

Desarrollo matemático de un nuevo modelo cosmológico

Curso: 2.º Bachillerato
Año académico: 2021-22

Abstract

Since the beginning of mankind, it has been wanted to understand how the universe around us works. For this reason, physics is the discipline that seeks to know the basic pillars that govern the functioning of nature. The importance of knowledge that creates this discipline is because they exist independently of human understanding (we have nothing special) and the answers given are objective. During this project, a couple of problems that the current cosmology has due to an imperfect model have been investigated. In the following pages, an approach of a cosmological model different to the current one has been developed in order to seek explanations for the content of the universe that we do not know. In the theoretical framework it is shown one of the most important theories of modern day, Relativity; and the way we study cosmos, Cosmology. Explanations of the concepts presented on the following pages have been tried to be as simple as possible. In addition, some demonstrations that require a high technical level have been removed so that we can focus on the most important basic concepts necessary for the practical framework. However, some more relevant ones can be found in the annexes. On the other hand, the ideas of the new cosmological model are developed in the practical framework. In this model the attempt is to reformulate the current cosmological model by making small changes and thus reaching new equations. Finally, after formulating a new cosmological model, its consequences have been studied in the conclusions.

Abstracte

Des dels inicis de la humanitat s'ha volgut entendre com funciona l'univers que ens envolta. Per aquest motiu, la física és la disciplina que busca conèixer els pilars base que governen el funcionament de la natura. La importància del coneixement que crea aquesta disciplina ve donat perquè existeix independentment de la comprensió humana (no tenim res d'especial) i les respostes que es donen són objectives. Durant aquest treball, s'ha investigat un parell de problemes que té la cosmologia actual a causa d'un model imperfecte. En les següents pàgines s'ha desenvolupat un plantejament d'un model cosmològic diferent de l'actual per tal de buscar explicacions al contingut de l'univers que desconeixem. En el marc teòric es mostra una de les teories més importants de l'actualitat, la Relativitat, i la forma en què coneixem i estudiem el cosmos, la Cosmologia. Les explicacions dels conceptes que es presenten en les pròximes pàgines s'ha intentat mantenir el més simple possible. A més, s'han suprimit algunes demostracions que requereixen un alt nivell tècnic per poder centrar-nos en els conceptes bàsics més importants i necessaris per al marc pràctic. Amb tot i això, algunes més rellevants es poden trobar als annexos. D'altra banda, en el marc pràctic es desenvolupen les idees d'un nou model cosmològic formulat per mi mateix. En aquest model el que s'intenta és reformular el model cosmològic actual fent petits canvis i així arribar a noves equacions. Finalment, després de formular un nou model cosmològic, s'han estudiat les seves conseqüències a les conclusions.

Sumario

Bloque I: Introducción	4
Bloque II: Marco teórico	7
II.I Relatividad	7
II.I.I Relatividad Galileana	7
II.I.II Relatividad Especial	8
II.I.III Relatividad General	14
II.II Cosmología	26
II.II.I Big Bang	26
II.II.II Radiación de fondo de microondas	27
II.II.III La escalera de distancias cósmicas	28
II.II.IV Desplazamiento al rojo	32
II.II.V Ley de Hubble	34
II.II.VI Expansión del universo	37
II.II.VII Contenido del universo	40
Bloque III: Marco práctico	44
Bloque IV: Conclusiones	52
Bloque V: Fuentes documentales y bibliográficas	54
V.I Bibliografía	54
V.II Webgrafía	54
V.III Figuras	56
V.IV Ecuaciones	58
Anexo I	64
Anexo II	66
Anexo III	68
Anexo IV	72

Bloque I: Introducción

“La constante cosmológica, que Einstein llamó su mayor error, podría ser mi mayor descubrimiento”. Poquísimas personas pueden permitirse el lujo de decir algo así. El astrónomo australiano Brian Schmidt sí puede, y lo dice en condicional, pero ya le han dado el premio Nobel de Física por ese descubrimiento que hizo con 31 años y la tesis doctoral reciente. Todo empezó, recuerda ahora, con unas observaciones de galaxias cuyos resultados eran tan locos que, cuando los vio, se preguntó: “¿Qué hemos hecho mal?”. Temió incluso que aquello fuera el final de su carrera de científico casi recién estrenada. Repasó todo de nuevo durante semanas con su equipo, una veintena de personas, y seguía saliendo lo mismo: la expansión del universo, en lugar de estar frenándose, estaba acelerándose. Pero decían lo mismo los resultados idénticos del equipo competidor estadounidense, de Saul Perlmutter y Adam Riess (que compartieron el Nobel con Schmidt). “Entonces me di cuenta de que iba a ser algo grande”, recuerda el científico de la Universidad Nacional Australiana. (El País, 26 de Abril del 2013¹)

En el fragmento anterior de una noticia de *El País*, se puede ver que hay un problema con el modelo cosmológico. Tanto las observaciones de Brian Schmidt como del grupo competidor indicaban que el universo se está expandiendo. Todo esto empezó hace más de un siglo, en 1915, cuando Albert Einstein publicó su teoría más importante: la Teoría de la Relatividad General. La esencia de esta teoría está resumida en las ecuaciones de campo de Einstein. Estas ecuaciones relacionan el contenido del espacio-tiempo con la propia geometría en que se encuentra y nos ofrecen una teoría de la gravedad más acertada que la desarrollada por Newton. Todas las ecuaciones se agrupan en una única ecuación tensorial que será explicada con más detalle en el Bloque II (mirar punto II.I.III)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Ecuación 1. Ecuación de campo de Albert Einstein

¹ https://elpais.com/sociedad/2013/04/26/actualidad/1367001162_823234.html

Durante este proyecto nos centraremos en tratar de suprimir un componente de esta ecuación nombrado “constante cosmológica”, que se suele representar con la letra griega Lambda, Λ . Esta constante la incluyó originalmente Einstein en las ecuaciones para poder explicar un universo que no colapsara en sí mismo por efecto de la gravedad, ya que si solo estuviera la gravedad todo se fusionaría en un solo punto con el paso del tiempo. La razón de su decisión fue que en aquella época la concepción del universo era la de un universo estático, es decir, un universo que siempre había sido igual (sin expansiones ni contracciones). La función de esta constante era describir cómo se estaba expandiendo el universo para compensar la contracción de la gravedad y que se cancelaran los dos efectos.

Más adelante, se descubrió que el universo no era estático, puesto que el científico Edwin Hubble observó en 1929 que había un desplazamiento hacia el rojo en el color de las galaxias, sugiriendo que el universo estaba en expansión. Además, el contemporáneo Eddington demostró en 1930 que un universo estático no podría existir debido a su inestabilidad, cualquier pequeña perturbación lo llevaría a implosionar o expandirse de nuevo. Por este motivo, se piensa que Einstein acabó declarando que la constante cosmológica fue su mayor error y la eliminó de sus ecuaciones.

El interés por la constante cosmológica se ha renovado por el inesperado descubrimiento de la aceleración cósmica en 1998. Como se puede ver en la cita, el propio Brian Schmidt estaba desconcertado por su descubrimiento, llegando a preguntar qué era lo que habían hecho mal. Lo que estaban estudiando eran las magnitudes de supernovas lejanas y, tanto su grupo como el equipo competidor estadounidense, observaron que tenían un brillo más débil de lo esperado. Lo que quería decir esto era que las supernovas que estaban estudiando estaban más lejos de lo previsto y, por lo tanto, se alejaban más rápidamente de nosotros. La solución que encontraron para este problema era reintroducir la constante cosmológica, pero esta vez con el propósito de explicar la expansión acelerada del universo.

Llegados a este punto, podría parecer que no hay ningún problema con la expansión del universo, se introduce un componente extra a las ecuaciones de Einstein y todo funciona correctamente. En verdad, la constante cosmológica da buenos resultados a la hora de hacer predicciones, pero el problema que yo encuentro está en la interpretación de este nuevo término y los conceptos que nos lleva a crear.

A modo de ejemplo, si consideramos un universo vacío, la constante cosmológica sigue apareciendo en las ecuaciones y esta puede ser interpretada como una densidad intrínseca de energía del vacío. Además, por su efecto repulsor contrario a la de la gravedad esta constante tendría que ser una energía o presión negativa. Esta energía negativa, también llamada energía oscura (de la cual su naturaleza se desconoce) sería la causante de la expansión. Al ser una energía intrínseca del vacío, a medida que el universo se expande y el espacio aumenta se crearía más energía oscura. Esta retroalimentación de la energía oscura y de su efecto repulsor es lo que llamamos aceleración cósmica.

El anterior ejemplo y otros conceptos hacen que desconfíe de la física moderna y, aunque la constante cosmológica dé buenos resultados, durante este trabajo intentaré dar otro punto de vista al problema de la expansión del universo y responder a la pregunta que Brian Schmidt se hizo: “¿*Qué hemos hecho mal?*”.

Lo que me ha motivado a escoger este tema es principalmente la curiosidad por saber cómo funciona el universo. Además, este trabajo es una vía para aprender conceptos más complicados de matemáticas y física y poder profundizar en las ecuaciones y tecnicismos de las teorías actuales.

También, querría hacer mis primeras aportaciones científicas, puesto que es un tema que personalmente me fascina. La idea general del trabajo es tratar de crear un modelo que explique la expansión del universo sin necesidad de la constante cosmológica. Básicamente, lo que pretendo demostrar se resume en la siguiente hipótesis:

«La expansión acelerada del universo puede ser explicada sin necesidad de añadir términos innecesarios como la constante cosmológica.»

Por otro lado, las limitaciones que puedo encontrar para hacer este trabajo son mi prematuro conocimiento técnico en el campo de la relatividad y no poder hacer mis propias observaciones (aunque esto lo podré compensar gracias a una buena investigación en la red).

En resumen, los objetivos que pretendo alcanzar con este trabajo son ampliar mi conocimiento en física y cosmología y ser capaz de desarrollar nuevos conocimientos dentro del campo de la Relatividad. A partir de estos, propondré una geometría del universo a gran escala (una métrica) y buscaré unas ecuaciones que describan la expansión de este sin necesidad de términos desconocidos extra.

Bloque II: Marco teórico

Como he dicho anteriormente, en este bloque veremos toda la teoría necesaria para poder entender el marco práctico. Este apartado lo subdividiré en dos grandes grupos. Por una parte, veremos una de las grandes teorías de la física moderna, la Relatividad; y por otro lado, veremos un poco de cosmología básica con tal de entender el universo en que vivimos y algunas de las técnicas que se utilizan para estudiar el cosmos.

II.I Relatividad

En este primer apartado del marco teórico, veremos como ningún marco de referencia es absoluto llegando al punto que diferentes observadores pueden describir el mismo fenómeno de formas opuestas y ambos tener razón, ya que la realidad puede ser relativa. Podemos clasificar la Relatividad en tres tipos diferentes: la Relatividad Galileana, la Relatividad Especial y la Relatividad General. Cada una de ellas es más compleja que la anterior, por ello, las dos primeras sirven como introducción para una teoría completa.

II.I.I Relatividad Galileana

Para empezar, la Relatividad Galileana fue creada, como el nombre indica, por Galileo Galilei y fue la primera teoría en la que postula que no existían observadores absolutos. Esta teoría es muy breve e intuitiva y con un par de ejemplos debería ser suficiente para abarcarla entera. Realmente, más que una teoría, la Relatividad Galileana es un principio que formuló Galileo para dar a entender una de las consecuencias de las leyes Newton. Este principio dice que las leyes fundamentales de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales. Un sistema de referencia inercial es aquel que no está sujeto a ninguna fuerza y, por lo tanto, o está en reposo o viaja a velocidad constante. Para acabar de aclarar este principio veremos a continuación un simple ejemplo.

Imaginemos que viajamos en tren a velocidad constante. Según el principio de Galileo todas las leyes físicas del universo deberían ser válidas tanto dentro como fuera del tren. Esto implica que si haces un experimento estando en reposo respecto a las vías del tren y lo repites dentro del tren a velocidad constante, saldrá el mismo resultado. Un experimento que puede ser sencillo de replicar es dar un salto. Tanto dentro como fuera del tren caerás en la misma región de suelo que habías saltado. Si las leyes físicas no fueran las mismas para todos los observadores inerciales, el resultado del experimento anterior podría acabar en que al dar el salto dentro del tren chocáramos con el fondo de este.

Otra de las consecuencias de esta teoría es que algunas cantidades dejan de ser algo absoluto (como la velocidad, el momento o la energía cinética) y dependen del sistema de referencia que escojas. Volviendo al ejemplo del tren, un observador fuera del tren diría que, por decir una dirección, el tren se mueve hacia el este y él se encuentra en reposo. En cambio, el observador dentro del tren diría lo opuesto, es decir, que la persona en las vías se mueve hacia el oeste y que él está en reposo. Ambos puntos de vista son físicamente correctos, por ello, solemos escoger el sistema de referencia que más nos interese.

II.I.II Relatividad Especial

En segundo lugar encontramos la Relatividad Especial, formulada por Albert Einstein en 1905. En esta teoría lo único que se añade a la anterior es un postulado más, pero este postulado implica muchos otros conceptos que podrían resultar poco intuitivos como la dilatación temporal o la contracción de longitudes.

El postulado que Einstein añadió es que la velocidad de la luz en el vacío es constante para todos los observadores (sin importar a la velocidad que se muevan). Esta constante la llamamos “ c ” y tiene un valor de 299 792 458 m/s. Este postulado se respalda, no solo de las observaciones experimentales, sino que también puede ser derivado de las ecuaciones de Maxwell². Además, la velocidad de la luz corresponde a la velocidad máxima a la que puede moverse cualquier cosa por el espacio. Aunque la velocidad de la luz sea la velocidad máxima esto es mera coincidencia, es decir, lo que denominamos “velocidad de la luz” es una constante fundamental del universo y no solo la velocidad a la que se desplazan estas ondas electromagnéticas.

La primera consecuencia que veremos por el hecho de aceptar que la velocidad de la luz es constante para todos los observadores es la dilatación temporal. En este punto veremos que diferentes observadores pueden percibir el paso del tiempo de distinta forma. Para la siguiente explicación nos apoyaremos en la figura 1. En esta se representa un rayo de luz que viaja entre dos espejos desde dos puntos de referencia distintos; uno en reposo respecto los espejos (izquierda) y otro a velocidad constante respecto a los espejos (derecha). Según el primer observador, el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia que separa los espejos y volver es dos veces la longitud que separa los espejos dividido la velocidad de la luz, como podríamos esperar. Por otro lado, el observador en movimiento

² Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de cuatro ecuaciones que describen por completo los fenómenos electromagnéticos.

vería que la luz recorre más distancia que el primer observador, ya que la trayectoria de la luz deja de ser únicamente vertical. Al aceptar que la velocidad de la luz es constante, el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia entre los espejos tendrá que aumentar para los observadores que estén en movimiento. Dicho de una forma más intuitiva, un observador que mire relojes en movimiento desde su marco de referencia en reposo verá que sus segundos son más largos que relojes en reposo respecto a él. Esto es lo llamamos dilatación temporal.

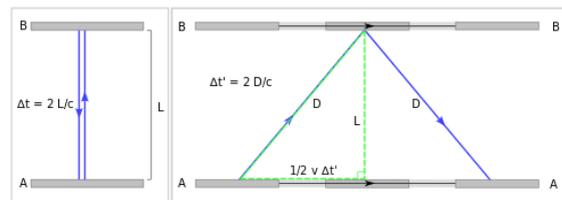


Figura 1. Gráfico para representar la dilatación temporal.

Para encontrar la relación de los tiempos entre observadores en reposo (Δt) y en movimiento ($\Delta t'$) es tan sencillo como utilizar el teorema de pitágoras en el ejemplo anterior y encontrar la relación que se puede observar en la ecuación 2 (ver Anexo I para la demostración).

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t \equiv \Delta t = \gamma \Delta t' \longleftrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ecuación 2. Dilatación temporal.

Como vemos en la ecuación 2, ambos tiempos se relacionan por un factor que depende de la velocidad a la que se mueva el objeto según nuestro marco de referencia. Por lo tanto, esto nos indica la forma en que diferentes observadores medirán el tiempo que tarda en ocurrir un fenómeno. Este factor fue desarrollado originalmente por Lorentz en sus estudios de electrodinámica clásica, por lo que se le llama factor de Lorentz y se denota con la letra griega gamma (γ). Una de las propiedades de este factor es que siempre es mayor que 1, por lo que el tiempo que mide un observador en movimiento siempre será mayor que un observador en reposo. Además, hay que destacar que este factor solo marca una diferencia a velocidades cercanas a la de la luz y por ello no estamos acostumbrados a ver los efectos relativistas en nuestro día a día.

Por otro lado, las distancias también dejan de ser cantidades absolutas, ya que ocurre otro fenómeno que llamamos contracción de longitudes. La longitud de un objeto medida en un

sistema de referencia en reposo respecto al propio objeto se denomina longitud propia (L_0). Otros sistemas de referencia que quieran medir la longitud de ese objeto (L') siempre la medirán más pequeña y se relacionan a través del factor de Lorentz de la siguiente forma:

$$L' = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Ecuación 3. Contracción de longitudes.

El problema que nos surge por estos efectos relativistas es que dejamos de tener un tiempo absoluto como en la mecánica clásica. Movernos por el espacio puede distorsionar la forma en que medimos el tiempo. Por ejemplo, si quisiéramos sincronizar dos relojes, no es tan sencillo como ponerlos juntos y hacer que marquen la misma hora, ya que en cuanto los separemos el tiempo de un reloj se atrasa respecto al otro por la dilatación temporal. Además, si tratamos de sincronizarlos a cierta distancia, la visión que tengamos del reloj más lejano siempre será del pasado, ya que la luz tarda un tiempo en viajar, por lo tanto, el reloj que tengamos con nosotros siempre lo veremos adelantado del resto de relojes más lejanos. Por culpa de esta nueva visión del universo, tenemos que redefinir algunos conceptos para poder medir correctamente.

El primer concepto que vamos a definir en el contexto de la relatividad es la simultaneidad de dos fenómenos. También veremos que los relojes que están sincronizados en un sistema de referencia no están sincronizados para el resto de observadores que se muevan a velocidad constante respecto a los relojes. Por lo tanto, para un observador dos fenómenos pueden ser simultáneos mientras que para el resto de observadores no lo son. Para describir el procedimiento de sincronización de relojes nos apoyaremos en la figura 2 (situada en la siguiente página). Los relojes que queremos sincronizar se encuentran en la coordenada x correspondientes a t_1 y t_2 . Entonces, el procedimiento que se sigue es el siguiente.

La persona en t_1 lanza un rayo de luz hacia la persona en t_2 y pone un cronómetro a contar. Cuando el rayo llega a la persona en t_2 , este es reflejado hacia la persona en t_1 y la persona en t_2 pone su reloj a cero para empezar a contar. Por otro lado, la persona en t_1 , cuando recibe el rayo en t_3 (que está en la misma posición del espacio, pero únicamente desplazado en el tiempo), define que la mitad del tiempo que ha transcurrido desde que él ha lanzado el rayo (t_1) y lo ha recibido (t_3) sucede a la vez que cuando la persona en t_2 recibe el rayo de luz. Dicho de otra forma, los dos eventos anteriormente descritos son

simultáneos. De esta forma, la persona en t_1 sabrá que la persona en t_2 empieza a contar el tiempo a la mitad de t_1 y t_3 y de esta forma poder sincronizar su propio reloj. Por lo tanto, el tiempo que tendrá que poner la persona en t_3 en su reloj será la mitad del tiempo transcurrido desde t_1 a t_3 . Aunque la persona en t_3 vea que el reloj de su compañero está atrasado, asumirá que ambos relojes están sincronizados en el presente.

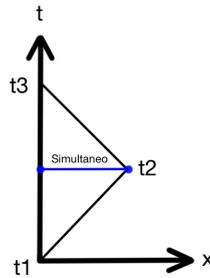


Figura 2. Procedimiento para sincronizar dos relojes.

Después de haber definido qué es la simultaneidad, ahora veremos que esto es algo relativo. Esta vez nos apoyaremos en la figura 3 para ilustrarlo (situada en la siguiente página). En esta figura se representa de color verde la trayectoria de un observador en movimiento relativo a los primeros observadores. Desde nuestro punto de vista, si el observador en movimiento intenta sincronizar los relojes con un segundo observador que esté en reposo respecto a él, veríamos que la distancia del rayo de luz de ida es más larga que la de vuelta. En cambio, para el observador en movimiento, estas dos distancias son idénticas, ya que él se considera un observador en reposo. Por este motivo, la persona en movimiento respecto a nosotros, sincronizará los relojes diferente a nosotros. El punto que la persona en movimiento escogerá para ser simultáneo a cuando el observador en t_2 recibe el rayo de luz, será exactamente el punto central entre en el momento que emite el rayo y lo recibe (igual que haría un observador en reposo). Al usar el mismo procedimiento que nosotros, el momento intermedio entre los dos sucesos clave resultará ser anterior al momento que nosotros escojamos. Por este motivo, los relojes que sincronizamos en un marco de referencia no estarán sincronizados en el resto de marcos de referencia.

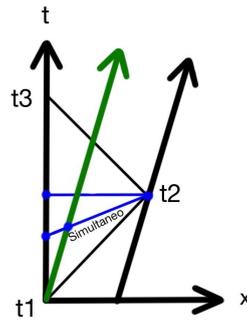


Figura 3. Simultaneidad de dos observadores en movimiento relativo a otro marco de referencia en reposo.

Como estamos viendo en este apartado, muchas de las cantidades se vuelven dependientes del observador, lo que nos lleva a la pregunta: ¿Hay algo que todos los observadores estén de acuerdo? Como hemos visto al principio de este punto, la velocidad de la luz es una constante fundamental del universo que no depende del observador. El sentido de esta constante es más profundo que la simple velocidad de la luz y a continuación veremos el porqué.

Si estudiamos cómo afecta el factor Lorentz al paso del tiempo en un objeto en movimiento se nos dibuja un gráfico como el de la figura 4. En el eje horizontal dibujamos la velocidad a la que se mueve un objeto (siendo el 100%, “c”, la velocidad de la luz), mientras que en el eje vertical dibujamos la velocidad a la que transcurre el tiempo. Si estamos en reposo cada segundo nos “moveremos”³ un segundo, pero si un objeto viaja a cierta velocidad, cada segundo (nuestro) se “moverá” menos de un segundo. La curva que se dibuja corresponde exactamente a la de un cuarto de círculo y es donde podemos situar todos los objetos en movimiento de nuestro alrededor. Dependiendo de la velocidad a la que se muevan tendrán cierta dilatación temporal. Una propiedad importante de esta curva es que todos los puntos están situados a la misma distancia del centro (lo que entendemos como el radio). Por lo tanto, si consideramos nuestro movimiento por el espacio-tiempo⁴, la velocidad a la que viajamos es siempre la de la luz. Una de las ideas que surgen de este planteamiento es que si un objeto que para cierto observador está en reposo en el espacio, se moverá a la velocidad de la luz (o la velocidad máxima) por el tiempo. En resumen, la velocidad que se mueve un objeto por el espacio-tiempo es constante y lo único que es relativo es como se reparten los componentes de esa velocidad entre el espacio y el tiempo⁵.

³ En este contexto, “moverse” es avanzar o progresar en el tiempo. Este movimiento no lo podemos percibir por lo que puede ser difícil de interpretar.

⁴ El espacio-tiempo es la idea de unificar tanto las tres dimensiones espaciales como la dimensión temporal.

⁵ Normalmente, en Relatividad se suelen utilizar unidades donde $c = 1$ (la velocidad de la luz).

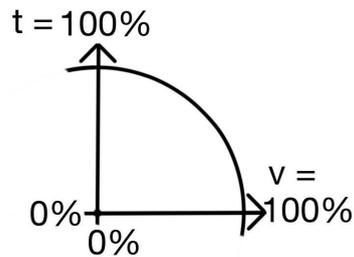


Figura 4. Gráfico de dilatación temporal respecto a la velocidad.

Una de las representaciones más convenientes de mostrar el espacio tiempo es haciendo uso de los conos de luz. En esta representación se reduce una dimensión espacial para incluir al tiempo en el eje vertical, por lo tanto, no describe nuestro espacio-tiempo al completo. La idea de esta representación es situar un observador en el origen de coordenadas y hacer que evolucione a través del tiempo por el eje vertical. De esta forma, se dibuja el cono de luz alrededor, el cual representa el resto de puntos del espacio que, viajando a la velocidad de la luz, se podría llegar desde el origen. El propósito de los conos de luz es distinguir la zona entre los sucesos causalmente conectados (dentro del cono de luz) y los que no. Dicho de otra forma, un suceso fuera del cono de luz no puede afectar de ninguna forma al observador situado en el centro, ya que tendría que viajar la información de ese suceso más rápido que la luz (lo cual es imposible); y esto se entiende como que están causalmente desconectados (uno no puede afectar a otro y viceversa). También se suele dibujar un cono de luz hacia el pasado. El propósito de este es abarcar todos los puntos del espacio del pasado que han afectado al observador.

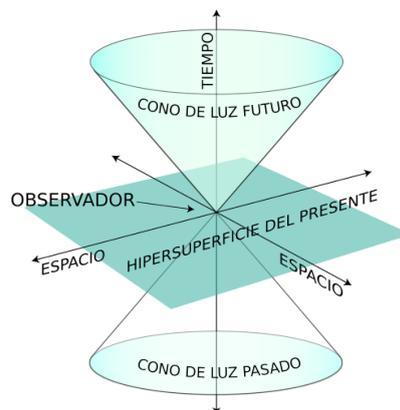


Figura 5. Representación del espacio-tiempo con un cono de luz.

Para concluir este apartado, me gustaría comentar los límites que tiene la teoría de la Relatividad Especial. Para explicarlo de forma intuitiva, el nombre de Relatividad Especial hace referencia a la particularidad del universo que estudia. La especialidad de esta teoría es que no se considera la curvatura del espacio-tiempo producida por el contenido del universo. Dicho de otra forma, esta teoría no tiene en cuenta la gravedad. En cuanto al resto de tópicos es una teoría que da buenos resultados.

II.I.III Relatividad General

Para conseguir una teoría relativista en la que se tiene en cuenta la gravedad, Albert Einstein formuló su última teoría de la Relatividad en 1915. Los diez años de diferencia entre la publicación de ambas teorías se debe al incremento de complejidad matemática que esta teoría requiere. Como veremos en los siguientes párrafos, la gravedad en esta teoría deja de ser una fuerza, contraponiéndose a la mecánica clásica y a las leyes de Newton. Esta interacción pasa a ser un efecto de la curvatura del espacio-tiempo en el que los objetos se atraen. Antes de ver la ecuación tensorial que habíamos mencionado en la introducción, veremos en que se basa esta teoría y sus principios básicos.

Para llegar a las ecuaciones, vamos a empezar por la primera idea que Einstein tuvo para conectar la gravedad con su anterior teoría. Einstein se dio cuenta que objetos en caída libre acelerados por la acción de la gravedad podrían describirse en un marco de referencia en reposo. El típico ejemplo que suele ser explicado para comprender esta idea es una persona en caída libre desde lo alto de una escalera. Imaginemos a esta persona llevando diversos objetos en sus manos para más tarde dejarse caer. Si marcamos un marco de referencia en la persona que cae, los objetos alrededor suyo no se moverán respecto a él. Visto desde fuera, todos los objetos estarían cayendo a la misma velocidad y con la misma aceleración, por lo que la velocidad relativa entre los objetos siempre es nula.

Entonces, Albert Einstein formuló lo que hoy conocemos como el principio de equivalencia. Este principio dice que en una región del espacio-tiempo suficientemente pequeña podemos encontrar una representación tal que la leyes de la física se reduzcan a las de la Relatividad Especial. Lo que quiere decir este principio es que un observador afectado por la gravedad es equivalente a un observador en reposo con un espacio-tiempo plano (como en la relatividad especial). El inconveniente de este principio es que solo es válido para “regiones del espacio-tiempo suficientemente pequeñas”, es decir, las representaciones que podemos hacer tienen un tamaño y un tiempo máximo en el que son válidas. Estas limitaciones se deben a que la gravedad no es constante en todos los puntos del espacio (la gravedad

cerca de un planeta es más intensa que lejos de éste). Volviendo al ejemplo de la persona en la escalera, un objeto encima suyo caerá más lento por estar más lejos del centro de gravedad y, por lo tanto, la persona verá que ese objeto se aleja de él por “fuerzas invisibles”. Estas “fuerzas invisibles” llevarían a pensar a la persona en caída libre que no está en un sistema de referencia inercial y, por lo tanto, las leyes de la física no pueden ser aplicadas en un sistema de referencia marcado en él.

Si vemos el postulado que Einstein formuló desde el otro punto de vista, un observador estando en reposo respecto al suelo de la superficie terrestre, es equivalente a un observador que está acelerando hacia arriba. Esta otra forma de ver el postulado nos lleva a pensar una de las consecuencias más importantes que popularizó la teoría de Einstein: la trayectoria de la luz se dobla al atravesar un campo gravitatorio. Para entender por qué la luz se comporta de esta forma, veremos que sucede o que observa una persona que esté acelerando a un ritmo constante. Para el ejemplo siguiente, nos apoyaremos en la figura 6.

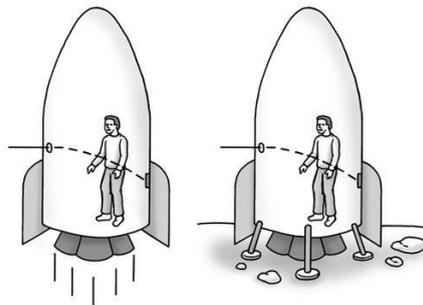


Figura 6. Equivalencia entre un observador acelerando (izquierda) y un observador en presencia de un campo gravitatorio (derecha).

Si aceptamos el principio de equivalencia, lo lógico sería pensar que una persona acelerando observaría de forma idéntica lo mismo que si estuviese en reposo y en presencia de la misma aceleración por la gravedad. Si nos centramos en el observador de la figura 6 que acelera a un ritmo constante (el observador de la izquierda), este observa que la trayectoria de la luz aparentemente se dobla (en la imagen este efecto está exagerado para que se pueda apreciar). Esto sucede porque en el momento que la luz entra al cohete, este está en movimiento respecto a la trayectoria de la luz. Por esta razón, esto provoca que la luz colisione por debajo del punto en que había entrado. La diferencia que tiene la trayectoria de la luz con un observador a velocidad constante y otro acelerando es la curva que se forma. Si el observador fuera a velocidad constante respecto la trayectoria de la luz, esta colisionaría más abajo del punto que había entrado, pero viajaría en una línea

recta en picado. En cambio, si el observador está acelerando, la velocidad a la que se mueve el cohete varía, provocando que el aparente decaimiento de la luz aumente con el tiempo que viaja la luz por el interior.

Este fenómeno de la luz no se produce en la mecánica Newtoniana, lo cual sirvió para corroborar la veracidad de la Relatividad General. La interpretación que se le da a este fenómeno en el contexto de la nueva teoría es que la luz sigue viajando en líneas rectas, pero la propia geometría en que se desplaza está curvada y, por ello, su trayectoria aparenta curvarse. Imaginar ésta deformación en tres dimensiones es extremadamente complicado, por ello, veremos un ejemplo de espacios curvados en dos dimensiones.

Un ejemplo claro de un espacio bidimensional curvado es la superficie de una esfera. Si nosotros dibujamos dos líneas paralelas lo más rectas posible sobre esta superficie (por ejemplo dos meridianos) estas acabarán juntándose en un punto. Siguiendo con la analogía, seres bidimensionales que viven en esta superficie podrían tratar de viajar por estos meridianos y verían que las líneas paralelas tienden a juntarse. Viendo este fenómeno de atracción, los seres bidimensionales podrían concluir erróneamente que existen “fuerzas invisibles” que atraen los objetos. Esta misma situación es la que nos sucede a nosotros, pero en vez de únicamente vivir en un espacio de dos dimensiones, vivimos en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones (tres espaciales y una temporal). Resumidamente, este fenómeno en que las líneas paralelas convergen es lo que llamamos gravedad.

A continuación, vamos a definir diversos conceptos que son necesarios como bases de la teoría. Primeramente, definiremos que es el espacio-tiempo. Ya hemos mencionado que es la idea de unificar el concepto de espacio con el de tiempo, pero, definido de forma más precisa, el espacio-tiempo es un conjunto de puntos los cuales tienen propiedades bien entendidas que los conectan. Segundamente, definiremos un “evento” simplemente como dónde y cuándo un suceso ocurre. Es importante entender que los “eventos” existen independientemente de las coordenadas que le asignemos. Finalmente, es necesario una métrica. Esta se define como la noción de distancia entre dos eventos en el espacio-tiempo; básicamente, hará la función de vara de medir de nuestro espacio-tiempo.

Definidos varios conceptos básicos, posteriormente veremos la nomenclatura que utiliza esta teoría. En Relatividad General, se hacen uso de muchos índices para designar todos los componentes de cada término (por ejemplo, para vectores), pudiendo llegar a ser muy confuso. Por este motivo, en los siguientes párrafos trataremos de entender los diferentes usos para los índices y sus significados.

Primero de todo, se utilizan dos alfabetos distintos, el griego y el latino. Cuando se utiliza el alfabeto griego, este simboliza los números del cero al tres siendo el cero el componente temporal y los números del uno al tres los componentes espaciales (x, y, z). Por otro lado, el alfabeto latino, se utiliza cuando hacemos referencia a sólo los componentes espaciales del objeto que estemos estudiando, es decir, este alfabeto representa solo los números del uno al tres ($x \rightarrow 1, y \rightarrow 2, z \rightarrow 3$).

En segundo lugar, encontramos el convenio de suma de Einstein el cual nos dice que si hay dos índices iguales en un mismo término, uno como subíndice y el otro como superíndice (o viceversa), se tienen que sumar sobre todos los valores que este índice toma (ver ecuación 4). En el caso de la Relatividad, sobre cuatro valores. Este tipo de índice se denomina *dummy index* en la comunidad inglesa y hace referencia a la capacidad de servir como sustituto de los números. De esta forma conseguimos una notación más compacta.

$$\Lambda_{\alpha}^{\beta} A^{\alpha} = \Lambda_0^{\beta} A^0 + \Lambda_1^{\beta} A^1 + \Lambda_2^{\beta} A^2 + \Lambda_3^{\beta} A^3 \equiv \sum_{\alpha=0}^3 \Lambda_{\alpha}^{\beta} A^{\alpha}$$

Ecuación 4. Ejemplo del convenio de suma de Einstein.

En tercer lugar, tenemos el resto de índices que no simbolizan sumaciones y únicamente sirven para designar los componentes de los objetos que estamos estudiando. Estos los llamamos índices libres (o *free index* en inglés). En la ecuación 4, β es un índice libre. En el caso de que hubiese más de dos índices iguales en el mismo término, por ejemplo tres α , esto nos indica que la expresión está mal escrita.

Por último, la notación con índices también se utiliza para escribir derivadas parciales de una forma muy compacta. En algunos casos necesitaremos hacer las derivadas parciales respecto a cada coordenada (tanto del tiempo como del espacio) y por ello se escribe el símbolo de derivada parcial con un índice para indicar sobre qué componente se deriva (mirar ecuación 5).

$$\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \equiv \partial_{\beta} A^{\alpha}$$

Ecuación 5. Ejemplo de la notación de derivadas parciales.

La gran mayoría de objetos que utilizaremos, los cuales les asignamos los diferentes índices, los llamamos tensores. Un tensor es un objeto el cual tiene ciertas cantidades físicas asociadas y une los conceptos de escalar, vector y matriz en uno solo. Para entender este objeto veremos el ejemplo más familiar, el escalar, y trataremos de generalizarlo de tal forma que lleguemos al concepto de tensor.

Un escalar es una magnitud invariable e independiente del observador de cierto objeto. Por ejemplo, la masa en reposo es una cantidad escalar, por lo tanto, todos los observadores mediremos el mismo valor. Para representar las cantidades escalares solo nos hace falta especificar un único número.

Por otro lado, si queremos describir otras magnitudes más complejas, como la velocidad de un objeto, no nos es suficiente con especificar un solo número. De este modo, se creó la idea de vector. Un vector es una cantidad del espacio que existe independiente del sistema de referencia el cual tiene módulo, dirección y sentido (gráficamente nos lo podemos imaginar como una flecha). Este vector puede ser representado de diversas formas a partir de sus componentes. Estos componentes sí dependen del sistema de referencia y, diferentes observadores, pondrán diferentes componentes representando el mismo vector.

En el caso que, en vez de querer describir la velocidad de un objeto, queremos describir cantidades aún más complejas no nos bastaría con un vector. Por este motivo se creó la idea de tensor. Los tensores se pueden clasificar por sus dimensiones y por su orden. Las dimensiones de un tensor hace referencia al espacio en que existe (en el caso de la Relatividad utilizamos cuatro) y el orden a la complejidad o número de índices que requiere para ser descrito. Los componentes que requiere un tensor se calculan a partir de la siguiente expresión:

$$N = d^m$$

Ecuación 6. Relación entre número de componentes con las dimensiones y orden de un tensor

Donde “N” son el número de componentes, “d” las dimensiones y “m” el orden del tensor. De esta forma, un escalar es un tensor de orden 0, un vector de orden 1 y una matriz de orden 2. Normalmente, el nombre de “tensor” se reserva para aquellos tensores de orden mayor que 2. Por lo tanto, a partir de este momento, me referiré a un tensor de orden 2 como simplemente un tensor; mientras que los escalares seguiré nombrandolos como escalares y los vectores como vectores. Los tensores de tercer o mayor orden no son muy comunes y,

por lo tanto, en el caso de necesitarlo especificaré su orden. Además, los tensores de gran orden son prácticamente imposibles de imaginar y quedan relegados a puras herramientas matemáticas. Aún así en el siguiente párrafo trataremos de asimilar el significado de un tensor de orden 2.

Gráficamente, un tensor lo podemos representar como un pequeño cubo en el cual en cada una de sus caras tiene un vector asociado que a su vez tiene diferentes componentes. Esta representación puede resultar útil para describir las tensiones que sufre un sólido rígido. Se necesitan diferentes vectores en cada una de las caras porque el punto de aplicación de las tensiones influye en la respuesta del objeto. Por ejemplo, si hacemos una fuerza en la cara superior hacia arriba, el objeto experimentará una aceleración vertical. En cambio, si hacemos una fuerza en una de las caras laterales y hacia arriba, el objeto experimentará cierta rotación. Para agrupar todas las fuerzas que experimenta el objeto de cada una de sus caras, se utiliza una matriz para especificar cada componente. En un caso tridimensional sólo es necesario especificar tres de las seis caras del pequeño cubo, ya que las fuerzas que se aplican en las otras tres caras son paralelas a las otras tres.

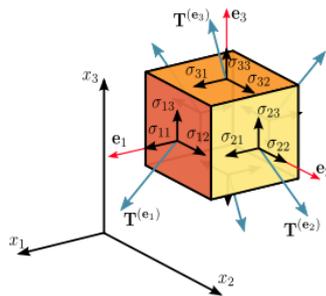


Figura 7. Representación de un tensor de orden dos en tres dimensiones.

Después de haber entendido el concepto de tensor, ahora veremos algunas cantidades tensoriales que necesitaremos para este trabajo.

El primer tensor que vamos a ver se trata de unos vectores especiales. Si nosotros queremos describir por completo una cantidad tensorial, no nos es suficiente con especificar los componentes que medimos. Para ello nos hace falta especificar los vectores base que estamos utilizando. Haciendo una pequeña analogía con las medidas que hacemos, si un hombre promedio mide 1,70 m, 1,70 serían los componentes y el metro sería el vector base. Los vectores con componentes y vectores base se suelen escribir de la siguiente forma:

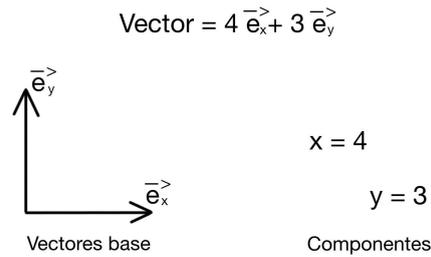


Figura 8. Representación de un vector con sus vectores base y componentes.

También, se pueden expresar con una notación más compacta utilizando índices y el convenio de suma de Einstein de la siguiente forma:

$$\vec{A} = A^\mu \vec{e}_\mu$$

Ecuación 7. Vector expresado con notación de índices.

En segundo lugar, un tensor esencial en el cálculo tensorial es la delta de Krönecker. Este tensor equivale a la matriz identidad, es decir, tiene un valor de uno si sus índices son iguales y de cero si son diferentes. Este tensor se puede visualizar de la siguiente forma:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

Ecuación 8. Expresión de la delta de Krönecker.

En tercer lugar, encontramos el tensor métrico. Este tensor es el más importante y el que más se utiliza en la teoría de la Relatividad debido a que es donde se codifica la gravedad. Además, como podríamos intuir por su nombre, este tensor es el que nos da la noción de distancia entre dos eventos en el espacio-tiempo. Este tensor se define como el producto escalar de todas las combinaciones de los vectores base y se representa con la letra “g” con dos subíndices (normalmente son μ y ν). Este tensor es simétrico, es decir, la métrica no cambia si intercambias sus índices. Esto se debe a que es indiferente el orden en que multipliques los vectores base.

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu}$$

Ecuación 9. Definición del tensor métrico.

Existe un caso especial, cuando el espacio-tiempo es plano, que en vez de escribirse con la letra “g” se escribe con la letra griega eta (η). En este caso, la métrica adopta la siguiente forma:

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 10. Tensor métrico en un espacio-tiempo plano.

Otra manera importante de expresar la métrica es con su forma inversa. La inversa de la métrica se define como un tensor con dos superíndices el cual al multiplicarlo por la métrica el resultado es la delta de Krönecker.

$$g_{\mu\alpha} \cdot g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$$

Ecuación 11. Inversa de la métrica

En cuarto lugar, veremos el tensor que aparece en la parte derecha de la ecuación de campo de Einstein (ver ecuación 1). Este es el tensor de energía-momento y sirve para describir el contenido que hay en el universo y como fluye en las diferentes dimensiones. Por ejemplo, el componente T^{01} es el flujo del componente 0 en la dirección 1, es decir, el flujo de energía en la dirección 1 (o coordenada x). El resto de interpretaciones de este tensor se puede observar a continuación en la figura 9.

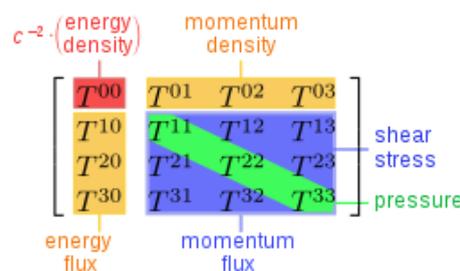


Figura 9. Interpretación física de cada componente del tensor energía-momento.

Para ver el uso de este tensor en la práctica, a continuación vamos a ver el ejemplo para un fluido perfecto en un espacio-tiempo plano. Los fluidos perfectos se caracterizan únicamente por dos propiedades, la densidad y la presión. Además, si buscamos un sistema de referencia para representar este fluido perfecto el cual esté en reposo, todos los componentes que no pertenezcan a la diagonal principal se anularán, ya que no habrá

ningún tipo de flujo de energía o momento. Por lo tanto, el tensor de energía-momento adoptará la siguiente forma:

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Ecuación 12. Tensor de energía-momento de un fluido perfecto.

Si queremos encontrar una ecuación que nos describa este fluido de una forma más general tenemos que hacer uso de la siguiente ecuación:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$$

Ecuación 13. Ecuación para encontrar el tensor de energía-momento de un fluido perfecto.

Donde “ $T_{\mu\nu}$ ” es el tensor de energía-momento, “ ρ ” la densidad, “ p ” la presión, u_μ y u_ν la velocidad del fluido y “ $g_{\mu\nu}$ ” la métrica en la que esté el fluido. Nótese que si aplicamos el anterior ejemplo a la ecuación 13, la métrica sería la de un espacio-tiempo plano (η) y las cuadrivelocidad (la velocidad en las cuatro dimensiones) únicamente tendría la componente temporal. Por lo que, al operar, nos quedaría la ecuación 12 (ver anexo II para la demostración).

En quinto lugar, vamos a ver una herramienta utilizada para describir la curvatura del sistema de coordenadas que escojamos. El primer indicio de que nos estamos moviendo por un espacio curvo es que nuestros vectores base cambian a medida que nos desplazamos. Esto podría ser el caso de un sistema de coordenadas polares, ya que, por ejemplo, el vector base del radio cambia a medida que te desplaces por el ángulo (el vector base rotará).

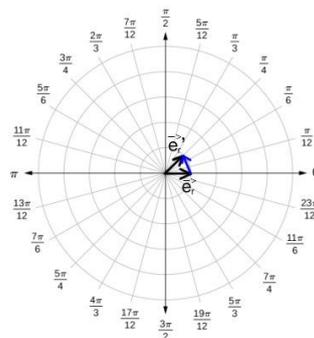


Figura 10. Sistema de coordenadas polares.

Para calcular cómo cambian los vectores base a medida que nos movemos, simplemente necesitamos hacer las derivadas parciales. El resultado de estas derivadas parciales siempre será una combinación lineal de los propios vectores base, por lo que el resultado se suele denotar con un objeto de tres índices multiplicado por un vector base. Este objeto de tres índices es lo que se conoce como los símbolos de Christoffel y se escribe con la letra griega gamma mayúscula.

$$\partial_\alpha \vec{e}_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu$$

Ecuación 14. Definición de los símbolos de Christoffel.

Calcular los símbolos de Christoffel a partir de los vectores base puede resultar muy tedioso, por lo que suele ser más conveniente calcularlos a partir del tensor métrico. Como hemos visto anteriormente, la métrica se calcula a partir de los vectores base y por ello, a partir de sus diversas propiedades, podemos llegar a la siguiente ecuación:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta})$$

Ecuación 15. Ecuación para calcular los números de Christoffel.

Finalmente, para acabar de construir una teoría de la gravedad necesitaremos un tensor que nos relacione la curvatura del espacio-tiempo con su contenido. Para el contenido, se utiliza el tensor de energía-momento mientras que para la curvatura es un poco más difícil de escoger. Este tensor no puede adoptar cualquier forma, ya que tiene que ser coherente con la otra parte de la igualdad y tener propiedades similares al tensor energía momento.

Previamente a que Einstein desarrollara su teoría de la Relatividad General, Riemann inventó un tensor con su nombre. El tensor de Riemann se trata de un “pequeño monstruo” de cuatro índices que describe completamente la curvatura de cualquier espacio en cualquier número de dimensiones. Este se puede calcular a partir de los números de Christoffel de la siguiente forma:

$$R_{\mu\delta\nu}^\gamma = \partial_\delta \Gamma_{\nu\mu}^\gamma - \partial_\nu \Gamma_{\delta\mu}^\gamma + \Gamma_{\delta\sigma}^\gamma \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\gamma \Gamma_{\delta\mu}^\sigma$$

Ecuación 16. Cálculo del tensor de Riemann.

Este tensor no es apto para la teoría de Einstein debido a su exceso de índices. Por este motivo, para reducir los dos índices extras se utiliza el convenio de suma de Einstein en el primer y tercer índice. El resultado de esta operación se conoce como el Tensor de Ricci y se expresa de la siguiente forma:

$$R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = R_{\mu\nu}$$

Ecuación 17. Definición del Tensor de Ricci.

Realmente, para calcular el Tensor de Ricci no es necesario calcular el tensor de Riemann, ya que podemos usar directamente los símbolos de Christoffel aplicando el convenio de suma de Einstein de la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}$$

Ecuación 18. Cálculo del Tensor de Ricci a partir de los símbolos de Christoffel.

Podríamos pensar que el Tensor de Ricci ya es suficiente para la teoría de la gravedad, pero este no cumple otra propiedad importante para poder igualarlo con el tensor de energía-momento. Esta propiedad es de la divergencia⁶. Mientras que para el tensor de energía-momento es igual a 0, para el Tensor de Ricci no. Para resolver este problema necesitaremos otro componente más.

El último factor que necesitamos para construir las ecuaciones de campo de Einstein es el escalar de Ricci. Este se calcula haciendo la sumatoria de los dos índices del Tensor de Ricci de la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R_{\mu}^{\mu} \equiv R$$

Ecuación 19. Definición del escalar de Ricci.

A partir de cálculos que superan el nivel matemático de esta explicación, se llega a la conclusión que el tensor más adecuado para la teoría de la Relatividad General, el cual se conoce como tensor de Einstein, es la resta del Tensor de Ricci menos un medio de la métrica multiplicado por el escalar de Ricci (ver ecuación 20).

⁶ La divergencia mide el cambio en la densidad de un campo tensorial en cada punto. En el caso del tensor energía-momento, al ser igual a cero, nos expresa el principio de conservación de energía y momento.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Ecuación 20. Tensor de Einstein.

El tensor de Einstein sí que se puede igualar al tensor de energía-momento, pero se necesita una constante de proporcionalidad que exprese la relación entre la cantidad de materia y cantidad de curvatura que genera. Para calcular esta constante, se parten de las ecuaciones de Newton como una aproximación de las ecuaciones de Einstein y de forma natural surge la constante que necesitamos. Esta constante resulta ser igual a $(8\pi G)/c^4$, donde G es la constante de gravitación universal de Newton y c es la velocidad de la luz. Juntando todos los componentes en una sola ecuación, esta adopta la siguiente forma.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Ecuación 21. Ecuación de campo de Einstein.

Finalmente, esta ecuación permite añadir una constante sin perder ninguna de las propiedades que necesita la ecuación tensorial para ser consistente, lo cual permite introducir a la constante cosmológica de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Ecuación 22. Ecuación de campo de Einstein con constante cosmológica.

II.II Cosmología

En este segundo gran apartado veremos la forma en que estudiamos el cosmos. Para comprender el lugar donde vivimos, empezaremos viendo desde los inicios del universo hasta los posibles futuros que nos deparan. Además, veremos algunos de los métodos y técnicas para deducir cantidades del universo únicamente observando la bóveda celeste.

II.II.I Big Bang

Para empezar con la teoría nos remontaremos a los orígenes del Universo, hace aproximadamente catorce eones⁷. En la cosmología actual, el Big Bang es la mejor explicación científica de cómo se formó todo lo que conocemos hoy en día.

Para entender qué es el Big Bang, primero hay que dejar claro que el nombre “*Big Bang*” lo propuso el astrofísico Fred Hoyle a modo de burla y que, probablemente, es el peor nombre para esta teoría. Esto se debe a que ni fue grande (*Big*), ni fue una explosión (*Bang*) y ni tan solo explica el propio momento del Big Bang.

La teoría del Big Bang puede explicar fenómenos a partir de un tiempo de Planck⁸ después del Big Bang. Lo que explica esta teoría es que todo surgió de una singularidad, es decir, un punto infinitamente pequeño del espacio. No es posible explicar el momento del Big Bang (antes de un tiempo de Planck) ya que ni el espacio ni el tiempo aún existían.

Después de un tiempo de Planck, lo que dice la teoría es que el espacio se expandió extremadamente rápido, de forma exponencial, lo que se denomina periodo inflacionario. Durante este período, la densidad de energía era tan alta que los fotones que se emitían eran reabsorbidos pocos instantes después, lo que ha provocado que no nos llegue ningún tipo de información electromagnética de esos tiempos. Después de unos 400.000 años, se empezaron a formar átomos estables y el universo se hizo transparente, dejando pasar luz entre estos nuevos átomos. Más tarde, esta inflación desaceleró a causa de la gravedad dejando el universo que observamos.

⁷ Un eón equivale a mil millones de años

⁸ Un tiempo de Planck equivalen a aproximadamente 10^{-43} segundos

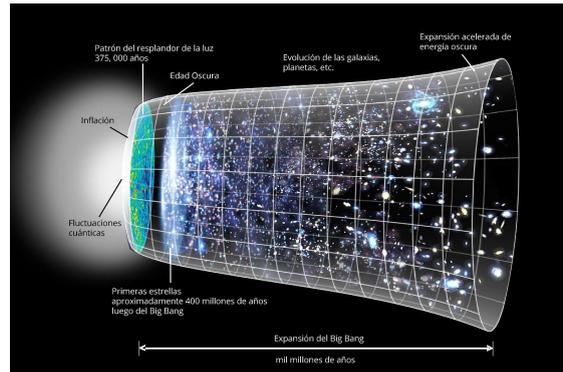


Figura 11. Expansión posterior al Big Bang

II.II.II Radiación de fondo de microondas

Una de las consecuencias y evidencias más importantes del Big Bang es la presencia de la radiación de fondo de microondas. Este concepto hace referencia a la primera información electromagnética que nos llega después del Big Bang. Esta luz se sitúa por debajo del espectro visible (su frecuencia pertenece al rango de las microondas), por lo que se necesitan telescopios especializados para observar esta radiación.

Se le llama radiación de *fondo* ya que detrás de esta luz está completamente oscuro, no hay más radiación electromagnética. Al igual que cuando observamos un paisaje, podemos distinguir que está más cerca o que está más lejos; pues esta radiación sería la luz más lejana. Además, como la luz tarda un tiempo en propagarse, al mirar más lejos, también estamos mirando más al pasado. De esta forma podemos saber que el universo en el pasado era como nos indica la radiación de fondo de microondas.

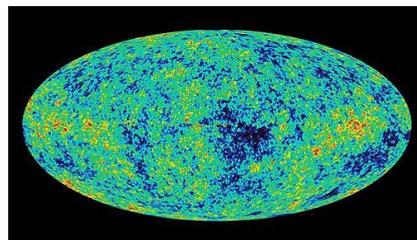


Figura 12. Imagen de la radiación de fondo de microondas.

La información que nos aporta la radiación de fondo es que en el pasado el universo era homogéneo⁹ e isótropo¹⁰ y, por lo tanto, actualmente debería ser igual (al menos a gran

⁹ La homogeneidad del universo significa que las propiedades (o leyes físicas) no dependen de la posición.

¹⁰ La isotropía del universo significa que las propiedades (o leyes físicas) no dependen de la dirección.

escala). Esta hipótesis se denomina “principio cosmológico”. Este principio nos lleva a pensar que actualmente no estamos situados en una posición privilegiada en el universo, lo cual es suficientemente satisfactorio para una explicación científica, ya que no requiere de invenciones que no podamos probar. En el caso contrario de que nos situemos en una posición privilegiada del universo, necesitaríamos una explicación del porqué de este extraño fenómeno.

A pesar de las diferencias cromáticas que existen en la figura 12, estas representan variaciones de una parte en 10.000, es decir, variaciones realmente pequeñas. Sólo con medidas de alta precisión, como las del satélite Cosmic Background Explorer (COBE), ha sido posible medir las inhomogeneidades espaciales en la distribución de la radiación de fondo de microondas. Estas inhomogeneidades se crearon por las interacciones de partículas durante el periodo inflacionario y son las semillas de la estructura a gran escala de las galaxias y cúmulos de galaxias actuales.

II.II.III La escalera de distancias cósmicas

Antes de continuar con otros conceptos cosmológicos, veremos algunas de las técnicas para comprender el cosmos. Dos características muy importantes que nos interesan de los objetos que nos rodean son la distancia y la velocidad relativa entre el cuerpo que se estudia y nosotros. En este apartado nos centraremos en la primera de ellas, la distancia.

Conocer la distancia a la que está un objeto cercano es bastante sencillo. Con una simple cinta métrica dejamos un extremo en el origen y el otro donde esté el objeto y miramos la distancia que marque nuestra cinta. Para objetos más lejanos, los cuales no podemos usar una cinta métrica, se vuelve un poco más complicado; podríamos usar un rayo de luz y, con un par de espejos, medir el tiempo que tarda la luz en regresar. Con este tiempo, lo dividimos entre dos (para solo saber el tiempo del viaje de ida) y lo multiplicamos por la velocidad de la luz para obtener la distancia entre los dos espejos. Para objetos aún más lejanos (como por ejemplo un planeta) esta tarea se vuelve terriblemente compleja, ya que no podemos acercarnos para colocar espejos ni nada por el estilo. Además, aunque sí se pudiera, la luz tardaría demasiado tiempo, por lo cual no sería un método eficiente.

Por este motivo, a nivel cosmológico, se utiliza un método que llamamos escalera de distancias cósmicas. Este método consiste en estudiar los fenómenos que nos rodean con diferentes técnicas dependiendo del orden de magnitud de la distancia del objeto, es decir, dependiendo de la distancia que se sitúe el fenómeno que estamos estudiando utilizaremos

una técnica u otra. La mayoría de las técnicas se basan en estudiar a qué distancia y qué propiedades tienen los objetos más cercanos para poder extrapolar esos datos a objetos cada vez más lejanos, lo cual recuerda a subir unos escalones de una escalera.

El primer escalón de esta escalera se basa en el paralaje. Este es un método geométrico en el cual los objetos más cercanos parecen desplazarse más que los objetos más lejanos al movernos lateralmente. Este efecto es el mismo que observamos cuando viajamos en coche y los objetos más cercanos parecen moverse más rápido que los objetos más lejanos (una montaña parece no moverse respecto a las señales que están en la carretera). La limitación de este método está en que solo es útil para objetos celestes dentro de la vía láctea, ya que los telescopios actuales no son lo suficientemente potentes para detectar ese movimiento lateral en galaxias más lejanas.

Para la explicación del cálculo de distancias con este método haremos uso de la figura 13 para su mejor entendimiento. Primero de todo, se necesita localizar el objeto del que queremos saber su lejanía (en nuestro diagrama sería el punto O) y tener un punto de referencia fijo situado mucho más atrás. Este punto fijo representa que siempre está en la misma posición de la bóveda celeste, aunque realmente es una aproximación. Esta aproximación se debe a que queremos un punto que, tanto mirando desde el punto A como desde el B, ambas líneas entre el objeto y nosotros sean lo más paralelas posible. Una vez localizado nuestro objeto medimos el ángulo que se forma en nuestro campo de visión entre nuestro objeto y el punto de referencia que hayamos escogido. Más tarde, nos desplazamos hasta que se forme un ángulo igual y opuesto al primero (en nuestro diagrama sería un desplazamiento del punto A al punto B). De esta forma nos aseguramos que nuestro objeto está centrado en nuestro diagrama. Una vez hecho esto medimos la distancia entre el punto A y B y, usando un poco de trigonometría, calculamos la distancia que deseamos (en nuestro caso la distancia entre el punto A y O) con la ecuación 23.

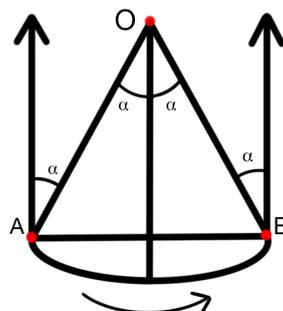


Figura 13. Diagrama de paralaje.

$$Dist(AO) = \frac{Dist(AB)}{2} \div [sen(\alpha)]$$

Ecuación 23. Ecuación para calcular una distancia con paralaje.

En la práctica, este cálculo lo haríamos con la órbita de la Tierra y las estrellas más cercanas como vemos en la figura 14. El punto O de la figura 13 corresponde al punto rojo de la figura 14 (que representa una estrella) y los puntos A y B serían las observaciones desde la tierra en momentos del año distintos.

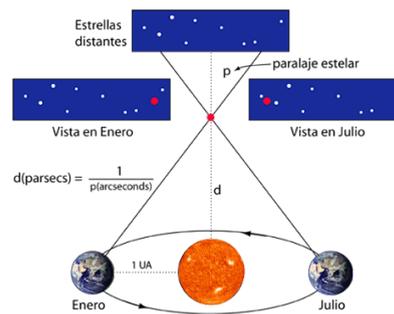


Figura 14. Paralaje desde la Tierra.

El resto de escalones se basan en candelas estándar. Una candela estándar es un fenómeno del universo el cual conocemos con mucha precisión cómo se produce. Dependiendo de la magnitud (o luminosidad en el caso de ondas electromagnéticas) que nos llega de este fenómeno podemos calcular la distancia a la que se ha producido. Esto lo podemos calcular ya que, al igual que un objeto lejano aparentemente es más pequeño, también es menos brillante. Para saber a qué distancia están estas candelas y poder calibrarlas utilizamos el anterior escalón, es decir, utilizamos el paralaje para recoger suficientes datos y a partir de ahí extrapolamos la información a distancias más lejanas. También es posible utilizar algún tipo de candelas para calibrar otros tipos de candelas que con el paralaje sea imposible de calibrar.

La primera candela estándar que veremos son las cefeidas. Una cefeida es un tipo de estrella supergigante que en su interior se producen cierto tipo de reacciones nucleares que hace aumentar y disminuir su luminosidad a un ritmo constante (un efecto muy similar al de un faro). Además, al ser estrellas supergigantes, las podemos observar a distancias extragalácticas.

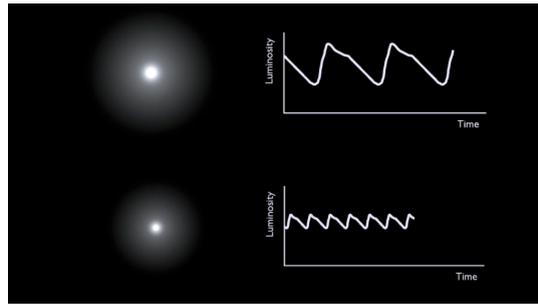


Figura 15. Luminosidad de dos cefeidas distintas respecto al tiempo.

El estudio de las cefeidas ha demostrado que existe una relación entre su periodo (el tiempo que tarda en llegar a un máximo de luminosidad y volver a ese máximo), su luminosidad y su color¹¹. Esta relación fue descubierta por la astrónoma estadounidense Henrietta Swan Leavitt (1868-1921) (Leavitt 1908), lo que permite comparar la luminosidad que observamos con la luminosidad que le correspondería teóricamente a su periodo y así encontrar la distancia de la estrella. Gracias a este método se ha podido saber la distancia de muchas galaxias.

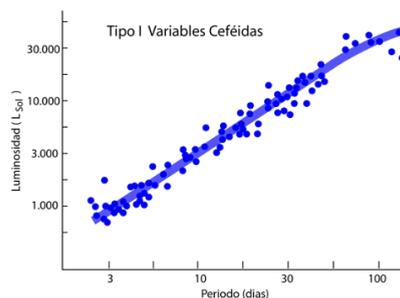


Figura 16. Relación luminosidad-periodo de las cefeidas.

Otra de las candelas más importantes que hay, són las supernovas de tipo Ia¹². Una supernova es una explosión estelar de gran energía que sucede en las últimas fases de la vida de una estrella masiva o de un sistema binario. Las supernovas se dividen en los tipos I y II. El primer tipo no contiene hidrógeno en su explosión mientras que en el segundo tipo sí. Cada tipo se subdivide dependiendo de la presencia de otros elementos químicos y se denota con una letra. El tipo que nos interesa para las candelas estándar son las de tipo Ia, donde la letra “a” indica que durante las primeras fases de la explosión es posible observar silicio ionizado.

11

[http://astronomia.ign.es/rknowsys-theme/images/webAstro/paginas/documentos/Anuario/Laexpansion aceleradadeluniverso.pdf](http://astronomia.ign.es/rknowsys-theme/images/webAstro/paginas/documentos/Anuario/Laexpansion%20aceleradadeluniverso.pdf)

¹² Debido a que la fuente puede crear confusión, se pronuncia “uno a”, pero se escribe con la letra “i” mayúscula (I), y no la L minúscula (l), seguido de la letra “a”.

La razón por la cual utilizamos las supernovas tipo Ia como candelas estándar es porque conocemos con detalle cómo se producen y tienen un patrón bien definido. Lo que se observa de este fenómeno es un brillo con una gran magnitud que va disminuyendo con las semanas. Debido a que existe una relación entre su brillo máximo y el ritmo a que disminuye ese brillo, podemos calcular cual era el brillo inicial. Con esta información podemos comparar el brillo que nos llega con lo que se esperaría y, de esta forma, calcular la distancia.

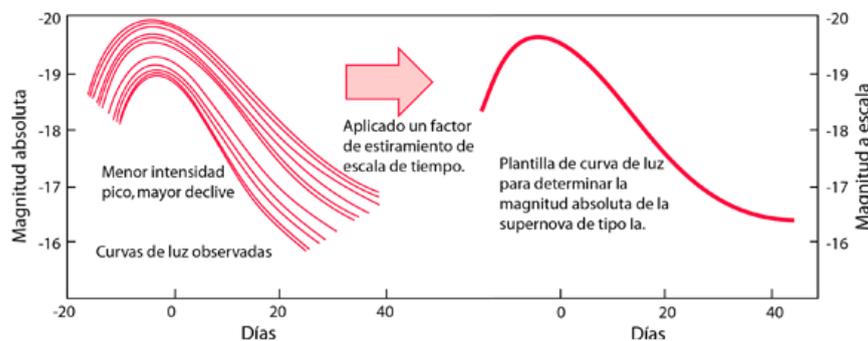


Figura 17. Relación entre el brillo máximo y la tasa de disminución del brillo de supernovas tipo Ia.

Para saber la distancia de estas supernovas, primero se tuvieron que calibrar algunas de ellas para encontrar la relación entre brillo y distancia. Debido a su escasez y la imposibilidad de calibrarlas con paralaje, se observaron otras galaxias que se sabía su distancia gracias a las cefeidas. Una vez calibradas, se extrapolaron los datos a otras distancias que no es posible distinguir el brillo de las cefeidas individuales, añadiendo otro escalón a nuestra escalera.

II.II.IV Desplazamiento al rojo

En el apartado anterior hemos visto una de las características que más nos interesan de los objetos que nos rodean, la distancia. En este apartado y en el siguiente nos centraremos en el otro, la velocidad.

La velocidad que observamos de un objeto, lo cual llamamos velocidad relativa (relativa a nosotros), es muy importante para saber cómo evoluciona el objeto estudiado a medida que progresa el tiempo. Como hemos mencionado previamente, la luz tarda un tiempo en llegarnos y, por lo tanto, lo que vemos es el pasado de estos objetos. Sabiendo su velocidad

relativa lo que podemos descubrir es donde está este objeto en el presente y donde estará en el futuro. A efectos prácticos, nos puede servir para predecir colisiones que puedan resultar peligrosas. Aunque, después de hacer observaciones, se ha descubierto que no es probable.

El cálculo de la velocidad es relativamente sencillo. Para ello se utiliza el desplazamiento al rojo que ha sufrido la luz durante su trayecto hasta nosotros y la ley de Hubble que será explicada en el punto II.II.V. En este primer punto solo veremos la mitad de las herramientas que necesitamos, por ello, el cálculo de la velocidad lo acabaremos de ver en el siguiente punto.

El desplazamiento al rojo se suele representar con la letra z y es un dato que se puede medir directamente. Para ello se comparan las longitudes de onda del espectro de emisión¹³ de los elementos químicos que nos llegan de las estrellas (λ_0) con las del laboratorio (λ_e) y se utiliza la siguiente ecuación 24 para hallar el valor de z . Si el valor de z es positivo, entonces nos indica que ha habido un desplazamiento al rojo de las frecuencias en el espectro de emisión; y si es negativo, un desplazamiento al azul.

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1$$

Ecuación 24. Ecuación del desplazamiento al rojo.

A modo de ejemplo, en la figura 18 podemos ver la comparación entre líneas espectrales en el espectro visible de un supercúmulo de galaxias distantes (derecha), comparado con el del Sol (izquierda). Las líneas negras son las frecuencias absorbidas por los elementos químicos que forman tanto el supercúmulo de galaxias como el Sol. Al haber un desplazamiento al rojo, todas estas líneas negras se mueven a frecuencias menos energéticas de igual forma.

¹³ El espectro de emisión de un elemento químico son las frecuencias que son emitidas por ese elemento.

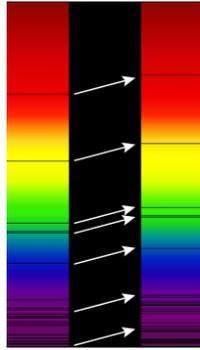


Figura 18. Comparación de desplazamiento al rojo de un supercúmulo de galaxias (derecha) comparado con el del Sol (izquierda).

Este fenómeno es muy similar al efecto Doppler. Este efecto dice que cuando un objeto se está alejando de nosotros, las frecuencias se desplazan hacia el rojo; mientras que si se acerca las frecuencias se desplazan hacia el azul. A medida que las distancias entre los objetos que estudiamos y nosotros aumentan, las fórmulas del efecto Doppler empiezan a dar resultados incoherentes, por lo cual se introdujo la idea de la expansión del universo y la Ley de Hubble que describe el desplazamiento al rojo que conlleva.

II.II.V Ley de Hubble

Para entender la Ley de Hubble, primero hay que ver la razón por la cual fue creada. Desde un punto de vista observacional, el desplazamiento al rojo de las galaxias aumenta con su distancia respecto a cualquier observador que estudie el cosmos. Si quisiéramos describir este fenómeno con el efecto Doppler antes mencionado, acabaríamos llegando a la conclusión que la mayoría de las galaxias que nos rodean se están alejando de nosotros y contra más lejos, más rápido (incluso hay casos en los que se supera la velocidad de la luz, lo cual es físicamente imposible). Esta idea nos llevaría a pensar que la tierra está situada en el centro del universo y que hay fuerzas del vacío que hacen alejar todas las galaxias de nosotros. Realmente se podría hacer una teoría desde este planteamiento, pero a ojos de un científico no distaría de una pseudociencia.

Para encontrar una solución a este fenómeno, sin ponernos en una posición privilegiada del universo, tenemos que proponer una idea en la que cualquier punto del universo viese este mismo efecto; es decir, que el resto de objetos a su alrededor se alejen de él. La solución actualmente aceptada es la expansión del universo que veremos en el siguiente punto. En este apartado nos centraremos en cómo el desplazamiento al rojo nos indica la velocidad de las galaxias.

Partiendo de modelos que describen un universo en expansión, los cuales se suelen llamar modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (o cualquier otra combinación del nombre de estos autores), es evidente pensar que existe una ecuación para describir la velocidad de separación entre dos galaxias cualesquiera. Esta relación velocidad-distancia (que no es la misma que la ley de Hubble) se deriva de los propios modelos y tiene la siguiente forma:

$$v = HD$$

Ecuación 25. Relación velocidad-distancia.

Donde “v” es la velocidad entre las galaxias, “D” es su distancia propia y “H” la constante de Hubble. En esta ecuación, la constante de Hubble sirve como constante de proporcionalidad indicándonos el ritmo al que el espacio-tiempo se expande y nada impide que varíe con el tiempo. Debido a que se ha demostrado que esta constante varía con el tiempo, algunos autores prefieren referirse a “la constante de Hubble” como “el parámetro de Hubble”; en mi caso me referiré a partir de ahora a este concepto como “parámetro de Hubble”.

Como he mencionado anteriormente, la expansión del universo produce un desplazamiento al rojo en el color de las galaxias, lo cual observacionalmente reconocemos como la ley de Hubble. Ésta la expresamos de la siguiente forma:

$$z = \frac{H_0}{c} D$$

Ecuación 26. Ley de Hubble.

Donde “z” es el desplazamiento al rojo que ya conocemos, “c” es la velocidad de la luz, “D” la distancia propia entre las galaxias y “H₀” el valor del parámetro de Hubble en el momento de la observación.

El problema de la Ley de Hubble es que sólo es válida para galaxias más cercanas, ya que es una Ley que se hizo de forma empírica suponiendo que el parámetro de Hubble era fijo. Por este motivo, esta ley sólo representa una aproximación de la realidad. Si combinamos la ecuación 25 y 26 podemos encontrar la relación entre la velocidad y el desplazamiento al rojo que tanto queríamos, aunque sólo sea una aproximación.

$$v = HD \rightarrow H = \frac{v}{D}$$

$$z = \frac{H_0}{c}D \rightarrow H_0 = \frac{zc}{D}$$

$$H \approx H_0 \rightarrow \frac{v}{D} \approx \frac{zc}{D}$$

$$v \approx zc$$

Ecuación 27. Relación entre la velocidad y el desplazamiento al rojo.

Por último, una propiedad importante del parámetro de Hubble que cabe mencionar es que también nos puede dar un valor aproximado de la edad del universo. A priori, esto puede parecer que necesitará unas matemáticas muy complejas, pero al contrario, es realmente sencillo.

Sabiendo que el parámetro de Hubble nos indica cómo se expande el universo a medida que pasa el tiempo, nosotros podemos invertir este efecto yendo hacia atrás en el tiempo. De esta forma, llegaríamos al inicio de los tiempos donde toda la materia estaba contenida en una región infinitamente pequeña, es decir, en el Big Bang.

Para llegar matemáticamente a un resultado, empezaremos viendo que la velocidad de un objeto es la distancia que recorre entre el tiempo que tarda; o el tiempo que tarda es la distancia recorrida entre la velocidad:

$$v = \frac{D}{t} \Leftrightarrow t = \frac{D}{v}$$

Ecuación 28. Definición de velocidad.

Por otro lado, sabemos que la velocidad a la que se aleja un objeto o punto del espacio está descrito por la ecuación 25 que hemos visto anteriormente. Combinando estas dos ecuaciones (sustituyendo en la velocidad de la ecuación 28, la ecuación 25) llegamos a que el tiempo que tarda un objeto en llegar a la posición que hoy en día lo observamos es inversamente proporcional al parámetro de Hubble:

$$t = \frac{D}{HD} \Leftrightarrow t = \frac{1}{H}$$

Ecuación 29. Combinación de la ecuación 25 y 28.

Según observaciones del satélite WMAP en 2006, el parámetro de Hubble tiene un valor aproximado de 70 (km/s)/Mpc, siendo 1 Mpc (1 Megaparsec) = $3,0857118 \times 10^{19}$ km. Con estos datos y la ecuación 29, la edad del universo nos da un valor aproximado de 13.978,182 millones de años, lo cual es coherente con todas nuestras mediciones y modelos.

II.II.VI Expansión del universo

Para explicar la expansión del universo, utilizaremos la superficie de un globo para hacer una analogía. En esta simplificaremos las tres dimensiones espaciales en únicamente dos. La superficie de este globo representa un espacio bidimensional, pero la misma idea se puede extrapolar a un espacio tridimensional. El inconveniente de esta analogía es que tiene varios errores conceptuales que pueden llevar a malinterpretaciones, pero si se tienen en cuenta las diferencias con el universo real esta explicación debería ser suficiente para entender correctamente la expansión. Dicho esto, empecemos imaginando la superficie de un globo.

Cuando un globo está deshinchado, las diferentes partes de su superficie están relativamente cerca; pero al hincharlo, las diferentes regiones se separan. En este momento podemos caracterizar diferentes parámetros (como el ritmo a que lo hinchamos o la velocidad a la que se separan dos puntos cualesquiera) lo cual habíamos parametrizado con la ecuación 25. Al estudiar dos puntos diferentes de la superficie del globo podemos deducir que si hubiese algún objeto en este espacio el resto de objetos se alejarían de este y, a más distancia inicial, más rápido se separarían. Hay que darle especial énfasis en que esta velocidad relativa entre los objetos no está causada por los propios objetos, sino que es la propia expansión del espacio quien hace que se separen (la cantidad de espacio entre objetos aumenta con el tiempo). Por lo tanto, los objetos no se están moviendo, simplemente la distancia entre ellos aumenta por la expansión, lo que permite que se separen más rápido que la velocidad de la luz sin romper ninguna ley física.

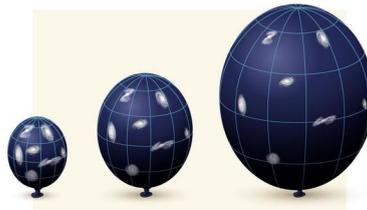


Figura 19. Analogía de un globo sobre la expansión del universo.

Después de esta breve explicación, me gustaría matizar las diferencias que tiene esta analogía con nuestra realidad.

Primeramente, nuestro universo no tiene un centro. Podríamos mal interpretar que el globo tiene un centro en su interior, pero me veo en la obligación de hacer hincapié que solo estamos considerando su superficie y que el interior del globo no existe, por lo tanto la expansión del globo no tiene ningún centro en su superficie. También podríamos pensar que la expansión se produce en una dimensión extra la cual, en la analogía del globo, tendría sentido, pero esto no es necesario, es posible explicar la expansión del universo con las dimensiones que podemos observar.

Haciendo un pequeño paréntesis, la expansión que estamos describiendo se produce en todos los puntos por igual, lo que quiere decir que si nosotros observamos el universo desde un punto aleatorio lo que veríamos es que todos los objetos se están separando de nosotros (lo que nos llevaría a pensar que podríamos ser el centro del universo) pero si nos fuésemos a otra galaxia, también veríamos lo mismo, el resto del universo se aleja de nosotros. Por lo tanto, desde un punto de vista observacional podríamos demostrar que no existe un centro del universo.

En segundo lugar, el propio objeto del globo puede traer confusiones, ya que el espacio no se está expandiendo hacia “afuera”; al igual que no consideramos el interior del globo, no requerimos del exterior para expandirnos. Además, la forma esférica del globo tampoco tiene que coincidir con la del espacio. Actualmente, las observaciones indican que nuestro espacio es plano o euclídeo, es decir, sin una curvatura como la de la superficie del globo.

Uno de los efectos de esta expansión es el desplazamiento al rojo de la luz de las galaxias que hemos visto anteriormente. La razón por la cual este desplazamiento se produce es porque la longitud de onda de la radiación electromagnética se expande con el universo. Contra más tiempo esté la luz viajando, más desplazamiento al rojo sufrirá. Esto explica la relación entre la distancia y desplazamiento al rojo que observamos como la Ley de Hubble.

Para explicar y parametrizar la expansión del universo se utilizan las ecuaciones de Friedmann. Alexander Friedmann (1888-1925) fue un ruso y soviético físico y matemático que desarrolló unas ecuaciones que explican la expansión del espacio en modelos homogéneos e isotrópicos (el caso de nuestro universo) dentro del contexto de la relatividad general. En total son dos ecuaciones diferentes, una para el ritmo de expansión del universo y otra para la aceleración del universo. Aunque solo haya dos ecuaciones, estas pueden

adoptar diferentes formas dependiendo de cómo se definan sus diferentes partes o cómo se prefiera simplificar sus términos (algebraicamente se puede pasar de una forma a otra).

La primera ecuación que, como hemos dicho anteriormente, sirve para describir el ritmo de expansión es la siguiente:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} - K\frac{c^2}{a^2}$$

Ecuación 30. Primera ecuación de Friedmann.

Donde, empezando por el lado derecho de la ecuación, c la velocidad de la luz, K la curvatura del espacio, Λ la constante cosmológica, ρ la densidad de masa por unidad de volumen y G es la constante gravitacional de Newton. Por el lado izquierdo, “ a ” es el factor de escala que nos expresa la proporción de expansión de una porción del espacio en un tiempo determinado (también se puede pensar el factor “ a ” como una función que depende del tiempo) y “ \dot{a} ” su primera derivada respecto al tiempo (lo cual expresa la velocidad a la que cambia este parámetro). Por otro lado, “ H ” es el parámetro de Hubble que hemos visto en los anteriores apartados y equivale a (\dot{a}/a) . Ambos expresan lo mismo, la velocidad a la que dos objetos en el espacio se separan y por definición son el mismo concepto. Esta primera ecuación se deriva de un componente de las ecuaciones de campo de Einstein, por lo que nos expresa una predicción teórica y no una aproximación empírica como la Ley de Hubble.

En segundo lugar, la otra ecuación de Friedmann, la cual expresa la aceleración cósmica, es la siguiente:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Ecuación 31. Segunda ecuación de Friedmann.

La mayoría de términos aparecen en la ecuación anterior, pero entre los que podemos encontrar nuevos son “ p ”, que representa la presión que se ejerce en el espacio, y \ddot{a} , que es la segunda derivada respecto al tiempo del parámetro “ a ” (lo cual expresa la aceleración de la expansión del universo). Esta segunda ecuación se deriva de la primera y de la traza¹⁴ de las ecuaciones de Einstein para los modelos de FLRW.

¹⁴ La traza de una matriz es la suma de los componentes de la diagonal principal.

Como he mencionado previamente, estas ecuaciones pueden aparecer de diferentes formas. Una de las variantes que simplifican las ecuaciones es introduciendo la constante cosmológica como parte de la densidad (ρ) y como parte de la presión (p). Para ello se definen la densidad y presión de la siguiente forma y se introducen en las ecuaciones que hemos visto previamente:

$$\rho \rightarrow \rho - \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad p \rightarrow p + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

Ecuación 32. Definiciones de ρ y p .

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - K\frac{c^2}{a^2}$$

Ecuación 33. Primera ecuación de Friedmann (simplificada).

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

Ecuación 34. Segunda ecuación de Friedmann (simplificada).

II.II.VII Contenido del universo

Como hemos visto en el punto anterior esta expansión depende de diversos factores que en su mayoría son constantes de la naturaleza, lo cual nos deja solo con dos términos que podemos variar su valor respecto las observaciones. Estos son la densidad de masa volumétrica y la presión que ejerce esta masa. Como ambos términos son causados por la masa, estos dos términos tienen una ecuación que las relaciona dependiendo de las propiedades del componente del universo que estudiemos; por lo tanto, esto nos deja con solo un grado de libertad para describir la expansión del universo. En la física moderna masa y energía son equivalentes ($E=mc^2$), por lo que también podríamos hablar de energía en vez de masa. En resumen, la expansión del universo únicamente depende del contenido de este. Por ello, en este punto nos centraremos en los componentes que puede tener un universo para explicar la expansión que se observa.

Para empezar, definiremos un parámetro que nos exprese la densidad del universo de una forma más conveniente, el cual lo representamos con la letra griega omega (Ω). Esta densidad es distinta a la que encontramos en las ecuaciones de Friedmann, ya que Ω la definiremos como el cociente entre la densidad de materia que observamos ρ (la misma

que en las ecuaciones de Friedmann) y lo que se denomina “densidad crítica” (ρ_{crit}). Para entenderlo de una forma intuitiva, la densidad crítica es el valor de la densidad necesaria para que el universo no colapse y que la velocidad de la expansión tienda a 0 en un tiempo infinito. Si nuestro universo tiene más materia que la densidad crítica, la gravedad frenará la expansión hasta que el universo colapse en un solo punto; si por lo contrario hay menos, el espacio se expandirá infinitamente sin que la gravedad frene la expansión. Esta densidad crítica se define cuando la curvatura del espacio y la constante cosmológica son nulas (un espacio plano y sin energía oscura). Su valor aproximado es de $9,47 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$ y, para hacernos una idea, esta densidad crítica es aproximadamente cinco átomos de hidrógeno por metro cúbico. Según si nuestro parámetro Ω es menor, igual o mayor que 1 sabremos si el universo se expandirá para siempre, si acabará frenando o colapsará.

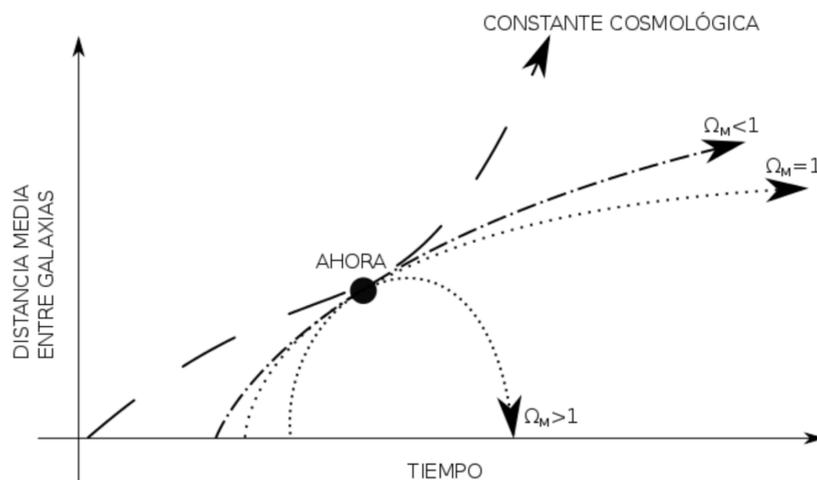


Figura 20. Expansión del universo según el parámetro Ω .

La primera noción de cuán denso es nuestro universo la observamos en fondo cósmico de microondas. Dependiendo de cómo se produjeron las colisiones en el plasma primitivo estas resultaron en una imagen u otra del fondo cósmico y todo apunta a que nuestro universo tiene aproximadamente la densidad crítica. Esto implica que nuestro universo es plano y no colapsará en una singularidad.

Por otro lado, otra manera de saber cuán denso es nuestro universo es observar el espacio y estimar cuánta masa suman todas las galaxias, cúmulos de galaxias y polvo cósmico y dividirlo entre la cantidad de espacio que se estima que hay. El proceso para conseguir estos valores es muy complejo, pero a grandes rasgos sabiendo las propiedades que tienen los diferentes tipos de estrellas y contando la cantidad de cada tipo se puede calcular cuánta masa total tiene nuestro universo.

Otra forma más sofisticada es calcular los efectos gravitatorios que se observan en los movimientos de las galaxias y así deducir cuánta masa correspondería. El problema con el primer y segundo método es que discrepan en la densidad que deducimos del fondo cósmico y, además, discrepan también entre ellos.

Con el primer método, se estima que en nuestro universo tiene una densidad del 5%¹⁵ de la densidad crítica; esta materia que vemos y entendemos su comportamiento la llamamos materia bariónica y está compuesta en su mayoría de protones, neutrones y electrones. Con el segundo método, se estima que tenemos una densidad del 30%, por lo que hay un 25% de materia que tiene que estar por sus efectos gravitatorios, pero no la observamos (se cree que esta materia no interactúa con los fotones y, por ello, no la podemos observar). El nombre con el que se conoce este tipo de materia es “materia oscura” o “materia oscura fría”. El 70% restante, que el fondo cósmico de microondas nos dice que tiene que estar, es lo que llamamos energía oscura y es este tipo de energía la que creemos que produce la expansión acelerada del universo.

En la disciplina de la mecánica cuántica aparece de forma natural una energía del vacío, la cual originalmente se pensaba que podría explicar el origen de la energía oscura. A partir de los datos obtenidos de la sonda *Voyager* se calculó que había una densidad de energía del vacío de 10^{14} GeV/m³, mientras que la mecánica cuántica predice 10^{121} GeV/m³; descartando de esta forma la idea original. Esta discrepancia de 107 órdenes de magnitud entre la mecánica cuántica y las observaciones se conoce como “la peor predicción teórica de la física moderna”.

Después de ver los componentes que tiene nuestro universo, a continuación veremos cómo estos diferentes tipos de masa y energía evolucionan con la expansión del universo. A gran escala, sabemos que el contenido del universo es homogéneo e isótropo gracias al fondo cósmico de microondas. Por esta razón, al relacionar la presión con la densidad se utiliza la ecuación de un fluido perfecto (sea cual sea el componente del universo que estemos estudiando), ya que el comportamiento de un fluido perfecto cumple con el principio cosmológico de forma natural. La ecuación de un fluido perfecto tiene la siguiente forma:

$$p = \omega \rho c^2$$

Ecuación 35. Ecuación de estado de un fluido perfecto.

¹⁵ Todos los porcentajes que se muestran en este párrafo están aproximados para efectos ilustrativos, llegando a variar algunas décimas.

Donde “ p ” es la presión, “ ρ ” la densidad, c la velocidad de la luz y ω es una constante de proporcionalidad que depende del fluido que estudiemos. Para determinar cuál es la constante de proporcionalidad ω , tenemos que estudiar cómo reacciona el componente que estemos estudiando.

El primer componente que vamos a ver es la materia (tanto bariónica como oscura). Este componente está formado por estrellas, planetas y otros cuerpos celeste y, al ser objetos relativamente pequeños (en comparación con las distancias del universo) y no colisionar muy a menudo entre ellos, se considera que es muy similar al polvo y, por lo tanto, no ejerce ningún tipo de presión ($\omega = 0$). Por otro lado, la forma en que este componente evoluciona con el paso del tiempo es que se va a diluir a causa de la expansión del universo. Para ser más precisos, la densidad de materia decrece como el inverso del volumen. Dicho de otra forma, como la cantidad de materia no varía, su densidad cambiará por la variación en su volumen.

En segundo lugar, otro componente a destacar es la radiación que viaja por el universo. Este componente sí que ejerce presión y lo hace de forma que es un tercio de densidad ($\omega = \frac{1}{3}$). Además, esta energía se diluye incluso más rápido que la materia debido a que la luz al viajar por el espacio sufre el desplazamiento al rojo y le hace perder energía aún más rápido. Si consideramos un cubo de lado “ L ”, el ritmo a que se diluye la energía es proporcional a L^{-4} .

Por último, el último componente que veremos es la energía oscura que corresponde a la constante cosmológica. Este tipo de energía tiene un comportamiento bastante peculiar, ya que tiene una presión negativa ($\omega = -1$). Lo que implica esta presión negativa con la evolución de la densidad respecto al tiempo es que este componente se mantiene constante. Como habíamos mencionado en la introducción, esto significa que a medida que el universo se expande y el espacio aumenta se crearía más energía oscura.

Bloque III: Marco práctico

Después de toda la explicación de las herramientas que utilizaremos en este apartado, a continuación veremos su uso práctico en el desarrollo de un nuevo modelo cosmológico. Este desarrollo se basa en tres principios básicos que reflejan la idea de la hipótesis original: buscar un nuevo modelo que pueda explicar la expansión del universo sin añadir ningún término extra como la materia o energía oscura. Como primer principio tenemos los postulados de la Relatividad General, es decir, damos como válidas sus ecuaciones para describir el universo a gran escala. Como segundo principio tenemos al principio cosmológico, explicado en el apartado *II.II.II Radiación de fondo de microondas*; lo cual implica que el universo a gran escala tiene el mismo comportamiento que un fluido perfecto. Por último, como tercer principio añadiré que las diferentes dimensiones del espacio-tiempo son afectadas por igual por la expansión del universo. Este último principio, nos aporta que el tiempo también se expanda y durante este proyecto trataremos de descubrir si este pequeño cambio puede solucionar el problema de la expansión del universo.

Para empezar a crear unas ecuaciones que describen la evolución del tamaño del universo, tenemos que escoger una métrica que nos dé la noción de distancia entre dos puntos cualesquiera. Al estar el universo en expansión, la distancia que existe entre estos dos puntos aumentará con el paso del tiempo. Además, si queremos tratar al tiempo igual que a las dimensiones espaciales este factor de escala también lo aplicaremos al tiempo. La interpretación física de añadir un factor de escala al tiempo es que si cierto fenómeno tardaba cierta cantidad de tiempo en producirse en el pasado, en el futuro tardará más, por lo que desde nuestra perspectiva contemporánea al presente el tiempo parecerá acelerarse.

Teniendo en cuenta que las observaciones indican que el universo es plano, matemáticamente podemos expresar la métrica del nuevo universo que estamos creando de la siguiente forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -a(t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 \end{bmatrix}$$

Ecuación 36. Métrica del nuevo modelo cosmológico.¹⁶

¹⁶ Durante esta explicación se utilizarán unidades donde $c = 1$ (la velocidad de la luz). Más adelante se introducirán los factores de c con análisis dimensional.

Donde $a(t)$ es una función que nos indica el factor de escala. Este factor de escala, podrá ser una constante o una función que dependa del tiempo. También, cabe recordar que la métrica la encontramos al hacer el producto de todas las combinaciones de dos vectores base y por ello $a(t)$ está elevado al cuadrado (cada vector base se expande dependiendo de cómo la función $a(t)$ sea).

Por otro lado, para saber el valor de la función $a(t)$ tendremos que recurrir a las ecuaciones de campo de la Relatividad General. El procedimiento que seguiré será empezar por la parte derecha de las ecuaciones, es decir, primero calcular el tensor de energía-momento, ya que esta es la parte más corta; y después calcular la parte izquierda, donde en esta tendré que calcular la inversa y las derivadas parciales de la métrica, los símbolos de Cristoff, el Tensor de Ricci, el escalar de Ricci y finalmente el tensor de Einstein.

Para calcular el tensor de energía-momento utilizaremos la ecuación 13, ya que en el universo que estamos creando se trata de un fluido perfecto. Además, si buscamos un marco de referencia en que el fluido esté en reposo, los componentes de la cuadrivelocidad quedarían de la siguiente forma:

$$u^\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 37. Componentes de la cuadrivelocidad (en la forma de superíndice).

O, la forma en la que alpha está como subíndice:

$$u_\alpha = u^\mu g_{\mu\alpha} = \begin{bmatrix} -a(t)^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 38. Componentes de la cuadrivelocidad (en la forma de subíndice).

Por lo tanto, el tensor de energía momento lo calculamos de la siguiente forma:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$$

Ecuación 13. Ecuación para encontrar el tensor de energía-momento de un fluido perfecto.

$$T_{\mu\nu} = (\rho+p) \begin{bmatrix} -a(t)^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [-a(t)^2 \ 0 \ 0 \ 0] + p \begin{bmatrix} -a(t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 \end{bmatrix}$$

Ecuación 39. Cálculo del Tensor de energía-momento (paso 1).

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a(t)^4(\rho+p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a(t)^2 p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 p \end{bmatrix}$$

Ecuación 40. Cálculo del Tensor de energía-momento (paso 2).

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a(t)^4 \rho + a(t)^4 p - a(t)^2 p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 p \end{bmatrix}$$

Ecuación 41. Cálculo del Tensor de energía-momento (paso 3).

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a(t)^4 \rho + (a(t)^4 - a(t)^2) p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 p \end{bmatrix}$$

Ecuación 42. Tensor de energía-momento.

A continuación, para calcular la parte izquierda de la ecuación empezaremos calculando la inversa de la métrica. Recordemos que la inversa de la métrica es aquella que multiplicada por la métrica nos da la delta de Kronecker como veíamos en la ecuación 11. Por lo tanto, con un poco de cálculo concluimos que la inversa de la métrica es la siguiente:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a(t)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a(t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a(t)^2} \end{bmatrix}$$

Ecuación 43. Inversa de la métrica.

Por otro lado, las derivadas parciales de la métrica únicamente serán diferente de 0 si son respecto al tiempo, ya que $a(t)$ es una función independiente de las coordenadas espaciales. Por lo tanto, las derivadas parciales de la métrica son las siguientes:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a(t)a(t)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a(t)a(t)' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a(t)a(t)' \end{bmatrix} \quad \partial_i g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 44. Derivadas parciales de la métrica.

A partir de los resultados anteriores, calculamos los símbolos de Cristoff con la ecuación 15. Este cálculo es bastante extenso por lo que me limitaré a mostrar el resultado obtenido. Aun así, todo este cálculo puede ser encontrado en el Anexo III. Además, este objeto tiene tres índices y no puede ser representado como una sola matriz, por lo que separaré los diferentes componente en cuatro matrices que corresponden a los valores que puede adoptar el superíndice de los números de Cristoff:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \begin{bmatrix} \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} \end{bmatrix} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 \\ \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 45. Símbolos de Cristoff.

A partir de este punto resulta muy conveniente para el álgebra introducir el parámetro de Hubble "H" para sustituir $\frac{a(t)'}{a(t)}$. De esta forma, los símbolos de Cristoff quedarían de la siguiente forma:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \begin{bmatrix} H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H \end{bmatrix} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^1 = \begin{bmatrix} 0 & H & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 46. Símbolos de Cristoff con el parámetro de Hubble.

Seguidamente, calcularemos el Tensor de Ricci. Para ello hemos de calcular dos productos y dos derivadas parciales de los símbolos de Cristoff como veíamos en la ecuación 18. Este cálculo vuelve a ser bastante extenso por lo que me limitaré a mostrar el resultado obtenido. La explicación detallada de este resultado está situada en el Anexo IV.

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -3H' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H' + 2H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H' + 2H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H' + 2H^2 \end{bmatrix}$$

Ecuación 47. Tensor de Ricci en términos de H y sus derivadas

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -3 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + 3H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 \end{bmatrix}$$

Ecuación 48. Tensor de Ricci en términos de H, a(t) y sus derivadas

Calculado el Tensor de Ricci, encontraremos el escalar de Ricci multiplicando la inversa de la métrica por el Tensor de Ricci y haciendo las dos sumatorias cuando ambos índices son iguales (ya que, si no son iguales, la métrica es igual a 0) como veíamos en la ecuación 19.

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R_{\mu}^{\mu} \equiv R$$

Ecuación 19. Definición del escalar de Ricci.

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R_{00}g^{00} + R_{11}g^{11} + R_{22}g^{22} + R_{33}g^{33}$$

Ecuación 49. Cálculo del escalar de Ricci (paso 1).

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \left((-3H') \cdot \left(\frac{1}{-a(t)^2} \right) + (H' + 2H^2) \cdot \left(\frac{1}{a(t)^2} \right) + (H' + 2H^2) \cdot \left(\frac{1}{a(t)^2} \right) + (H' + 2H^2) \cdot \left(\frac{1}{a(t)^2} \right) \right)$$

Ecuación 50. Cálculo del escalar de Ricci (paso 2).

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \frac{6H' + 6H^2}{a(t)^2} = 6 \left(\frac{H' + H^2}{a(t)^2} \right)$$

Ecuación 51. Cálculo del escalar de Ricci (paso 3).

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 6 \left(\frac{\left(\frac{a(t)''}{a(t)} - H^2 \right) + H^2}{a(t)^2} \right) = 6 \left(\frac{a(t)''}{a(t)^3} \right)$$

Ecuación 52. Cálculo del escalar de Ricci (paso 4).¹⁷

$$R = 6 \left(\frac{a(t)''}{a(t)^3} \right)$$

Ecuación 53. Escalar de Ricci.

Para finalizar, calcularemos el Tensor de Einstein. Para ello, tenemos que restar un medio de la métrica multiplicado por el escalar de Ricci al Tensor de Ricci como vemos en la ecuación 20.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Ecuación 20. Tensor de Einstein.

$$G_{\mu\nu} = \left(\begin{bmatrix} -3 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + 3H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -a(t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 \end{bmatrix} \right) 6 \left(\frac{a(t)''}{a(t)^3} \right)$$

Ecuación 54. Cálculo del Tensor de Einstein (paso 1).

$$G_{\mu\nu} = \left(\begin{bmatrix} -3 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + 3H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) \end{bmatrix} \right)$$

Ecuación 55. Cálculo del Tensor de Einstein (paso 2).

$$G_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 3H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 \end{bmatrix}$$

Ecuación 56. Cálculo del Tensor de Einstein (paso 3).

¹⁷ Este paso utiliza un resultado desarrollado en el Anexo IV.

Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein con la métrica escogida previamente resultan de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Ecuación 57. Ecuación de campo de Einstein con unidades donde $c = 1$.

$$\begin{bmatrix} 3H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\left(\frac{a(t)''}{a(t)}\right) + H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\left(\frac{a(t)''}{a(t)}\right) + H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\left(\frac{a(t)''}{a(t)}\right) + H^2 \end{bmatrix} = 8\pi G \begin{bmatrix} a(t)^4\rho + (a(t)^4 - a(t)^2)p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2p \end{bmatrix}$$

Ecuación 58. Ecuación de campo.

Para encontrar las ecuaciones que gobiernan la expansión del universo, primero tenemos que extraer dos expresiones de la ecuación que hemos encontrado previamente. La primera de ellas la extraemos del componente 00 y la segunda de cualquier componente espacial que pertenezca a la diagonal principal, por ejemplo, el componente 11.

$$3H^2 = 8\pi G [a(t)^4\rho + (a(t)^4 - a(t)^2)p]$$

Ecuación 59. Ecuación del componente 00 de las ecuaciones de campo.

$$-2\left(\frac{a(t)''}{a(t)}\right) + H^2 = 8\pi G (a(t)^2p)$$

Ecuación 60. Ecuación del componente 11 de las ecuaciones de campo.

De estas dos ecuaciones simplemente nos quedaría aislar $\frac{a(t)'}{a(t)}$ y $\frac{a(t)''}{a(t)}$. El resultado final de las ecuaciones (reintroduciendo la velocidad de la luz para que las dimensiones de la ecuación sean coherentes) quedaría de la siguiente forma:

$$\left(\frac{a(t)'}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} a(t)^2 \left[a(t)^2\rho + (a(t)^2 - 1) \left(\frac{p}{c^2}\right) \right]$$

Ecuación 61. Ecuación que describe la velocidad de la expansión del universo.

$$\frac{a(t)''}{a(t)} = \frac{4\pi G}{3} a(t)^2 \left[(a(t)^2\rho + (a(t)^2 - 4) \left(\frac{p}{c^2}\right) \right]$$

Ecuación 62. Ecuación que describe la aceleración de la expansión del universo.

Estas dos ecuaciones se tratan de la primera y la segunda derivada del factor de escala. He decidido expresarlo de esta forma, ya que de esta manera puede verse un paralelismo entre el modelo cosmológico actual y el formulado anteriormente. La primera ecuación nos indica cuán rápido es la expansión del universo y la segunda cuanto se acelera esta expansión. Como puede observarse, la expansión del universo únicamente depende de la densidad y la presión de este. Posteriormente, en las conclusiones, se hará un análisis de las consecuencias de estas ecuaciones y las relacionaremos con la hipótesis original.

Bloque IV: Conclusiones

Para concluir este proyecto, me gustaría empezar volviendo al origen de este trabajo, a su propósito. La idea de este trabajo nacía de mi desacuerdo con la teoría cosmológica actual, ya que esta introducía esencias todavía desconocidas e inexplicables. El propósito de mi investigación era crear un modelo cosmológico el cual pudiera ser capaz de eliminar esas ideas. Aparte, también deseaba alcanzar un mayor nivel de entendimiento de una de las teorías más importantes de la actualidad, la Relatividad General, para poder plantear mis propias ideas sobre todo lo que nos rodea.

El resultado que actualmente he alcanzado es realmente favorable. Además de haber conseguido adentrarme en la teoría de la física moderna que desde tiempo atrás me había asombrado, he logrado crear dos ecuaciones (ecuaciones 61 y 62) que aparentemente parecen tener la capacidad de explicar un universo en expansión acelerada con las sustancias que actualmente podemos entender. Dicho esto, empecemos analizando la primera ecuación.

Si comparamos la primera ecuación de Friedmann con la desarrollada en este trabajo, observamos que la velocidad de expansión depende no solo de la densidad sino que también de la presión del universo. Así mismo, el factor de escala está mucho más presente en la parte derecha de la ecuación. Este segundo hecho favorece a la idea de eliminar la expansión del universo (si así se desea) simplemente igualando el factor de escala a cero. Aún así, también permite la existencia de un universo en expansión como creemos actualmente. Además, al tener una forma más compleja que la primera ecuación de Friedmann, podría derivar a resultados que concuerden mejor con las observaciones. Sin embargo, las diferencias que tienen estas ecuaciones no son de gran importancia, ya que no necesariamente resolverán el problema de la expansión acelerada del universo.

$$\left(\frac{a(t)'}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}a(t)^2 \left[a(t)^2\rho + (a(t)^2 - 1) \left(\frac{p}{c^2}\right) \right]$$

Ecuación 61. Ecuación que describe la velocidad de la expansión del universo.

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} - K\frac{c^2}{a^2}$$

Ecuación 30. Primera ecuación de Friedmann.

Por otro lado, la segunda ecuación desarrollada en este trabajo tiene diferencias más interesantes. El detalle en el que me quiero concentrar es el signo de la parte derecha de la ecuación. Mientras que la segunda ecuación de Friedmann tiene un signo negativo y obliga a la presencia de presión negativa (a.k.a. energía oscura) para describir una aceleración positiva, la ecuación desarrollada en este proyecto tiene un signo positivo. Por lo tanto, retomando la hipótesis inicial, la expansión acelerada del universo sí puede ser explicada sin necesidad de añadir términos innecesarios.

$$\frac{a(t)''}{a(t)} = \frac{4\pi G}{3} a(t)^2 \left[(a(t)^2 \rho + (a(t)^2 - 4) \left(\frac{p}{c^2} \right) \right]$$

Ecuación 62. Ecuación que describe la aceleración de la expansión del universo.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Ecuación 31. Segunda ecuación de Friedmann.

De cara al futuro, estas ecuaciones pueden ser recuperadas para continuar investigando y crear una nueva teoría cosmológica, pero me temo que esto lo reservaré para otro trabajo.

Bloque V: Fuentes documentales y bibliográficas

V.I Bibliografía

Paul A. Tipler traducido por Dr. J Aquilar Peris y Dr. J. de la Rubia Pacheco (1989). *Física, Segunda Edición* (ed. II). Reverté S. A.

Hawking, S. traducido por Miguel Ortuño (1993). *Historia del Tiempo: Del Big Bang a los Agujeros Negros*. RBA Editores.

V.II Webgrafía

Big Bang (26/11/2021). *Wikipedia*. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Big_Bang

Constante cosmológica (25/7/2021). *Wikipedia*. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Constante_cosmol%C3%B3gica

Ley de Hubble-Lemaître (2/8/2021). *Wikipedia*. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Hubble-Lema%C3%AEtre

Energía oscura (18/11/2021). *Wikipedia*. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Energ%C3%ADa_oscura

Ecuaciones de Friedmann (14/2/2021). *Wikipedia*. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Friedmann

The Maths of General Relativity (5/1/2021). *Youtube*. ScienceClic English. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: <https://youtube.com/playlist?list=PLu7cY2CPiRjVY-VaUZ69bXHZr5QsIKbzo>

What's a tensor (21 nov 2011). *Youtube*. Dan Fleisch. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: <https://youtu.be/f5liqUk0ZTw>

¿Conoces la ecuación del Universo? (8/12/2020). *Youtube*. Instituto de Física Teórica IFT. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: <https://youtu.be/qImIEiDfHLI>

El lenguaje matemático de Einstein | Tensores (22/10/2019). *Youtube*. Instituto de Física Teórica IFT. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: <https://youtu.be/pwnX4xG36zU>

El lenguaje matemático de Einstein | Tensores (22/10/2019). *Youtube*. Instituto de Física Teórica IFT. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: https://elpais.com/sociedad/2013/04/26/actualidad/1367001162_823234.

“Lo que Einstein llamó su mayor error, sería mi mayor hallazgo” (26/4/2013). *El País*. Alicia Rivera. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: https://en.wikiquote.org/wiki/John_Archibald_Wheeler

General Relativity (primavera 2020). *MIT*. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>

El Big Bang explicado: la teoría sobre el origen de todo (26/05/2020). *enterarse*. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de:

https://www.enterarse.com/20200526_0001-el-big-bang-explicado-la-teoria-sobre-el-origen-de-todo

El Big Bang y el fondo cósmico de microondas (11/10/2006). *El País*. Enrique Martínez González. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: https://elpais.com/diario/2006/10/11/futuro/1160517601_850215.html

Efecto doppler (s.f.). *sea astronomía*. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: <https://www.sea-astronomia.es/glosario/efecto-doppler>

Desplazamiento al rojo (s.f.). *sea astronomía*. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: <https://www.sea-astronomia.es/glosario/desplazamiento-al-rojo>

Ley de Hubble (s.f.). *sea astronomía*. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: <https://www.sea-astronomia.es/glosario/ley-de-hubble>

La Expansión del Universo (7/2/2014). *Astroblog*. Ricardo García. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de: <http://astroblog.cl/expansion-del-universo/>

Obteniendo las ecuaciones de Friedmann para la cosmología: la solución de Robertson-Walker (19/10/2013). *Estudiar física*. Adrián. Última vez consultado: 27/11/2021

Recuperado de:

<https://estudiarfisica.com/2013/10/19/obteniendo-las-ecuaciones-de-friedmann-para-la-cosmologia-la-solucion-de-robertson-walker/>

V.III Figuras

Figura 1. Gráfico para representar la dilatación temporal.....p. 9

Recuperada de: https://es.wikipedia.org/wiki/Dilataci%C3%B3n_del_tiempo

Figura 2. Procedimiento para sincronizar dos relojes.....p. 11

Recuperada de: Creación propia.

Figura 3. Simultaneidad de dos observadores en movimiento relativo a otro marco de referencia en reposo.....p. 12

Recuperada de: Creación propia.

Figura 4. Gráfico de dilatación temporal respecto a la velocidad.....p. 13

Recuperada de: Creación propia.

Figura 5. Representación del espacio-tiempo con un cono de luz.....p. 13

Recuperada de: https://es.wikipedia.org/wiki/Cono_de_luz

Figura 6. Equivalencia entre un observador acelerando (izquierda) y un observador en presencia de un campo gravitatorio (derecha).....p. 15

Recuperada de:

<https://maniqui.ru/educacin-y-lenguas/ciencia/fisica/20208-la-gravedad-como-la-aceleracin.html>

Figura 7. Representación de un tensor de orden dos en tres dimensiones.....p. 19

Recuperada de: https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1culo_tensorial

Figura 8. Representación de un vector con sus vectores base y componentes.....p. 20

Recuperada de: Creación propia.

Figura 9. Interpretación física de cada componente del tensor energía-momento.....p. 21

Recuperada de: https://es.wikipedia.org/wiki/Tensor_de_energ%C3%ADa-impulso

Figura 10. Sistema de coordenadas polares.....p. 22

Recuperada de: Creación propia.

Figura 11. Expansión posterior al Big Bang.....p. 27

Recuperada de: https://es.wikipedia.org/wiki/Big_Bang

Figura 12. Imagen de la radiación de fondo de microondas.....p. 27

Recuperada de: https://es.wikipedia.org/wiki/Radiaci%C3%B3n_de_fondo_de_microondas

Figura 13. Diagrama de paralaje.....p. 29

Recuperada de: Creación propia.

Figura 14. Paralaje desde la Tierra.....p. 30

Recuperada de: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Astro/para.html>

Figura 15. Luminosidad de dos cefeidas distintas respecto al tiempo.....p. 31

Recuperada de:

<https://astroaficion.com/2019/06/03/como-se-mide-la-distancia-a-las-estrellas-ii-cefeidas/>

Figura 16. Relación luminosidad-periodo de las cefeidas.....p. 31

Recuperada de: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Astro/cepheid.html>

Figura 17. Relación entre el brillo máximo y la tasa de disminución del brillo de supernovas tipo Ia.....p. 32

Recuperada de: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Astro/snovcn.html>

Figura 18. Comparación de desplazamiento al rojo de un supercúmulo de galaxias (derecha) comparado con el del Sol (izquierda).....p. 34

Recuperada de: https://es.wikipedia.org/wiki/Corrimiento_al_rojo

Figura 19. Analogía de un globo sobre la expansión del universo.....p. 37

Recuperada de: <http://astroblog.cl/expansion-del-universo/>

Figura 20. Expansión del universo según el parámetro Ωp. 41

Recuperada de:

http://astronomia.ign.es/rknowsys-theme/images/webAstro/paginas/documentos/Anuario/La_expansionaceleradadeluniverso.pdf

V.IV Ecuaciones

Ecuación 1. Ecuación de campo de Albert Einstein.....p. 4

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_del_campo_de_Einstein

Ecuación 2. Dilatación temporal.....p. 9

Recuperado de: *Física, Segunda Edición* (ed. II). Reverté S. A.

Ecuación 3. Contracción de longitudes.....p. 10

Recuperado de: *Física, Segunda Edición* (ed. II). Reverté S. A.

Ecuación 4. Ejemplo del convenio de suma de Einstein.....p. 17

Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>

Ecuación 5. Ejemplo de la notación de derivadas parciales.....p. 17

Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>

Ecuación 6. Relación entre número de componentes con las dimensiones y orden de un tensor.....p. 18

Recuperado de: <https://estudiarfisica.com/2010/07/11/>

Ecuación 7. Vector expresado con notación de índices.....p. 20

Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>

Ecuación 8. Expresión de la delta de Krönecker.....p. 20

Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>

Ecuación 9. Definición del tensor métrico.....p. 20

Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>

Ecuación 10. Tensor métrico en un espacio-tiempo plano.....p. 21

Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>

- Ecuación 11. Inversa de la métrica.....p. 21
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>
- Ecuación 12. Tensor de energía-momento de un fluido perfecto.....p. 22
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>
- Ecuación 13. Ecuación para encontrar el tensor de energía-momento de un fluido perfecto.....p. 22
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>
- Ecuación 14. Definición de los símbolos de Christoffel.....p. 23
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>
- Ecuación 15. Ecuación para calcular los números de Christoffel.....p. 23
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>
- Ecuación 16. Cálculo del tensor de Riemann.....p. 23
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>
- Ecuación 17. Definición del Tensor de Ricci.....p. 24
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>
- Ecuación 18. Cálculo del Tensor de Ricci a partir de los símbolos de Christoffel.....p. 24
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>
- Ecuación 19. Definición del escalar de Ricci.....p. 24
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>
- Ecuación 20. Tensor de Einstein.....p. 25
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>
- Ecuación 21. Ecuación de campo de Einstein.....p. 25
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>
- Ecuación 22. Ecuación de campo de Einstein con constante cosmológica.....p. 25
Recuperado de: <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-962-general-relativity-spring-2020/>

Ecuación 23. Ecuación para calcular una distancia con paralaje.....p. 30

Recuperado de: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Astro/para.html>

Ecuación 24. Ecuación del desplazamiento al rojo.....p. 33

Recuperado de:

http://astronomia.ign.es/rknowsys-theme/images/webAstro/paginas/documentos/Anuario/La_expansionaceleradadeluniverso.pdf

Ecuación 25. Relación velocidad-distancia.....p. 35

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Hubble-Lema%C3%A9tre

Ecuación 26. Ley de Hubble.....p. 35

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Hubble-Lema%C3%A9tre

Ecuación 27. Relación entre la velocidad y el desplazamiento al rojo.....p. 36

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Hubble-Lema%C3%A9tre

Ecuación 28. Definición de velocidad.....p. 36

Recuperado de:

http://astronomia.ign.es/rknowsys-theme/images/webAstro/paginas/documentos/Anuario/La_expansionaceleradadeluniverso.pdf

Ecuación 29. Combinación de la ecuación 25 y 28.....p. 36

Recuperado de:

http://astronomia.ign.es/rknowsys-theme/images/webAstro/paginas/documentos/Anuario/La_expansionaceleradadeluniverso.pdf

Ecuación 30. Primera ecuación de Friedmann.....p. 39

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Friedmann

Ecuación 31. Segunda ecuación de Friedmann.....p. 39

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Friedmann

Ecuación 32. Definiciones de ρ y pp. 40

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Friedmann

Ecuación 33. Primera ecuación de Friedmann (simplificada).....p. 40

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Friedmann

Ecuación 34. Segunda ecuación de Friedmann (simplificada).....p. 40

Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Friedmann

Ecuación 35. Ecuación de estado de un fluido perfecto.....p. 43

Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=qlmlEiDfHLI>

Ecuación 36. Métrica del nuevo modelo cosmológico.....p. 44

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 37. Componentes de la cuadrivelocidad (en la forma de superíndice).....p. 45

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 38. Componentes de la cuadrivelocidad (en la forma de subíndice).....p. 45

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 39. Cálculo del Tensor de energía-momento (paso 1).....p. 46

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 40. Cálculo del Tensor de energía-momento (paso 2).....p. 46

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 41. Cálculo del Tensor de energía-momento (paso 3).....p. 46

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 42. Tensor de energía-momentop. 46

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 43. Inversa de la métrica.....p. 46

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 44. Derivadas parciales de la métrica.....p. 47

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 45. Símbolos de Cristoff.....p. 47

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 46. Símbolos de Cristoff con el parámetro de Hubble.....p. 47

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 47. Tensor de Ricci en términos de H y sus derivadas.....p. 48

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 48. Tensor de Ricci en términos de H, $a(t)$ y sus derivadas.....p. 48

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 49. Cálculo del escalar de Ricci (paso 1).....p. 48

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 50. Cálculo del escalar de Ricci (paso 2).....p. 48

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 51. Cálculo del escalar de Ricci (paso 3).....p. 48

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 52. Cálculo del escalar de Ricci (paso 4).....p. 49

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 53. Escalar de Ricci.....p. 49

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 54. Cálculo del Tensor de Einstein (paso 1).....p. 49

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 55. Cálculo del Tensor de Einstein (paso 2).....p. 49

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 56. Cálculo del Tensor de Einstein (paso 3).....p. 49

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 57. Ecuación de campo de Einstein con unidades donde $c = 1$p. 50

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 58. Ecuación de campo.....p. 50

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 59. Ecuación del componente 00 de las ecuaciones de campo.....p. 50

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 60. Ecuación del componente 11 de las ecuaciones de campo.....p. 50

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 61. Ecuación que describe la velocidad de la expansión del universo.....p. 50

Recuperado de: Creación propia.

Ecuación 62. Ecuación que describe la aceleración de la expansión del universo.....p. 50

Recuperado de: Creación propia.

Anexo I

Como se explicaba en el apartado II.I.II Relatividad Especial, concretamente en la página 9, para encontrar la relación entre los tiempos de los observadores en reposo (Δt) y en movimiento ($\Delta t'$) es tan sencillo como utilizar el teorema de pitágoras en la Figura 1. En este apartado se adjunta la demostración de ello.

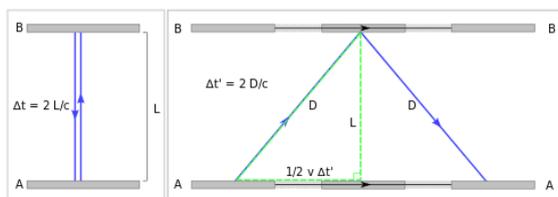


Figura 1. Gráfico para representar la dilatación temporal.

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \rightarrow L = \frac{c\Delta t}{2} \quad \Delta t' = \frac{2D}{c} \rightarrow D = \frac{c\Delta t'}{2} \quad D^2 = L^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2$$

$$\frac{(c\Delta t')^2}{4} = \frac{(c\Delta t)^2}{4} + \frac{(v\Delta t')^2}{4}$$

$$(c\Delta t')^2 = (c\Delta t)^2 + (v\Delta t')^2$$

$$(c\Delta t')^2 - (v\Delta t')^2 = (c\Delta t)^2$$

$$c^2\Delta t'^2 - v^2\Delta t'^2 = c^2\Delta t^2$$

$$(c^2 - v^2)\Delta t'^2 = c^2\Delta t^2$$

$$\left(\frac{c^2 - v^2}{c^2}\right)\Delta t'^2 = \Delta t^2$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t'^2 = \Delta t^2$$

$$\Delta t'^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t^2$$

$$\Delta t' = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t$$

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t \equiv \Delta t = \gamma \Delta t \longleftrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Anexo II

Como se explicaba en el apartado II.I.III Relatividad General, concretamente en la página 22, se puede encontrar la ecuación 12 a partir del caso general de la ecuación 13. En este apartado se adjunta la demostración de ello.

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}$$

Ecuación 13. Ecuación para encontrar el tensor de energía-momento de un fluido perfecto.

Donde:

$$u_{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad u_{\nu} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Y:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, representando cada componente como una matriz y haciendo el producto matricial entre las cuadvirvelocidades:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] + p \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} (\rho + p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Anexo III

Como se explicaba en el apartado Bloque III: Marco práctico, concretamente en la página 47, el cálculo de los símbolos de Cristoff es bastante extenso. Por lo que, en este apartado se adjunta su desarrollo.

Para empezar, recordaremos la ecuación 15 para calcular los símbolos de Cristoff.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta})$$

Ecuación 15. Ecuación para calcular los números de Christoffel.

Donde:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a(t)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a(t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a(t)^2} \end{bmatrix}$$

Y:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a(t)a(t)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a(t)a(t)' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a(t)a(t)' \end{bmatrix} \quad \partial_i g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Además, como se explicaba en el Marco práctico, este objeto de tres índices no puede ser representado con una sola matriz por lo que el cálculo también lo separaré en los diferentes componentes que el superíndice μ puede adoptar.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2}g^{0\gamma}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2}g^{1\gamma}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2}g^{2\gamma}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^3 = \frac{1}{2}g^{3\gamma}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta})$$

Otra característica importante que nos ayudará a acortar el cálculo es que, en la inversa de la métrica, si sus dos superíndices son diferentes, toda la expresión se volverá igual a 0. Por lo tanto, podemos reescribir las anteriores expresiones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_\alpha g_{\beta 0} + \partial_\beta g_{0\alpha} - \partial_0 g_{\alpha\beta}) & \Gamma_{\alpha\beta}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_\alpha g_{\beta 1} + \partial_\beta g_{1\alpha} - \partial_1 g_{\alpha\beta}) \\ \Gamma_{\alpha\beta}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_\alpha g_{\beta 2} + \partial_\beta g_{2\alpha} - \partial_2 g_{\alpha\beta}) & \Gamma_{\alpha\beta}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_\alpha g_{\beta 3} + \partial_\beta g_{3\alpha} - \partial_3 g_{\alpha\beta})\end{aligned}$$

El último concepto que aplicaremos en estas ecuaciones para simplificarlas será, en los componentes 1, 2 y 3, eliminar el último término de la derivada parcial de la métrica, ya sabemos que, al no ser respecto al tiempo, esta vale 0. Por lo tanto, las ecuaciones quedarían de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_\alpha g_{\beta 0} + \partial_\beta g_{0\alpha} - \partial_0 g_{\alpha\beta}) & \Gamma_{\alpha\beta}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_\alpha g_{\beta 1} + \partial_\beta g_{1\alpha}) \\ \Gamma_{\alpha\beta}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_\alpha g_{\beta 2} + \partial_\beta g_{2\alpha}) & \Gamma_{\alpha\beta}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_\alpha g_{\beta 3} + \partial_\beta g_{3\alpha})\end{aligned}$$

Para calcular el componente 0 haremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_\alpha g_{\beta 0} + \partial_\beta g_{0\alpha} - \partial_0 g_{\alpha\beta}) \\ \Gamma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a(t)^2}\right) \left(\begin{bmatrix} -2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a(t)a(t)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a(t)a(t)' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a(t)a(t)' \end{bmatrix} \right) \\ \Gamma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a(t)^2}\right) \begin{bmatrix} -2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a(t)a(t)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a(t)a(t)' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a(t)a(t)' \end{bmatrix} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^0 &= \begin{bmatrix} \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Para calcular el componente 1 haremos lo siguiente:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_\alpha g_{\beta 1} + \partial_\beta g_{1\alpha})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a(t)^2} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 & 2a(t)a(t)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a(t)^2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 2a(t)a(t)' & 0 & 0 \\ 2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 \\ \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular el componente 2 haremos lo siguiente:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_\alpha g_{\beta 2} + \partial_\beta g_{2\alpha})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a(t)^2} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2a(t)a(t)' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a(t)^2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2a(t)a(t)' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para calcular el componente 3 haremos lo siguiente:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_\alpha g_{\beta 3} + \partial_\beta g_{3\alpha})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a(t)^2} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2a(t)a(t)' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a(t)^2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2a(t)a(t)' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a(t)a(t)' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a(t)'}{a(t)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a(t)'}{a(t)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Anexo IV

Como se explicaba en el apartado Bloque III: Marco práctico, concretamente en la página 48, el cálculo del Tensor de Ricci es bastante extenso. Por lo que, en este apartado se adjunta su desarrollo.

Para empezar, recordaremos la ecuación 18 para calcular el Tensor de Ricci.

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma$$

Ecuación 18. Cálculo del Tensor de Ricci a partir de los símbolos de Christoffel.

Como se puede observar, para conseguir el Tensor de Ricci hay que calcular cuatro factores distintos para luego sumarlos. Por lo tanto, los calcularemos por separado para luego hacer la suma.

El primer término es la derivada parcial de un símbolo de Cristoff, donde α es una sumatoria sobre cada valor que puede adoptar. Por lo que queda de la siguiente forma:

$$\partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\alpha = \partial_0 \Gamma_{\nu\mu}^0 + \partial_1 \Gamma_{\nu\mu}^1 + \partial_2 \Gamma_{\nu\mu}^2 + \partial_3 \Gamma_{\nu\mu}^3$$

Como todas las derivadas parciales que no sean respecto al tiempo son igual a 0, el primer término queda de la siguiente forma:

$$\partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\alpha = \partial_0 \Gamma_{\nu\mu}^0 = \begin{bmatrix} H' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H' \end{bmatrix}$$

Donde H' es la derivada parcial respecto al tiempo del parámetro de Hubble. Utilizando la regla de la cadena se puede comprobar que H' en términos de H , $a(t)$ y sus derivadas adopta la siguiente forma:

$$H' = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \left(\frac{a(t)'}{a(t)} \right)}{\partial t} = \frac{a(t)'' a(t) - a(t)'^2}{a(t)^2} = \frac{a(t)''}{a(t)} - \left(\frac{a(t)'}{a(t)} \right)^2$$

$$H' = \frac{a(t)''}{a(t)} - H^2$$

El segundo término es otra derivada parcial de un símbolo de Cristoff, donde α vuelve a ser una sumatoria sobre cada valor que puede adoptar. Por lo que queda de la siguiente forma:

$$\partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha = \partial_\nu (\Gamma_{0\mu}^0 + \Gamma_{1\mu}^1 + \Gamma_{2\mu}^2 + \Gamma_{3\mu}^3)$$

$$\partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha = \partial_\nu ([H \ 0 \ 0 \ 0] + [H \ 0 \ 0 \ 0] + [H \ 0 \ 0 \ 0] + [H \ 0 \ 0 \ 0])$$

$$\partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha = \partial_\nu [4H \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha = \begin{bmatrix} 4H' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El tercer término se trata del producto de dos símbolos de Cristoff, donde α y σ son dos sumatorias por separado. Para calcular este producto calcularemos el primer símbolo de cristoff por separado y luego haremos la sumatoria sobre el índice σ .

$$\Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\sigma = (\Gamma_{0\sigma}^0 + \Gamma_{1\sigma}^1 + \Gamma_{2\sigma}^2 + \Gamma_{3\sigma}^3) \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$$

El primer factor queda de la siguiente forma:

$$\Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha = \Gamma_{0\sigma}^0 + \Gamma_{1\sigma}^1 + \Gamma_{2\sigma}^2 + \Gamma_{3\sigma}^3$$

$$\Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha = [H \ 0 \ 0 \ 0] + [H \ 0 \ 0 \ 0] + [H \ 0 \ 0 \ 0] + [H \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha = [4H \ 0 \ 0 \ 0]$$

Por lo tanto, el producto completo queda de la siguiente forma:

$$\Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\sigma = \Gamma_{\alpha 0}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^0 + \Gamma_{\alpha 1}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^1 + \Gamma_{\alpha 2}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^2 + \Gamma_{\alpha 3}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^3$$

$$\Gamma_{\alpha\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = \Gamma_{\alpha 0}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^0$$

$$\Gamma_{\alpha\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = 4H \cdot \Gamma_{\nu\mu}^0$$

$$\Gamma_{\alpha\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = 4H \cdot \begin{bmatrix} H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4H^2 \end{bmatrix}$$

Por último, el cuarto término se trata de otro producto de dos símbolos de Cristoff, donde α y σ vuelven a ser dos sumatorias por separado. Para calcular este producto expandiremos la sumatoria que representa α y calcularemos término a término para luego sumarlos.

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} = \Gamma_{\nu\sigma}^0\Gamma_{0\mu}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^1\Gamma_{1\mu}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^2\Gamma_{2\mu}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^3\Gamma_{3\mu}^{\sigma}$$

El primer término es:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^0\Gamma_{0\mu}^{\sigma} = \Gamma_{\nu 0}^0\Gamma_{0\mu}^0 + \Gamma_{\nu 1}^0\Gamma_{0\mu}^1 + \Gamma_{\nu 2}^0\Gamma_{0\mu}^2 + \Gamma_{\nu 3}^0\Gamma_{0\mu}^3$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^0\Gamma_{0\mu}^{\sigma} = \left(\begin{bmatrix} H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [H \ 0 \ 0 \ 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ H \ 0 \ 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ H \ 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 0 \ H] \right)$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^0\Gamma_{0\mu}^{\sigma} = \begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H^2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^0\Gamma_{0\mu}^{\sigma} = \begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H^2 \end{bmatrix}$$

El segundo término es:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^1\Gamma_{1\mu}^{\sigma} = \Gamma_{\nu 0}^1\Gamma_{1\mu}^0 + \Gamma_{\nu 1}^1\Gamma_{1\mu}^1 + \Gamma_{\nu 2}^1\Gamma_{1\mu}^2 + \Gamma_{\nu 3}^1\Gamma_{1\mu}^3$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^1 \Gamma_{1\mu}^\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ H \ 0 \ 0] + \begin{bmatrix} H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [H \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^1 \Gamma_{1\mu}^\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^1 \Gamma_{1\mu}^\sigma = \begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El tercer término es:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^2 \Gamma_{2\mu}^\sigma = \Gamma_{\nu 0}^2 \Gamma_{2\mu}^0 + \Gamma_{\nu 1}^2 \Gamma_{2\mu}^1 + \Gamma_{\nu 2}^2 \Gamma_{2\mu}^2 + \Gamma_{\nu 3}^2 \Gamma_{2\mu}^3$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^2 \Gamma_{2\mu}^\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ H \ 0] + \begin{bmatrix} H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [H \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^2 \Gamma_{2\mu}^\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^2 \Gamma_{2\mu}^\sigma = \begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el cuarto término es:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^3 \Gamma_{3\mu}^\sigma = \Gamma_{\nu 0}^3 \Gamma_{3\mu}^0 + \Gamma_{\nu 1}^3 \Gamma_{3\mu}^1 + \Gamma_{\nu 2}^3 \Gamma_{3\mu}^2 + \Gamma_{\nu 3}^3 \Gamma_{3\mu}^3$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^3 \Gamma_{3\mu}^\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 0 \ H] + \begin{bmatrix} H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [H \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^3 \Gamma_{3\mu}^\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^3 \Gamma_{3\mu}^\sigma = \begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H^2 \end{bmatrix}$$

Para acabar, la suma completa de todos los términos es:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma = \left(\begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma = \begin{bmatrix} 4H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2H^2 \end{bmatrix}$$

Después de calcular los cuatro factores que necesitamos, solo queda sumarlos para conseguir el Tensor de Ricci con la ecuación 18.

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma$$

Ecuación 18. Cálculo del Tensor de Ricci a partir de los símbolos de Christoffel.

$$R_{\mu\nu} = \left(\begin{bmatrix} H' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4H' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4H^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2H^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -3H' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H' + 2H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H' + 2H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H' + 2H^2 \end{bmatrix}$$

O expresado en términos de H, a(t) y sus derivadas:

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -3 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} - H^2 \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} - H^2 \right) + 2H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} - H^2 \right) + 2H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} - H^2 \right) + 2H^2 \end{bmatrix}$$

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -3 \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + 3H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{a(t)''}{a(t)} \right) + H^2 \end{bmatrix}$$