EL NOMBRE D'OR

Estudi sobre la Raó Àuria i el nombre *phi*.

2021-22

Abans de tot m’agradaria agrair a tothom que m’ha ajudat a fer aquest treball i a seguir fent el que més m’agrada. També a la meva tutora i professora de matemàtiques. Gràcies pels consells i per les orientacions que m’han servit de molt. Als meus pares, que sempre han estat amb mi quan ho necessitava i estava massa estressat i sobretot al meu padrí, que sense la seva estima per les matemàtiques no hagués estat possible.

Pseudònim: Àuric

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ

Ara més que mai el món en el qual vivim se sosté pels nombres, alguns dels quals tenen, fins i tot, nom propi: el nombre *pi* (π), el nombre *e*... Entre tots aquests nombres notables hi ha un especialment interessant: 1,618034... És curiós saber que aquesta xifra ha deixat impressionats a moltíssimes ments brillants, passant per matemàtics, físics, historiadors i enginyers.

Us preguntareu quin és el nom d’aquest aclamat nombre... doncs és l’anomenada proporció àuria, nombre auri, nombre d’or, proporció transcendental o nombre diví.

Al llarg de la història, el *nombre d’or*, representat amb la lletra grega *phi* (φ o Φ), s’ha relacionat amb la naturalesa i l’harmonia i bellesa en el món de l’art. Un dels motius de la gran admiració que té aquest nombre són les relacions i propietats matemàtiques i numèriques realment sorprenents i també les connexions entre la natura i les creacions humanes.

En aquest treball de recerca em disposaré a fer una extensa explicació i recerca sobre el nombre d’or, passant per demostracions matemàtiques i gràfiques, relacions numèriques fins al nombre d’or en terrenys com la natura, l’arquitectura o la tecnologia.

Mentiria si digués que les matemàtiques no m’apassionen. Escollir la direcció i el tema del treball ha estat fàcil, ja que des de ben petit penso que tots nosaltres i l’univers en el qual vivim és matemàtic, som números. Poder pensar que el perquè de totes les coses que ens envolten pugui ser explicar amb càlculs em sembla cosa extraordinàriament bella i interessant. Números i bellesa, dos termes amb una xifra al bell mig: El nombre d’or.

En addició, em disposaré a formular la següent hipòtesi la qual tractaré de respondre al final del treball: És Lleida una ciutat d’edificis amb la proporció àuria?

2. EL NOMBRE D'OR

2.1 DEFINICIÓ I HISTÒRIA

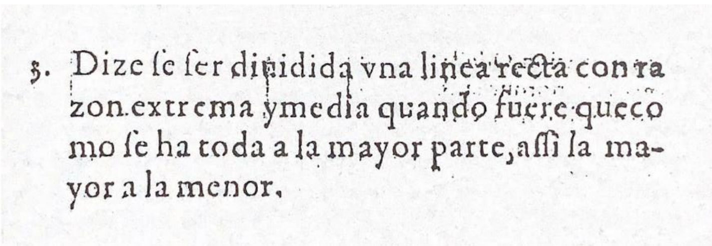
El nombre auri, per definició, és un nombre irracional que resulta ser el quocient entre un segment menor i un segment major, que és el mateix que dividir un segment major entre una totalitat. Cal saber que un nombre irracional és un valor que no pot ser expressat com una fracció. És qualsevol nombre real que no és racional i la seva expressió decimal no és no exacta ni periòdica.

El nombre irracional auri va ser una troballa dels grecs de l'època clàssica i la seva història documentada té inici en una de les obres, per no dir l'obra més comentada, important, representativa i influent de la història en el món dels nombres: *Elements de Geometria* d'Euclides, obra escrita pels volts de l'any 300 aC. Està dividida en tretze llibres, i en el sisè podem veure com a tercera definició el text que va començar-ho tot.


LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DELA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.
Traduzidos en lẽgua Española por Rodrigo çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedratico de Cosmographia por su Magestad en la casa de la Contratació de Seuilla. Dirigidos al illustre señor Luciano de Negrõ, Canonigo dela sancta yglesia de Seuilla.
Con licencia del Consejo Real.
En Seuilla en casa de Alonso de la Barrera.
1576.
Esta tassado en ocho pezetas

Elements de Geometria d'Euclides

La traducció en castellà de l'any 1576 d'aquesta definició diu així: «*Dize se ser dividida una línia recta con razón extrema y media quando fuere que como se ha toda a la mayor parte, assi la mayor a la menor*».


3. Dize se ser diuidida vna linea recta con razon extrema y media quando fuere que como se ha toda a la mayor parte, assi la mayor a la menor.

En català, el text diu: «*Es diu que una recta està dividida en mitjana i extrema raó quan la longitud de la línia total és a la de la part més gran, com la d'aquesta part més gran és a la de la menor*». Sintetitzant la definició, podem dir que «*El tot és a la part com la part a la resta*».

Aquesta mitjana i extrema raó, que apareix amb tanta modèstia, és el nombre que amb posterioritat serà anomenat nombre d'or o nombre auri, i a què l'italià Luca Pacioli dedicarà tot un tractat l'any 1509, donant-li el nom de divina proporció.

Phi, φ, el símbol amb el qual avui coneixem al nombre auri, va ser-li assignat posteriorment a principis del segle XX pel matemàtic Mark Barr. El nord-americà va proposar aquest vincle entre el nombre i Fidias, constructor del Partenó d'Atenes, i va manllevar la seva inicial.

Fidias

Tot seguit, un cop ja definit i presentat el nombre em disposo a començar la immersió dins la seva naturalesa matemàtica.

2.2 CÀLCUL

Com va fer-s'ho Euclides per calcular aquest meravellós nombre?

Dividim de forma simple un segment, assignant a *x* com el total i *l* com la part més gran de les dues resultants a l'hora de ser dividides.

La partició del segment que hem fet ho serà en mitja i extrema raó i llavors serà una divisió àuria quan $\frac{x}{l} = \frac{l}{x-l}$. Aquesta igualtat, degut a què perquè dues fraccions siguin iguals o equivalents també ho han de ser els seus productes en creu: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$, ens porta a una equació de segon grau: $x \cdot (x - l) = 1 \cdot 1 \rightarrow x^2 - lx = 1$ equivalent a $x^2 - lx - 1 = 0$. Si apliquem la fórmula per resoldre aquest tipus d'equacions, tindrem la solució negativa i la positiva. En aquest cas ens interessa la positiva: $x = l(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cong 1{,}618l$.

Aquesta és la relació que busquem i la que anomenem proporció àuria:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618 \ .$$

Una cosa a tenir en compte a l'hora de fer els càlculs és que la proporció divina tindrà el mateix valor independentment de la longitud del segment inicial, ja que l'equació de segon grau és la relació entre les longituds dels segments, llavors aquesta serà la mateixa sigui quin sigui el segment del qual partim.

2.3 PROPIETATS ELEMENTALS

Sabem que el nombre Φ és ben peculiar. Té molts trets característics i propis que el fan únic. Vegem alguns:

Comencem parlant sobre la següent afirmació matemàtica completament certa: $\Phi^2 = \Phi + 1$. És ben curiós que el quadrat d'un nombre sigui el resultat del mateix més la unitat. És casualitat? Doncs no, i veurem el perquè.

Vet aquí la demostració d'aquesta propietat:

$$\Phi^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Llavors...

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

I aquesta curiosa operació no es queda aquí, ja que si seguim elevant Φ per diferents nombres, veiem que es repeteix la mateixa relació:

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$$

$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2$$

$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3$$

Un cop coneixent el valor de Φ^2 i Φ, només ens farà falta anar sumant dues consecutives per obtenir la resta de potències:

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3$$

Podem veure que per calcular qualsevol potència de Φ, només cal multiplicar el mateix nombre d'or per un nombre que sigui la suma dels coeficients de les potències anteriors de Φ i sumar-li un nombre que és el coeficient de la potència anterior.

3. LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI

És realment sorprenent que el nombre d'or, un nombre irracional amb decimals infinits, sigues emparentada segles després amb una successió principalment aritmètica. Coneguda també com la sèrie o seqüència de Fibonacci, és una successió matemàtica de nombres naturals tal que cada un dels seus termes és igual a la suma dels dos anteriors.

La successió va ser descrita pel matemàtic italià Leonardo de Pisa Fibonacci, que juntament amb la contribució de la difusió del sistema de numeració indoirànic a Europa i per la publicació del seu llibre dels càlculs *Liber Abaci* van elevar-lo a un altre nivell en el món dels nombres i va ser considerat com un dels matemàtics amb més talent de l'edat mitjana.

Leonardo de Pisa Fibonacci

Liber Abaci, *El llibre de l'àbac* o *El llibre del càlcul* va ser un llibre que amb el títol ja es podia veure la sàtira i ironia que transmetia. Els temes tractats en ell i la difusió dels avantatges de les xifres del sistema d'orient posaven en dubte els mètodes habituals italians, cosa que va generar molt ressò en el conflicte intern del gremi de les matemàtiques, creant un conflicte que encarava els algorismistes i els abacistes, acabant així amb els primers.

3.1 UN PROBLEMA DE CONILLS

L'obra mestra de Fibonacci presenta una quantitat de problemes i teories immensa, com ara problemes d'àlgebra de primer grau o la teoria de nombres, però sens dubte el problema dels conills és el més conegut de tots, ja que la seva solució és la successió de Fibonacci.

El problema diu així: *Quantes parelles de conills tindrem a finals d'any si comencem amb una parella que produeix cada mes una altra parella que procrea al seu torn al cap de dos mesos de vida?*

Per mostrar la seva solució, Fibonacci va dissenyar la següent taula en la qual podem veure el creixement de la família dels animals i el seguiment del nombre de parelles de conills a final de mes:

Generació / Mes	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Total
1r	1						1
2n	1						1
3r	1	1					2
4t	1	2					3
5è	1	3	1				5
6è	1	4	3				8
7è	1	5	6	1			13
8è	1	6	10	4			21
9è	1	7	15	10	1		34
10è	1	8	21	20	5		55
11è	1	9	28	35	15	1	89
12è	1	10	36	56	35	6	144

El nombre total el podem veure a la columna final. Si som observadors, veiem que curiosament cada terme s'obté com a resultat de la suma dels dos termes procedents, donant peu a una successió ben curiosa que seria batejada amb el cognom de l'autor de l'obra. La llei que defineix a la successió de Fibonacci és la següent: $a_1 = 1, a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 2)$.

3.2 FIBONACCI I EL NOMBRE D'OR

Hi ha alguna relació real entre la successió de Fibonacci i el nombre d'or? Doncs sí.

Resulta que $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \Phi$. Aquest límit significa que el quocient entre un dels termes de la successió i el seu anterior, el l'infinit, serà Φ.

Al principi veurem que els resultats tenen poc a veure amb Φ, però si continuem podrem veure que, efectivament, la diferencia dels quocients amb el nombre auri es disminueix a nivells sorprenents.

POSICIÓ	**NOMBRE**	a_n/a_{n-1}	**DIFERÈNCIA AMB Φ**
1	1		
2	1	1,0000000000	0,6180339887
3	2	2,0000000000	-0,3819660113
4	3	1,5000000000	0,1180339887
5	5	1,6666666667	-0,0486326780
6	8	1,6000000000	0,0180339887
7	13	1,6250000000	-0,0069660113
8	21	1,6153846154	0,0026493733
9	34	1,6190476190	-0,0010136303
10	55	1,6176470588	0,0003869299

...

24	121393	1,6180339887	0,0000000000

Aquesta taula ens demostra que per tenir aproximacions de Φ no fa falta treure decimals de cap operació ni arrel, simplement podem dividir termes de la Successió de Fibonacci, cosa que ens pot permetre anar més àgils i ràpids.

Està clara la relació entre la successió i Φ, i és per això que la seqüència de Fibonacci també és coneguda com la seqüència daurada o la successió d'or, fent una mena d'homenatge a Φ.

4. EL RECTANGLE AURI

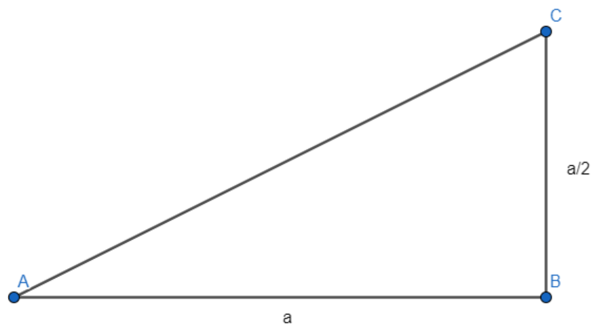
En els apartats anteriors hem vist de quina manera ha estat presentada tradicionalment la proporció àuria: una recta està dividida en mitja i extrema raó quan la longitud de la línia total és a la de la part gran, com la d'aquesta part major és a la menor, és a dir, que el tot és a la part com la part a la resta.

Vegem doncs com podem fer aquesta divisió del segment de forma gràfica.

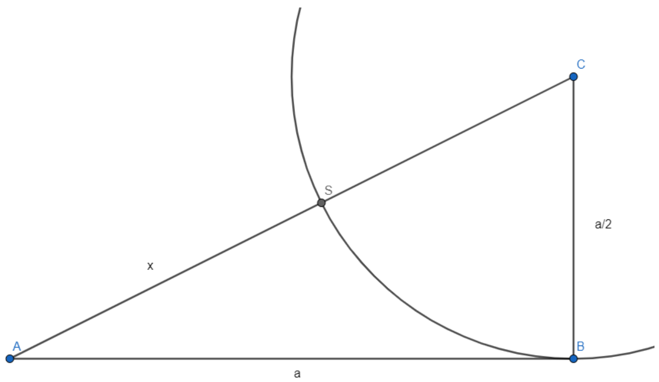
4.1 DIVISIÓ D'UN SEGMENT EN MITJA I EXTREMA RAÓ

Tenim un segment *AB* de llargada *a* i volem trobar un punt *X* que divideixi aquest segment en dues parts de proporció Φ. Com ho fem?

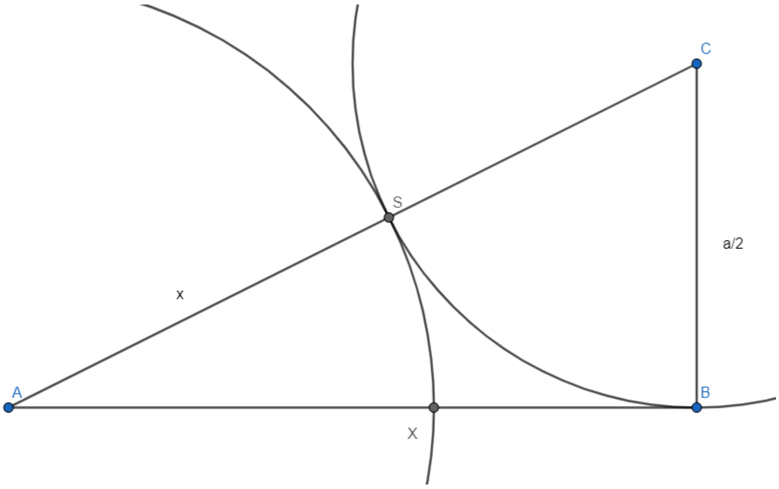
Primer de tot hem de dibuixar un triangle amb les característiques anomenades i catets a i $\frac{a}{2}$.



Obrim un radi $\frac{a}{2}$ des de *C* i trobem el punt de tall *S* en el segment *AC*. Definim *x* com el segment AS.



Obrim un radi *AD* des de *A* i trobem el punt de tall *X* en el segment *AB.*



El punt *X* compleix que $\mathrm{AX} = \mathrm{x} = \mathrm{AC} - (\mathrm{a}/2)$. Per tant, és el punt que divideix el segment AB en la perfecta proporció, i llavors la seva raó serà *phi* ($\frac{\mathrm{AX}}{\mathrm{XB}} = \Phi$).

4.2 LA FORMA DELS RECTANGLES

En geometria plana, el rectangle és un paral·lelogram el qual té quatre angles rectes, de noranta graus. Sempre els costats oposats tenen la mateixa longitud, i tots els rectangles tenen una raó.

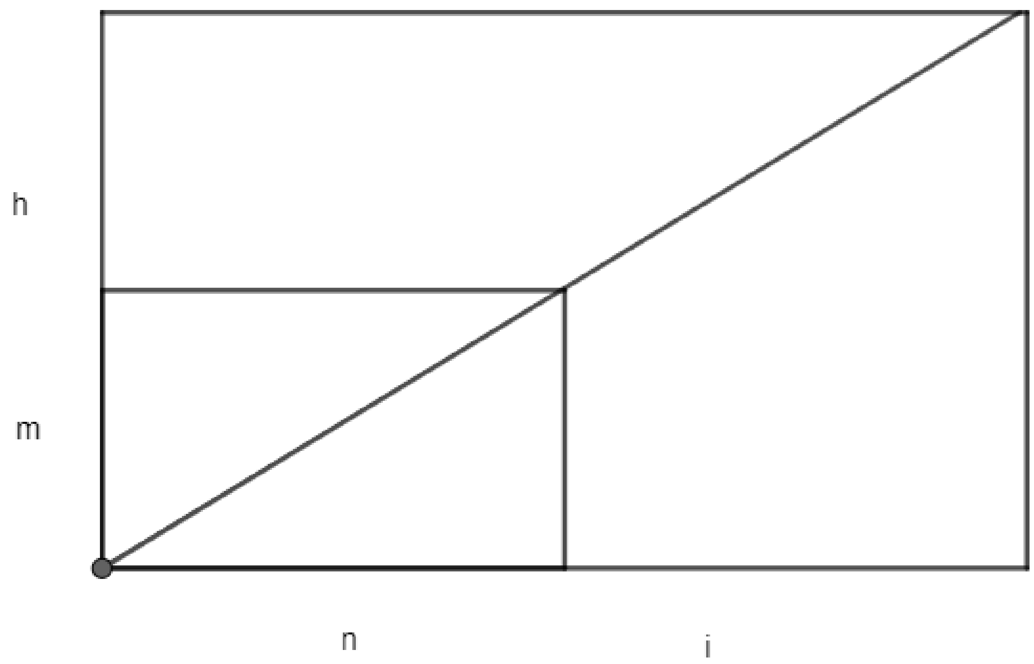
Esbrinar la raó d'un rectangle és tan fàcil com comparar els seus costats, fent el quocient entre les longituds d'un dels costats més llargs entre un dels curts. Efectivament, la raó d'un rectangle auri és el nombre *phi*.

En les nostres carteres portem més d'un rectangle auri: targetes de dèbit, crèdit, d'identitat... Totes agafem aquesta mesura com a convencional. Totes són rectangles auris.

Dos rectangles són semblants quan tenen la mateixa raó. Vulgarment diríem que tenen la mateixa forma.

Aquests rectangles són semblants quan $\frac{i}{h} = \frac{m}{n}$.

Una forma més ràpida per reconèixer dos rectangles semblants és simplement col·locar-los en un vèrtex coincident i traçar la diagonal amb el vèrtex oposat. Si coincideix als dos, vol dir que són semblants.

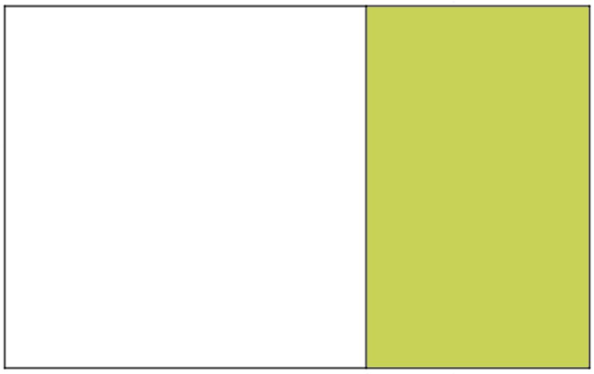


4.3 LES ESPIRALS ÀURIES

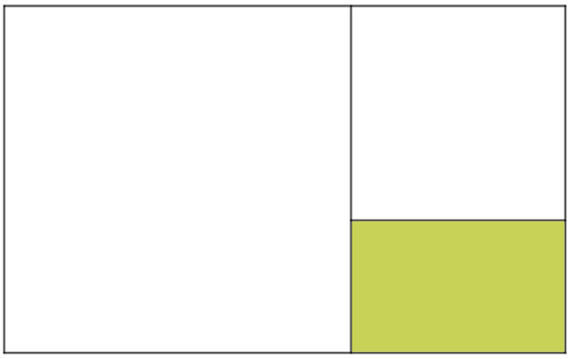
Una gran part de les manifestacions més espectaculars i amb més prodigi de *phi* les trobem en les que anomenem espirals àuries.

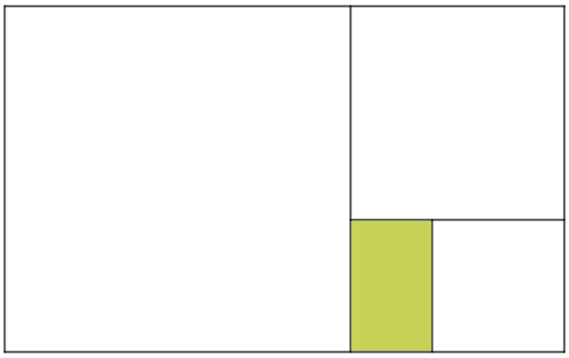
Per definició, l'espiral daurada o àuria és una espiral logarítmica associada a les propietats geomètriques del rectangle daurat.

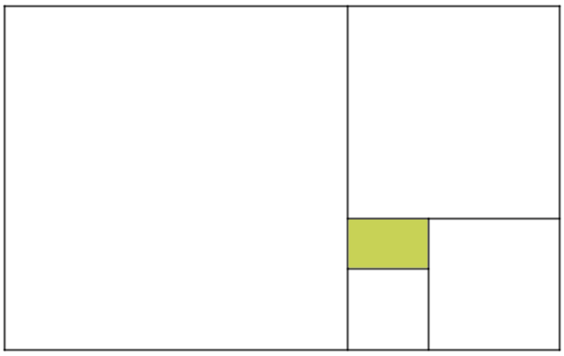
Com podem trobar gràficament aquesta espiral? Partim d'un rectangle auri. En aquest traçarem un quadrat amb costat d'obertura d'un dels dos segments curts. Trobarem un altre rectangle auri.



Farem aquest procés de manera repetida utilitzant el rectangle resultant.

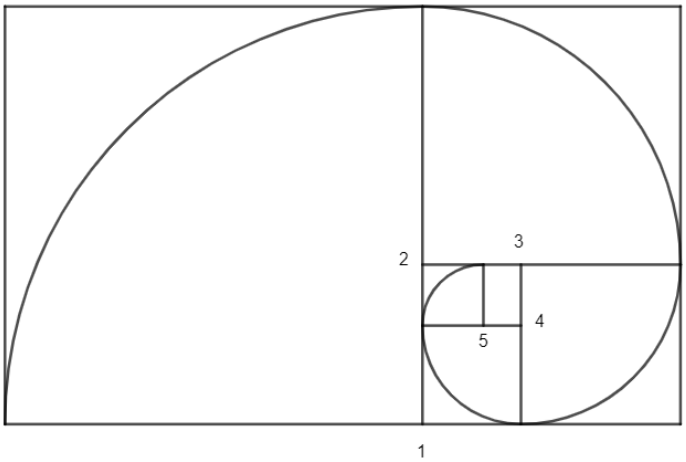






En cada un dels quadrats que sostraiem, tracem quadrants de circumferència amb radi el costat del quadrat i centre en el vèrtex de cada un d'ells.

Trobem punts 1, 2, 3, 4, 5...



Si continuem de forma indefinida amb la successió, obtindrem l’espiral àuria.

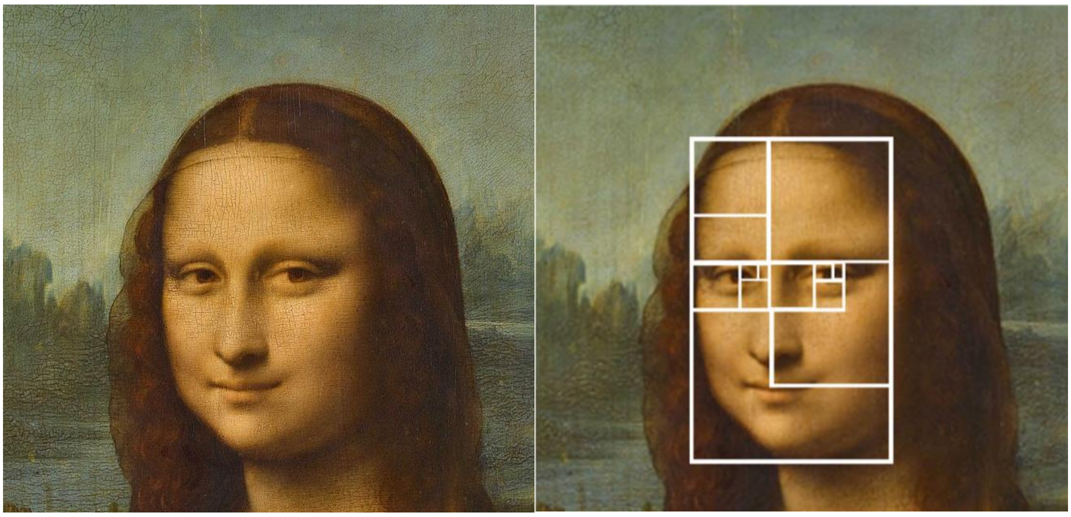
5. EL NOMBRE D’OR EN EL MÓN

5.1 ART

En quines obres podem veure el nombre auri present? Haurà sigut idea de l’artista o simplement hi és present per casualitat?

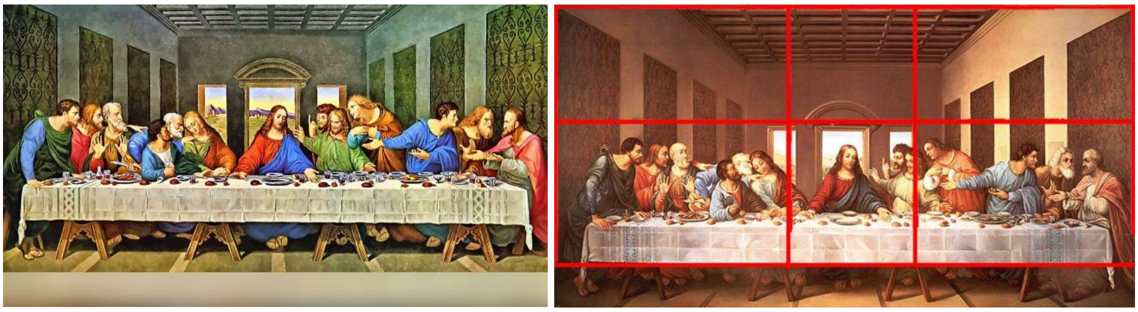
Molt s’ha escrit sobre el misteri que oculta el somriure més cèlebre de la història de l’art, i poca gent sap que podem obtenir una solució matemàtica en l’enigma.

La Gioconda és un retrat de Lisa Gherardini, esposa de Francesco de l'Giocondo, més conegut com La Gioconda o La Mona Lisa, és una obra pictòrica de l’italià Leonardo da Vinci creada l’any 1503, fa més de cinc segles. Vegem que passa si a l’obra mestra li superposem diferents rectangles auris en el rostre de la Mona Lisa:



La Gioconda (1503) de Leonardo Da Vinci

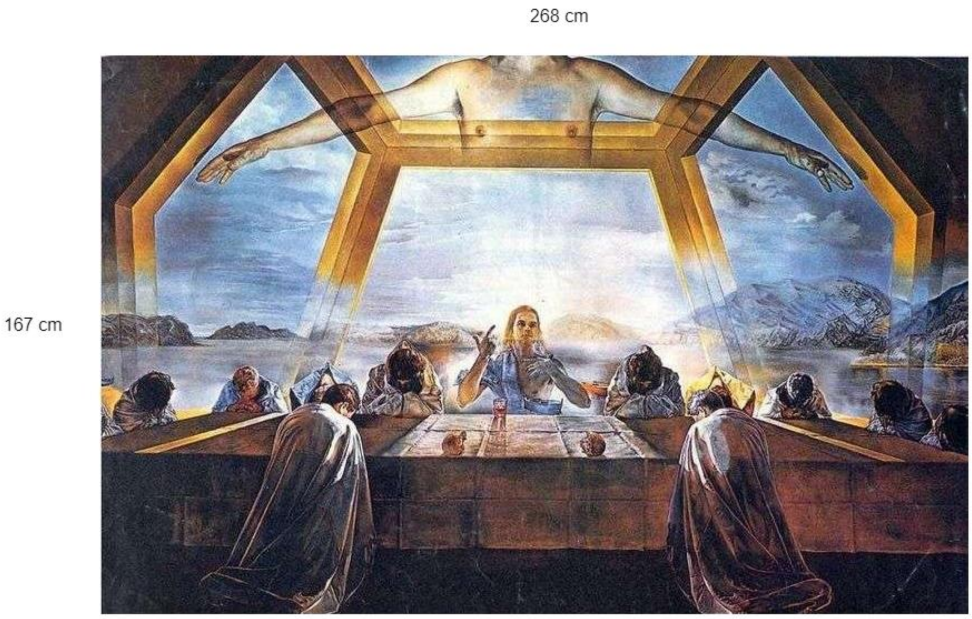
Com podem veure, el nombre *phi* el podem veure ben present en les proporcions de la cara de la bella Gioconda, enquadrant així la seva cara en un perfecte rectangle auri. Seria lògic afirmar que el geni italià va tenir en compte les proporcions d’or per fer l’obra mestra, però Da Vinci no acostumava a relacionar les matemàtiques amb l’estètica en les seves obres.



La Última Cena (1495-1498) de Leonardo da Vinci

Com no, aquest clàssic de Leonardo no podria faltar en aquest estudi. L’obra mestra de Da Vinci resulta poder ser la dividida en tres rectangles auris iguals.

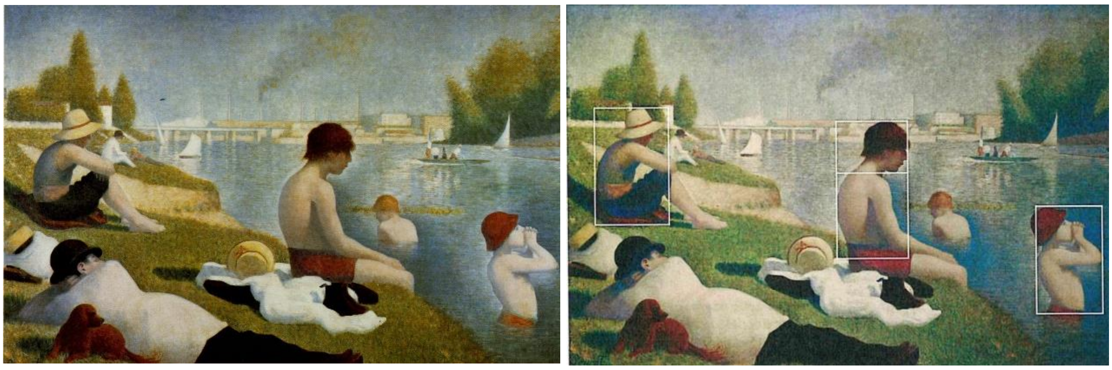
L’italià no és l’únic artista que la seva obra deixa veure una relació amb el nombre d’or i el món matemàtic clara. Salvador Dalí, fent homenatge justament a Leonardo Da Vinci i *La última cena*, va crear una obra extraordinària que les mesures del llenç són un rectangle auri (268 per 167 centímetres), i si dividim la llargada entre l’altura del llenç obtenim Φ.



La Última Cena (1955) de Salvador Dalí

Altres obres amb *phi*:

Georges Seurat sabia molt bé el que feia en aquesta obra en relació amb la proporció divina, perquè novament el llenç és un requadre auri i alguns elements que el formen també estan inscrits en requadres auris, tal com ho mostres les línies blanques en la imatge de la dreta.



Une baignade à Asnières (1884) de Georges Seurat

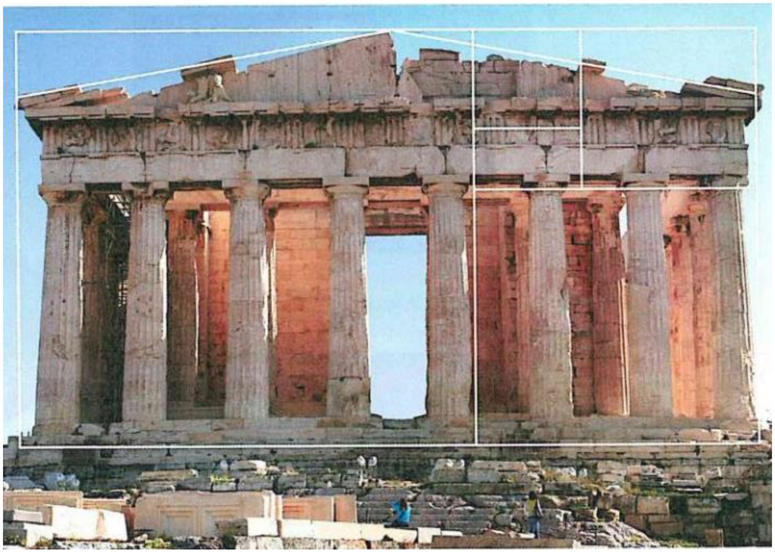
Sandro Botticelli també obeeix a un cos harmoniós i completament proporcional gràcies al nombre auri en la seva obra «El naixement de Venus». Veiem la mateixa proporció dels costats del llenç que veiem en *La última cena* de Salvador Dalí, formant un rectangle auri (278,5 per 172,5 centímetres), i veiem també una proporció perfecta en el cos de Venus, marcada amb les línies superposades en vermell.

El nacimiento de Venus (1482-1485) de Sandro Botticelli

5.2 ARQUITECTURA

Hem vist que en l'art hi ha exemples de sobres en els quals podem veure aquesta magnífica proporció, però n'hi haurà també en l'arquitectura? Perquè la proporció àuria consta d'una noció d'harmonia i bellesa universal, és lògic que la trobem en els plànols, traçats o simplement petits detalls d'edificis o construccions.

No hi ha millor exemple en aquest àmbit que el Partenó d'Atenes, l'obra mestra de Fidias, persona que com en l'apartat 2.1 he anomenat va donar nom justament al nombre *phi*. En veure la seva magnífica façana i examinar-la detalladament és realment sorprenent el fet que els seus elements poden ser descomposts en rectangles auris de forma neta i perfecta.



El Partenó d'Atenes (447 aC)

Un exemple espanyol és l'Església de Benínar, situada a la província d'Almeria. El poble avui en dia es troba sota del pantà de Benínar, ja que ha quedat sota les seves aigües. L'església i el fet que les seves proporcions siguin àuries segueix en l'enigma perquè no es sap si es va construir així per casualitat o a consciència.

No us penseu pas que la proporció és una cosa del passat en térmens arquitectònics. Tot i que sí que és veritat que avui en dia costa més veure estructures modernes amb aquestes peculiaritats, hi ha construccions més que conegudes amb les proporcions daurades.

La Torre CN a Toronto, Canadà. L'alçada total de la torre, la qual és l'estructura independent més alta del món, és de 553,33 metres, i l'alçada de la plataforma d'observació, amb el seu restaurant giratori és de 342 metres, amb proporció àuria, és a dir, d'1,617.

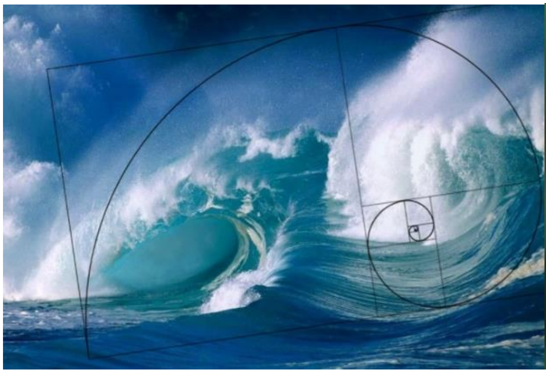
L'edifici de l'ONU, Estats Units. El suís Charles "Le Corbusier" va dissenyar un edifici amb forma de prisma on dues de les seves cares són rectangles auris, i amb tanta senzillesa com ho podria semblar va crear un dels edificis més emblemàtics de l'illa de Manhattan.

5.3 NATURA

Després dels anteriors apartats sabem que la ment humana ja ha utilitzat les proporcions àuries, però on les podem trobar en la natura?

L'univers, el planeta Terra i tot el que hi ha dins d'ell es converteix en un màgic espectacle de la improvisació natural. De moltes maneres la natura ens demostra que és forta i resistent, però sobretot, divinament perfecta.

L'espiral logarítmica o divina és la forma en la qual més és manifesta la raó en la natura. Aquesta espiral la podem trobar ja sigui en la forma de les galàxies, en la petxina que anomenem dels Nautilus, en les onades del mar o fins i tot en les roses:



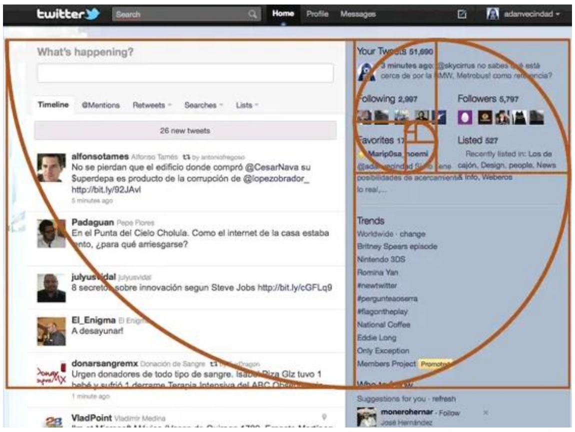

Aquí la podem veure de forma superposada en la forma de l'onada del mar en la foto de l'esquerra, i en l'altra la podem veure en el filament de la planta i en la seva curiosa forma d'enredar-se.


En aquest cas veiem l'espiral de forma molt clara en l'anomenada petxina de Nautilus, sent aquest el cas més perfecte en el qual podem veure l'espiral. La segona imatge mostra com els braços d'aquesta galàxia formen també l'espiral.

5.4 ALTRES

En aquest apartat consideraré altres exemples de la proporció àuria no siguin ni de l'art, ni de l'arquitectura ni de la natura.

Un exemple que em sembla de lo més curiós, però al mateix temps em sembla que és una genialitat és la pàgina web de Twitter. Els dissenyadors de la xarxa social americana van dissenyar una pàgina web amb les proporcions àuries, i d'aquesta manera fer que aquesta sigui bonica a la vista, ben dissenyada i perfecta.



Pàgina web de Twitter de l'any 2016

El ratolí que estic utilitzant per escriure aquest treball ha estat dissenyat també amb les proporcions àuries. El perquè d'això és degut al fet que gràcies a aquestes proporcions el ratolí es fa més còmode al nostre tacte, i de fet està dissenyat per encaixar perfectament amb qualsevol mà humana, sense importar la mesura d'aquesta.

Com veieu, el nombre d'or no és simplement matemàtiques, sinó que va més enllà. Em sembla realment al·lucinant que les galàxies, les ones del mar, la Gioconda, el Partenó d'Atenes i moltíssimes coses més estiguin enllaçades gràcies a les matemàtiques, a les proporcions ideals de bellesa i als nombres.

6. ÉS LLEIDA UNA CIUTAT D'EDIFICIS AMB LA PROPORCIÓ ÀURIA?

Com he dit anteriorment, la proporció àuria, el rectangle auri o el nombre d'or els podem trobar en llocs els quals mai ens ho imaginaríem, ja sigui en el nostre telèfon, en quadres que tenim a casa o fins i tot en la galàxia la qual formem part. Podria ficar mil i un exemples, però hi ha un que destaco per sobre la resta: l'arquitectura.

Personalment, em fascina pensar que tots els edificis que m'envolten han tingut un procés darrere llarguíssim de disseny i creació, i els seus arquitectes han pogut crear vertaderes obres d'art per tot el globus tenint en compte el nombre d'or. Hem vist que en països com Grècia, els Estats Units o el Canadà hi ha tants exemples com vulguis, però a l'hora de buscar exemples a Espanya n'hi ha ben pocs de documentats i d'estudiats, i si parlem de Catalunya encara menys. Justament per aquesta raó, em disposo a estudiar la meva ciutat, Lleida, i les seves icones arquitectòniques per veure si els seus arquitectes van tenir en compte la proporció daurada en la seva construcció.

La ciutat de Lleida disposa de moltes icones en l'àmbit arquitectònic, però les dues obres arquitectòniques que estudiaré en aquest treball són La Seu Vella i la Catedral Nova. Per fer aquesta tria m'he basat en la popularitat, l'estètica i òbviament la bellesa. Penso que tant la Seu Vella com la Catedral Nova representen perfectament el cor de la ciutat.

Per fer l'estudi, utilitzaré fotografies que, gràcies al programa GeoGebra, seré capaç de marcar-ne diferents punts de suport i d'aquesta manera mesurar les distàncies entre aquests. Com que estem buscant una raó, el meu objectiu serà sempre buscar tota mena de quadrilàters que puguin ser auris, i d'aquesta manera calcularé la raó del costat gran entre el petit i la compararé amb *phi*. És possible que en fer les imatges amb un angle determinat les proporcions no siguin del tot exactes, i llavors establiré un petit marge d'error de 0.001. Si considerés un marge d'error més gran que l'escollit, com per exemple 0.01 o 0.1, l'aproximació de la mesura al nombre d'or seria prou gran i per conseqüència inexacta per a considerar un rectangle en aquestes condicions com un rectangle auri. Per tant, decideixo implantar aquest sistema de referència, ja que penso que és l'indicat per marcar un límit i un sistema de referència.

A través d'aquest estudi verificaré o falsaré la següent hipòtesi: És Lleida una ciutat amb edificis amb la proporció àuria? Vegem-ho!

6.1 LA SEU VELLA

Comencem l'estudi amb l'obra arquitectònica més important en termes d'història de Lleida, La Seu Vella.

També coneguda com el Castell de Lleida, és el monument amb el qual s'identifica la capital del Segrià. La singular catedral va ser construïda l'any 1278 en un dels dos turons de Lleida, des del qual es podia veure no només la ciutat, sinó també gran part de la comarca de Segrià i la plana de Lleida.

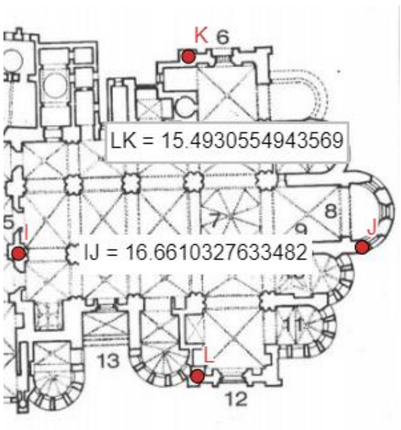
El campanar de La Seu Vella

Aquesta és una catedral del segle XIII, d'estil romànic i gòtic amb Pere de Coma d'arquitecte en cap.

Ramon Berenguer IV de Barcelona i Ermengol VI d'Urgell van conquerir Larida l'any 1149, cuitat musulmana que necessitava catedral. L'any 1203 va començar la construcció, i es va allargar fins inicis del segle XV.

De l'interior de la Seu, van quedar diferenciats els següents espais: l'església, el claustre, el campanar i la Canonja.

L'església és l'espai més gran dels quatre. El més característic és la seva silueta que recorda a la forma de la creu de Jesucrist, recalcant aquesta idea cristianisme fins i tot en la forma de l'edifici. Curiosament, la raó entre la llargada i l'amplada de la creu és gairebé 1, la qual cosa ens mostra que la creu de l'església no té les proporcions ideals que marca el cristianisme per la creu (segons el registre cristià, 1'81).



Llargada ÷ Amplada =

$$IJ \div LK = 16.661 \div 15.493$$
$$= 1.075$$

De detalls de l'interior d'aquesta destaquen l'altar, el sostre, diferents escultures de pedra blanca que estan exposades pels laterals, les rajoles del terra i més.

$$CD \div BC = 12.261 \div 3.1 = 3.955$$

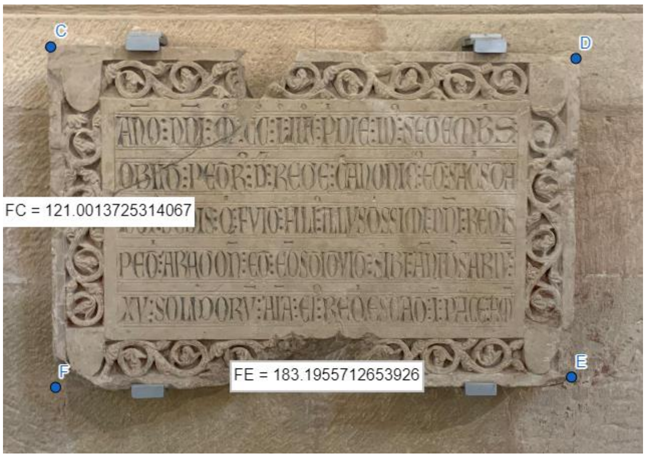
Per la forma de l'altar podia veure perfectament que la seva raó no seria la buscada, però no està de més saber la raó dels seus costats.

$$CF \div CD = 52.178 \div 32.313 = 1.615$$

Això ha sigut una sorpresa totalment. Podem afirmar que la proporció del sostre dels petits claustres que trobem a l'església és gairebé àuria. Hi ha una diferència de 0.003, i segons el nostre marge d'error no ho consideraríem un rectangle auri.

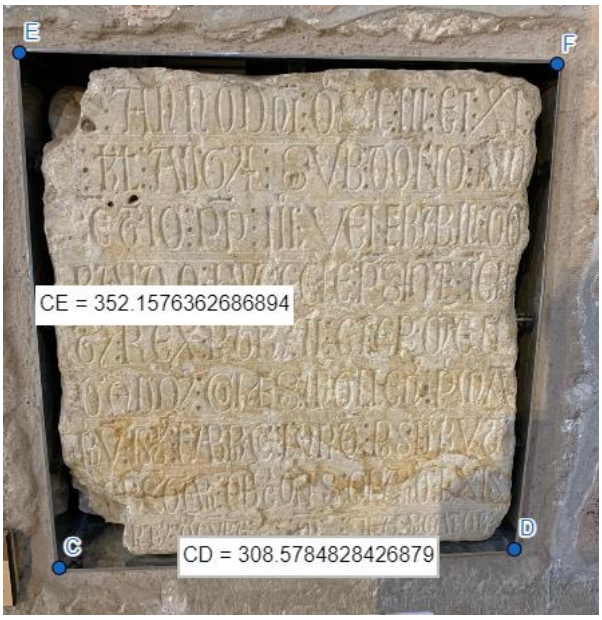
$$CE \div CD = 98.869 \div 59.118 = 1.673$$

Aquesta escultura és un homenatge a un antic membre del clergat que va viure aquí.



$$FE \div FC = 183.196 \div 121.001 = 1.514$$

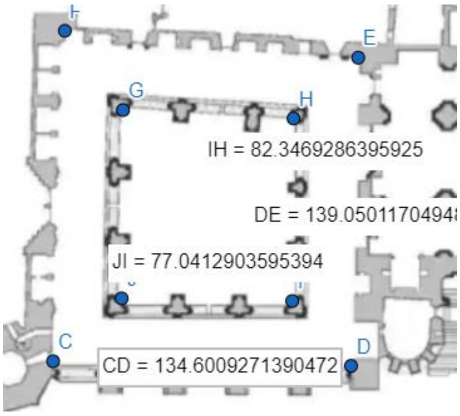
Aquesta és una pedra que està gravada i acomodada en la paret de l'església. A primera vista em semblava un rectangle auri, però les proporcions demostren que no.



$$CE \div CD = 352.158 \div 308.578 = 1.141$$

La làpida commemorativa de la 1a pedra de la catedral no compta amb uns costats amb proporcions daurades.

El claustre de la Seu Vella és l'espai que té un pati interior i les quatre galeries connectades entre si. Com que la seva estructura té forma de quadrilàter, vegem si es tracta d'un rectangle auri o no.



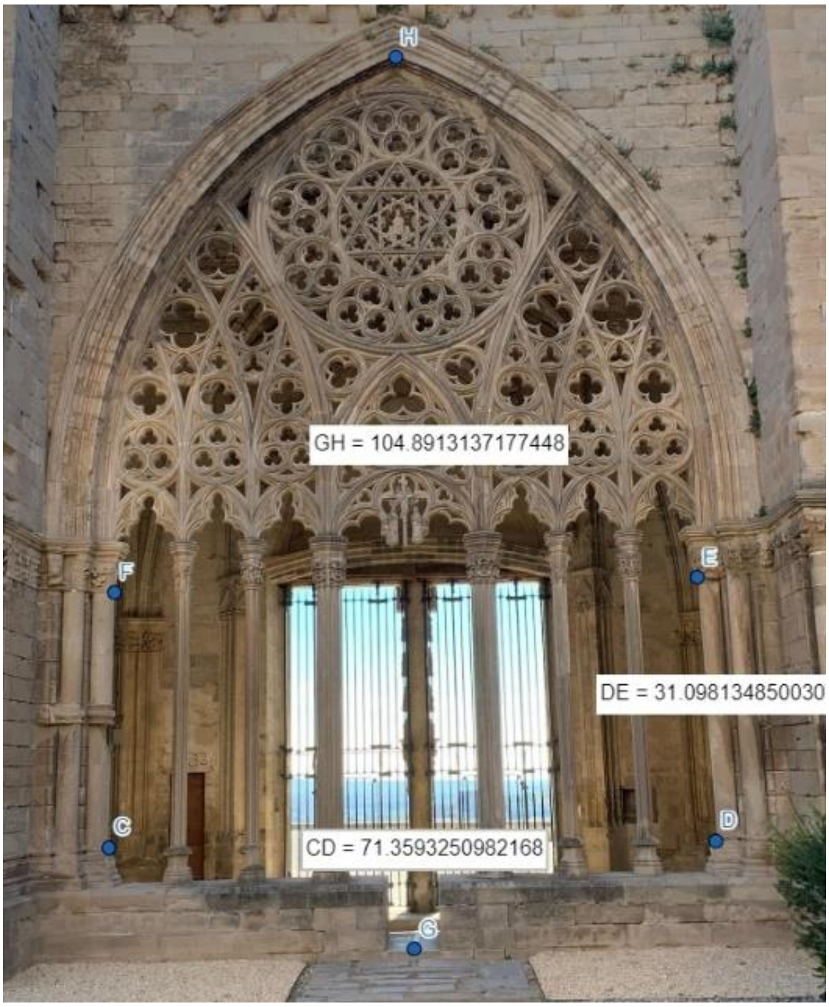
$$DE \div CD = 139.05 \div 134.601 = 1.033$$

$$IH \div JI = 82.347 \div 77.041 = 1.07$$

Ni el quadrilàter (o quadrat, comptant amb el marge d'error) exterior ni el del pati interior és auri.

Una de les característiques més belles d'aquest espai són els 17 finestrals i arcs de mig punt plens de línies i formes realment sorprenents. Estan fetes amb formigó per milers de picapedrers, i una de les curiositats de les pedres que formen aquesta estructura és que quan un picapedrer acabava una pedra i era utilitzada en la construcció, gravava la seva firma a la pedra i d'aquesta manera se sabia qui les havia picat i es facilitava el seu pagament.

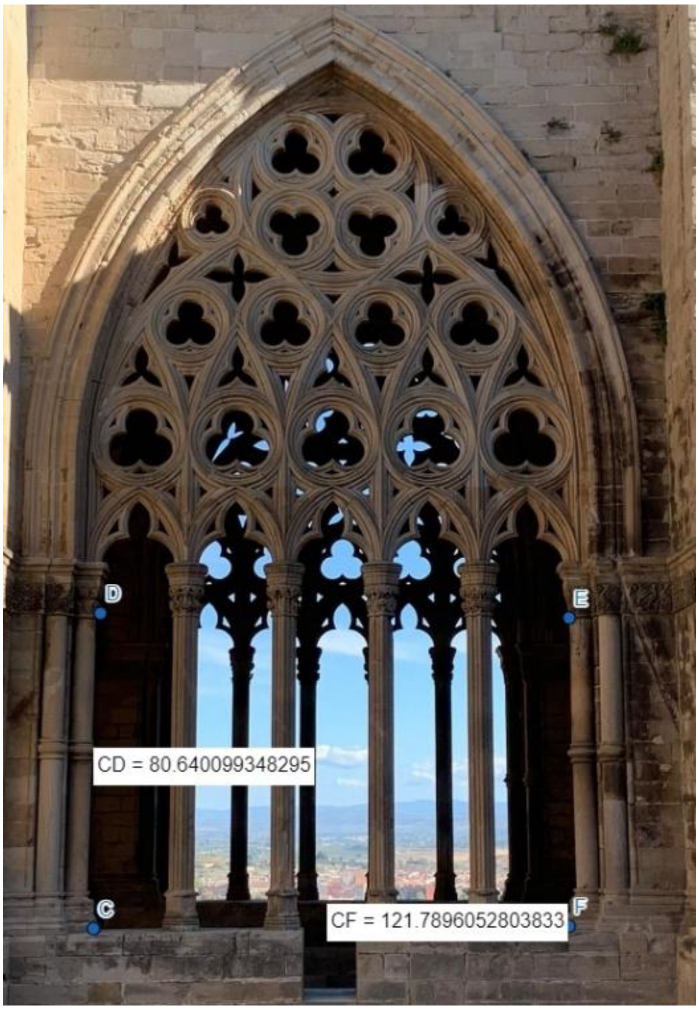
D'arcs n'hi ha de moltes mesures diferents arreu del claustre, però he agafat de dos diferents com a mostra. Per calcular les seves proporcions i trobar la raó dels arcs, em basaré tant en les petites columnes de la base, l'alçada dels elements i altres.



$$CD \div DE = 71.359 \div 31.098 = 2.295$$

$$HG \div CD = 104.891 \div 71.359 = 1.47$$

Ni la relació entre l'alçada de les columnes i la base de l'arc ni l'alçada de tot el conjunt entre la base tenen raó àuria.



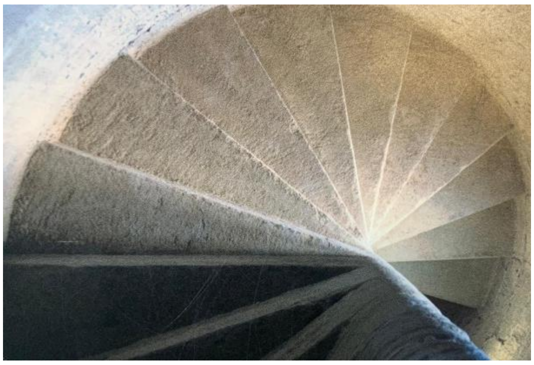
$$CF \div CD = 121.79 \div 80.64 = 1.51$$

Degut a que la base d'aquest és menys ampla comparada amb el de l'anterior, podem veure com en aquest cas la proporció de les columnes entre la base és més petita.

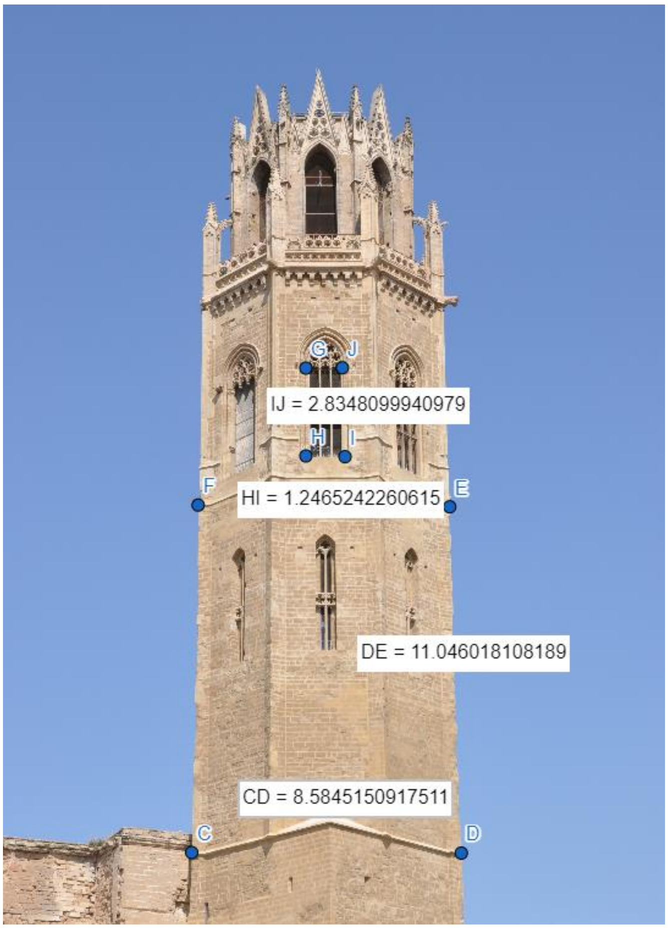
$$CF \div CD = 165.987 \div 96.26 = 1.724$$

L'últim detall analitzat del Claustre és una de les pedres la qual sosté l'estructura dels arcs.

Com a tercer subapartat em disposo a estudiar el Campanar de La Seu Vella, un dels més bonics i reconeguts arreu del país. El que més destaca és la seva gran alçada per la poca amplada que té, fent impressió de vertigen i de poca estabilitat. Al seu mirador s'hi accedeix a través d'unes escales que gairebé semblen infinites i recorden a l'espiral àuria.



Escales del campanar de La Seu Vella



$$DE \div CD = 11.05 \div 8.58 = 1.29$$

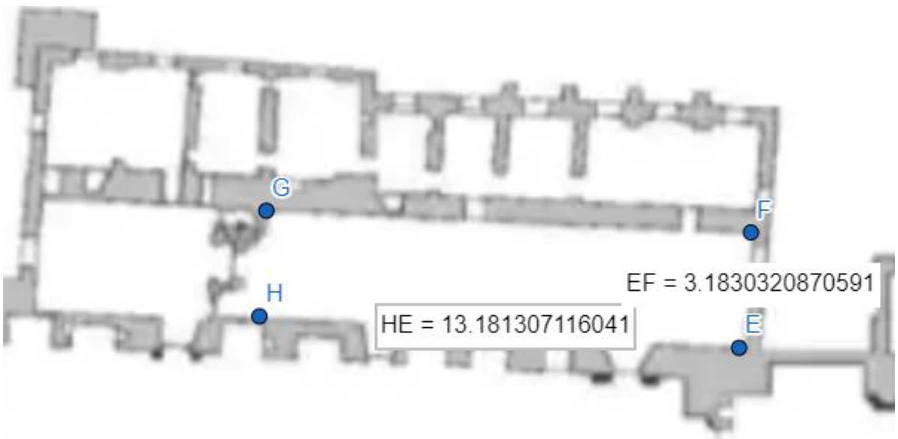
$$IJ \div HI = 2.834 \div 1.247 = 2.27$$

A primera vista i en veure la gran diferència entre l'alçada i l'amplada del campanar ja veia que la seva raó no seria àuria.

La Canonja és l'últim element d'aquesta obra arquitectònica que em queda per parlar. La sala gran de la Canonja és bàsicament un passadís amb una volta de canó al llarg d'aquest. M'agradaria fer un incís i dir que la volta de canó és un element arquitectònic en esglésies romàniques.

Interior de la Canonja de La Seu Vella

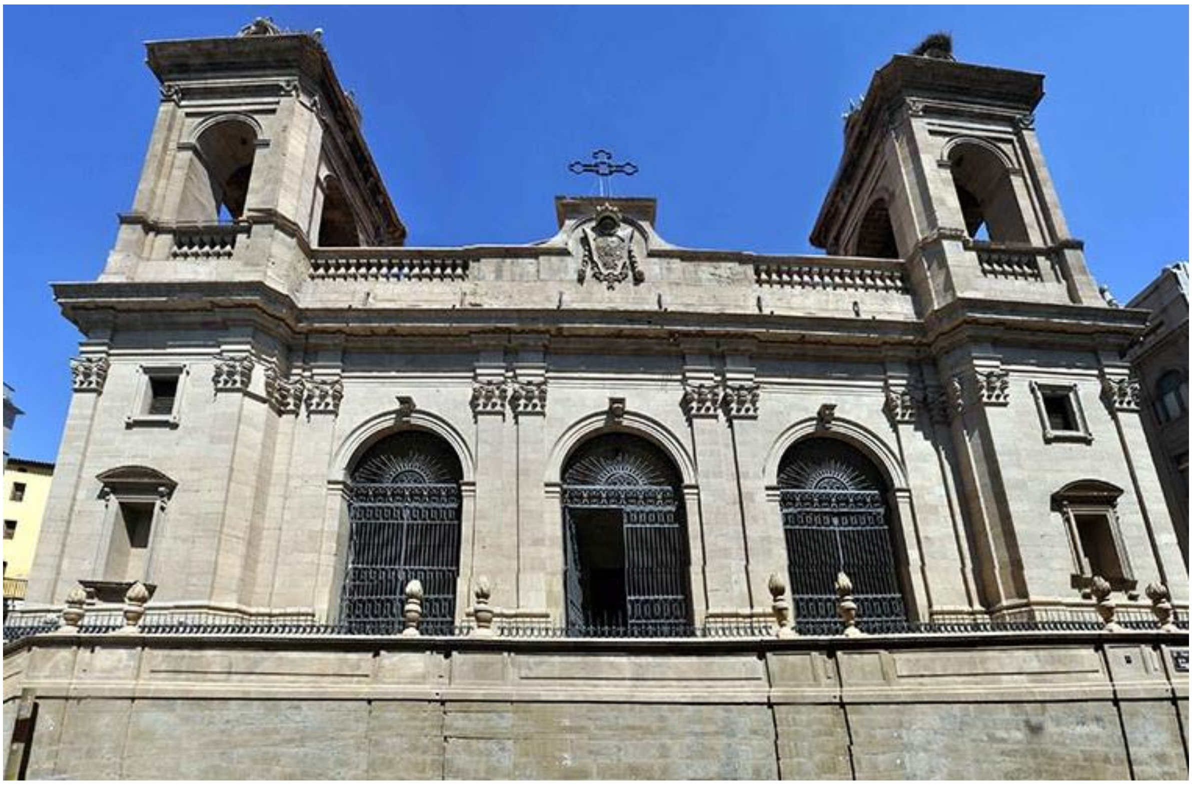
Com era d'esperar, l'espai té unes dimensions similars a les del campanar i per això la seva raó no s'apropa ni molt menys al nombre *phi.*



$$HE \div EF = 13.181 \div 3.183 = 4.141$$

6.2 LA CATEDRAL NOVA DE LLEIDA

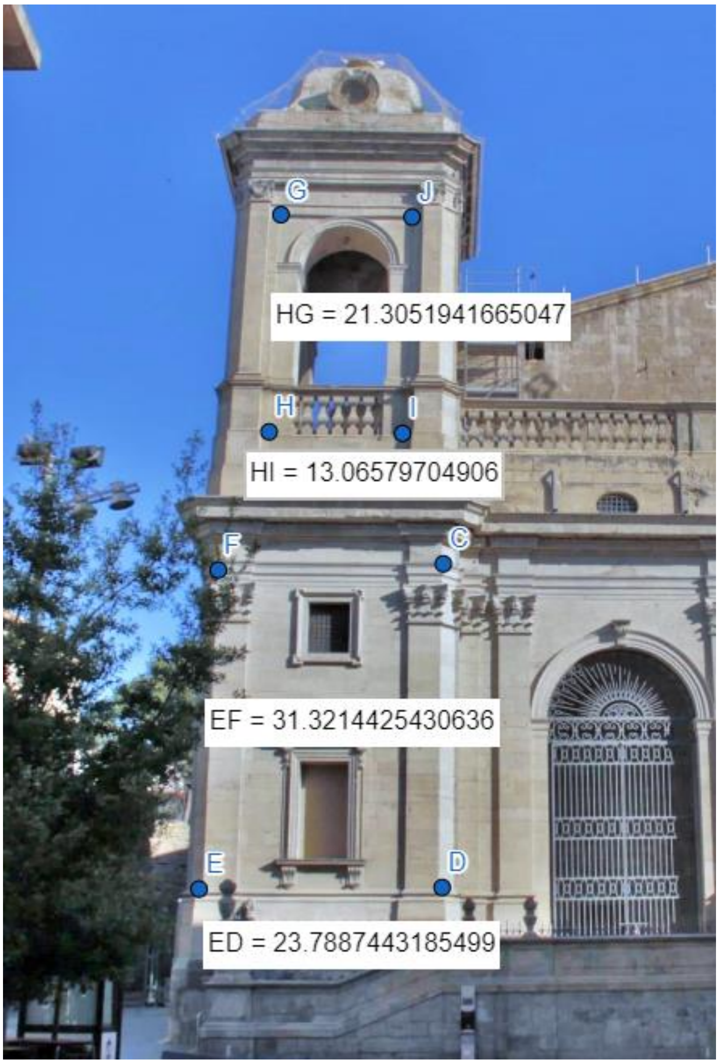
La Catedral Nova de Lleida o Seu Nova rep aquest nom degut a que La Seu Vella és la catedral vella de la ciutat, i diguem que la Seu Nova va ser construïda per substituir en àmbits de catedral a La Seu Vella.



Façana de la Catedral Nova de Lleida

És l’actual seu del Bisbat de Lleida, i està situada al bell mig de la capital, davant de l’Antic Hospital de Santa Maria, al Carrer Major. La Catedral Nova és d’estil barroca neoclassicista i va ser construïda entre els anys 1761 i 1781 per l’arquitecte Pedro Martín-Paredes Cermeño.

Primer de tot analitzaré una de les seves torres de la façana i les seves mesures a través dels plànols.



$$EF \div ED = 31.321 \div 23.789 = 1.374$$

$$HG \div HI = 21.305 \div 13.066 = 1.631$$

La façana de la catedral compta amb dues torres que s'alcen de forma paral·lela en cada un dels dos extrems de l'estructura. La raó dels rectangles que formen cada un dels dos pisos d'aquestes no tenen raó daurada.

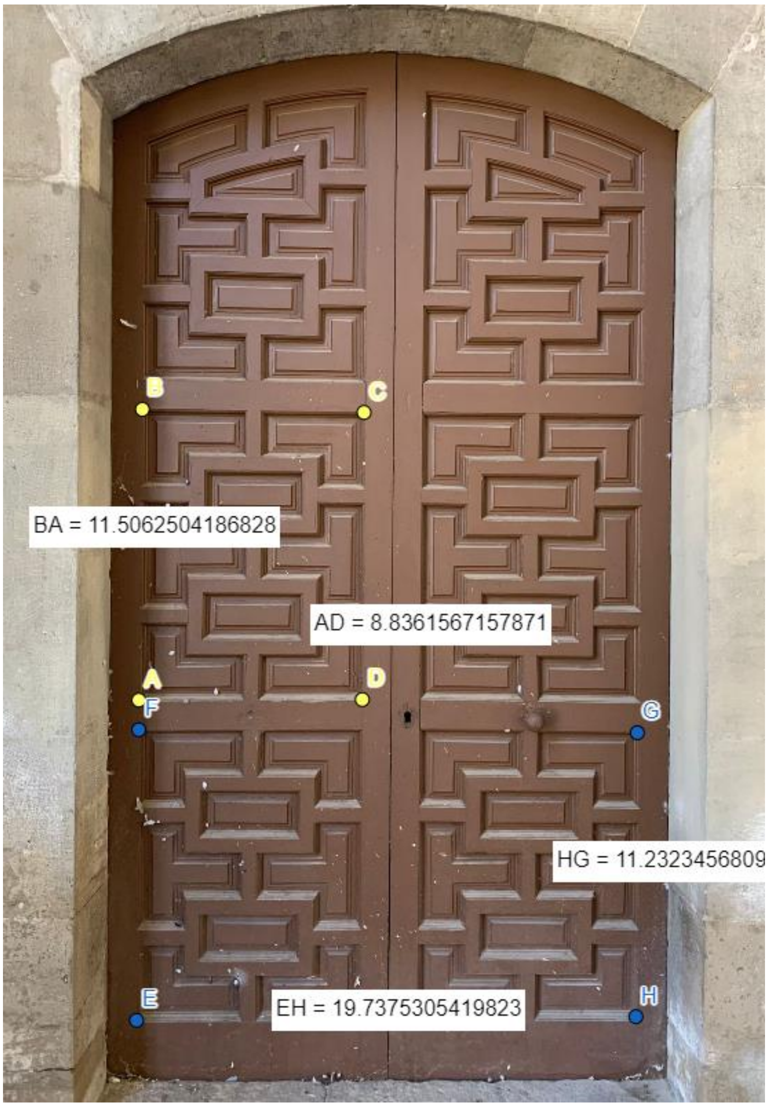
Si miréssim l'estructura amb vista d'ocell, podríem veure que les proporcions d'aquesta tampoc s'apropen a unes proporcions àuries.

$$CE \div EF = 142.43 \div 120.072 = 1.186$$

La catedral consta de dues portes metàl·liques per entrar al recinte que em van cridar molt l'atenció per les seves referències i formes geomètriques.

$$BC \div AB = 15.508 \div 9.5863 = 1.6177$$

Per la meva sorpresa, la proporció d'aquests és realment molt semblant al nombre *phi*, tan semblant que seguint el nostre marge d'error de 0.001, aquest rectangle el considerem auri!



Unes altres portes que em van semblar molt curioses van ser aquestes portes secundàries situades a 5 metres de les principals. El seu patró de rectangles i de formes amb angles d'angles rectes per tot arreu van captivar-me.

$$AB \div BC = 11.5063 \div 8.8362 = 1.3022$$

$$EH \div HG = 19.7375 \div 11.2323 = 1.7572$$

En aquest cas, els rectangles d'aquesta porta no són auris.

Un cop havent analitzat uns quants exemples de l'exterior de l'edifici, un d'ells sent auri, ens disposem a analitzar l'interior. Just entrar al claustre, un preciós quadre de Jesús estava penjat a la meva esquerra, i no m'he pogut resistir a analitzar les seves mesures. En aquest cas, tant les proporcions del seu marc com de la pintura no són rectangles auris, però curiosament són diferents entre elles.

$$KL \div LM = 30.522 \div 19.037 = 1.6033$$

$$QR \div RO = 27.3765 \div 16.2396 = 1.6858$$

L'últim element d'aquesta catedral analitzat serà un confessionari de fusta. S'hi poden distingir diversos quadrilàters i formes geomètriques en la seva forma.

El rectangle que els seus costats tenen una raó més semblant a l'àuria és el petit, però novament seguim sense trobar la proporció dins de la catedral.

$$CD \div CF = 3.8573 \div 2.2739 = 1.6963$$

$$IG \div GH = 11.5791 \div 6.4877 = 1.7848$$

7. CONCLUSIONS

"*Les matemàtiques són l'alfabet amb el qual Déu ha escrit l'Univers*".

Fent referència a Galileo Galilei, determino la direcció de la meva conclusió.

Gràcies a l'estudi realitzat de la meva ciutat, Lleida, he pogut conèixer de forma més extensa un dels nombres amb més interrogants i curiositats del món de les matemàtiques.

El primer monument analitzat ha estat La Seu Vella. En el seu estudi, no he sigut capaç de trobar cap rectangle auri ni cap indici de vida del nombre *phi* entre les seves parets. Així doncs, en estudiar per complet l'obra arquitectònica i en obtenir uns resultats tan clars, afirmem que La Seu Vella no és un edifici amb la proporció àuria, i per tant el seu arquitecte en cap Pere de Coma no va tenir en compte el nombre *phi* a l'hora de dissenyar-la.

En segon lloc, tenim la Catedral Nova de Lleida. Després d'estudiar l'estructura del tot sigui en l'exterior com en l'interior, només he trobat un rectangle auri, i ha sigut en una de les portes que limiten i tanquen el recinte de l'estructura. Tot i obtenir-lo, no considero que sigui suficient per assegurar la catedral com a àuria, ja que el rectangle de la porta és un petit detall que Pedro Martín-Paredes Cermeño va voler incloure de possible forma d'homenatge a les matemàtiques divines. En conseqüència podem afirmar que la Catedral Nova de Lleida no és un edifici amb la proporció àuria.

Basant-me en el meu propi criteri i considerant com a suficient la mostra de l'estudi de dues obre arquitectòniques per a verificar o negar la hipòtesi formulada, considero que la ciutat de Lleida no és una ciutat d'edificis amb la proporció àuria. Per tant, la hipòtesi formulada és incorrecta.

Quan vaig iniciar aquest treball, ens remuntem ara farà gairebé un any, tenia una mentalitat molt diferent i molt més verda de l'àmbit de les matemàtiques i de la bellesa. Mai m'hauria imaginat que guardarien una relació les plantes, les galàxies i fins i tot la Torre Eiffel.

No ha sigut fàcil ni molt menys arribar a aquesta conclusió, però no puc negar que el camí que m'ha portat fins aquí ha valgut totalment la pena, i fer aquest treball ha sigut una experiència molt bona per desenvolupar les meves capacitats de raonament i d'expressió, ja que no ha estat senzill plasmar totes les idees que tenia al cap en un paper. Sento que el treball m'ha ajudat a tenir unes millors competències a l'hora de treballar de forma individual.

És per això que finalitzar aquest treball m'omple de gratitud i d'alegria, ja que és el projecte de més extensió que he fet mai, i estic molt content amb el resultat final i de la forma en què les coses han sortit.

8. WEBGRAFIA I BIBLIOGRAFIA

Aquest és el llistat de pàgines web, blogs, fòrums i altres llocs web d'internet que m'han ajudat a trobar la informació m'han sigut útils a l'hora de fer el treball.

Diario del Viajero. ¿EN QUÉ LUGARES, EDIFICIOS, ESTATUAS Y MONUMENTOS PODEMOS CONTEMPLAR LA MISTERIOSA PROPORCIÓN ÁUREA DE LA QUE SE HABLABA EN 'EL CÓDIGO DA VINCI'?. "*Tanto si sois seguidores de Dan Brown...".* «https://www.diariodelviajero.com/consejos/en-que-lugares-edificios-estatuas-y-monumentos-podemos-contemplar-la-misteriosa-proporcion-aurea-de-la-que-se-hablaba-en-el-codigo-da-vinci». Última modificació: 11 de gener, 2013 a les 00:08.

Wikipedia, la enciclopedia libre. CATEDRAL DE LA SEO VIEJA (LÉRIDA). "*La Catedral de la Seo Vieja de Lérida, (en catalán: Seu Vella de Lleida) es el monumento..."* . «https://es.wikipedia.org/wiki/Catedral_de_la_Seo_Vieja_(L%C3%A9rida)». Última modificació: 29 de setembre, 2021 a les 20:21.

CULTURA INQUIETA. DIEZ OBRAS DE ARTE PERFECTAS GRACIAS A LA PROPORCIÓN ÁUREA. "*Si recordamos la historia en busca del concepto de divina proporción..."* . «https://culturainquieta.com/es/arte/pintura/item/9993-10-obras-de-arte-perfectas-gracias-a-la-proporcion-aurea.html». Última modificació: 3 d'octubre, 2016.

SCIUNT. LA MISTERIOSA PROPORCIÓN ÁUREA DE LA IGLESIA DE BENÍNAR. "*No sabemos si es por casualidad o se construyó conscientemente así..."* . «https://sciunt.wordpress.com/2009/04/02/la-misteriosa-proporcion-aurea-de-la-iglesia-de-beninar/». Última modificació: 2 d'abril, 2009.

KÖMMERLING. LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA. "*En el blog queremos dar a conocer a arquitectos , ingenieros, constructores y gente afín a este mundo..."* . «https://retokommerling.com/la-proporcion-aurea-en-la-arquitectura/». Última modificació: 23 de novembre, 2011.

BBVA OPENDMIND CIENCIA. LE CORBUSIER, ARQUITECTURA GEOMÉTRICA A LA MEDIDA HUMANA. "*En francés la palabra cuervo se traduce como corbeau. Jugando con el nombre...*" . «https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/grandes-personajes/le-corbusier-arquitectura-geometrica-a-la-medida-humana/». Última modificació: 27 d'agost, 2018.

OVACEN. PROPORCIÓN ÁUREA: QUÉ ES Y CÓMO ENCONTRARLA. "*Nos adentramos en la geometría, en la proporción áurea y su definición...*" . «https://ovacen.com/proporcion-aurea-que-es/». Última modificació: 1 de setembre, 2015.

Wikipedia, la enciclopedia libre. SUCESIÓN DE FIBONACCI. "*En matemática, la sucesión o serie de Fibonacci es la siguiente sucesión...*" . «https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci ». Última modificació: 17 de setembre, 2021 a les 01:55.

Wikipedia, The Free Encyclopedia. GOLDEN RATIO. "*This article is about the number. For the Ace of Base album, see...*" . « https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio ». Última modificació: 4 d'octubre, 2021 a les 19:22 (UTD).

Dios y la Ciencia. EL ORDEN EN LA NATURALEZA NO ES "ILUSORIO". LA PROPORCIÓN ÁUREA. "*Aunque ya hablamos brevemente en esta otra entrada sobre la posibilidad o no de que...*" . « http://frasesdedios.blogspot.com/2015/01/el-orden-en-la-naturaleza-no-es.html ». Última modificació: Desconeguda.

Wikipedia, la enciclopedia libre. NÚMERO ÁUREO. "*El número áureo (también llamado número de oro, número de Dios, razón extrema y media, razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción) es...*" . «https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo ». Última modificació: 1 d'octubre, 2021 a les 10:34.

IMBORRABLE. LA PROPORCIÓN ÁUREA: QUÉ ES Y CÓMO SE APLICA EN DISEÑO GRÁFICO. "*A la proporción áurea se le han asignado muchas definiciones y nombres diferentes a lo largo de la historia...*" . « https://imborrable.com/blog/proporcion-aurea/ ». Última modificació: 8 de març, 2021.

DZOOM. LA PROPORCIÓN ÁUREA EXPLICADA CON EJEMPLOS. "*Leonardo Pisano, también conocido como Fibonacci, fue un famoso matemático italiano...*" . «https://www.dzoom.org.es/descubre-que-es-la-proporcion-aurea-y-como-puede-ayudarte-en-la-composicion-de-tus-fotos/ ». Última modificació: Desconeguda.

ABC CIENCIA. QUÉ ES LA PROPORCIÓN ÁUREA: VERDADES Y MITOS. "*En esta sección nos preocupamos de describir las matemáticas que aparecen en muchos aspectos de nuestra vida al mismo tiempo que elegimos temas que...*" . « https://www.abc.es/ciencia/abci-razon-aurea-verdades-y-mitos-numero-magico-201912090152_noticia.html?ref=https%3A%2F%2Fwww.google.com%2F ». Última modificació: 17 de setembre, 2020 a les 16:14.

D'altra banda, també he tret informació dels següents llibres:

Fernando Corbalán. LA PROPORCIÓN ÁUREA. "*El lenguaje matemático de la belleza.".* Editorial RBA, Colecionables SA. Navarra, Espanya 2010.

NATIONAL GEOGRAPHIC. LA PROPORCIÓN ÁUREA. "*El lenguaje matemático de la naturaleza.".* Edición Especial. Editorial National Georaphic.

Pilar García Agra, Julio Rodríguez Taboada. LAS MATEMÁTICAS DEL ARTE. "*Más allá del número de oro".* Col·lecció Miradas Matemáticas. Editorial Catarata.