amb diferents sistemes de coordenades, són bastant fiables i compleixen totalment amb el que era la finalitat d'aquest treball: calcular matemàticament l'hora de l'orto i l'ocàs del Sol.

5.9. EXEMPLES DE CàLCUL DE L'ORTO I L'OCÀS SOLAR

- Objectiu:

Comparar l'hora de l'orto i l'ocàs i la duració del dia de cinc latituds diferents al llarg de l'any 2018 per veure com varia el moviment diürn a mesura que anem de latituds inferiors (equador) a latituds superiors (properes al pol nord).

- Dades:

Les dades necessàries per al càlcul només seran les declinacions de la figura 36 i les latituds a estudiar, citades al capítol 5, i que es mostren en la taula següent:

PUNT DE LA SUPERFÍCIE TERRESTRE	LATITUD
Equador	$\phi_E = 0^\circ$
Tròpic de Càncer	$\phi_{T.C} = 23,4372^\circ$
Barcelona	$\phi_{BCN} = 41,3818^\circ$
Glasgow	$\phi_G = 55,8650^\circ$
Cercle Polar Àrtic	$\phi_{C.P.A} = 66,5628^\circ$

- **Procediment:**

Primer de tot, cal dir que el que calcularé serà l'hora veritable de l'orto i l'ocàs d'aquests punts però no la passaré a hora de rellotge, ja que si ho fes, com cadascuna de les latituds pren com a referència un semimeridià diferent del fus horari, no es podrien comparar. Així, la fórmula que utilitzaré serà una combinació de les expressions 26, 27, 28.1, 28.2 únicament, de les que s'obté:

$$a) \quad T_{v \text{ orto}} = 12^h - \left[\arccos(-\tan \phi \tan D) \times \frac{24^h}{360^\circ} \right] \quad (31.1)$$

$$b) \quad T_{v \text{ ocàs}} = 12^h + \left[\arccos(-\tan \phi \tan D) \times \frac{24^h}{360^\circ} \right] \quad (31.2)$$

S'haurà de substituir en elles els valors de les diferents latituds i les declinacions de l'any 2018 per a obtenir tots els resultats.

- **Resultats:**

Els resultats numèrics dels càlculs, a causa de la seva extensió, es troben agrupat en una taula a l'annex I.

Per a poder comparar els resultats, he realitzat dues gràfiques a partir dels resultats de la taula, que apareixen en les següents pàgines:

- La figura 46 mostra les hores veritables de l'orto i l'ocàs solar a les cinc latituds al llarg del 2018.
- La figura 47 compara la duració del dia solar, és a dir, la diferència de temps entre l'orto i l'ocàs solar en cadascuna de les latituds al llarg de tot l'any 2018.

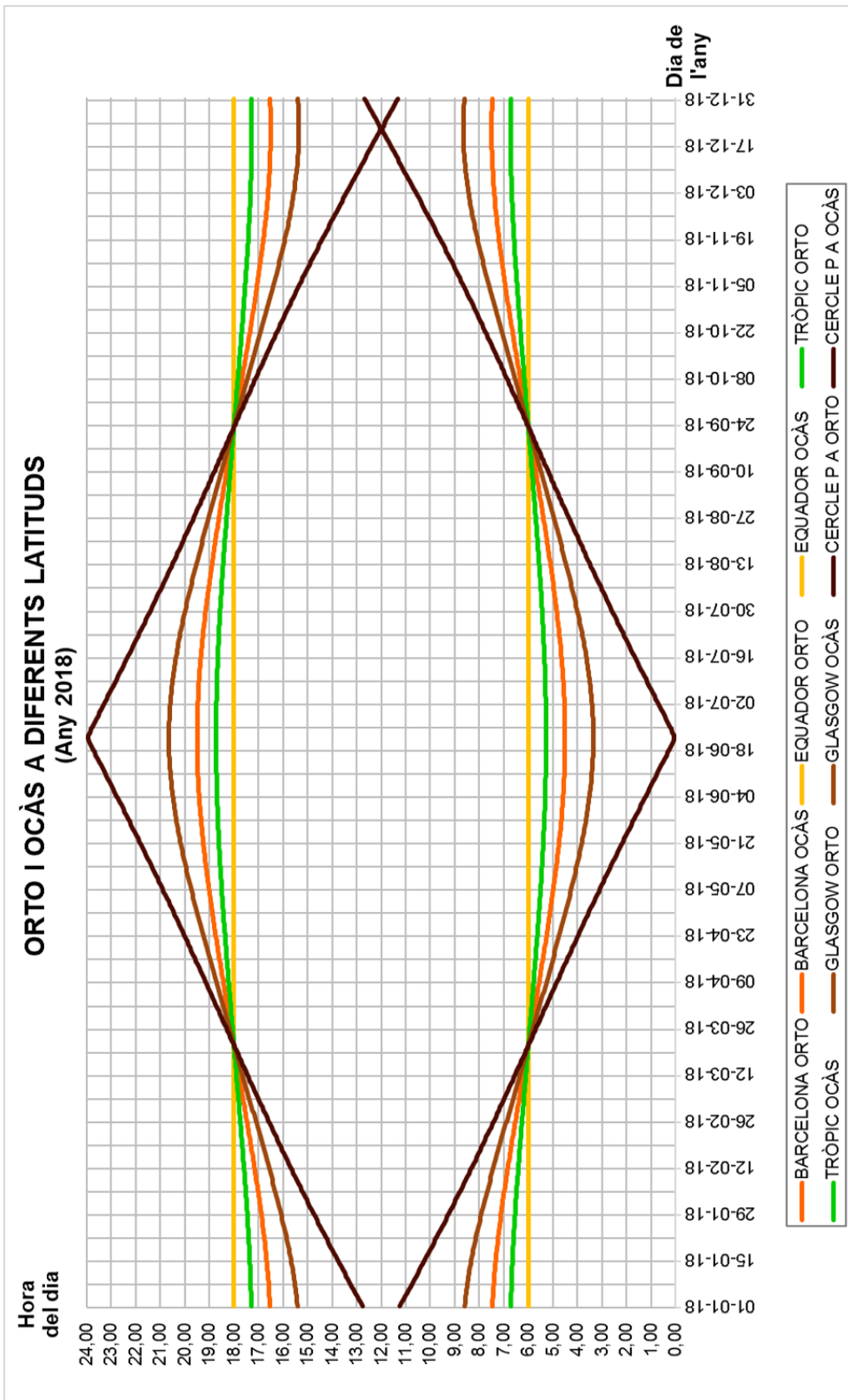


Fig. 46. Comparació de l'hora de l'orto i l'ocàs a diferents latituds al llarg del 2018

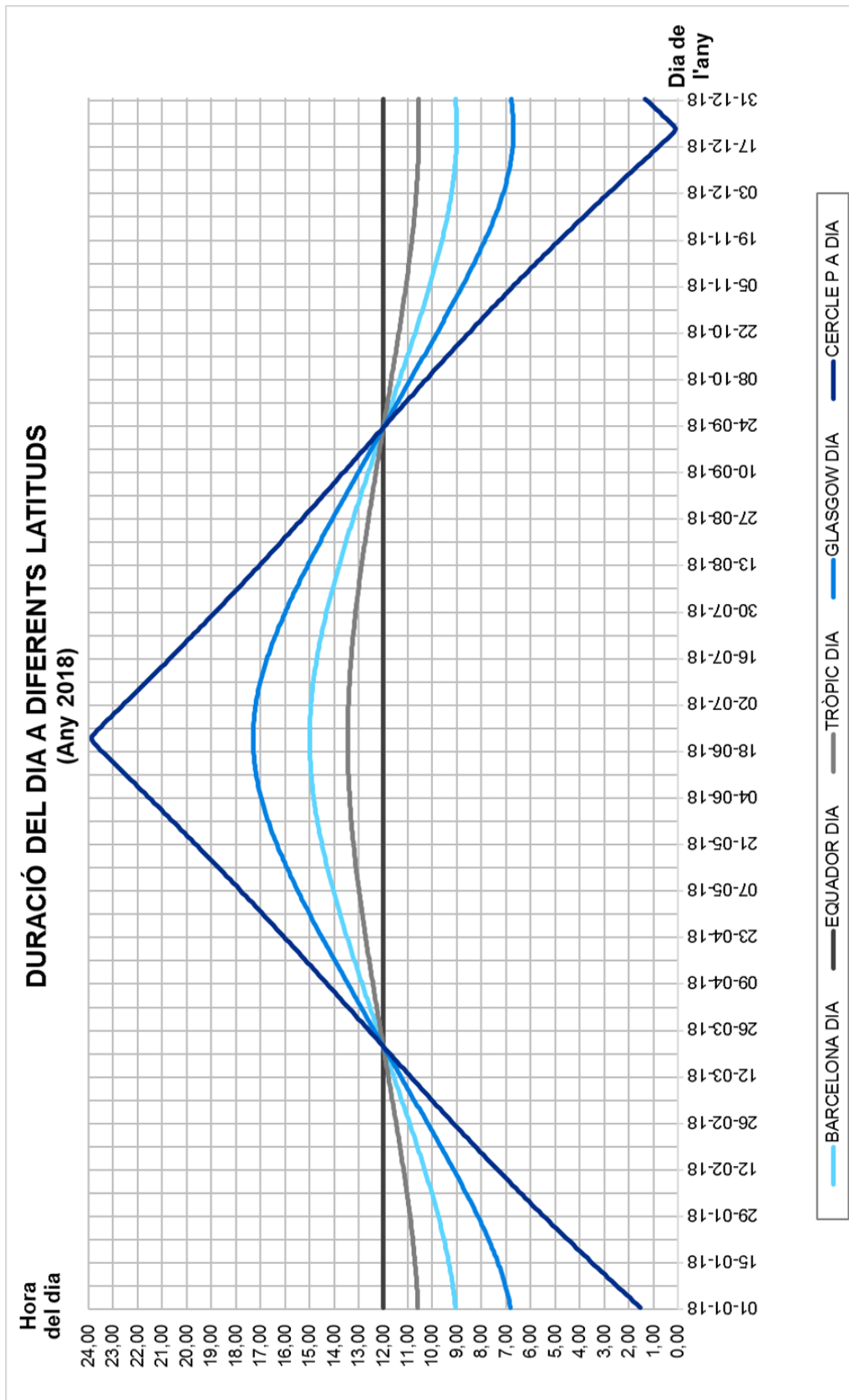


Fig. 47. Comparació de la duració del dia solar a diferents latituds al llarg del 2018

- **Anàlisi dels resultats:**

En primer lloc, cal dir que la meua intenció inicial era calcular l'orto i l'ocàs al pol nord o en latituds superiors a les del cercle polar àrtic. El problema és que en aquestes latituds es verifica que $|D| \geq 90^\circ - |\phi|$ i per tant, com he explicat al capítol 1.9.1, el sol no tallarà l'horitzó i no tindrà ni orto ni ocàs (estarà sempre per sobre o per sota l'horitzó). Així, les fórmules trobades, com calculen precisament l'orto i l'ocàs solar, no seran vàlides en aquests contextos.

Per demostrar-ho, cal fixar-se en el cas més clar: el del pol nord ($\phi = 90^\circ$). Si se substitueix la latitud $\phi = 90^\circ$ en les expressions 31.1 i 31.2, ens queda:

$$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

Per tant, resulta impossible trobar el resultat de l'orto i l'ocàs en aquesta latitud.

Un cop fet aquest aclariment, passaré a analitzar la informació de les figures 46 i 47.

La figura 46 mostra l'evolució de l'orto i l'ocàs en el 2018 per a diferents latituds.

En l'equador, durant tot l'any el Sol surt a les 6:00^h i es pon a les 18:00^h i, tant la nit com el dia, duren 12^h. Això es correspon perfectament amb la teoria explicada sobre el moviment diürn a l'equador: com el Sol, en una latitud $\phi = 0^\circ$, segueix un paral·lel celeste de trajectòria perpendicular a l'horitzó, cada dia de l'any descriurà el mateix moviment i el dia i la nit tindran la mateixa duració. Per això, en la gràfica, els valors de l'orto i l'ocàs a l'equador al llarg de l'any formen una recta.

En el cas del tròpic de Càncer i de Barcelona, aquesta regularitat deixa de produir-se. En els mesos d'estiu, la duració del dia és major que la de la nit perquè l'orto es produeix més aviat i l'ocàs més tard. En canvi, als mesos d'hivern, passa tot el contrari. A Glasgow, aquest fet encara és més pronunciat i en el cercle Polar Àrtic, es torna extrem. Aquest fenomen es deu principalment a dos motius, el primer dels quals és la variació de la declinació.

En l'equinocci de primavera (20 març), la declinació del Sol és $D = 0^\circ$ independentment de la latitud en la qual ens trobem. Això suposa que el Sol surti exactament per l'est i es pongui per l'oest i tant el dia com la nit durin 12^h. A la gràfica, l'equinocci de primavera es correspon al primer punt on s'intersequen totes

les línies de l'orto i totes les de l'ocàs. En aquest punt es veu que l'orto es produeix a les 6:00^h, l'ocàs a les 18:00^h i la duració del dia és igual en totes les latituds.

A continuació, a mesura que la declinació va creixent, l'orto es produeix cada cop més aviat i l'ocàs més tard. Quan arriba el solstici d'estiu (21 de juny), la declinació solar es torna màxima ($D = \varepsilon$) i el paral·lel que descriu el Sol té una alçada màxima. En aquest dia, com es veu, les corbes de l'orto tenen un màxim, ja que és el dia on el Sol surt més aviat de tot l'any; i les corbes de l'ocàs tenen un mínim, perquè l'ocàs es produeix en l'hora més tardana de qualsevol dels dies de l'any.

A partir d'aquest moment, a mesura que la declinació disminueix, el Sol comença a sortir més tard i a pondre's més aviat. Quan arriba l'equinocci de tardor (22 de setembre), la declinació torna a ser $D = 0^\circ$, pel que l'orto ocorre a les 6:00^h i l'ocàs a les 18:00^h. D'aquesta manera, el dia i la nit tenen la mateixa durada en qualsevol latitud, fet que demostra el segon punt d'intersecció entre les línies de la gràfica.

La declinació segueix disminuint fins al solstici d'hivern (21 de desembre), on val $D = -\varepsilon$ i el paral·lel celeste descrit pel Sol té una culminació superior a una alçada mínima. Per això, aquest dia és el que l'orto es produeix més tard i l'ocàs més aviat de tot l'any. Es pot observar en el mínim de les corbes de l'orto i el màxim de les corbes de l'ocàs en aquest dia.

Finalment, la declinació torna a augmentar, de la mateixa manera que la diferència entre l'orto i l'ocàs, fins a arribar al punt de l'equinocci de primavera, del que he començat parlant.

El segon motiu que provoca que les hores de l'orto i l'ocàs variïn és la latitud. Com major és latitud, més a prop es troben la vertical i l'eix del món, perquè la distància entre ambdues és la colatitud ($90 - \phi$). Això suposa que els paral·lels celestes descrits pel Sol no siguin perpendiculars a l'horitzó, sinó que es trobin inclinats respecte d'aquest. El cas extrem seria el del pol nord, on els paral·lels celestes són totalment paral·lels a l'horitzó.

A continuació aplicaré aquesta idea a les latituds que he estudiat.

- A l'equador, com ja he dit, els paral·lels celestes són perpendiculars a l'horitzó i per això no hi ha variació de l'hora de l'orto i l'ocàs.

- Al tròpic de Càncer, Barcelona i Glasgow, els paral·lels es troben inclinats respecte de l'horitzó. Quan la declinació és positiva, l'arc de paral·lel que roman per sobre l'horitzó és major que el que es troba per sota, pel que la duració del dia és major que la de la nit. Passa tot el contrari quan la declinació és negativa.

Aquesta diferència entre el dia i la nit creix com major és la latitud, i més inclinats es troben els paral·lels celestes. Per això, a Glasgow, les hores de l'orto i l'ocàs es troben molt allunyades a l'estiu i molt properes a l'hivern.

- El Cercle Polar Àrtic és el cas extrem, on la trajectòria del Sol és gairebé paral·lela a l'horitzó i per això, la duració del dia varia tant al llarg de l'any. En el solstici d'estiu el Sol descriu un paral·lel que roman tot el dia per sobre l'horitzó, pel que l'orto és a les 00:00h, l'ocàs a les 24:00h i el dia dura 24h. En el solstici d'hivern, el Sol surt i es posa a les 12:00h, el que vol dir que aquell dia serà sempre de nit⁷.

La figura 47, que mostra la duració del dia solar al llarg del 2018 en les diferents latituds, simplement serveix per confirmar tot l'explicat fins ara.

En l'equador, el dia sempre dura dotze hores. En la resta de latituds, aquest fet només es dona en els equinoccis perquè la resta de dies la duració del dia i la nit no són equivalents: en les èpoques d'estiu, el dia és més llarg que la nit (sent el solstici d'estiu on el dia té una durada major) i a l'hivern succeeix tot el contrari (i és al solstici d'hivern on el dia és el més curt de l'any). Com també he comentat, aquestes diferències augmenten a mesura que ens allunyem de l'equador i el cas que ho demostra en major grau és el del Cercle Polar Àrtic, on al solstici d'estiu el dia dura 24 hores i al solstici d'hivern, és la nit la que dura 24 hores.

Un cop comentades aquestes dues gràfiques, puc afirmar que els resultats de les diferents latituds que he obtingut a partir de les fórmules 31.1 i 31.2 confirmen el moviment diürn solar explicat teòricament al principi del treball. Això, em porta de nou, a refermar l'alta precisió dels càlculs que descriuen perfectament el moviment real del Sol al llarg de l'eclíptica.

⁷ Vegeu les figures 13, 14 i 15 per entendre el moviment diürns d'un astre en funció de la latitud.

6. CONCLUSIONS

Quan vaig iniciar aquest treball, el meu principal objectiu era descobrir com calcular matemàticament l'hora i sortida del Sol en qualsevol punt de la superfície terrestre i per a qualsevol dia de l'any. Un cop acabat el treball, puc dir que he aconseguit realitzar aquest objectiu, ja que he trobat una fórmula que ens permet fer aquest càlcul de l'orto i l'ocàs solar en funció de la longitud i la latitud i del dia de l'any que ens trobem.

Aquesta fórmula, que he aplicat al càlcul de les hores de l'orto i l'ocàs solar de Barcelona de l'any 2018, com s'ha vist, ha acabat proporcionant resultats bastant precisos i propers a la realitat, ja que la diferència entre els meus càlculs i les hores reals de sortida solar variaven un màxim de 20^{min} en alguns curts períodes de temps.

Per a realitzar els càlculs, simplement he utilitzat dades de les latituds, longituds i declinacions solars extretes de pàgines oficials d'internet, el que vol dir que els recursos emprats han estat bastant bàsics però, tot i així, he aconseguit uns resultats prou satisfactoris.

Un punt que ho demostra és la comparació de l'orto i l'ocàs en cinc diferents latituds. Les gràfiques obtingudes a partir dels resultats, reflecteixen perfectament quin és el moviment diürn solar al llarg de l'any i ens permet fer-nos una idea de com varia el dia amb la latitud. A més, coincideixen a la perfecció amb la teoria explicada inicialment sobre el moviment anual del Sol.

Un aclariment que cal fer és que principalment m'he centrat a realitzar càlculs a l'hemisferi nord, però si es volguessin representar els resultats del moviment solar a l'hemisferi sud, serien idèntics però desplaçat sis mesos, ja que quan a l'hemisferi nord és estiu, a l'hemisferi sud és hivern, i viceversa (capítol 2.5.1).

Tot i que, com he dit, les valoracions que faig del treball són positives, també trobo alguns inconvenients als càlculs realitzats.

En primer lloc, el principal problema és que les declinacions solars de cada any varien pel moviment de l'eix terrestre, el que suposa que els càlculs que he realitzat només serveixen per a l'any 2018. Si es volguessin tornar a repetir els càlculs per a qualsevol altre any, es necessitarien les declinacions solars del dit

any. És a dir, la fórmula sempre és vàlida, però si volem que proporcioni càlculs fiables, és necessari conèixer la declinació de l'any per al qual es vulgui fer el càlcul.

Un altre inconvenient és que existeixen factors que fan que el càlcul es desviï una mica de la realitat però que resulten pràcticament impossibles de solucionar per la falta de mitjans. Un d'aquests factors és que els càlculs i les declinacions es fan a partir del centre del disc solar i en canvi, l'orto i l'ocàs es donen quan l'extrem del disc solar creua l'horitzó. Un altre, és l'efecte que provoca la refracció astronòmica sobre la posició del Sol. Cal saber que són factors que existeixen i afecten els resultats, però com he dit, no s'han pogut corregir.

A més d'aquests inconvenients que he comentat, existeixen algunes activitats que si hagués tingut més temps, m'hauria agradat realitzar. Una d'elles és la construcció d'un rellotge de Sol, que seria un mètode per aplicar de forma pràctica alguns dels conceptes teòrics que he explicat i per comprovar que els càlculs fets amb la fórmula eren molt propers a la realitat i. Una altra, hauria estat alguna visita a un observatori astronòmic per dur a terme alguna mesura, fet que també hagués pogut servir per acabar d'arrodonir el treball.

Encara que això hauria pogut millorar el treball i m'hauria permès adquirir més coneixement sobre el tema, penso que la quantitat de conceptes que he exposat i desenvolupat en el treball és molt ampla.

Cal dir que, quan vaig decidir escollir aquest tema, partia de la desconeixença absoluta d'ell i no tenia idea què era l'esfera celeste ni cap dels conceptes que explico sobre ella, així que vaig haver d'iniciar la recerca des de zero. A l'inici, això va suposar-me una gran dificultat, especialment a l'hora d'imaginar-me la representació de l'esfera. Però l'avanç del treball penso que no només m'ha permès descobrir que era aquesta cúpula imaginària que envolta la Terra, sinó també guanyar una mica de visió espacial.

Com he dit, no coneixia el tema, així que pràcticament tot allò que apareix al treball ho he après a mesura que el realitzava: les parts de l'esfera celeste, el moviment diürn dels astres, el moviment anual del Sol, etc.

Per tant, el treball m'ha permès entendre molts fenòmens que sabia que existien però als que fins ara no donava importància. És el cas, per exemple, de la variació de la durada del dia solar al llarg de l'any o de la peculiaritat dels solsticis i

equinoccis. Ara he pogut entendre perfectament com canvia l'alçada del Sol a causa del seu moviment sobre l'eclíptica i de la variació de la declinació i la influència que això té sobre les estacions. I no només he aconseguit entendre-ho, sinó aprofundir en el tema i anar més enllà per descobrir les variacions que pot presentar el moviment d'un astre a causa de moviments terrestres com la precessió o la nutació.

Un altre fet que he descobert, i que m'ha sorprès àmpliament, és el perquè del mesurament del temps que fem per a establir una regularitat en el calendari. Respecte a aquest tema, hi ha diverses idees que em van impactar molt però que no he afegit al cos teòric. Una d'elles, per exemple, és la curiositat que quan es va implantar el nostre calendari actual al s. XVI, portàvem un excés de dies acumulats, pel que es va haver de saltar del 4 d'octubre de 1582 al 15 d'octubre de 1582. Així, mai han existit els dies compresos entre aquestes dates.

Un cop dita aquesta curiositat, m'agradaria dir que no només he adquirit coneixement teòric amb el treball. Gràcies a la part de càlcul, he aconseguit saber situar un punt sobre l'esfera a partir de les seves coordenades i canviar de sistemes de coordenades amb matrius de rotació. Com encara no hem estudiat matrius al temari, he hagut d'investigar sobre elles per saber la seva utilitat i propietats, i la manera d'aplicar-les al meu treball, el que ha fet que em torni molt més autodidacta.

Per tant, el treball no només ha estat útil perquè he descobert un tema totalment nou, sinó també perquè m'ha fet veure quin és el funcionament d'una recerca i l'esforç que comporta realitzar-ne una.

Com he dit a l'inici, sempre he tingut curiositat per l'astronomia i aquest treball de recerca no només m'ha servit per confirmar aquesta passió, sinó també per a motivar-me a seguir estudiant aquest àmbit més a fons. A més, m'ha possibilitat entrar en una branca de la física, per la que també tinc molt d'interès. Encara que he respost algunes preguntes que des de sempre m'havia fet, encara me'n queden moltes més per respondre. Aleshores, el que puc dir un cop finalitzada la recerca, és que vull seguir entenent, descobrint i investigant com és i com funciona el Cosmos, encara que sigui a petita escala, com en aquest treball.

BIBLIOGRAFIA

- [1]. DE ORÚS NAVARRO, Juan José; CATALÀ POCH, M. Asunción; NÚÑEZ DE MURGA, Jorge (2007). «*Astronomía esférica i mecánica celeste*». ISBN: 978-84-475-3059-5.
- [2]. LLIBRE, Jaume. Dossier «*Introducció a l'astronomia de posició i la mecànica celeste*».
- [3]. «*EL DIA SOLAR Y DIA SIDERAL Diferencia entre ambos tipos de dias*». [En línia].
https://historiaybiografias.com/dia_solar/. [Consulta: 29-jul-2018].
- [4]. E. V. Gavín, «*LA PRECESIÓN DE LOS EQUINOCCIOS y LA NUTACIÓN*», p. 8. CSIC.
<http://sac.csic.es/astrosecundaria/complementario/es/actividades/modelos/precision.pdf>. [Consulta: 7-ago-2018].
- [5]. «*Geocentric Ephemeris for the the Sun : 2018. 00:00 UTC (Coordinated Universal Time)* ». [En línia].
<http://astropixels.com/ephemeris/sun/sun2018.html>. [Consulta: 25-ago-2018].
- [6]. J. A. Villalobos, «*La hora de la Tierra y la hora solar*», p. 6, 2007. IX Congreso Nacional de Ciencias Exploraciones fuera y dentro del aula 24 y 25 de agosto, 2007, Instituto Tecnológico de Costa Rica Cartago, Costa Rica
<http://www.cientec.or.cr/exploraciones/ponencias2007/JoseAlbertoVillalobos-LaHora.pdf>. [Consulta: 26-jul-2018].
- [7]. «*La precesión de los equinoccios. Museo Virtual de la Ciencia del CSIC*». [En línia].
<http://museovirtual.csic.es/salas/universo/astro8.htm>. [Consulta: 7-ago-2018].
- [8]. Ministeri de Foment espanyol, l'Observatori Astronòmic Nacional i l'Institut Geogràfic Nacional. «*Salidas y puestas del Sol para el 2018*». [En línia].

<https://www.fomento.gob.es/salidapuestasol/2018/Barcelona-2018.txt>.
[Consulta: 1-nov-2018].

- [9]. «*Movimiento diurno de la Tierra. Movimiento aparente de los astros / Astronomía Náutica / Apuntes Náuticos / Portada - masmar*». [En línia].
<http://www.masmar.net/esl/Apuntes-N%C3%A1uticos/Astronom%C3%ADa-N%C3%A1utica/Movimiento-diurno-de-la-Tierra.-Movimiento-aparente-de-los-astros>. [Consulta: 20-jul-2018].
- [10]. «*Nutación – Astro Gredos*». [En línia].
<https://astrogredos.com/tag/nutacion/>. [Consulta: 11-ago-2018].
- [11]. «*Precesión de los Equinoccios*». [En línia].
http://www.tayabeixo.org/que_obs/precesion.htm. [Consulta: 8-ago-2018].
- [12]. «*Precesión y nutación de la Tierra*». [En línia].
<https://www.astromia.com/tierraluna/precesionutacion.htm>. [Consulta: 10-ago-2018].
- [13]. «*¿Sabes qué es el movimiento de nutación de la Tierra?*» [En línia].
<https://www.catalunyapress.es/texto-diario/mostrar/984343/que-es-movimiento-nutacion-tierra>. [Consulta: 11-ago-2018].
- [14]. «*Solar declination--Algorithm 1.11*». [En línia]. May 28, 2001
http://naturalfrequency.com/Tregenza_Sharples/Daylight_Algorithms/algorithm_1_11.htm. [Consulta: 26-ago-2018].
- [15]. «*tema11-Cambio Climático*». [En línia].
<https://www.um.es/geograf/clima/tema11.pdf>. [Consulta: 27-ago-2018].
- [16]. «*The Different Types of Twilight, Dawn and Dusk*». [En línia].
<https://www.timeanddate.com/astronomy/different-types-twilight.html>.
[Consulta: 18-ago-2018].

ANNEX I

Resultats dels càlculs de l'hora veritable de l'orto i l'ocàs solar en les latituds de l'Equador, Barcelona, el tròpic de Càncer, Glasgow i el Cercle Polar Àrtic al llarg del 2018.

Dies 2018	BARCELONA	BARCELONA	EQUADOR	EQUADOR	TRÒPIC	TRÒPIC	GLASGOW	GLASGOW	CERCLE P.A	CERCLE P.A
	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS	ORTO	OCÀS
1-1	7,466	16,534	6,000	18,000	6,708	17,292	8,587	15,413	11,236	12,764
2-1	7,459	16,541	6,000	18,000	6,705	17,295	8,575	15,425	11,163	12,837
3-1	7,452	16,548	6,000	18,000	6,701	17,299	8,561	15,439	11,089	12,911
4-1	7,445	16,555	6,000	18,000	6,698	17,302	8,546	15,454	11,016	12,984
5-1	7,437	16,563	6,000	18,000	6,694	17,306	8,531	15,469	10,943	13,057
6-1	7,429	16,571	6,000	18,000	6,690	17,310	8,514	15,486	10,870	13,130
7-1	7,420	16,580	6,000	18,000	6,686	17,314	8,496	15,504	10,797	13,203
8-1	7,410	16,590	6,000	18,000	6,682	17,318	8,478	15,522	10,724	13,276
9-1	7,400	16,600	6,000	18,000	6,677	17,323	8,458	15,542	10,652	13,348
10-1	7,390	16,610	6,000	18,000	6,672	17,328	8,438	15,562	10,579	13,421
11-1	7,379	16,621	6,000	18,000	6,667	17,333	8,416	15,584	10,507	13,493
12-1	7,367	16,633	6,000	18,000	6,662	17,338	8,394	15,606	10,435	13,565
13-1	7,355	16,645	6,000	18,000	6,656	17,344	8,371	15,629	10,363	13,637
14-1	7,343	16,657	6,000	18,000	6,650	17,350	8,347	15,653	10,291	13,709
15-1	7,330	16,670	6,000	18,000	6,644	17,356	8,322	15,678	10,219	13,781
16-1	7,317	16,683	6,000	18,000	6,638	17,362	8,297	15,703	10,147	13,853
17-1	7,303	16,697	6,000	18,000	6,632	17,368	8,271	15,729	10,076	13,924
18-1	7,289	16,711	6,000	18,000	6,625	17,375	8,244	15,756	10,005	13,995
19-1	7,274	16,726	6,000	18,000	6,618	17,382	8,216	15,784	9,934	14,066
20-1	7,259	16,741	6,000	18,000	6,611	17,389	8,188	15,812	9,863	14,137
21-1	7,244	16,756	6,000	18,000	6,604	17,396	8,159	15,841	9,793	14,207
22-1	7,228	16,772	6,000	18,000	6,596	17,404	8,130	15,870	9,722	14,278
23-1	7,212	16,788	6,000	18,000	6,589	17,411	8,100	15,900	9,652	14,348
24-1	7,196	16,804	6,000	18,000	6,581	17,419	8,069	15,931	9,582	14,418
25-1	7,179	16,821	6,000	18,000	6,573	17,427	8,038	15,962	9,513	14,487
26-1	7,162	16,838	6,000	18,000	6,565	17,435	8,006	15,994	9,443	14,557
27-1	7,145	16,855	6,000	18,000	6,557	17,443	7,974	16,026	9,374	14,626
28-1	7,127	16,873	6,000	18,000	6,548	17,452	7,942	16,058	9,305	14,695
29-1	7,109	16,891	6,000	18,000	6,540	17,460	7,909	16,091	9,236	14,764
30-1	7,091	16,909	6,000	18,000	6,531	17,469	7,876	16,124	9,168	14,832
31-1	7,072	16,928	6,000	18,000	6,522	17,478	7,842	16,158	9,099	14,901
1-2	7,053	16,947	6,000	18,000	6,513	17,487	7,808	16,192	9,031	14,969
2-2	7,034	16,966	6,000	18,000	6,504	17,496	7,774	16,226	8,963	15,037
3-2	7,015	16,985	6,000	18,000	6,495	17,505	7,739	16,261	8,896	15,104
4-2	6,995	17,005	6,000	18,000	6,486	17,514	7,704	16,296	8,828	15,172
5-2	6,976	17,024	6,000	18,000	6,476	17,524	7,668	16,332	8,761	15,239
6-2	6,956	17,044	6,000	18,000	6,467	17,533	7,633	16,367	8,694	15,306
7-2	6,936	17,064	6,000	18,000	6,457	17,543	7,597	16,403	8,627	15,373
8-2	6,915	17,085	6,000	18,000	6,447	17,553	7,561	16,439	8,561	15,439

9-2	6,895	17,105	6,000	18,000	6,437	17,563	7,524	16,476	8,495	15,505
10-2	6,874	17,126	6,000	18,000	6,427	17,573	7,488	16,512	8,428	15,572
11-2	6,853	17,147	6,000	18,000	6,417	17,583	7,451	16,549	8,362	15,638
12-2	6,832	17,168	6,000	18,000	6,407	17,593	7,414	16,586	8,297	15,703
13-2	6,811	17,189	6,000	18,000	6,397	17,603	7,377	16,623	8,231	15,769
14-2	6,789	17,211	6,000	18,000	6,386	17,614	7,339	16,661	8,166	15,834
15-2	6,768	17,232	6,000	18,000	6,376	17,624	7,302	16,698	8,101	15,899
16-2	6,746	17,254	6,000	18,000	6,365	17,635	7,264	16,736	8,036	15,964
17-2	6,724	17,276	6,000	18,000	6,355	17,645	7,226	16,774	7,971	16,029
18-2	6,702	17,298	6,000	18,000	6,344	17,656	7,188	16,812	7,907	16,093
19-2	6,680	17,320	6,000	18,000	6,333	17,667	7,150	16,850	7,843	16,157
20-2	6,658	17,342	6,000	18,000	6,323	17,677	7,112	16,888	7,779	16,221
21-2	6,636	17,364	6,000	18,000	6,312	17,688	7,074	16,926	7,715	16,285
22-2	6,614	17,386	6,000	18,000	6,301	17,699	7,036	16,964	7,651	16,349
23-2	6,591	17,409	6,000	18,000	6,290	17,710	6,997	17,003	7,587	16,413
24-2	6,569	17,431	6,000	18,000	6,279	17,721	6,959	17,041	7,524	16,476
25-2	6,546	17,454	6,000	18,000	6,268	17,732	6,920	17,080	7,461	16,539
26-2	6,524	17,476	6,000	18,000	6,257	17,743	6,882	17,118	7,398	16,602
27-2	6,501	17,499	6,000	18,000	6,246	17,754	6,843	17,157	7,335	16,665
28-2	6,478	17,522	6,000	18,000	6,235	17,765	6,804	17,196	7,272	16,728
1-3	6,455	17,545	6,000	18,000	6,224	17,776	6,766	17,234	7,210	16,790
2-3	6,433	17,567	6,000	18,000	6,212	17,788	6,727	17,273	7,147	16,853
3-3	6,410	17,590	6,000	18,000	6,201	17,799	6,688	17,312	7,085	16,915
4-3	6,387	17,613	6,000	18,000	6,190	17,810	6,649	17,351	7,023	16,977
5-3	6,364	17,636	6,000	18,000	6,179	17,821	6,610	17,390	6,961	17,039
6-3	6,341	17,659	6,000	18,000	6,167	17,833	6,572	17,428	6,899	17,101
7-3	6,317	17,683	6,000	18,000	6,156	17,844	6,533	17,467	6,837	17,163
8-3	6,294	17,706	6,000	18,000	6,145	17,855	6,494	17,506	6,775	17,225
9-3	6,271	17,729	6,000	18,000	6,133	17,867	6,455	17,545	6,714	17,286
10-3	6,248	17,752	6,000	18,000	6,122	17,878	6,416	17,584	6,652	17,348
11-3	6,225	17,775	6,000	18,000	6,111	17,889	6,377	17,623	6,591	17,409
12-3	6,202	17,798	6,000	18,000	6,099	17,901	6,338	17,662	6,529	17,471
13-3	6,178	17,822	6,000	18,000	6,088	17,912	6,299	17,701	6,468	17,532
14-3	6,155	17,845	6,000	18,000	6,076	17,924	6,260	17,740	6,407	17,593
15-3	6,132	17,868	6,000	18,000	6,065	17,935	6,221	17,779	6,346	17,654
16-3	6,109	17,891	6,000	18,000	6,053	17,947	6,182	17,818	6,285	17,715
17-3	6,085	17,915	6,000	18,000	6,042	17,958	6,143	17,857	6,224	17,776
18-3	6,062	17,938	6,000	18,000	6,031	17,969	6,104	17,896	6,163	17,837
19-3	6,039	17,961	6,000	18,000	6,019	17,981	6,065	17,935	6,102	17,898
20-3	6,016	17,984	6,000	18,000	6,008	17,992	6,026	17,974	6,041	17,959
21-3	5,993	18,007	6,000	18,000	5,996	18,004	5,987	18,013	5,980	18,020
22-3	5,969	18,031	6,000	18,000	5,985	18,015	5,949	18,051	5,920	18,080
23-3	5,946	18,054	6,000	18,000	5,973	18,027	5,910	18,090	5,859	18,141
24-3	5,923	18,077	6,000	18,000	5,962	18,038	5,871	18,129	5,798	18,202
25-3	5,900	18,100	6,000	18,000	5,951	18,049	5,832	18,168	5,738	18,262
26-3	5,877	18,123	6,000	18,000	5,939	18,061	5,794	18,206	5,677	18,323
27-3	5,854	18,146	6,000	18,000	5,928	18,072	5,755	18,245	5,616	18,384
28-3	5,831	18,169	6,000	18,000	5,917	18,083	5,716	18,284	5,556	18,444
29-3	5,808	18,192	6,000	18,000	5,905	18,095	5,678	18,322	5,495	18,505
30-3	5,785	18,215	6,000	18,000	5,894	18,106	5,639	18,361	5,434	18,566
31-3	5,762	18,238	6,000	18,000	5,883	18,117	5,600	18,400	5,374	18,626
1-4	5,739	18,261	6,000	18,000	5,872	18,128	5,562	18,438	5,313	18,687
2-4	5,716	18,284	6,000	18,000	5,860	18,140	5,524	18,476	5,252	18,748
3-4	5,693	18,307	6,000	18,000	5,849	18,151	5,485	18,515	5,191	18,809
4-4	5,670	18,330	6,000	18,000	5,838	18,162	5,447	18,553	5,131	18,869
5-4	5,648	18,352	6,000	18,000	5,827	18,173	5,409	18,591	5,070	18,930
6-4	5,625	18,375	6,000	18,000	5,816	18,184	5,370	18,630	5,009	18,991

7-4	5,602	18,398	6,000	18,000	5,805	18,195	5,332	18,668	4,948	19,052
8-4	5,580	18,420	6,000	18,000	5,794	18,206	5,294	18,706	4,887	19,113
9-4	5,558	18,442	6,000	18,000	5,783	18,217	5,256	18,744	4,826	19,174
10-4	5,535	18,465	6,000	18,000	5,772	18,228	5,218	18,782	4,764	19,236
11-4	5,513	18,487	6,000	18,000	5,761	18,239	5,180	18,820	4,703	19,297
12-4	5,491	18,509	6,000	18,000	5,750	18,250	5,143	18,857	4,642	19,358
13-4	5,469	18,531	6,000	18,000	5,739	18,261	5,105	18,895	4,580	19,420
14-4	5,446	18,554	6,000	18,000	5,728	18,272	5,067	18,933	4,519	19,481
15-4	5,425	18,575	6,000	18,000	5,718	18,282	5,030	18,970	4,457	19,543
16-4	5,403	18,597	6,000	18,000	5,707	18,293	4,992	19,008	4,396	19,604
17-4	5,381	18,619	6,000	18,000	5,696	18,304	4,955	19,045	4,334	19,666
18-4	5,359	18,641	6,000	18,000	5,686	18,314	4,918	19,082	4,272	19,728
19-4	5,338	18,662	6,000	18,000	5,675	18,325	4,881	19,119	4,210	19,790
20-4	5,316	18,684	6,000	18,000	5,665	18,335	4,844	19,156	4,148	19,852
21-4	5,295	18,705	6,000	18,000	5,655	18,345	4,807	19,193	4,086	19,914
22-4	5,274	18,726	6,000	18,000	5,644	18,356	4,770	19,230	4,023	19,977
23-4	5,253	18,747	6,000	18,000	5,634	18,366	4,734	19,266	3,961	20,039
24-4	5,232	18,768	6,000	18,000	5,624	18,376	4,698	19,302	3,898	20,102
25-4	5,211	18,789	6,000	18,000	5,614	18,386	4,661	19,339	3,835	20,165
26-4	5,191	18,809	6,000	18,000	5,604	18,396	4,626	19,374	3,772	20,228
27-4	5,170	18,830	6,000	18,000	5,594	18,406	4,590	19,410	3,710	20,290
28-4	5,150	18,850	6,000	18,000	5,584	18,416	4,554	19,446	3,646	20,354
29-4	5,130	18,870	6,000	18,000	5,575	18,425	4,519	19,481	3,583	20,417
30-4	5,110	18,890	6,000	18,000	5,565	18,435	4,484	19,516	3,520	20,480
1-5	5,090	18,910	6,000	18,000	5,555	18,445	4,449	19,551	3,456	20,544
2-5	5,070	18,930	6,000	18,000	5,546	18,454	4,414	19,586	3,392	20,608
3-5	5,051	18,949	6,000	18,000	5,537	18,463	4,380	19,620	3,329	20,671
4-5	5,032	18,968	6,000	18,000	5,528	18,472	4,345	19,655	3,265	20,735
5-5	5,013	18,987	6,000	18,000	5,518	18,482	4,311	19,689	3,201	20,799
6-5	4,994	19,006	6,000	18,000	5,509	18,491	4,278	19,722	3,136	20,864
7-5	4,976	19,024	6,000	18,000	5,501	18,499	4,244	19,756	3,072	20,928
8-5	4,957	19,043	6,000	18,000	5,492	18,508	4,211	19,789	3,007	20,993
9-5	4,939	19,061	6,000	18,000	5,483	18,517	4,179	19,821	2,942	21,058
10-5	4,922	19,078	6,000	18,000	5,475	18,525	4,146	19,854	2,877	21,123
11-5	4,904	19,096	6,000	18,000	5,466	18,534	4,114	19,886	2,812	21,188
12-5	4,887	19,113	6,000	18,000	5,458	18,542	4,083	19,917	2,747	21,253
13-5	4,870	19,130	6,000	18,000	5,450	18,550	4,052	19,948	2,681	21,319
14-5	4,853	19,147	6,000	18,000	5,442	18,558	4,021	19,979	2,616	21,384
15-5	4,836	19,164	6,000	18,000	5,434	18,566	3,990	20,010	2,550	21,450
16-5	4,820	19,180	6,000	18,000	5,427	18,573	3,961	20,039	2,484	21,516
17-5	4,804	19,196	6,000	18,000	5,419	18,581	3,931	20,069	2,418	21,582
18-5	4,789	19,211	6,000	18,000	5,412	18,588	3,902	20,098	2,352	21,648
19-5	4,774	19,226	6,000	18,000	5,404	18,596	3,874	20,126	2,285	21,715
20-5	4,759	19,241	6,000	18,000	5,397	18,603	3,846	20,154	2,219	21,781
21-5	4,744	19,256	6,000	18,000	5,391	18,609	3,818	20,182	2,152	21,848
22-5	4,730	19,270	6,000	18,000	5,384	18,616	3,792	20,208	2,085	21,915
23-5	4,716	19,284	6,000	18,000	5,377	18,623	3,765	20,235	2,018	21,982
24-5	4,703	19,297	6,000	18,000	5,371	18,629	3,740	20,260	1,951	22,049
25-5	4,689	19,311	6,000	18,000	5,365	18,635	3,715	20,285	1,884	22,116
26-5	4,677	19,323	6,000	18,000	5,359	18,641	3,690	20,310	1,817	22,183
27-5	4,664	19,336	6,000	18,000	5,353	18,647	3,667	20,333	1,749	22,251
28-5	4,652	19,348	6,000	18,000	5,347	18,653	3,644	20,356	1,682	22,318
29-5	4,641	19,359	6,000	18,000	5,342	18,658	3,622	20,378	1,614	22,386
30-5	4,630	19,370	6,000	18,000	5,337	18,663	3,600	20,400	1,546	22,454
31-5	4,619	19,381	6,000	18,000	5,332	18,668	3,579	20,421	1,478	22,522
1-6	4,609	19,391	6,000	18,000	5,327	18,673	3,559	20,441	1,410	22,590
2-6	4,599	19,401	6,000	18,000	5,322	18,678	3,540	20,460	1,342	22,658

3-6	4,590	19,410	6,000	18,000	5,318	18,682	3,522	20,478	1,273	22,727
4-6	4,581	19,419	6,000	18,000	5,314	18,686	3,504	20,496	1,205	22,795
5-6	4,572	19,428	6,000	18,000	5,310	18,690	3,488	20,512	1,137	22,863
6-6	4,564	19,436	6,000	18,000	5,306	18,694	3,472	20,528	1,068	22,932
7-6	4,557	19,443	6,000	18,000	5,303	18,697	3,457	20,543	0,999	23,001
8-6	4,550	19,450	6,000	18,000	5,299	18,701	3,443	20,557	0,931	23,069
9-6	4,543	19,457	6,000	18,000	5,296	18,704	3,430	20,570	0,862	23,138
10-6	4,537	19,463	6,000	18,000	5,294	18,706	3,418	20,582	0,793	23,207
11-6	4,531	19,469	6,000	18,000	5,291	18,709	3,407	20,593	0,724	23,276
12-6	4,526	19,474	6,000	18,000	5,289	18,711	3,396	20,604	0,655	23,345
13-6	4,522	19,478	6,000	18,000	5,286	18,714	3,387	20,613	0,586	23,414
14-6	4,518	19,482	6,000	18,000	5,285	18,715	3,379	20,621	0,518	23,482
15-6	4,514	19,486	6,000	18,000	5,283	18,717	3,372	20,628	0,449	23,551
16-6	4,511	19,489	6,000	18,000	5,281	18,719	3,366	20,634	0,380	23,620
17-6	4,508	19,492	6,000	18,000	5,280	18,720	3,360	20,640	0,311	23,689
18-6	4,506	19,494	6,000	18,000	5,279	18,721	3,356	20,644	0,243	23,757
19-6	4,505	19,495	6,000	18,000	5,279	18,721	3,353	20,647	0,176	23,824
20-6	4,504	19,496	6,000	18,000	5,278	18,722	3,351	20,649	0,112	23,888
21-6	4,503	19,497	6,000	18,000	5,278	18,722	3,350	20,650	0,060	23,940
22-6	4,503	19,497	6,000	18,000	5,278	18,722	3,350	20,650	0,066	23,934
23-6	4,504	19,496	6,000	18,000	5,278	18,722	3,352	20,648	0,121	23,879
24-6	4,505	19,495	6,000	18,000	5,279	18,721	3,354	20,646	0,186	23,814
25-6	4,507	19,493	6,000	18,000	5,279	18,721	3,357	20,643	0,253	23,747
26-6	4,509	19,491	6,000	18,000	5,280	18,720	3,361	20,639	0,321	23,679
27-6	4,511	19,489	6,000	18,000	5,282	18,718	3,366	20,634	0,390	23,610
28-6	4,514	19,486	6,000	18,000	5,283	18,717	3,373	20,627	0,459	23,541
29-6	4,518	19,482	6,000	18,000	5,285	18,715	3,380	20,620	0,527	23,473
30-6	4,522	19,478	6,000	18,000	5,287	18,713	3,388	20,612	0,596	23,404
1-7	4,527	19,473	6,000	18,000	5,289	18,711	3,398	20,602	0,665	23,335
2-7	4,532	19,468	6,000	18,000	5,291	18,709	3,408	20,592	0,733	23,267
3-7	4,538	19,462	6,000	18,000	5,294	18,706	3,419	20,581	0,802	23,198
4-7	4,544	19,456	6,000	18,000	5,297	18,703	3,431	20,569	0,871	23,129
5-7	4,550	19,450	6,000	18,000	5,300	18,700	3,445	20,555	0,939	23,061
6-7	4,558	19,442	6,000	18,000	5,303	18,697	3,459	20,541	1,008	22,992
7-7	4,565	19,435	6,000	18,000	5,307	18,693	3,474	20,526	1,076	22,924
8-7	4,573	19,427	6,000	18,000	5,310	18,690	3,489	20,511	1,144	22,856
9-7	4,582	19,418	6,000	18,000	5,314	18,686	3,506	20,494	1,213	22,787
10-7	4,591	19,409	6,000	18,000	5,319	18,681	3,524	20,476	1,281	22,719
11-7	4,600	19,400	6,000	18,000	5,323	18,677	3,542	20,458	1,349	22,651
12-7	4,610	19,390	6,000	18,000	5,327	18,673	3,561	20,439	1,417	22,583
13-7	4,620	19,380	6,000	18,000	5,332	18,668	3,581	20,419	1,484	22,516
14-7	4,631	19,369	6,000	18,000	5,337	18,663	3,602	20,398	1,552	22,448
15-7	4,642	19,358	6,000	18,000	5,342	18,658	3,623	20,377	1,619	22,381
16-7	4,653	19,347	6,000	18,000	5,348	18,652	3,646	20,354	1,687	22,313
17-7	4,665	19,335	6,000	18,000	5,353	18,647	3,668	20,332	1,754	22,246
18-7	4,678	19,322	6,000	18,000	5,359	18,641	3,692	20,308	1,821	22,179
19-7	4,690	19,310	6,000	18,000	5,365	18,635	3,716	20,284	1,888	22,112
20-7	4,703	19,297	6,000	18,000	5,371	18,629	3,741	20,259	1,955	22,045
21-7	4,717	19,283	6,000	18,000	5,378	18,622	3,766	20,234	2,021	21,979
22-7	4,730	19,270	6,000	18,000	5,384	18,616	3,793	20,207	2,088	21,912
23-7	4,745	19,255	6,000	18,000	5,391	18,609	3,819	20,181	2,154	21,846
24-7	4,759	19,241	6,000	18,000	5,398	18,602	3,846	20,154	2,220	21,780
25-7	4,774	19,226	6,000	18,000	5,405	18,595	3,874	20,126	2,286	21,714
26-7	4,789	19,211	6,000	18,000	5,412	18,588	3,902	20,098	2,352	21,648
27-7	4,804	19,196	6,000	18,000	5,419	18,581	3,931	20,069	2,418	21,582
28-7	4,820	19,180	6,000	18,000	5,426	18,574	3,960	20,040	2,483	21,517
29-7	4,836	19,164	6,000	18,000	5,434	18,566	3,990	20,010	2,548	21,452

30-7	4,852	19,148	6,000	18,000	5,442	18,558	4,020	19,980	2,614	21,386
31-7	4,869	19,131	6,000	18,000	5,450	18,550	4,050	19,950	2,679	21,321
1-8	4,886	19,114	6,000	18,000	5,458	18,542	4,081	19,919	2,743	21,257
2-8	4,903	19,097	6,000	18,000	5,466	18,534	4,112	19,888	2,808	21,192
3-8	4,920	19,080	6,000	18,000	5,474	18,526	4,144	19,856	2,872	21,128
4-8	4,938	19,062	6,000	18,000	5,482	18,518	4,176	19,824	2,937	21,063
5-8	4,956	19,044	6,000	18,000	5,491	18,509	4,208	19,792	3,001	20,999
6-8	4,974	19,026	6,000	18,000	5,500	18,500	4,241	19,759	3,065	20,935
7-8	4,992	19,008	6,000	18,000	5,508	18,492	4,274	19,726	3,129	20,871
8-8	5,011	18,989	6,000	18,000	5,517	18,483	4,307	19,693	3,192	20,808
9-8	5,029	18,971	6,000	18,000	5,526	18,474	4,341	19,659	3,256	20,744
10-8	5,048	18,952	6,000	18,000	5,535	18,465	4,374	19,626	3,319	20,681
11-8	5,067	18,933	6,000	18,000	5,545	18,455	4,408	19,592	3,382	20,618
12-8	5,087	18,913	6,000	18,000	5,554	18,446	4,443	19,557	3,445	20,555
13-8	5,106	18,894	6,000	18,000	5,563	18,437	4,477	19,523	3,508	20,492
14-8	5,126	18,874	6,000	18,000	5,573	18,427	4,512	19,488	3,571	20,429
15-8	5,146	18,854	6,000	18,000	5,582	18,418	4,547	19,453	3,634	20,366
16-8	5,166	18,834	6,000	18,000	5,592	18,408	4,582	19,418	3,696	20,304
17-8	5,186	18,814	6,000	18,000	5,602	18,398	4,617	19,383	3,758	20,242
18-8	5,206	18,794	6,000	18,000	5,612	18,388	4,653	19,347	3,820	20,180
19-8	5,227	18,773	6,000	18,000	5,621	18,379	4,689	19,311	3,882	20,118
20-8	5,247	18,753	6,000	18,000	5,631	18,369	4,724	19,276	3,944	20,056
21-8	5,268	18,732	6,000	18,000	5,642	18,358	4,760	19,240	4,006	19,994
22-8	5,289	18,711	6,000	18,000	5,652	18,348	4,796	19,204	4,067	19,933
23-8	5,310	18,690	6,000	18,000	5,662	18,338	4,833	19,167	4,129	19,871
24-8	5,331	18,669	6,000	18,000	5,672	18,328	4,869	19,131	4,190	19,810
25-8	5,352	18,648	6,000	18,000	5,682	18,318	4,906	19,094	4,251	19,749
26-8	5,373	18,627	6,000	18,000	5,693	18,307	4,942	19,058	4,312	19,688
27-8	5,395	18,605	6,000	18,000	5,703	18,297	4,979	19,021	4,373	19,627
28-8	5,416	18,584	6,000	18,000	5,714	18,286	5,016	18,984	4,434	19,566
29-8	5,438	18,562	6,000	18,000	5,724	18,276	5,053	18,947	4,495	19,505
30-8	5,460	18,540	6,000	18,000	5,735	18,265	5,090	18,910	4,556	19,444
31-8	5,481	18,519	6,000	18,000	5,745	18,255	5,127	18,873	4,616	19,384
1-9	5,503	18,497	6,000	18,000	5,756	18,244	5,164	18,836	4,677	19,323
2-9	5,525	18,475	6,000	18,000	5,767	18,233	5,201	18,799	4,737	19,263
3-9	5,547	18,453	6,000	18,000	5,778	18,222	5,239	18,761	4,797	19,203
4-9	5,569	18,431	6,000	18,000	5,788	18,212	5,276	18,724	4,858	19,142
5-9	5,591	18,409	6,000	18,000	5,799	18,201	5,314	18,686	4,918	19,082
6-9	5,614	18,386	6,000	18,000	5,810	18,190	5,351	18,649	4,978	19,022
7-9	5,636	18,364	6,000	18,000	5,821	18,179	5,389	18,611	5,038	18,962
8-9	5,658	18,342	6,000	18,000	5,832	18,168	5,426	18,574	5,098	18,902
9-9	5,681	18,319	6,000	18,000	5,843	18,157	5,464	18,536	5,158	18,842
10-9	5,703	18,297	6,000	18,000	5,854	18,146	5,502	18,498	5,218	18,782
11-9	5,726	18,274	6,000	18,000	5,865	18,135	5,540	18,460	5,278	18,722
12-9	5,748	18,252	6,000	18,000	5,876	18,124	5,578	18,422	5,338	18,662
13-9	5,771	18,229	6,000	18,000	5,887	18,113	5,616	18,384	5,398	18,602
14-9	5,793	18,207	6,000	18,000	5,898	18,102	5,654	18,346	5,457	18,543
15-9	5,816	18,184	6,000	18,000	5,909	18,091	5,692	18,308	5,517	18,483
16-9	5,839	18,161	6,000	18,000	5,921	18,079	5,730	18,270	5,577	18,423
17-9	5,861	18,139	6,000	18,000	5,932	18,068	5,768	18,232	5,637	18,363
18-9	5,884	18,116	6,000	18,000	5,943	18,057	5,806	18,194	5,696	18,304
19-9	5,907	18,093	6,000	18,000	5,954	18,046	5,844	18,156	5,756	18,244
20-9	5,930	18,070	6,000	18,000	5,965	18,035	5,882	18,118	5,816	18,184
21-9	5,953	18,047	6,000	18,000	5,977	18,023	5,921	18,079	5,876	18,124
22-9	5,975	18,025	6,000	18,000	5,988	18,012	5,959	18,041	5,935	18,065
23-9	5,998	18,002	6,000	18,000	5,999	18,001	5,997	18,003	5,995	18,005
24-9	6,021	17,979	6,000	18,000	6,010	17,990	6,035	17,965	6,055	17,945

25-9	6,044	17,956	6,000	18,000	6,022	17,978	6,074	17,926	6,115	17,885
26-9	6,067	17,933	6,000	18,000	6,033	17,967	6,112	17,888	6,175	17,825
27-9	6,090	17,910	6,000	18,000	6,044	17,956	6,150	17,850	6,235	17,765
28-9	6,113	17,887	6,000	18,000	6,055	17,945	6,188	17,812	6,295	17,705
29-9	6,135	17,865	6,000	18,000	6,067	17,933	6,227	17,773	6,355	17,645
30-9	6,158	17,842	6,000	18,000	6,078	17,922	6,265	17,735	6,415	17,585
1-10	6,181	17,819	6,000	18,000	6,089	17,911	6,304	17,696	6,475	17,525
2-10	6,204	17,796	6,000	18,000	6,100	17,900	6,342	17,658	6,536	17,464
3-10	6,227	17,773	6,000	18,000	6,112	17,888	6,380	17,620	6,596	17,404
4-10	6,250	17,750	6,000	18,000	6,123	17,877	6,419	17,581	6,657	17,343
5-10	6,273	17,727	6,000	18,000	6,134	17,866	6,457	17,543	6,717	17,283
6-10	6,295	17,705	6,000	18,000	6,145	17,855	6,495	17,505	6,778	17,222
7-10	6,318	17,682	6,000	18,000	6,156	17,844	6,534	17,466	6,839	17,161
8-10	6,341	17,659	6,000	18,000	6,168	17,832	6,572	17,428	6,900	17,100
9-10	6,364	17,636	6,000	18,000	6,179	17,821	6,611	17,389	6,961	17,039
10-10	6,386	17,614	6,000	18,000	6,190	17,810	6,649	17,351	7,022	16,978
11-10	6,409	17,591	6,000	18,000	6,201	17,799	6,687	17,313	7,083	16,917
12-10	6,432	17,568	6,000	18,000	6,212	17,788	6,725	17,275	7,145	16,855
13-10	6,454	17,546	6,000	18,000	6,223	17,777	6,764	17,236	7,206	16,794
14-10	6,477	17,523	6,000	18,000	6,234	17,766	6,802	17,198	7,268	16,732
15-10	6,499	17,501	6,000	18,000	6,245	17,755	6,840	17,160	7,330	16,670
16-10	6,522	17,478	6,000	18,000	6,256	17,744	6,878	17,122	7,392	16,608
17-10	6,544	17,456	6,000	18,000	6,267	17,733	6,916	17,084	7,454	16,546
18-10	6,566	17,434	6,000	18,000	6,278	17,722	6,954	17,046	7,516	16,484
19-10	6,588	17,412	6,000	18,000	6,289	17,711	6,992	17,008	7,579	16,421
20-10	6,610	17,390	6,000	18,000	6,299	17,701	7,030	16,970	7,642	16,358
21-10	6,632	17,368	6,000	18,000	6,310	17,690	7,068	16,932	7,704	16,296
22-10	6,654	17,346	6,000	18,000	6,321	17,679	7,106	16,894	7,767	16,233
23-10	6,676	17,324	6,000	18,000	6,331	17,669	7,143	16,857	7,831	16,169
24-10	6,698	17,302	6,000	18,000	6,342	17,658	7,181	16,819	7,894	16,106
25-10	6,720	17,280	6,000	18,000	6,352	17,648	7,218	16,782	7,958	16,042
26-10	6,741	17,259	6,000	18,000	6,363	17,637	7,256	16,744	8,021	15,979
27-10	6,763	17,237	6,000	18,000	6,373	17,627	7,293	16,707	8,085	15,915
28-10	6,784	17,216	6,000	18,000	6,384	17,616	7,330	16,670	8,149	15,851
29-10	6,805	17,195	6,000	18,000	6,394	17,606	7,367	16,633	8,214	15,786
30-10	6,826	17,174	6,000	18,000	6,404	17,596	7,403	16,597	8,278	15,722
31-10	6,847	17,153	6,000	18,000	6,414	17,586	7,440	16,560	8,343	15,657
1-11	6,868	17,132	6,000	18,000	6,424	17,576	7,476	16,524	8,408	15,592
2-11	6,888	17,112	6,000	18,000	6,434	17,566	7,513	16,487	8,474	15,526
3-11	6,908	17,092	6,000	18,000	6,444	17,556	7,549	16,451	8,539	15,461
4-11	6,929	17,071	6,000	18,000	6,454	17,546	7,585	16,415	8,605	15,395
5-11	6,949	17,051	6,000	18,000	6,463	17,537	7,620	16,380	8,671	15,329
6-11	6,969	17,031	6,000	18,000	6,473	17,527	7,656	16,344	8,737	15,263
7-11	6,988	17,012	6,000	18,000	6,482	17,518	7,691	16,309	8,803	15,197
8-11	7,008	16,992	6,000	18,000	6,491	17,509	7,725	16,275	8,870	15,130
9-11	7,027	16,973	6,000	18,000	6,501	17,499	7,760	16,240	8,937	15,063
10-11	7,046	16,954	6,000	18,000	6,510	17,490	7,794	16,206	9,004	14,996
11-11	7,064	16,936	6,000	18,000	6,519	17,481	7,828	16,172	9,072	14,928
12-11	7,083	16,917	6,000	18,000	6,527	17,473	7,862	16,138	9,139	14,861
13-11	7,101	16,899	6,000	18,000	6,536	17,464	7,895	16,105	9,207	14,793
14-11	7,119	16,881	6,000	18,000	6,545	17,455	7,928	16,072	9,275	14,725
15-11	7,137	16,863	6,000	18,000	6,553	17,447	7,960	16,040	9,343	14,657
16-11	7,154	16,846	6,000	18,000	6,561	17,439	7,992	16,008	9,412	14,588
17-11	7,171	16,829	6,000	18,000	6,569	17,431	8,024	15,976	9,481	14,519
18-11	7,188	16,812	6,000	18,000	6,577	17,423	8,055	15,945	9,550	14,450
19-11	7,204	16,796	6,000	18,000	6,585	17,415	8,085	15,915	9,619	14,381
20-11	7,220	16,780	6,000	18,000	6,593	17,407	8,115	15,885	9,688	14,312

21-11	7,236	16,764	6,000	18,000	6,600	17,400	8,145	15,855	9,758	14,242
22-11	7,252	16,748	6,000	18,000	6,607	17,393	8,174	15,826	9,828	14,172
23-11	7,267	16,733	6,000	18,000	6,615	17,385	8,202	15,798	9,898	14,102
24-11	7,281	16,719	6,000	18,000	6,621	17,379	8,229	15,771	9,968	14,032
25-11	7,295	16,705	6,000	18,000	6,628	17,372	8,257	15,743	10,039	13,961
26-11	7,309	16,691	6,000	18,000	6,635	17,365	8,283	15,717	10,109	13,891
27-11	7,323	16,677	6,000	18,000	6,641	17,359	8,309	15,691	10,180	13,820
28-11	7,336	16,664	6,000	18,000	6,647	17,353	8,334	15,666	10,251	13,749
29-11	7,348	16,652	6,000	18,000	6,653	17,347	8,358	15,642	10,323	13,677
30-11	7,360	16,640	6,000	18,000	6,659	17,341	8,381	15,619	10,394	13,606
1-12	7,372	16,628	6,000	18,000	6,664	17,336	8,404	15,596	10,466	13,534
2-12	7,383	16,617	6,000	18,000	6,669	17,331	8,426	15,574	10,538	13,462
3-12	7,394	16,606	6,000	18,000	6,674	17,326	8,446	15,554	10,610	13,390
4-12	7,404	16,596	6,000	18,000	6,679	17,321	8,466	15,534	10,682	13,318
5-12	7,414	16,586	6,000	18,000	6,684	17,316	8,486	15,514	10,755	13,245
6-12	7,423	16,577	6,000	18,000	6,688	17,312	8,504	15,496	10,827	13,173
7-12	7,432	16,568	6,000	18,000	6,692	17,308	8,521	15,479	10,900	13,100
8-12	7,440	16,560	6,000	18,000	6,696	17,304	8,537	15,463	10,973	13,027
9-12	7,448	16,552	6,000	18,000	6,699	17,301	8,552	15,448	11,046	12,954
10-12	7,455	16,545	6,000	18,000	6,703	17,297	8,567	15,433	11,119	12,881
11-12	7,462	16,538	6,000	18,000	6,706	17,294	8,580	15,420	11,192	12,808
12-12	7,468	16,532	6,000	18,000	6,709	17,291	8,592	15,408	11,265	12,735
13-12	7,473	16,527	6,000	18,000	6,711	17,289	8,603	15,397	11,339	12,661
14-12	7,478	16,522	6,000	18,000	6,714	17,286	8,613	15,387	11,412	12,588
15-12	7,483	16,517	6,000	18,000	6,716	17,284	8,621	15,379	11,486	12,514
16-12	7,486	16,514	6,000	18,000	6,717	17,283	8,629	15,371	11,559	12,441
17-12	7,490	16,510	6,000	18,000	6,719	17,281	8,635	15,365	11,632	12,368
18-12	7,492	16,508	6,000	18,000	6,720	17,280	8,641	15,359	11,705	12,295
19-12	7,494	16,506	6,000	18,000	6,721	17,279	8,645	15,355	11,778	12,222
20-12	7,496	16,504	6,000	18,000	6,722	17,278	8,648	15,352	11,849	12,151
21-12	7,497	16,503	6,000	18,000	6,722	17,278	8,649	15,351	11,915	12,085
22-12	7,497	16,503	6,000	18,000	6,722	17,278	8,650	15,350	11,949	12,051
23-12	7,496	16,504	6,000	18,000	6,722	17,278	8,649	15,351	11,906	12,094
24-12	7,496	16,504	6,000	18,000	6,721	17,279	8,647	15,353	11,839	12,161
25-12	7,494	16,506	6,000	18,000	6,721	17,279	8,644	15,356	11,767	12,233
26-12	7,492	16,508	6,000	18,000	6,720	17,280	8,640	15,360	11,695	12,305
27-12	7,489	16,511	6,000	18,000	6,719	17,281	8,635	15,365	11,622	12,378
28-12	7,486	16,514	6,000	18,000	6,717	17,283	8,628	15,372	11,548	12,452
29-12	7,482	16,518	6,000	18,000	6,715	17,285	8,620	15,380	11,475	12,525
30-12	7,478	16,522	6,000	18,000	6,713	17,287	8,611	15,389	11,401	12,599
31-12	7,473	16,527	6,000	18,000	6,711	17,289	8,601	15,399	11,328	12,672

